DESIGN (plan) en MESURES RÉPÉTÉES

Le *design en mesures répétées* utilise le même sujet (personne, animal, famille, morceau de terrain, magasins, villes, plantes….) pour chacun des traitements sous étude. Les sujets servent de blocs et les unités expérimentales à l'intérieur d'un bloc peuvent être vues comme différentes occasions losrque l'on applique un traitement à un sujet. Les designs en mesures répétées sont beaucoup employés dans les sciences du comportement et dans les sciences du vivant. Parmi les designs très employés, il y a le design « crossover » et le design à parcelles divisées (« split-plot »).

Exemple : on étudie l'impact de 2 campagnes publicitaires dans 15 régions géographiques. Elles constituent les sujets. Dans chaque région, on randomise l'ordre de la capagne publicaitaire. On attend une certaine période de temps (« washout period ») entre les deux campagnes.

Exemple : des individus (sujets) souffrant de migraines recoivent 2 traitements : un nouveau médicament (A) et un traitement placébo (P). L'ordre dans lequel ils recoivent les 2 traitements est randomisé. La moitié des sujets recoivent les traitement dans l'ordre AP tandis que l'autre moitié ils recoivent les traitments dans l'ordre PA.

Le design est identifié sous le vocable de *design en mesures répétées* car le même sujet reçoit plusieurs traitements et il est mesuré pour chaque traitement. Il ne faut pas confondre le concept de mesures répétées avec le concept de répétition. Dans ce dernier cas le sujet est mesurér plusieurs fois pour le même traitement.

Avantages du design en mesures répétées

- **La variabilité inter sujet est exclue de l'erreur expérimentale, donc il est plus facile de comparer les traitements entre eux.**
- **Chaque sujet sert comme son propre contrôle.**
- **Économie du nombre de sujets.**

Désavantages du design en mesures répétées

- **Exige une période d'attente entre les traitements à cause des phénomènes d'accoutumance (posologie en medecine), d'apprentissage (tests sur des humains), ou d'accumulation (traitements chimique en agriculture).**
- **Effets d'interférence :**
  - **effet de l'ordre**

- **effet de passage entre deux traitements consécutifs (« carryover »).**

- **Les variables de réponses sont dépendantes.**

La solution pour contrer les effets d'interférence :
on randomise, pour chaque sujet, l'ordre d'assignation des traitements.

<u>Tableau général des données d'un design à mesures répétées</u>

sujet	temps (époque)	indicatrice donnée manquante	réponse Y	covariables continues X W….	facteurs qualitatifs A B…..
1	1	δ_{11}	Y_{11}	X_{11} W_{11} ...	A_{11} B_{11}….
	2	δ_{12}	Y_{12}	X_{12} W_{12} ...	A_{12} B_{12}….
	….	….	….	….	….
	j	δ_{1j}	Y_{1j}	X_{1j} W_{1j} ...	A_{1j} B_{1j}….
	….	….	….	….	….
	t_1	$\delta_{1\,t1}$	Y_{1t1}	$X_{1\,t1}$ $W_{1\,t1}$ ...	$A_{1\,t1}$ $B_{1\,t1}$…
……	……	……..	…….	……..	…….
i	1	δ_{i1}	Y_{i1}	X_{i1} W_{i1} ...	A_{i1} B_{i1}….
	….	….	….	….	….
	j	$\delta_{i\,j}$	$Y_{i\,j}$	$X_{i\,j}$ $W_{i\,j}$ ...	$A_{i\,j}$ $B_{i\,j}$….
	….	….	….	….	….
	t_i	$\delta_{i\,ti}$	$Y_{i\,ti}$	$X_{i\,ti}$ $W_{i\,ti}$ ...	$A_{i\,ti}$ $B_{i\,ti}$….
…..	……	……..	………	……….	……….
n	1	δ_{n1}	$Y_{n\,t1}$	X_{n1} W_{n1} ...	A_{n1} B_{n1}….
	….	….	….	….	….
	j	δ_{nj}	$Y_{n\,tj}$	$X_{n\,tj}$ $W_{n\,tj}$ ...	$A_{n\,tj}$ $B_{n\,tj}$…..
	….	….	….	….	….
	t_n	$\delta_{n\,tn}$	$Y_{n\,tn}$	$X_{\,tn}$ $W_{n\,tn}$ ...	$A_{n\,tn}$ $B_{n\,tn}$….

Le temps (observations en occasions multiples) peut être remplacé par des observations sous plusieurs conditions ; par exemple l'espace.

$$\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{si toutes les données de Y, X, W, …, A, B, … sont disponibles} \\ 0 & \text{autrement (données manquantes)} \end{cases}$$

observations dépendantes

rôle : sert à classer les données en sous groupes

2 approches pour faire l'analyse statistique :

- **<u>approche unidimensionnelle</u> : les données répétées de la réponse de chaque sujet sont résumées une seule nouvelle variable de réponse par une transformation appropriée : par exemple une pente de moindres carrés sur les données (t,Y) ;**
- **<u>approche multidimensionnelle</u> : les données répétées sont considérées comme plusieurs variables de réponse dépendantes ; dans ce cas il est préférable d'organiser les données avec autant de variables de réponse Y qu'il y a de mesures répétées. Les exemples montrent l'organisation des fichiers de données pour faire l'analyse.**

<u>Exemple</u> 19 : Y= évaluation (sur 40) de 4 bouteilles de vin par 6 juges

Kutner et all 5 ed. p. 1132

id	juge	vin id	Y-rang	v4	Y-vin1	Y-vin2	Y-vin3	Y-vin4
1	A	1	20		20	24	28	28
2	A	2	24					
3	A	3	28					
4	A	4	28					
5	B	1	15		15	18	23	24
6	B	2	18					
7	B	3	23					
8	B	4	24					
9	C	1	18		18	19	24	23
10	C	2	19					
11	C	3	24					
12	C	4	23					
13	D	1	26		26	26	30	30
14	D	2	26					
15	D	3	30					
16	D	4	30					
17	E	1	22		22	24	28	26
18	E	2	24					
19	E	3	28					
20	E	4	26					
21	F	1	19		19	21	27	25
22	F	2	21					
23	F	3	27					
24	F	4	25					

<u>Exemple</u> 20 : poids de 16 rats de laboratoire jour 1, 8, 15, …, 64 - 3 diètes (A, B, C)

Crowder and Hand 1990 p.19 - Analysis of Repeated Measures
expérience sur 16 rats - 3 diètes - Y-poids en grammes à jour = 1, 8 ,.., 64

id	diète	sujet	Y-poids jour 1	Y-poids jour 8	Y-poids jour 15	Y-poids jour 22	Y-poids jour 29	Y-poids jour 36	y-poids jour 43	Y-poids jour 44	Y-poids jour 50	Y-poids jour 57	Y-poids jour 64	pente régression
1	A	1	240	250	255	260	262	258	266	266	265	272	278	0.484
2	A	2	225	230	230	232	240	240	243	244	238	247	245	0.330
3	A	3	245	250	250	255	262	265	267	267	264	268	269	0.398
4	A	4	260	255	255	265	265	268	270	272	274	273	275	0.330
5	A	5	255	260	255	270	270	273	274	273	276	278	280	0.406
6	A	6	260	265	270	275	275	277	278	278	284	279	281	0.318
7	A	7	275	275	260	270	273	274	276	271	282	281	284	0.202
8	A	8	245	255	425	268	270	265	265	267	273	274	278	0.409
9	B	9	410	415	425	428	448	443	442	446	456	468	478	1.011
10	B	10	405	420	430	440	448	460	458	464	475	484	496	1.341
11	B	11	445	445	450	452	455	455	451	450	462	466	472	0.363
12	B	12	555	560	565	580	590	597	595	595	612	618	628	1.148
13	C	13	470	465	475	485	487	493	493	504	507	518	525	0.919
14	C	14	535	525	530	533	535	540	525	530	543	544	559	0.315
15	C	15	520	525	530	540	543	546	538	544	553	555	548	0.493
16	C	16	510	510	520	515	530	538	535	542	550	553	569	0.905

<u>Exemple</u> 21 : Y = afflux de sang (« blood flow » 8 rats de laboratoire
4 font de l'exercice et 4 n'en font pas
mesures en 5 sites: bone brain skin muscle heart

Kutner et all 5ed p. 1150

id	Exercice	sujet	body	Y-blod flow	v5	Y-bf bone	Y-bf brain	Y-bf skin	Y-bf muscle	Y-bf heart
1	non	1	bone	4		4	3	5	5	4
2	non	1	brain	3						
3	non	1	skin	5						
4	non	1	muscle	5						
5	non	1	heart	4						
6	non	2	bone	1		1	3	6	3	8
7	non	2	brain	3						
8	non	2	skin	6						
9	non	2	muscle	3						
10	non	2	heart	8						
11	non	3	bone	3		3	1	4	4	7
12	non	3	brain	1						
13	non	3	skin	4						
14	non	3	muscle	4						
15	non	3	heart	7						
16	non	4	bone	1		1	4	3	2	7
17	non	4	brain	4						
18	non	4	skin	3						
19	non	4	muscle	2						
20	non	4	heart	7						
21	oui	5	bone	3		3	6	12	22	11
22	oui	5	brain	6						
23	oui	5	skin	12						
24	oui	5	muscle	22						
25	oui	5	heart	11						
26	oui	6	bone	3		3	5	8	18	12
27	oui	6	brain	5						
28	oui	6	skin	8						
29	oui	6	muscle	18						
30	oui	6	heart	12						
31	oui	7	bone	4		4	7	10	20	14
32	oui	7	brain	7						
33	oui	7	skin	10						
34	oui	7	muscle	20						
35	oui	7	heart	14						
36	oui	8	bone	2		2	4	7	16	8
37	oui	8	brain	4						
38	oui	8	skin	7						
39	oui	8	muscle	16						
40	oui	8	heart	8						

