

MTH8301 chapitre 17 - plans avec facteurs emboîtés

Lorsque les niveaux d'un facteur B sont spécifiques aux niveaux d'un facteur A, les facteurs sont dits **emboîtés**.

Cette structure des traitements est différente du cas de **facteurs croisés** : **toutes les combinaisons des niveaux des facteurs A et B sont présentes.**

Avec plus de 2 facteurs, on peut avoir deux types de structures des traitements :

- facteurs **complètement** emboîtés
- facteurs **partiellement** emboîtés (**partiellement** croisés)

Plan avec facteurs emboîtés : exemple processus de mesurage

Exemple 1 : évaluation d'un processus de mesurage (étude R&R)
étude de Répétabilité (erreur appareil) et de Reproductibilité (opérateur)

<u>FACTEURS</u>	<u>plan d'échantillonnage</u>	<u>source de variabilité</u>	<u>nombre</u>
LOT (i)	L1 L2 L3 ... 	σ^2 LOT	a
PRODUIT (LOT) (j)	P1 P2 P3 P4 ... 	σ^2 PRODUIT	b
OPÉRATEUR (k)	O1 O2 ... 	σ^2 OPÉRATEUR reproductibilité	c
RÉPÉTITION (l)	R1 R2 ... 	σ^2 RÉPÉTITION erreur de mesure répétabilité	n
MESURE	Y_{ijkl}	$i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, b \quad k = 1, \dots, c \quad l = 1, \dots, n$	

PRODUIT est emboîté dans le facteur LOT. En général UN lot (a=1)

OPÉRATEUR peut être emboîté ou croisé avec le facteur PRODUIT.

RÉPÉTITION est toujours emboîté dans le facteur OPÉRATEUR.

L'objectif principal : estimer les *composants de la variance*

$$\sigma^2_{\text{LOT}} \quad \sigma^2_{\text{PRODUIT}} \quad \sigma^2_{\text{OPÉRATEUR}} \quad \sigma^2_{\text{RÉPÉTITION}}$$

Tous les facteurs sont aléatoires

plan d'échantillonnage souvent employé a = 1 b = 10 à 20 c = 2 ou 3 n = 2 ou 3

Plan avec facteurs emboîtés : exemple processus de mesurage

Exemple 2 : évaluation d'un processus de mesurage (étude R&R)

étude de Répétabilité (erreur appareil) et de Reproductibilité (variabilité opérateur)

C=6 opérateurs (Sally, Clara, Edouardo, Jane, Robert, Sally, Willy) - b=9 pièces distinctes par opérateur
4 instruments – A B C D - n=2 répétitions mesure Y

1 ID	2 Operator	3 Part	4 Instrument	5 Y
1	Sally	p1	A	0,8177
2	Sally	p1	B	0,0253
3	Sally	p1	C	0,0419
4	Sally	p1	D	0,2356
5	Sally	p1	A	0,9456
6	Sally	p1	B	0,0241
7	Sally	p1	C	0,4084
8	Sally	p1	D	0,2416
9	Sally	p1	A	0,2460
10	Sally	p1	B	0,1138
11	Sally	p1	C	0,5102
12	Sally	p1	D	0,1240

97	Sally	p9	A	2,3235
98	Sally	p9	B	0,8331
99	Sally	p9	C	3,6696
100	Sally	p9	D	4,8659
101	Sally	p9	A	0,1347
102	Sally	p9	B	0,6576
103	Sally	p9	C	1,4678
104	Sally	p9	D	0,2239
105	Sally	p9	A	2,5665
106	Sally	p9	B	0,7655
107	Sally	p9	C	1,0315

541	Eduardo	p51	A	0,2414
542	Eduardo	p51	B	0,4710
543	Eduardo	p51	C	0,1278
544	Eduardo	p51	D	0,3444
545	Eduardo	p51	A	0,0102
546	Eduardo	p51	B	0,1537
547	Eduardo	p51	C	0,4760
548	Eduardo	p51	D	0,0023
549	Eduardo	p51	A	0,2218
550	Eduardo	p51	B	0,4588
551	Eduardo	p51	C	0,8868
552	Eduardo	p51	D	0,0246

