MÉTHODES D'ANALYSE : expériences en parcelles divisées

Méthode 1 2 facteurs fixes A et B croisés + plan équilibré + répétition (bloc)

(exemple) A : a modalités B : b modalités c = nombre de WholePlot

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_{k(i)} + \varepsilon_{ijk} \qquad (1)$$

$i = 1, 2, \ldots, a \qquad j = 1, 2, \ldots, b \qquad k = 1, 2, \ldots, c$

μ : effet général

α_i : effet facteur A dans WholePlot $\sum \alpha_i = 0$

β_j : effet facteur B dans SplitPlot $\sum \beta_j = 0$

$(\alpha\beta)_{ij}$: effet d'interaction AB $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$

$\gamma_{k(i)}$: erreur WholePlot aléatoire distribuée (~) $N(0, \sigma_w^2)$ $n_w = ac$

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{k(ij)}$: erreur SplitPlot ~ $N(0, \sigma^2)$ (terme d'erreur toujours emboitée)

remarque: mettre un terme WholePlot dans le modèle (2ième terme d'erreur)

Méthode 2
- a) calcul tous les effets : WholePlot et SplitPlot
- b) séparation de effets : WholePlot, SplitPlot
- c) graphique des effets WholePlot sur échelle gaussienne
- d) graphique des effets SplitPlot sur échelle gaussienne

Méthode 3 régression SplitPlot (General Least Square = GLS) (page suivante)

cas particulier du modèle mixte général (voir annexe)

Méthode 3 régression SplitPlot

$$y_i = f(w_i, s_i)\,\beta + z_i\,\gamma + \varepsilon_i, \qquad (2)$$

- $f(w_i , s_i)$ modèle polynômial $(1 \times p)$ des modalités des facteurs
- β vecteur $p \times 1$ des paramètres des effets facteurs
- z_i vecteur indicateur dont l'élément
  = 1 si l'essai i est assigné au k-ième WholePlot
  = 0 autrement
- γ vecteur $b \times 1$ effets aléatoires
- ε_i erreur SplitPlot

modèle simple et flexible

- facteurs continus: utilisation de polynômes
- facteurs qualitatifs: utilisation de variables indicatrices (0-1)
  ou de codage à effets (-1 0 1)

Forme matricielle

$$Y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon \qquad (3)$$

Y vecteur $n \times 1$ des réponses

X matrice $n \times p$ du modèle dont la i-ème rangée est égale à $f(w_i, s_i)$

Z matrice n x b dont la i-ème rangée est égale à z_i,

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ $\varepsilon \sim N(0_n, \sigma^2 I_n)$ I_n matrice identité n x n

Méthode 3 (suite) régression SplitPlot

V matrice variance – covariance de Y

$V = \sigma^2 I_n + \sigma^2_w ZZ'$ (4)

Si essais regroupés par Wholeplot alors V est diagonale en bloc

$$\mathbf{V}_i = \sigma^2 \mathbf{I}_{s_i} + \sigma_w^2 \mathbf{1}_{s_i} \mathbf{1}'_{s_i},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{V}_b \end{bmatrix}.$$

Estimation General Least Square (GLS) (moindres carrés pondérés)

$$\hat{\beta}_{GLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}.$$

$$\hat{\beta}_{FGLS} = (\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{Y}.$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{FGLS}) = \mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X},$$

Test d'hypothèse

$$\mathrm{H}_0 : \mathbf{c}'\beta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1 : \mathbf{c}'\beta \neq 0,$$

$$t = \frac{\mathbf{c}'\hat{\beta}}{\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})\mathbf{c}}}.$$

$$\nu = \frac{2[\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})\mathbf{c}]^2}{\mathbf{g}'\mathbf{A}\mathbf{g}},$$

Exemples : chap 10 aléatoires / chap 11 SplitPlot