Expérience en mesures répétées sur tous les traitements d'un facteur fixe

Modèle $$Y_{ij} = \mu + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad (157)$$

$$i = 1, 2, \ldots, s \quad \text{et} \quad j = 1, 2, \ldots, = n$$

où $\mu_{\ldots}$: effet général

ρ_i : : effet aléatoire du sujet i - indépendantes et $N(0.\ \sigma_\rho^2)$

τ_j : effet différentiel de la modalité j du facteur fixe et $\sum \tau_j = 0$

ε_{ij} : erreur aléatoire indépendantes et $N(0, \sigma^2)$

ρ_i, ε_{ij} sont indépendantes

Conséquences

$$E(Y_{ij}) = \mu_{..} + \tau_j \qquad (158)$$

$$Var(Y_{ij}) = \sigma_\rho^2 + \sigma^2 \qquad (159)$$

$$Cov(Y_{ij}, Y_{ij'}) = \sigma_\rho^2 \qquad j \neq j' \qquad (160)$$

$$Cov(Y_{ij}, Y_{i'j}) = 0 \qquad i \neq i' \qquad (161)$$

$$Corr(Y_{ij}, Y_{ij'}) = \omega = \sigma_\rho^2 / (\sigma_\rho^2 + \sigma^2) \qquad (162)$$

hypothèse clé : corrélation constante (symmétrie composée)

test de sphéricité de Mauchley

Analyse de la variance

totale $$SSTO = \sum\sum (Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 \qquad (163)$$

sujet $$SSS = n \sum\sum (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 \qquad (164)$$

traitement $$SSTR = s \sum\sum (\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2 \qquad (165)$$

erreur $$SSTR.S = \sum\sum (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..})^2 \qquad (166)$$

Equation de décomposition

$$SSTO = SSS + \underbrace{SSTR + SSTR.S} \qquad (167)$$

totale = inter sujet + intra sujet (SSW)

ANOVA

Source	SS	df	MS	E(MS)
Sujets	SSS	$s - 1$	MSS	$\sigma^2 + n\,\sigma_\rho^2$
Traitements	SSTR	$n - 1$	MSTR	$\sigma^2 + (s/(n-1)) \sum \tau_j^2$
Erreur	SSTR.S	$(n - 1)(s - 1)$	MSTR.S	σ^2
Totale	SSTO	$sn - 1$		

Test de l'effet de traitement

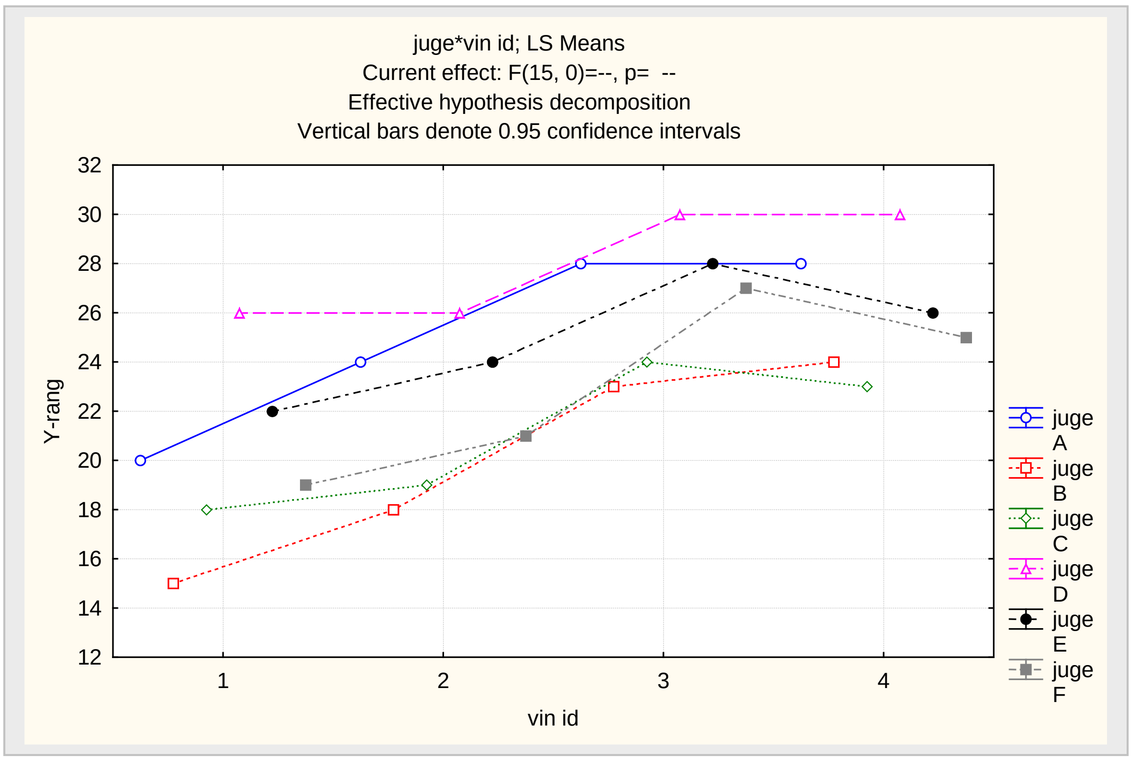
H_0 : $\tau_j = 0$ pour j = 1, 2, … , n
Ha : les τ_j ne sont pas tous nuls

On rejette H_0 si $F^* = MSTR / MSTR.S > F(1-\alpha ; n-1, ((n-1)(s-1))$ (168)
où α est le seuil du test

remarques

- on peut analyser les données avec une ANOVA pour 2 facteurs sans répétition ;
- si le facteur n'est pas fixe mais aléatoire, le test (168) reste valable ;
- le design en mesures répétées est plus efficace que le design complètement aléatoire ;
- on peut aussi tester l'hypothèse de l'effet du facteur sujet en utilisant le ratio MSS / MSTR.S

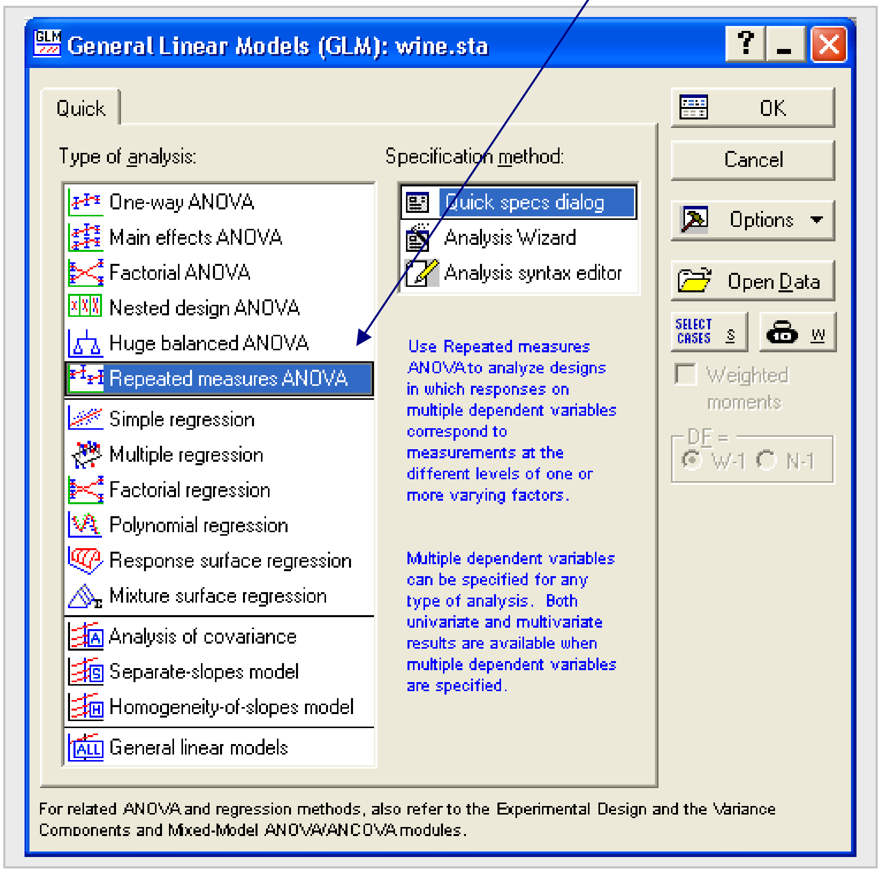
Exemple 19 : (suite) analyse avec 2 facteurs sans répétition -procédure GLM ;
l'interaction sert à estimer l'erreur expérimentale
le facteur « juge » peut être considéré comme un facteur « bloc »



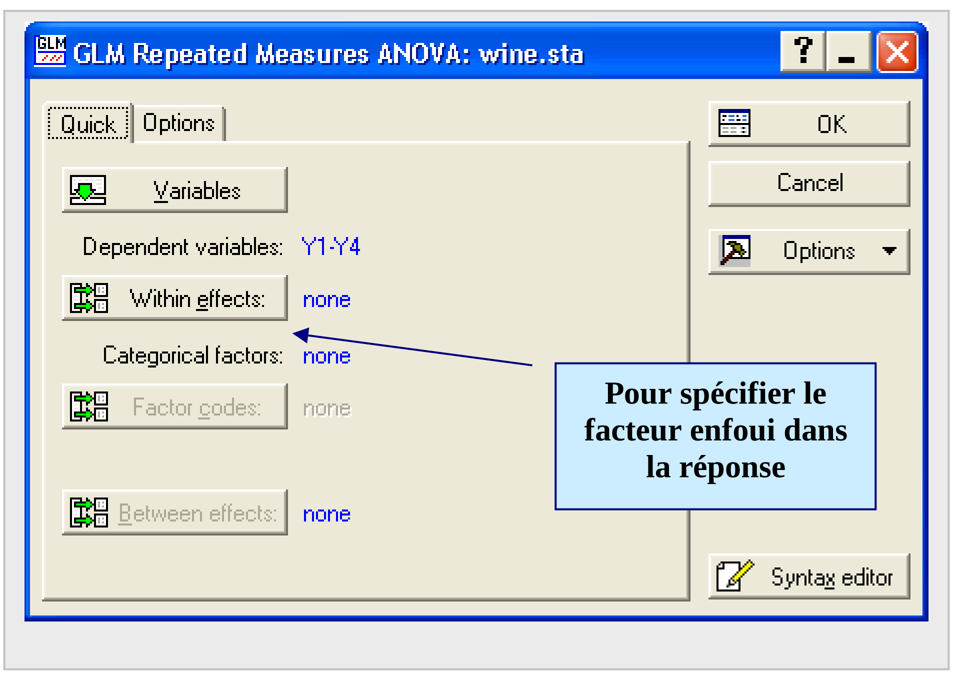
ANOVA					
	DF	SS	MS	F	p-value
Intercept	1	13442.67	13442.67	12602.50	0.000000
juge	5	173.33	34.67	32.50	0.000000
vin id	3	184.00	61.33	57.50	0.000000
Error	15	16.00	1.07		
Total	23	373.33			