636	Eduardo	p58	D	0,7307
637	Eduardo	p59	A	0,8198
638	Eduardo	p59	B	1,6398
639	Eduardo	p59	C	4,5196
640	Eduardo	p59	D	2,3528
641	Eduardo	p59	A	0,4757
642	Eduardo	p59	B	0,6283
643	Eduardo	p59	C	1,4447
644	Eduardo	p59	D	1,3441
645	Eduardo	p59	A	0,3549
646	Eduardo	p59	B	2,5957
647	Eduardo	p59	C	1,6277
648	Eduardo	p59	D	2,3260

Plan avec facteurs emboîtés : exemple

Exemple : facteurs emboîtés

facteur groupe emboîté facteur instructeur
facteur Instructeur emboîté dans le facteur Ville

Ville
(Y_test)

Instructeur (6)	A		B		C		D		E		F	
Groupe (12) emboîté inst.	A1 A2		B1 B2		C1 C2		D1 D2		E1 E2		F1 F2	
Atlanta	25	29	14	11								
Chicago					11	6	22	18				
San Francisco									17	20	5	2

1 ID	2 Ville	3 Instructeur	4 groupe	5 Y_test
1	Atlanta	A	1	25
2	Atlanta	A	2	29
3	Atlanta	B	1	14
4	Atlanta	B	2	11
5	Chicago	C	1	11
6	Chicago	C	2	6
7	Chicago	D	1	22
8	Chicago	D	2	18
9	San Francisco	E	1	17
10	San Francisco	E	2	20
11	San Francisco	F	1	5
12	San Francisco	F	2	2

Plan avec facteurs emboîtés : modèle

Modèle pour 2 facteurs emboîtés

facteur A avec a modalités

facteur B avec b modalités emboîté dans A

plan équilibré avec n répétitions

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$\mu_{..}$: effet général

α_i : effet du facteur A et $\sum \alpha_i = 0$

$\beta_{j(i)}$: effet du facteur B et $\sum \beta_{j(i)} = 0$ pour tout i

ε_{ijk} : terme d'erreur distribué $N(0, \sigma^2)$

Conséquences

$$E(Y_{ijk}) = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} \quad \text{Var}(Y_{ijk}) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(Y_{ijk}) = \sigma^2$$

il n'y pas de terme d'interaction dans le modèle

Estimation des paramètres

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{...} \quad \hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...} \quad \hat{\beta}_{j(i)} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..}$$

$$\text{résidus } r_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}$$

Plan avec facteurs emboîtés

Analyse de la variance

totale	$SSTO = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$
facteur A	$SSA = bn \sum (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$
facteur B (emboîté A)	$SSB(A) = n \sum \sum (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..})^2$
erreur	$SSE = \sum \sum \sum (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$

ANOVA

Source	SS	df	MS	E(MS)
Facteur A	SSA	a - 1	MSA	$\sigma^2 + (bn/(a-1)) \sum \alpha_i^2$
Facteur B(A)	SSB(A)	b - 1	MSB(A)	$\sigma^2 + (n/b(a-1)) \sum \sum \beta_{j(i)}^2$
Erreur	SSE	ab(n-1)	MSE	σ^2
Totale	SSTO	abn - 1	-----	-----

