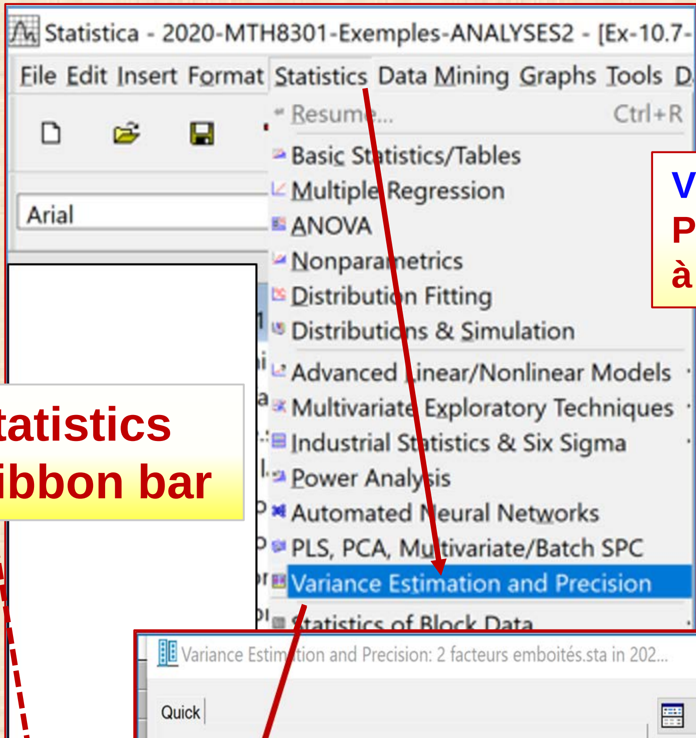
Chapitre 10 - Expériences avec facteurs aléatoires

- **Modèles mixtes** : **facteurs aléatoires** + **facteurs fixés**
- **2 modules de *Statistica* :**
  - **VEPAC : Variance Estimation Precision And Comparison**
  - **Advanced Linear / NonLinear Models : Variance components**
- **Exemples**
  - **Ex1 : 1 facteur aléatoire**
  - **Ex2 : 2 facteurs aléatoires**
  - **Ex3 : 2 facteurs - modèle mixte**
    1 facteur aléatoire – 1 facteur fixé
  - **Ex4 : 3 facteurs - modèle mixte**
    2 facteurs aléatoires - 1 facteur fixé
  - **Ex5 : 4 facteurs – modèle mixte**
    2 facteurs fixés - 2 facteurs aléatoires
- **Présence de facteurs aléatoires :**
  parcelles divisées (SplitPlot) – mesures répétées

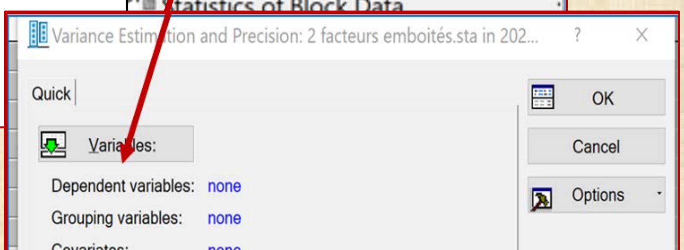
VEPAC : Variance Estimation and Precision module

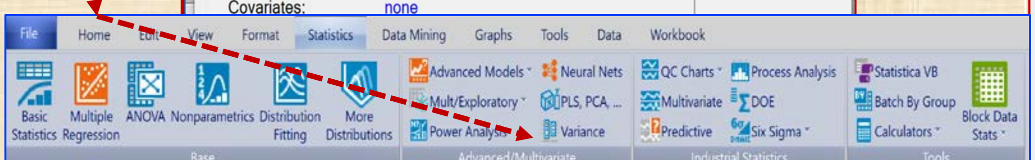
- Analyse des designs de recherche avec des modèles avec **facteurs fixés et aléatoires**.
- **Estimation** des composantes de la variance.
- Calcul de la **contribution** des différentes variances sur la variation totale.
- **Modélisation** des facteurs fixés en présence de sources multiples de variation.