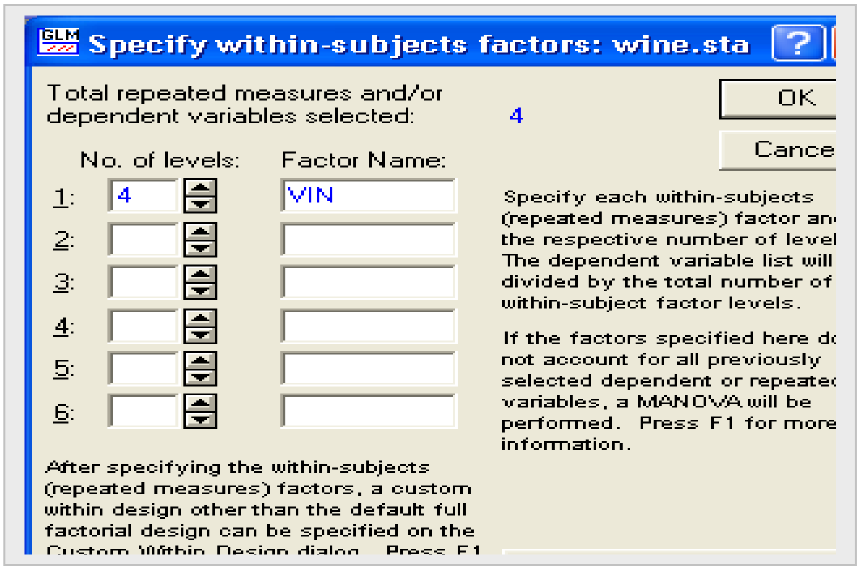
Utilisation de Statistica pour l'analyse du design en mesures répétées

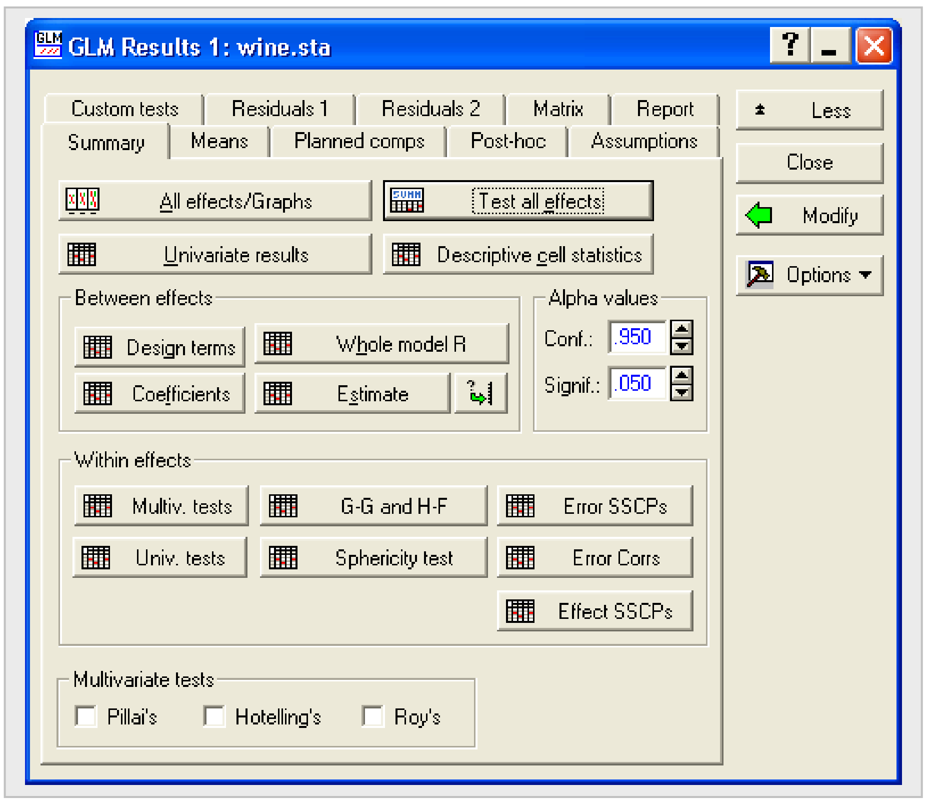
avec des facteurs intra enfoui dans la réponse (« whithin factors »)
et des facteurs inter (croisés) (« between factors »



<u>Exemple</u> 19 (suite) évaluation de 4 bouteilles de vin par 6 juges







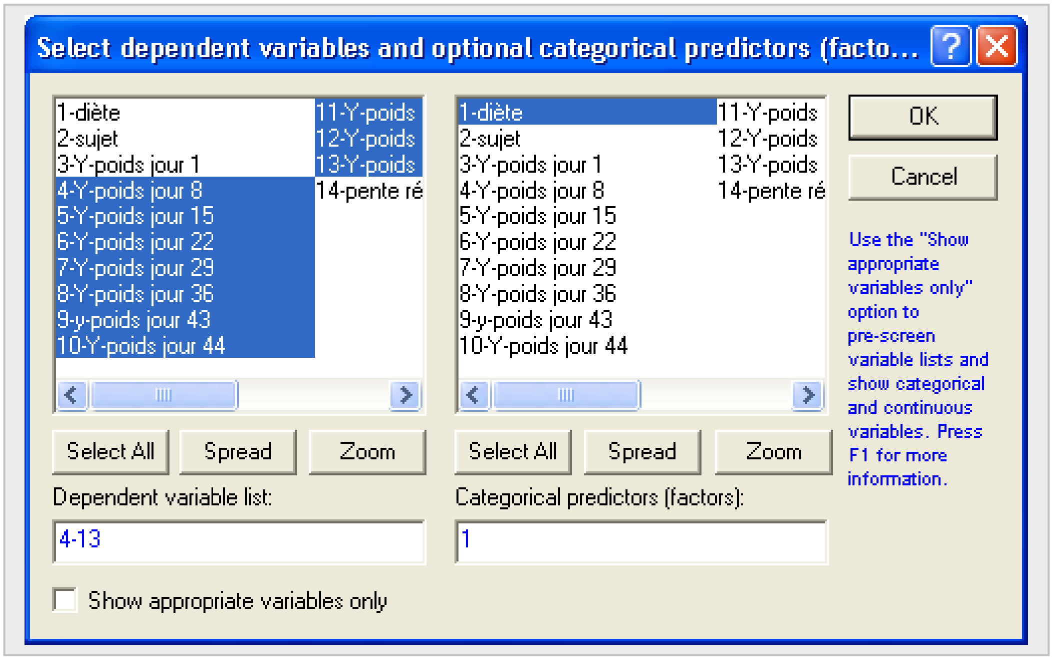
Repeated Measures Analysis of Variance

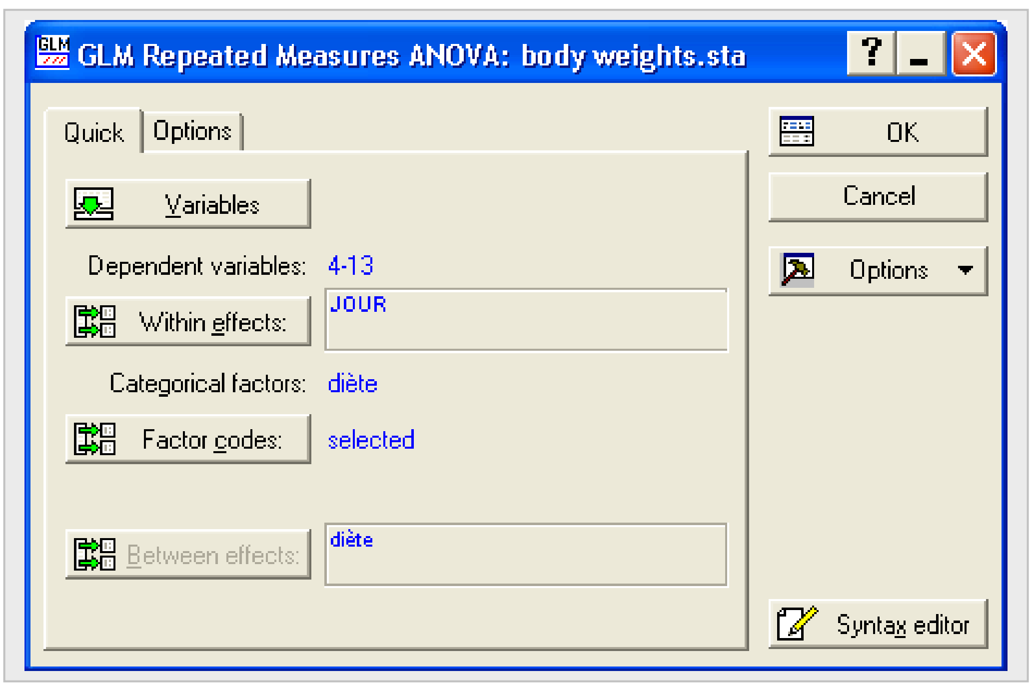
	SS	df	MS	F	p
Intercept	13442.67	1	13442.67	387.7692	0.000006
Error	173.33	5	34.67		
VIN	184.00	3	61.33	57.5000	0.000000
Error	16.00	15	1.07		