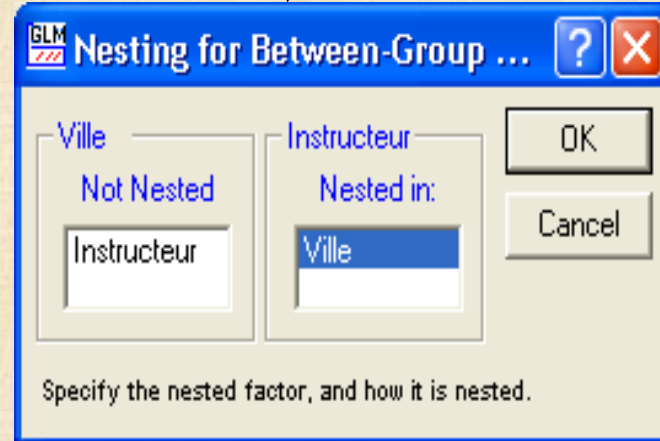
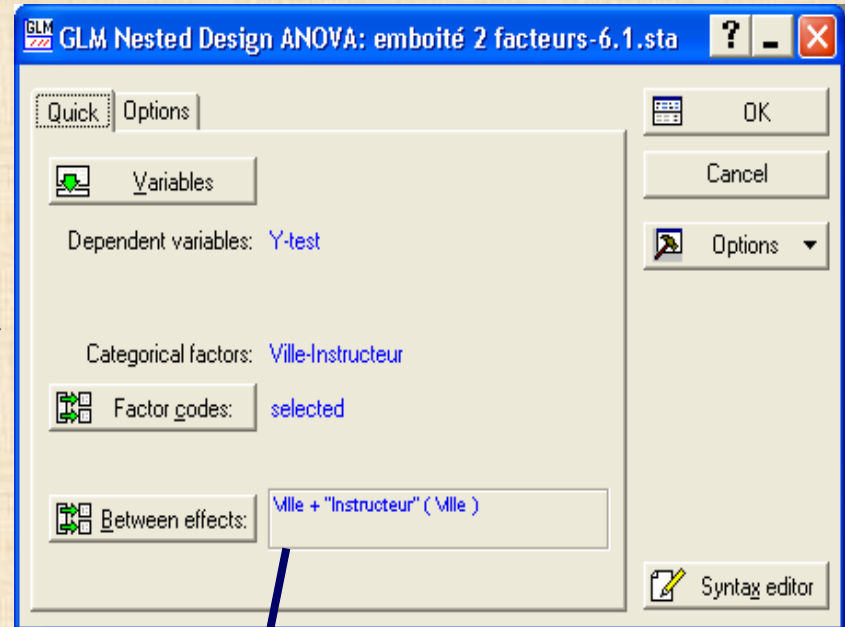
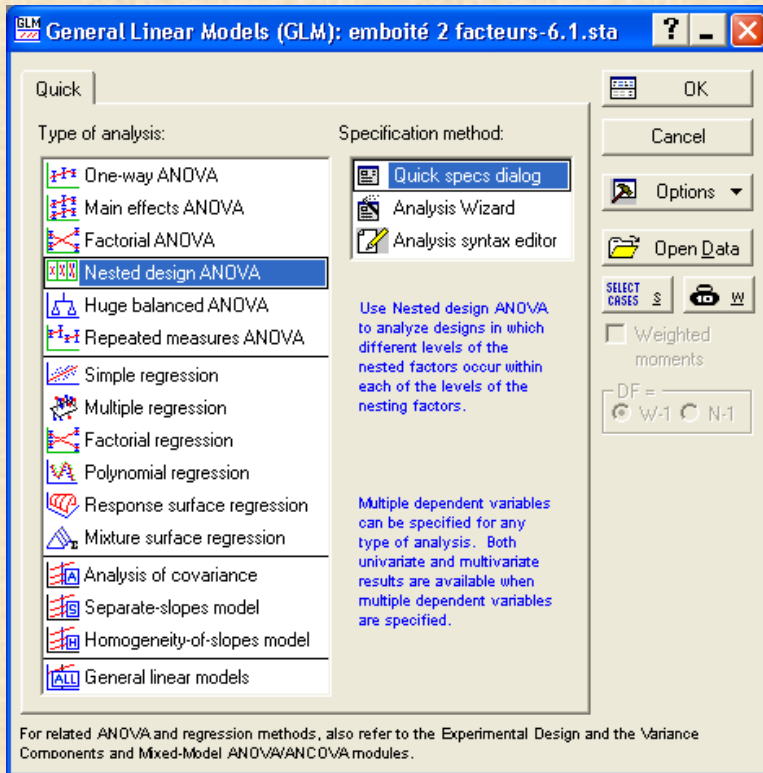
Tests

H_0 : tous les $\alpha_i = 0$ $FA = MSA / MSE$ suit loi $F(1 - \alpha ; a - 1 ; ab(n-1))$

H_0 : tous les $\beta_{j(i)} = 0$ $FB = MSB(A) / MSE$ suit loi $F(1 - \alpha ; b - 1 ; ab(n-1))$

Identification des les différences significatives : méthode HSD de Tukey

Plan avec facteurs emboîtés : STATISTICA



Ex 2
facteurs emboîtés
ANOVA

	df	SS	MS	F	p
Intercept	1	2700.00	2700.00	385.714	0.00000
Ville	2	156.50	78.25	11.179	0.00947
Instructeur (Ville)	3	567.50	189.17	27.024	0.00070
Error	6	42.00	7.00		
Total	11	766.00			