VEPAC Préférable à GLM

Statistics Ribbon bar

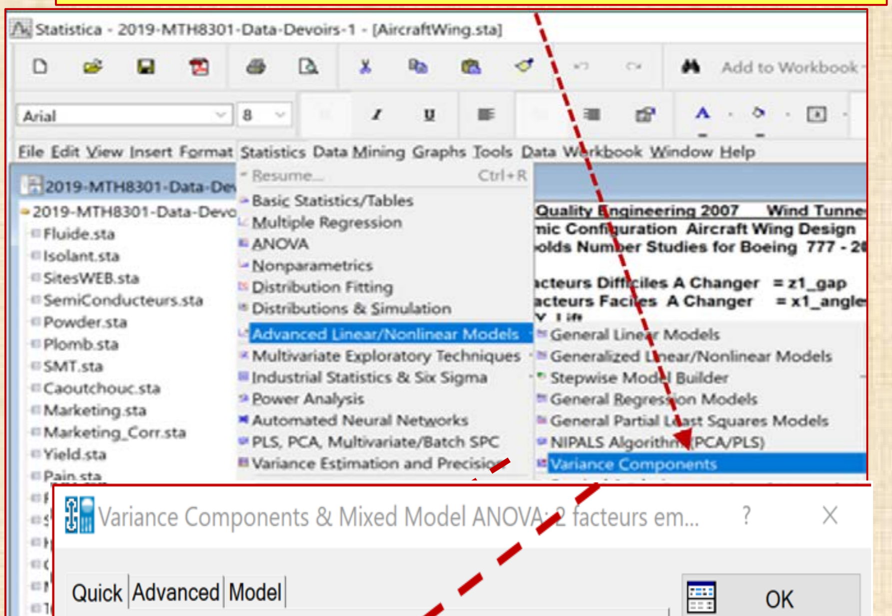


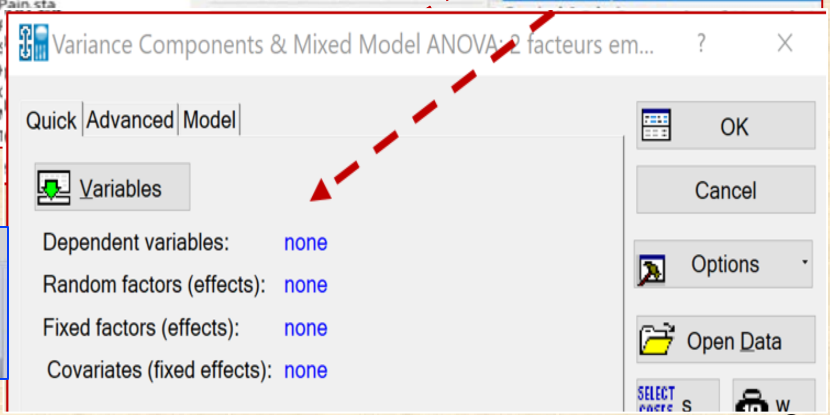


autre module : GLM

Advanced Linear/Nonlinear Models

Variance Components





Expériences avec facteurs : fixés ou aléatoires

Facteurs fixés (X)

ensemble (niveaux) spécifiques pour l'expérience

très souvent associés à des des facteurs quantitatifs

conclusion inférence : ces seuls niveaux seulement

Facteurs aléatoires (Z)

niveaux choisis au hasard dans une population de niveaux

conclusion inférence : la population entière

exemple classique : étude d'un processus de mesurage

d'un appareil (erreur de mesure = ?)