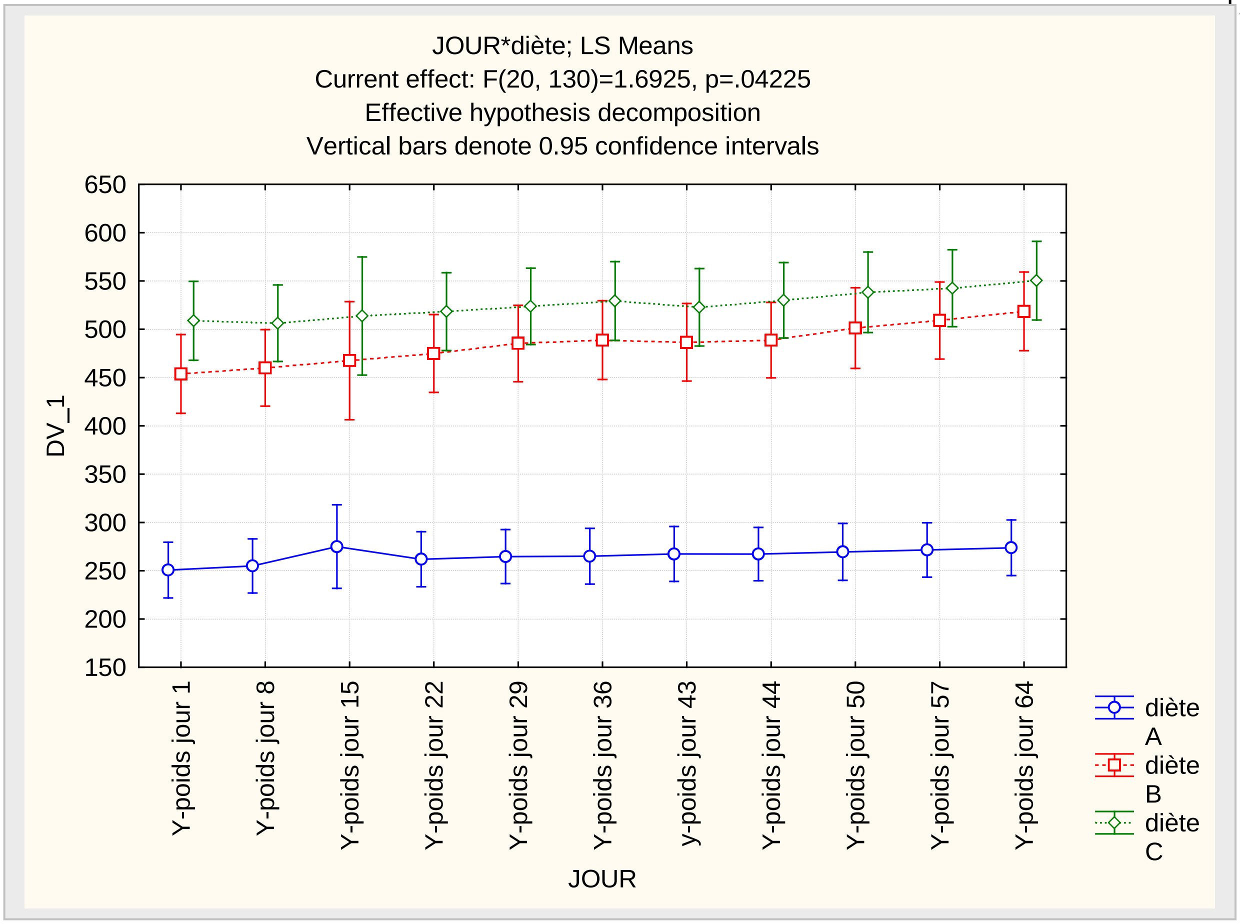
<u>Test de sphéricité de Mauchley</u> : le coefficient de corrélation entre les Y est-il constant?

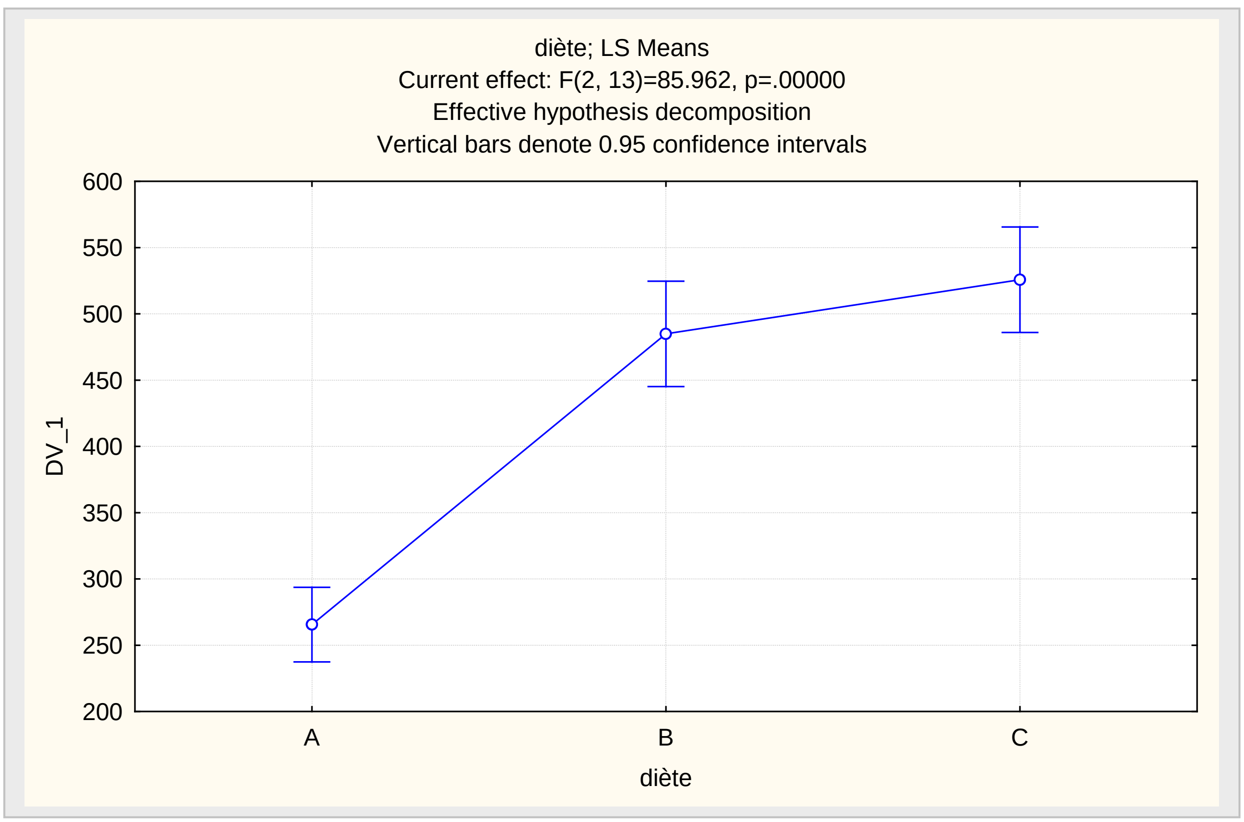
Mauchley Sphericity Test				
	W	Chi-Sqr.	df	p
VIN	0.351563	3.891091	5	0.5652

<u>Exemple</u> 20 : données de poids de 16 rats de laboratoire selon 3 diètes
poids de l'annimal au jour 1, 8, 15,…, 64





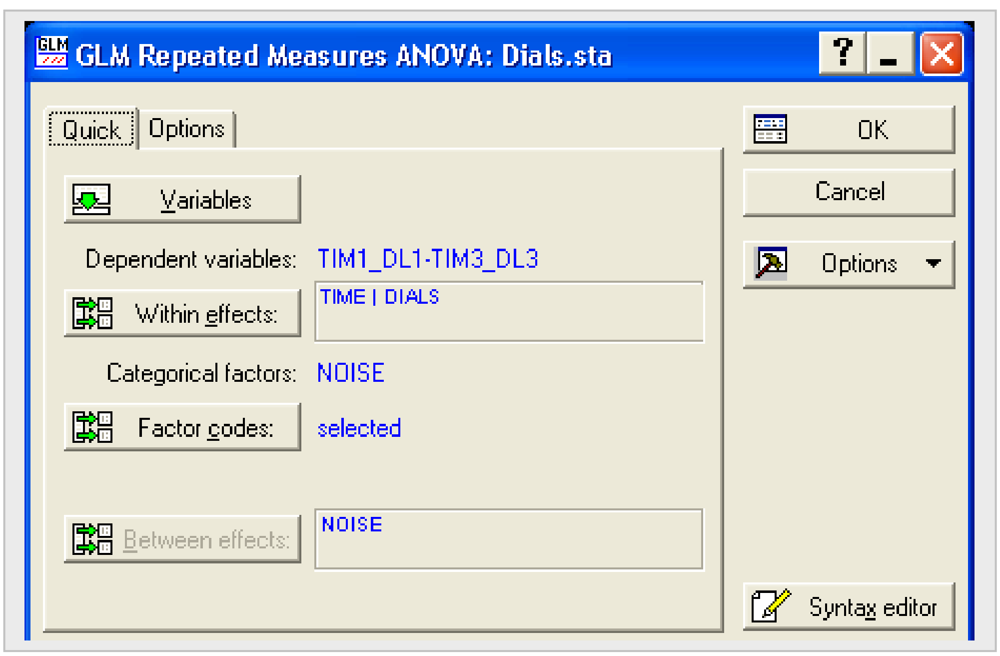

JOUR*diète; LS Means
Current effect: F(20, 130)=1.6925, p=.04225
Effective hypothesis decomposition
Vertical bars denote 0.95 confidence intervals
DV_1
650
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
Y-poids jour 1
Y-poids jour 8
Y-poids jour 15
Y-poids jour 22
Y-poids jour 29
Y-poids jour 36
y-poids jour 43
Y-poids jour 44
Y-poids jour 50
Y-poids jour 57
Y-poids jour 64
JOUR
diète A
diète B
diète C


diète; LS Means
Current effect: F(2, 13)=85.962, p=.00000
Effective hypothesis decomposition
Vertical bars denote 0.95 confidence intervals
DV_1
600
550
500
450
400
350
300
250
200
A
B
C
diète

Repeated Measures Analysis of Variance					
	SS	DFf	MS	F	p
Intercept	28670191	1	28670191	1920.662	0.000000
diète	2566339	2	1283169	85.962	0.000000
Error	194054	13	14927		
JOUR	25041	10	2504	11.560	0.000000
JOUR*diète	7332	20	367	1.693	0.042250
Error	28160	130	217		

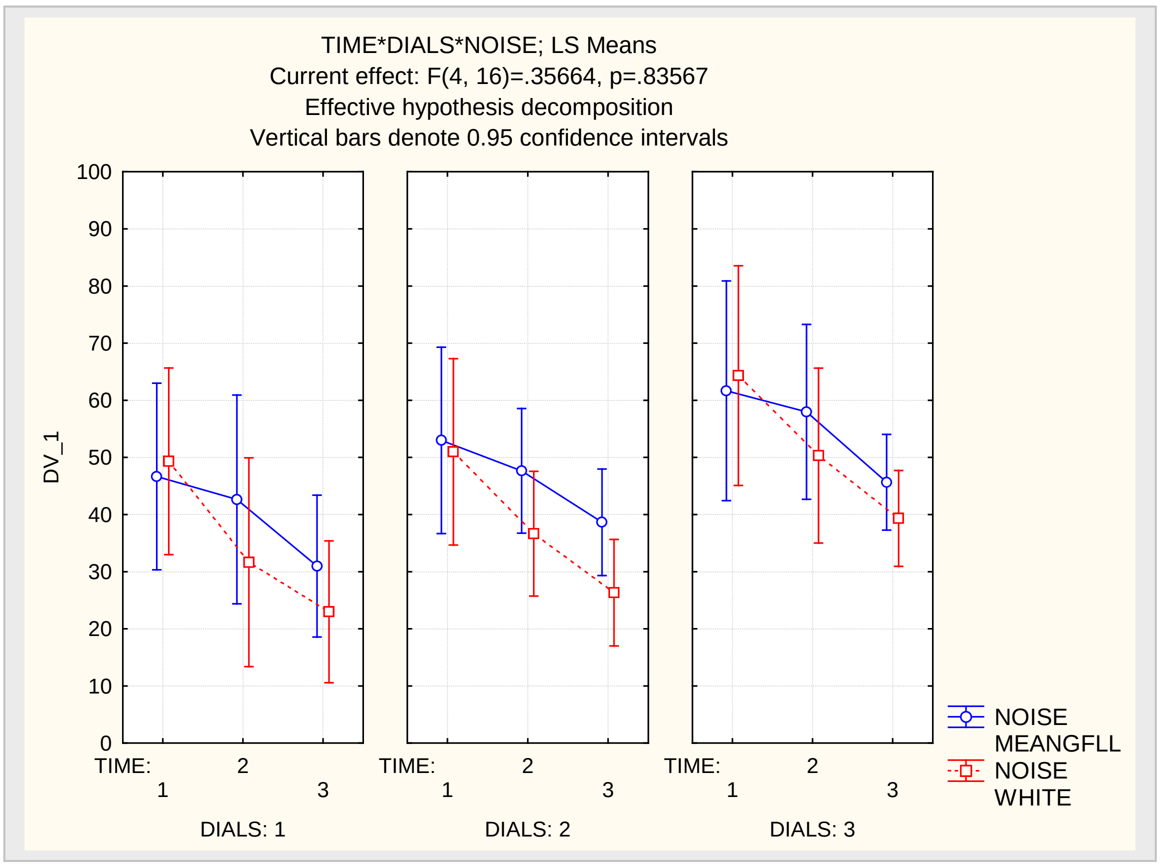
<u>Exemple</u> 22 : **mesure de l'habileté d'un opérateur (sujet) de machine à ajuster 3 contrôles (« dials »).**
Y = nombre d'erreurs durant 3 périodes consécutives de 10 minutes
Les ajustements de l'opérateur sont faits selon 2 conditions qui lui sont inconnues : noise = « white » et « meaningful » facteur inter
2 facteurs font enfuis dans la réponse : « dials » « time »

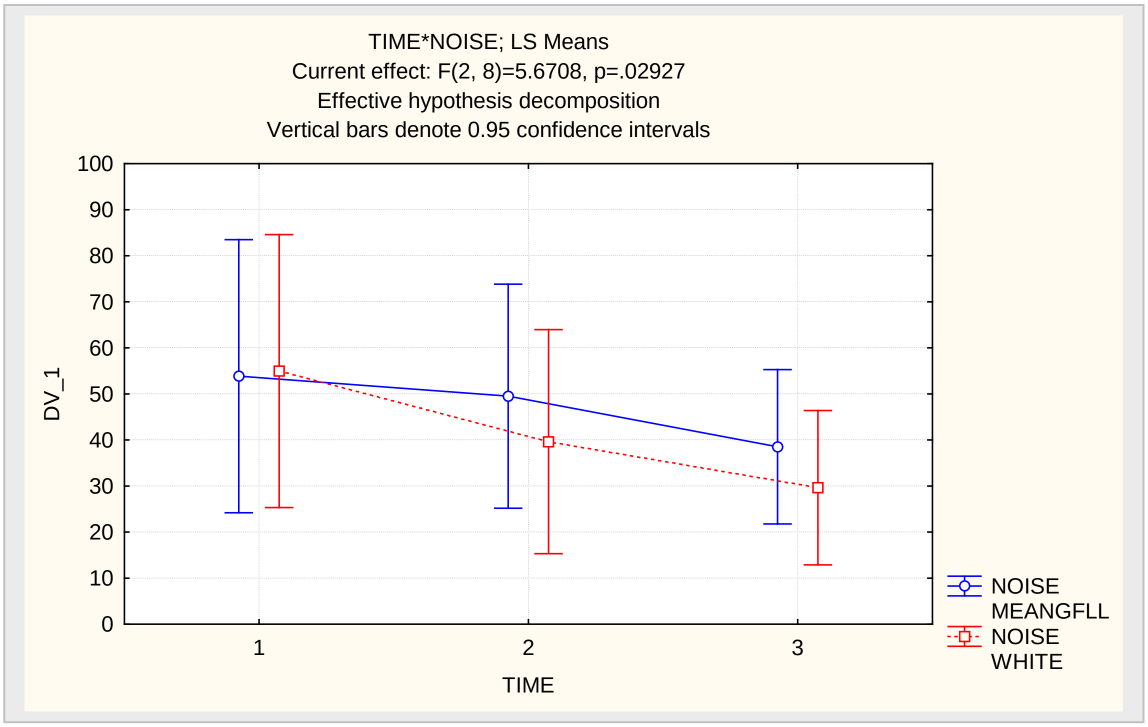
Example data file for repeated measures ANOVA										
	NOISE	TIM1_DL1	TIM1_DL2	TIM1_DL3	TIM2_DL1	TIM2_DL2	TIM2_DL3	TIM3_DL1	TIM3_DL2	TIM3_DL3
1	MEANGFLL	45	53	60	40	52	57	28	37	46
2	MEANGFLL	35	41	50	30	37	47	25	32	41
3	MEANGFLL	60	65	75	58	54	70	40	47	50
4	WHITE	50	48	61	25	34	51	16	23	35
5	WHITE	42	45	55	30	37	43	22	27	37
6	WHITE	56	60	77	40	39	57	31	29	46



Repeated Measures Analysis of Variance

	SS	df	MS	F	p
Intercept	105868.2	1	105868.2	169.9935	0.000200
NOISE	468.2	1	468.2	0.7517	0.434841
Error	2491.1	4	622.8		
TIME	3722.3	2	1861.2	63.3888	0.000012
TIME*NOISE	333.0	2	166.5	5.6708	0.029268
Error	234.9	8	29.4		
DIALS	2370.3	2	1185.2	89.8232	0.000003
DIALS*NOISE	50.3	2	25.2	1.9074	0.210215
Error	105.6	8	13.2		
TIME*DIALS	10.7	4	2.7	0.3357	0.849917
TIME*DIALS*NOISE	11.3	4	2.8	0.3566	0.835669
Error	127.1	16	7.9		

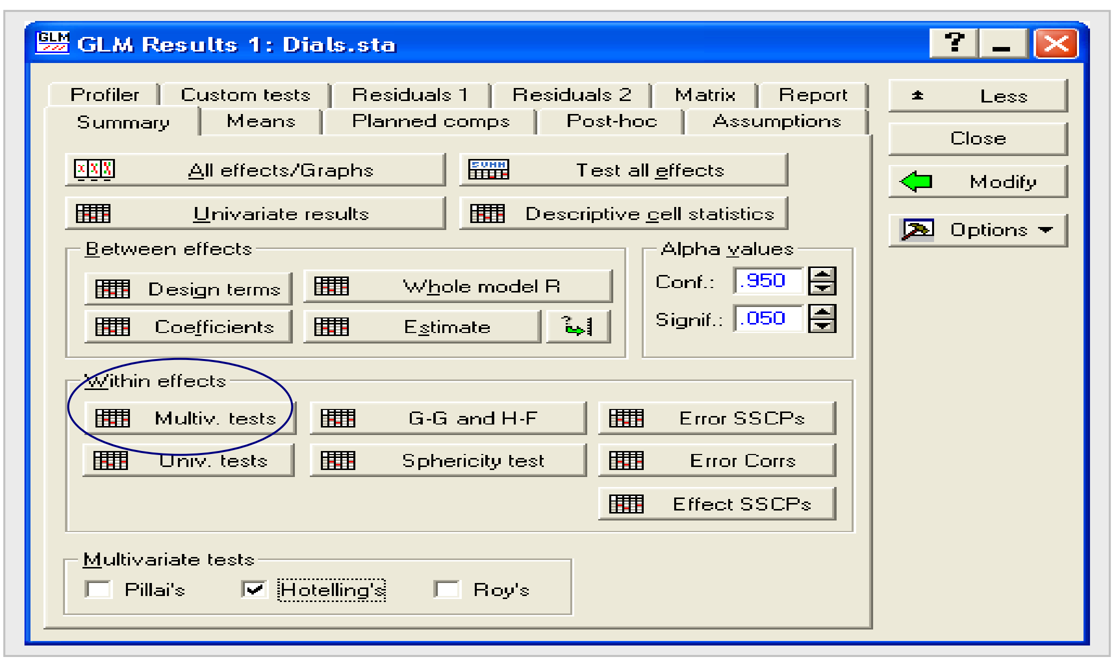




Interprétation : effet significatif de TIME et de DIALS
pas d'effet du facteur NOISE
interaction significative entre NOISE et TIME mais relativement faible.