étude statisique connue sous le nom de étude R&R

R = répétabilité (erreur mesure) R = repoductibilité (autre facteur)

Exemple 1 1 facteur aléatoire

Li: lot (batch) échantillonné provenant de la production

réponse Y : force résistance du tissu

but : examen de l'uniformité production définie avec σ_{loom} = écart-type

LOT	pièce	p1	p2	p3	p4
	L1	98	97	99	96
	L2	91	90	93	92
	L3	96	95	97	95
	L4	95	96	99	98

p1 p2 p3 p4

4 pièces provenant de chaque lot

Modèle mixtes: facteurs fixés + facteurs aléatoires

X1, X2, … , Xk → système / processus / procédé → Y

Z1, Z2, … , Zl → système / processus / procédé

ε → système / processus / procédé

$Y = f(X1,.., Xk; \theta 1, …, \theta p) + \varepsilon$

ε est aléatoire	$E(\varepsilon) = 0$	$Var(\varepsilon) = \sigma^2$
Y est aléatoire	$E(Y) = f(X1,.., Xk; \theta 1, …, \theta p)$	$Var(Y) = \sigma^2$

facteurs type	modalités de X / Z / ε	effet sur distribution de Y: moyenne Y	effet sur distribution de Y: variance Y
X: fixé	modalités connues contrôlées	oui	non
Z: aléatoire	modalités non contrôlées hasard	non	oui
ε: aléatoire	ensemble des sources inconnues	non	oui

Modèle mixte $Y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon$

X : facteurs fixes Z : facteurs aléatoires

$$Var(Y) = \sigma^2 I_n + \sigma^2_W ZZ'$$

Présence facteurs aléatoires

- plan avec blocs
- mesures répétées
- design SplitPlot
- modèles mixtes
- hétérogénéité unités
- multiniveau

Cas 1 1 facteur aléatoire

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

$i = 1, 2, \ldots, a$ $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\varepsilon_{ij} \text{ est } NID(0, \sigma^2) \text{ et } \tau_i \text{ est } NID(0, \sigma_\tau^2)$$

$$V(y_{ij}) = \sigma^2 + \sigma_\tau^2$$

$$E(MS_E) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad E(MS_{Treatments}) = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$$

modèle à effets fixés: test nullité des moyennes $H_0 : \tau_i = 0$

modèle à effets aléatoires: test nullité de variance $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$

test de H_0

$$F_0 = MS_{Treatments} / MS_E$$

estimation des variances

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E \text{ et } \hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}_\tau^2 = MS_{Treatments}$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{Treatments} - MS_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

tableau ANOVA page suivante

Exemple 1 : 1 facteur aléatoire

1 ID	2 loom	3 pièce	4 Y
1	L1	p1	98
2	L1	p2	97
3	L1	p3	99
4	L1	p4	96
5	L2	p1	91
6	L2	p2	90
7	L2	p3	93
8	L2	p4	92
9	L3	p1	96
10	L3	p2	95
11	L3	p3	97
12	L3	p4	95
13	L4	p1	95
14	L4	p2	96
15	L4	p3	99
16	L4	p4	98

ANOVA

	DF	Y SS	Y MS	Y F	Y p
Intercept	1	145733,19	145733,19	76870,19	0,000000
loom	3	89,19	29,73	15,68	0,000188
Error	12	22,75	1,90		
Total	15	111,94			

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E \text{ et } \hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}_\tau^2 = MS_{Treatments}$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{Treatments} - MS_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$ rejetée

Level of Factor	N	Mean loom	Std.Dev.
	16	95,44	2,73
L1	4	97,50	1,29
L2	4	91,50	1,29
L3	4	95,75	0,96
L4	4	97,00	1,83
MEAN		95,44	1,34
SD		2,73	0,36

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E = 1,90$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = (MS_{loom} - MS_{Error}) / 4$$

$$= (29,73 - 1,90) / 4 = 6,96 = (2,64)^2$$

Exemple 2a : 2 facteurs aléatoires

modèle

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$V(\tau_i) = \sigma_\tau^2, V(\beta_j) = \sigma_\beta^2, V[(\tau\beta)_{ij}] = \sigma_{\tau\beta}^2, V(\varepsilon_{ijk}) = \sigma^2$$

$$V(y_{ijk}) = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$$

4 composantes variances

σ_τ σ_β $\sigma_{\tau\beta}$ σ

hypothèses

$$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0 \qquad H_0 : \sigma_\beta^2 = 0 \qquad H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_\tau^2 > 0 \qquad H_1 : \sigma_\beta^2 > 0 \qquad H_1 : \sigma_{\tau\beta}^2 > 0$$

tests nullité variances

$$E(MS_A) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\sigma_\tau^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}}$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + an\sigma_\beta^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}}$$

$$E(MS_{AB}) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

Exemple 2a Étude d'un processus de mesure
A: pièce B: opérateur
A et B facteurs aléatoires