<u>MANOVA : Analyse de variance multivariée</u> <u>Exemple</u> 22 : suite

Les 9 variables de réponse génèrent un vecteur en 9 dimensions. Les vecteurs de moyennes de ces variables diffèrent-ils selon les facteurs TIME, NOISE, et DIALS? Il y a 4 tests multivariés (Wilk, Pillai, Hotelling, Roy) pour tester les effets principaux et d'interaction de ces facteurs.



Multivariate tests for repeated measure						
	Test	Value	F	Effect	Error	p
TIME	Wilks	0.051	28.1453	2	3	0.011382
	Hotellng	18.764	28.1453	2	3	0.011382
TIME*NOISE	Wilks	0.156	8.1110	2	3	0.061657
	Hotellng	5.407	8.1110	2	3	0.061657
DIALS	Wilks	0.016	91.4562	2	3	0.002050
	Hotellng	60.971	91.4562	2	3	0.002050
DIALS*NOISE	Wilks	0.565	1.1549	2	3	0.424671
	Hotellng	0.770	1.1549	2	3	0.424671
TIME*DIALS	Wilks	0.001	331.4450	4	1	0.041170
	Hotellng	1325.780	331.4450	4	1	0.041170
TIME*DIALS*NOISE	Wilks	0.000	581.8750	4	1	0.031081
	Hotellng	2327.500	581.8750	4	1	0.031081

Expérience à 2 facteurs avec mesures répétées sur un facteur

Dans plusieurs situations expérimentales faisant intervenir 2 facteurs, des mesures répétées peuvent être faites seulement sur un des deux facteurs. Par exemple, supposons que l'on veuille étudier l'effet de deux types de stimuli (facteur A) sur l'habileté d'un individu à résoudre deux types de problèmes (facteur B). Les modalités du facteur B sont : problème concret, problème abstrait.

Chaque sujet devra résoudre chaque type de problème mais il ne pourra être exposé aux 2 conditions de motivation (facteur A) à cause de l'effet d'interférence causée par l'apprentissage. L'organisation des données est présentée par le schéma suivant. Le facteur B est répété et chaque sujet constitue un bloc. Certains sujets recoivent B1 pour commencer et B2 ensuite tandis que les autres recoivent la séquence B2 au début et B1 ensuite.

stimulus	sujet	traitement A	ordre 1 traitement B	ordre 2 traitement B
A1	1	A1	B1	B2
	.	.	.	.
	s	A1	B2	B1
…………..	………….	………	……………..	…………….
A2	s + 1	A2	B2	B1
	.	.	.	.
	2s	.A2	B1	B2

Modèle : S : facteur aléatoire sujet $i = 1, 2, \dots, s$
A : facteur fixe $j = 1, 2, \dots, a$
B : facteur fixe $k = 1, 2, \dots, b$
le facteur S est emboité dans le facteur A

Y_{ijk} : réponse

$$Y_{ijk} = \mu_{\dots} + \rho_{i(j)} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \quad (169)$$

où $\mu_{\dots}$: effet général

$\rho_{i(j)}$: effet aléatoire du sujet i emboité dans la modalité j du facteur A distribution $N(0, \sigma_p^2)$

α_j : effet différentiel du facteur A $\sum \alpha_j = 0$

β_k : effet différentiel du facteur B $\sum \beta_k = 0$

$(\alpha\beta)_{jk}$: effet d'interaction AB $\sum (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad \sum (\alpha\beta)_{jk} = 0$

ε_{ijk} : erreur aléatoire distribuée $N(0, \sigma^2)$

ε_{ijk}, $\rho_{i(j)}$ sont indépendantes

Conséquences

$$E(Y_{ijk}) = \mu_{\dots} + \rho_{i(j)} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \quad (170)$$

$$\mathrm{Var}(Y_{ijk}) = \sigma_p^2 + \sigma^2 \quad (171)$$

$$\mathrm{Cov}(Y_{ijk}, Y_{ijk'}) = \sigma_p^2 \qquad k \neq k' \quad (172)$$

$$\mathrm{Cov}(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}) = 0 \qquad i \neq i' \text{ ou } j \neq j' \quad (173)$$

Analyse de la variance

facteur A $\quad SSA = bs \sum (\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{\dots})^2 \quad (174)$

facteur B $\quad SSB = as \sum (\overline{Y}_{.k.} - \overline{Y}_{\dots})^2 \quad (175)$

interaction AB $\quad SSAB = s \sum\sum (\overline{Y}_{.jk} - \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{..k} + \overline{Y}_{\dots})^2 \quad (176)$

facteur S sujet (emboité A) $\quad SSS(A) = b \sum\sum (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{.j.})^2 \quad (177)$

erreur $\quad SSB.S(A) = \sum\sum\sum (Y_{ijk} - \overline{Y}_{.jk} - \overline{Y}_{ij.} + \overline{Y}_{.j.})^2 \quad (178)$

totale $\quad SSTO = \sum\sum\sum (Y_{ijk} - \overline{Y}_{\dots})^2 \quad (179)$

ANOVA

Source	SS	df	MS	F	test : rejet H_0 si
A	SSA	a – 1	MSA	MSA / MSS(A)	> F(1 - α; a-1; a(s-1))
B	SSB	b – 1	MSB	MSB / MSB.S(A)	> F(1 - α; a-1; a(s-1)(b-1))
AB	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB	MSAB / MSB.S(A)	> F(1 - α; a-1; a(s-1)(b-1))
S(A)	SSS(A)	a(s – 1)	MSS(A)	-------	-------------
Erreur	SSB.S(A)	a(s-1)(b-1)	MSB.S(A)	-------	
Totale	SSTO	abs – 1	------	--------	----------

<u>Espérance des carrés moyens MS</u> : constitue la base des tests sur les coefficients du modèle

$$E\,(MSA) = \sigma^2 + b\,\sigma_p^2 + (bs/(a-1)) \sum \alpha_j^2 \quad (180)$$

$$E\,(MSB) = \sigma^2 + (as\,/(b-1)) \sum \beta_k^2 \quad (181)$$

$$E\,(MSAB) = \sigma^2 + (s\,/(a-1)(b-1)) \sum \sum (\alpha\beta)^2_{jk} \quad (182)$$

$$E\,(MSS(A) = \sigma^2 + b\,\sigma_p^2 \quad (183)$$

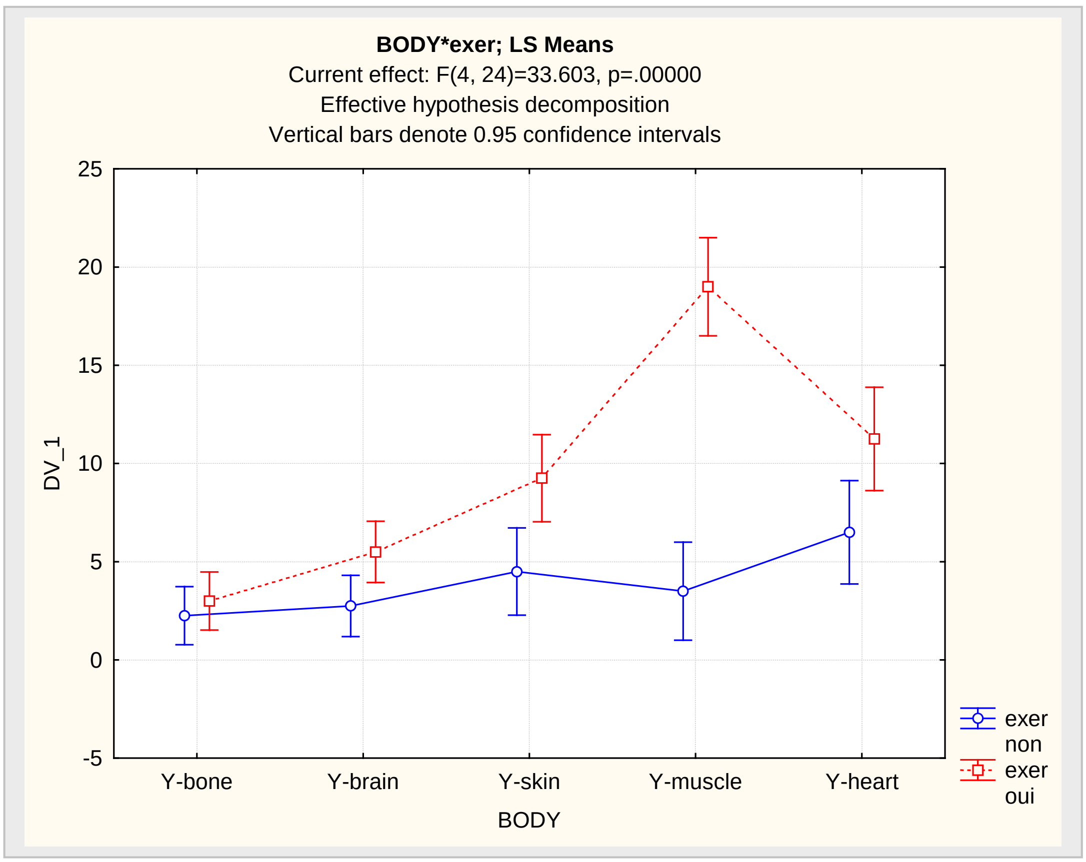
$$E\,(\,MSB.S(A)\,) = \sigma^2 \quad (184)$$

<u>Exemple</u> 21 : afflux de sang données page 92
il y a 2 termes d'erreur

Repeated Measures Analysis of Variance

	SS	DF	MS	F	p
Intercept	1822.5	1	1822.5	247.40	0.0000
exer	324.9	1	324.9	44.10 = 324.9 / 7.4	0.0006
erreur	44.2	6	7.4		
BODY	389.5	4	97.4	49.94 = 97.4 / 1.9	0.0000
BODY*exer	262.1	4	65.5	33.60 = 65.5 / 1.9	0.0000
erreur	46.8	24	1.9		

S(A) = erreur = 7.4 **B.S(A) = erreur = 1.9**



Expérience à 2 facteurs avec mesures répétées sur les deux facteurs

Exemple 23 : mesure de afflux de sang suite à la prise de 2 médicaments A et B

A1B1 : placebo **A1B2 : medicament A seulement**
A2B1 : médicament B seulement **A2B2 : usage des deux médicaments A et B**

Kutner et all 5 ed. p. 1158

	sujet	Y-A1B1	Y-A1B2	Y-A2B1	Y-A2B2
1	s1	2	20	9	25
2	s2	-1	8	6	21
3	s3	0	11	8	24
4	s4	3	15	11	31
5	s5	1	5	6	20
6	s6	2	12	9	27
7	s7	-2	10	8	22
8	s8	4	16	12	30
9	s9	-2	7	7	24
10	s10	-2	10	10	28
11	s11	2	8	10	25
12	s12	-1	8	6	23

Modèle **S : facteur sujet (aléatoire)** $i = 1, 2, \ldots, s$
A : facteur fixe $j = 1, 2, \ldots, a$
B : facteur fixe $k = 1, 2, \ldots, b$
chaque sujet S recoit toutes les combinaisons (j, k) des facteurs A et B

Y_{ijk} **: réponse du sujet i recevant modalité j de A et la modalité k de B**

$$Y_{ijk} = \mu_{\ldots} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + (\rho\alpha)_{ij} + (\rho\beta)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \qquad (185)$$

où $\mu_{\ldots}$ **: effet général**

ρ_i **: effet aléatoire du facteur sujet** $\sim N(0, \sigma_\rho^2)$

α_j **: effet différentiel du facteur fixe A** $\sum \alpha_j = 0$

β_k **: effet différentiel du facteur fixe B** $\sum \beta_k = 0$

$(\alpha\beta)_{jk}$ **: effet d'interaction AB et** $\sum_i (\alpha\beta)_{jk} = 0$ $\quad \sum_k (\alpha\beta)_{jk} = 0$

$(\rho\alpha)_{ij}$ **: effet aléatoire d'interaction SA** $\sim N(0, ((a-1)/a)\, \sigma^2_{\rho\alpha})$ $\quad \sum_i (\rho\alpha)_{ij} = 0$

$\mathrm{cov}((\rho\alpha)_{ij}, (\rho\alpha)_{ij'}) = (-1/a)\, \sigma^2_{\rho\alpha}$ $\quad j \neq j'$

$(\rho\beta)_{ik}$ **: effet aléatoire d'intraction SB** $\sim N(0, ((b-1)/b)\, \sigma^2_{\rho\beta})$ $\quad \sum_i (\rho\beta)_{ik} = 0$

$\mathrm{cov}((\rho\beta)_{ik}, (\rho\beta)_{ik'}) = (-1/b)\, \sigma^2_{\rho\beta}$ $\quad k \neq k'$

$\rho_i, (\rho\alpha)_{ij}, (\rho\beta)_{ik}$ **sont indépendantes 2 à 2**

$\varepsilon_{ijk}, \rho_i, (\rho\alpha)_{ij}, (\rho\beta)_{ik}$ **sont indépendantes**

$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$

Conséquences

$$E(Y_{ijk}) = \mu_{...} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \qquad (186)$$
$$Var(Y_{ijk}) = \sigma^2_\rho + ((a-1)/a)\,\sigma^2_{\rho\alpha} + ((b-1)/b)\,\sigma^2_{\rho\beta} + \sigma^2 \qquad (187)$$

Analyse de la variance

facteur sujet S	$SSS = ab \sum (\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2$	**(188)**
facteur A	$SSA = sb \sum (\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2$	**(190)**
facteur B	$SSB = sa \sum (\overline{Y}_{..k} - \overline{Y}_{...})^2$	**(191)**
interaction AB	$SSAB = s \sum\sum (\overline{Y}_{.jk} - \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{..k} + \overline{Y}_{...})^2$	**(192)**
interaction AS	$SSAS = b \sum\sum (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2$	**(193)**
interaction BS	$SSBS = a \sum\sum (Y_{i.k} - Y_{i..} - Y_{..k} + Y_{...})^2$	**(194)**
interaction ABS	$SSABS = \sum\sum\sum (Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i.k} - \overline{Y}_{.jk} + \overline{Y}_{i..} + \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{..k} - \overline{Y}_{...})^2$	**(195)**
totale	$SSTO = \sum\sum\sum (Y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2$	**(196)**

ANOVA

Source	SS	df	MS	F	test: rejet H_0 si
Sujets S	SSS	s – 1	MSS	----------------	-----------------
Facteur A	SSA	a – 1	MSA	F3=MSA / MSAS	> F(1-α; a-1;(a-1)(s-1))
Facteur B	SSB	b – 1	MSB	F2=MSB / MSBS	> F(1-α; b-1;(b-1)(s-1))
Inter AB	SSAB	(a-1)(b-1)	MSAB	F1=MSAB / MSABS	> F(1- α; (a-1)(b-1); (a-1)(b-1)(s-1)
Inter AS	SSAS	(a-1)(s-1)	MSAS	---------	-------------
Inter BS	SSBS	(b-1)(s-1)	MSBS	---------	-------------
Erreur	SSABS	(a-1)(b-1)(s-1)	MSABS	---------	-------------
Totale	SSTO	abs -1	--------		

Espérance des carrés moyens MS : constitue la base des tests sur les coefficients du modèle

$$E(MSS) = \sigma^2 + ab\,\sigma_\rho^2 \qquad (198)$$
$$E(MSA) = \sigma^2 + b\,\sigma_{\rho\alpha}^2 + ((bs/(a-1)) \sum \alpha_j^2 \qquad (199)$$
$$E(MSB) = \sigma^2 + a\,\sigma_{\rho\beta}^2 + ((as/(b-1)) \sum \beta_k^2 \qquad (199)$$
$$E(MSAB) = \sigma^2 + ((s/(a-1)(b-1)) \sum\sum (\alpha\beta)_{jk}^2 \qquad (200)$$
$$E(MSAS) = \sigma^2 + b\,\sigma_{\rho\alpha}^2 \qquad (201)$$
$$E(MSBS) = \sigma^2 + b\,\sigma_{\rho\beta}^2 \qquad (201)$$
$$E(MSABS) = \sigma^2 \qquad (202)$$

Hypothèses

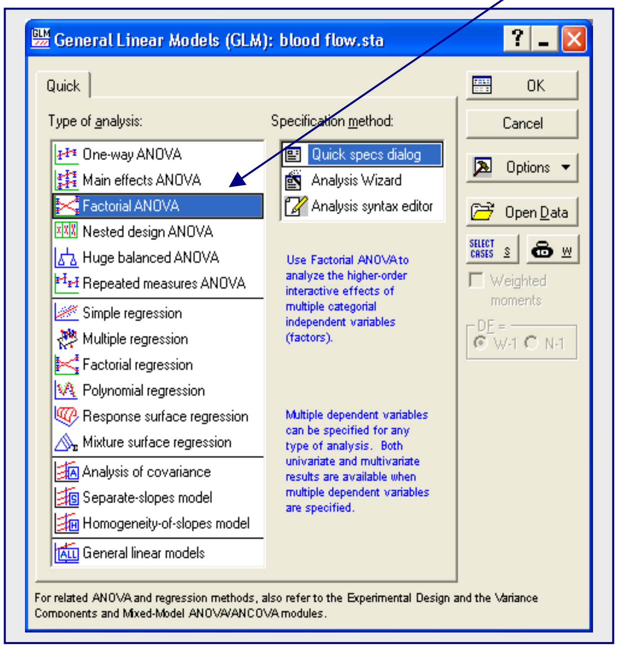
$H_0 : (\alpha\beta)_{jk} = 0$	pour tout (j, k)	ratio F1 plus haut
$H_0 : \alpha_j = 0$	pour tout j	ratio F3 plus haut
$H_0 : \beta_k = 0$	pour tout k	ratio F2 plus haut

<u>Exemple</u> 23 : données de « blood flow » : deux méthodes pour l'analyse

<u>méthode</u> 1 : **considérer que les 3 facteurs A, B, S interviennent dans une expérience factorielle complète sans répétition ; on emploie « Factorial ANOVA » remarque : il est important de définir correctement les ratios pour les tests**