Estimation des composantes de la variance
méthode ANOVA

Exemple

Étude d'un processus de mesure

A: pièce
a=20
B: opérateur
b=3
RÉP
n = 2

A et B facteurs aléatoires

	pièc	oper	rep	Y
1	p1	op1	1	21
2	p2	op1	1	24
3	p3	op1	1	20
4	p4	op1	1	27
5	p5	op1	1	19
6	p6	op1	1	23
7	p7	op1	1	22
8	p8	op1	1	19
9	p9	op1	1	24
10	p10	op1	1	25
11	p11	op1	1	21
12	p12	op1	1	18
13	p13	op1	1	23
.	.	.	.	.
118	p18	op3	2	23
119	p19	op3	2	25
120	p20	op3	2	17

$$\hat{\sigma}_{\tau}^{2} = \frac{MS_{A} - MS_{AB}}{bn}$$

$$\hat{\sigma}_{\beta}^{2} = \frac{MS_{B} - MS_{AB}}{an}$$

$$\hat{\sigma}_{\tau\beta}^{2} = \frac{MS_{AB} - MS_{E}}{n}$$

$$\hat{\sigma}^{2} = MS_{E}$$

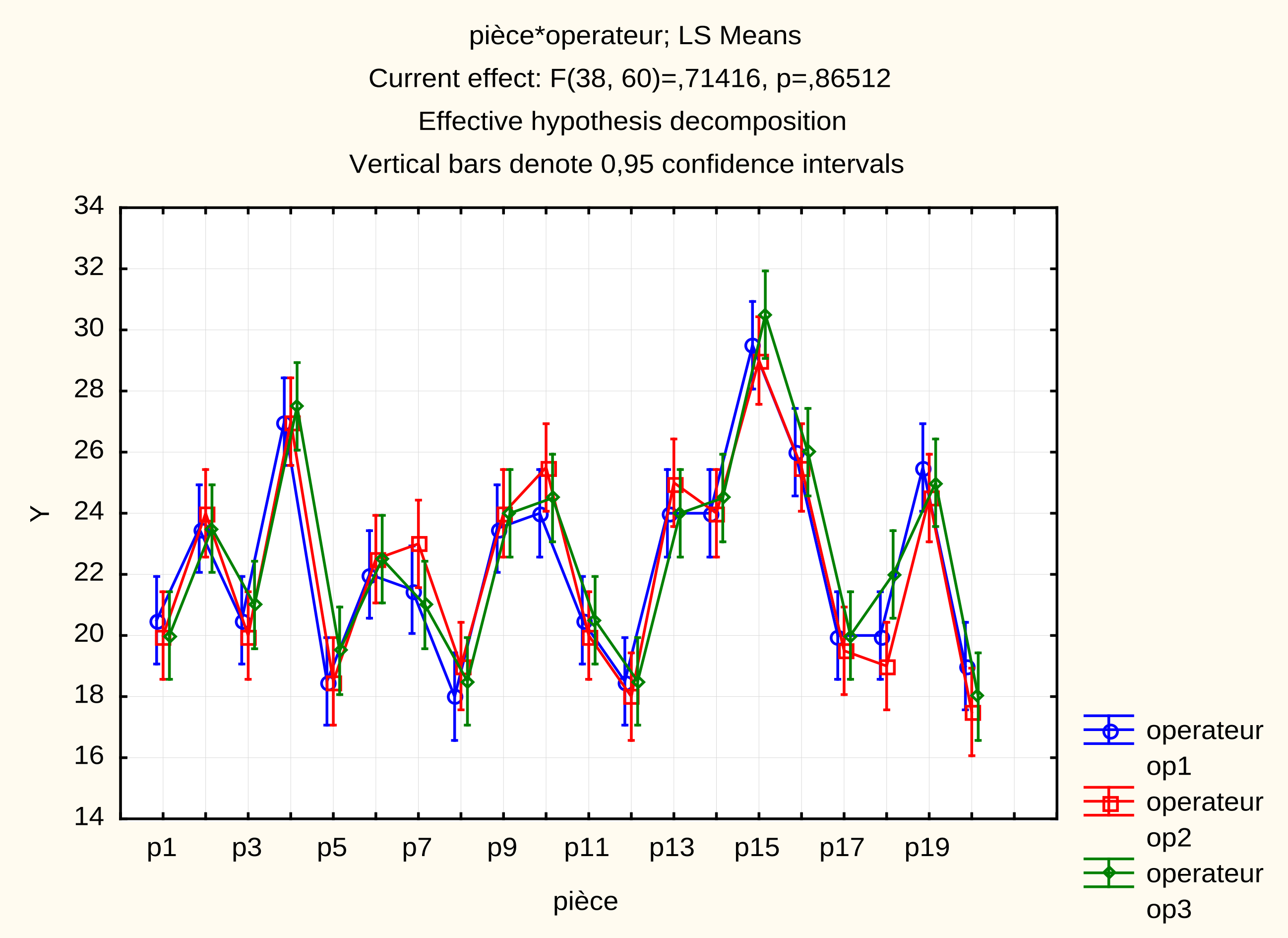
Attention

peut donner des estimations de variances négatives !

meilleure méthode

REML Restricted Estimation
Maximum Likelihood

Exemple 2a Étude d'un processus de mesure
A: pièce B: opérateur
A et B facteurs aléatoires



parrallélisme

=

pas d'interaction

pièce*opérateur

cela devrait être toujours le cas dans l'étude d'un d'un processus de mesure

sinon problème !