<u>méthode</u> 2 : approche à mesures répétées avec 4 variables de réponse

<u>Méthode</u> 1 procédure Factorial ANOVA



données : format classique

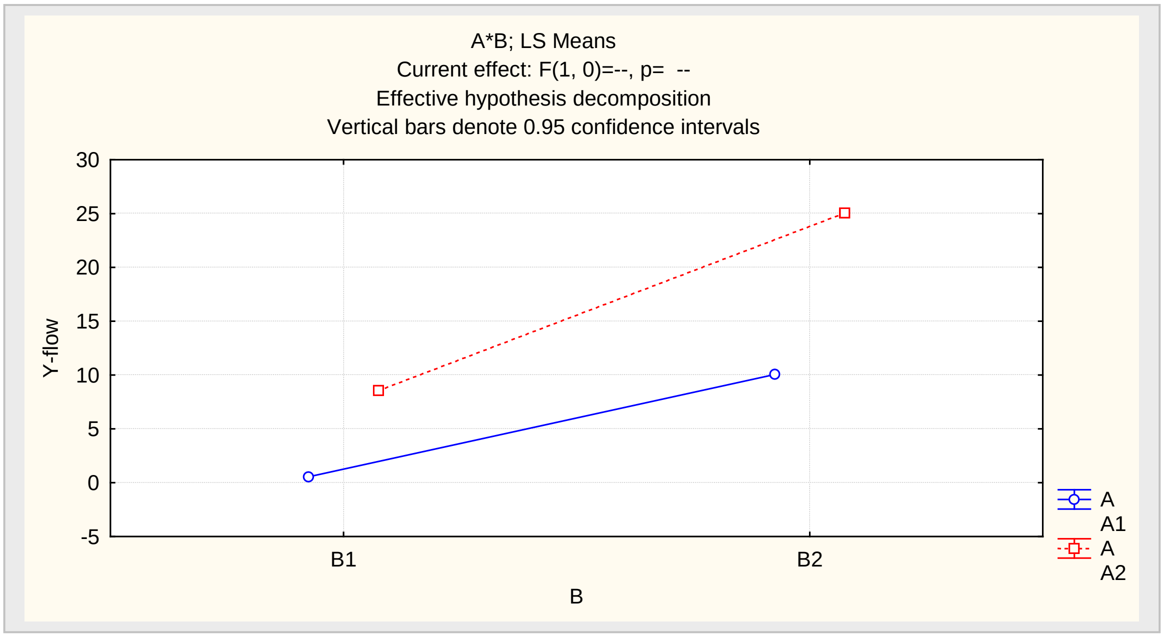
Kutner et all 5 ed. p. 1158

	sujet	A	B	Y-flow
1	s1	A1	B1	2
2	s1	A1	B2	10
3	s1	A2	B1	9
4	s1	A2	B2	25
5	s2	A1	B1	-1
6	s2	A1	B2	8
	.	.	.	.
43	s11	A2	B1	10
44	s11	A2	B2	25
45	s12	A1	B1	-1
46	s12	A1	B2	8
47	s12	A2	B1	6
48	s12	A2	B2	23

Univariate Tests of Significance for Y
Effective hypothesis decomposition

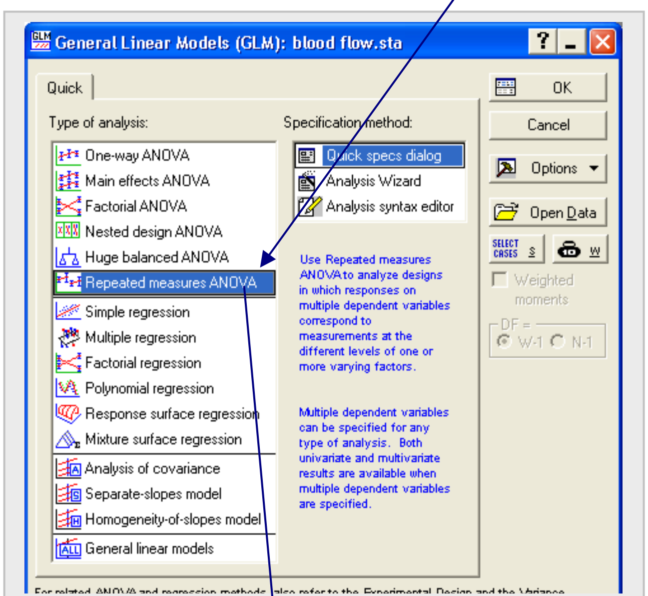
	SS	DFf	MS	F	p
Intercept	5808.000	1	5808.000		
sujet	258.500	11	23.500		
A	1587.000	1	1587.000		
B	2028.000	1	2028.000		
sujet*A	22.500	11	2.045		
sujet*B	42.500	11	3.864		
A*B	147.000	1	147.000		
sujet*A*B	12.500	11	1.136		
Error		0			

Test de l'interaction AB : F3 = 147.000 / 1.136 = 129.4 significatif !
Test de l'effet de A : F1 = 1587.00 / 2.045 = 776.04 significatif !
Test de l'effet de B : F2 = 2028.00 / 3.864 = 524.85 significatif !



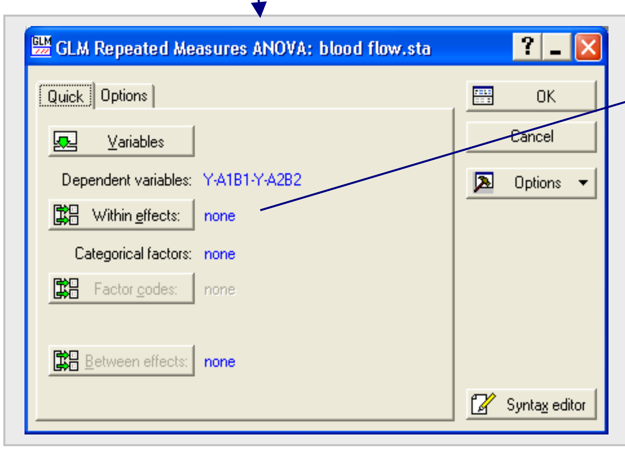
<u>Méthode</u> 2 : approche à mesures répétées avec 4 variables de réponse

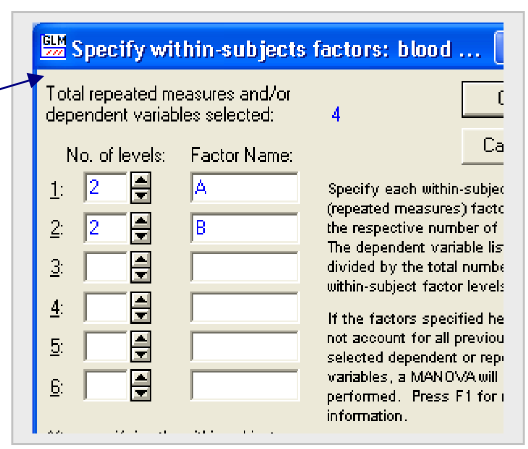
données : facteurs enflouis dans la réponse



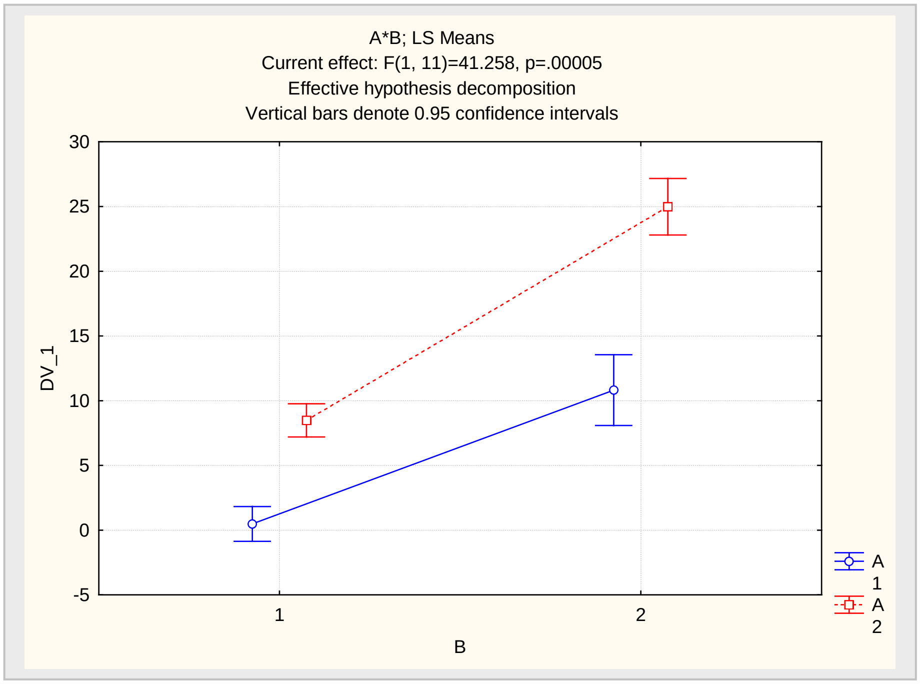
Kutner et all 5 ed. p. 1158

	sujet	Y-A1B1	Y-A1B2	Y-A2B1	Y-A2B2
1	s1	2	20	9	25
2	s2	-1	8	6	21
3	s3	0	11	8	24
4	s4	3	15	11	31
5	s5	1	5	6	20
6	s6	2	12	9	27
7	s7	-2	10	8	22
8	s8	4	16	12	30
9	s9	-2	7	7	24
10	s10	-2	10	10	28
11	s11	2	8	10	25
12	s12	-1	8	6	23





Repeated Measures Analysis of Variance					
	SS	DF	MS	F	p
Intercept	6030.083	1	6030.083	227.6154	0.000000
Error	291.417	11	26.492		
A	1474.083	1	1474.083	321.6182	0.000000
Error	50.417	11	4.583		
B	2160.083	1	2160.083	428.7684	0.000000
Error	55.417	11	5.038		
A*B	114.083	1	114.083	41.2575	0.000049
Error	30.417	11	2.765		



Remarque

Si le design n'est pas équilibré (nombre inégal dans chaque cellule) ou s'il y a des données absentes dans certaines cellules, if faut employer une approche par régression avec des variables indicatrices pour faire l'analyse.