Exemple 2a Étude d'un processus de mesure
A: pièce B: opérateur
A et B facteurs aléatoires

ANOVA					
	DF	SS	MS	F	p
Intercept	1	60076,88	60076,88	58611,59	0,000000
Pièce (A)	19	1176,96	61,95	60,43	0,000000
Operateur (B)	2	1,85	0,92	0,90	0,411012
pièce*opera (A*B)	38	27,82	0,73	0,71	0,865117
Error	60	61,50	1,02		
Total	119	1268,12			

Estimation par méthode ANOVA

$$\hat{\sigma}_{\tau}^2 = \frac{MS_A - MS_{AB}}{bn}$$

= (61,95 – 0,73) / 3*2 = 10,20

$$\hat{\sigma}_{\beta}^2 = \frac{MS_B - MS_{AB}}{an}$$

= (0,92 – 0,73) / 20*2 = 0,005

$$\hat{\sigma}_{\tau\beta}^2 = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n}$$

= (0,73 – 1,02) 2 = - 0,145 !!

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

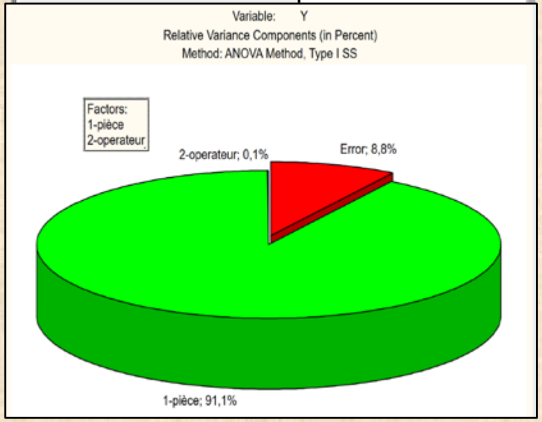
= 1,02

<u>Exemple</u> 2a   Étude d'un processus de mesure
cas classique :   A pièce aléatoire   B: opérateur aléatoire

Source	Effect (F/R)	Degr. of Freedom	Y SS	Y MS
{1}pièce	Random	19	1185,425	62,39079
{2}operateur	Random	2	2,617	1,30833
1*2	Random	38	27,050	0,71184
Residual		60	59,500	0,99167
Total		119	1274,592	10,71085

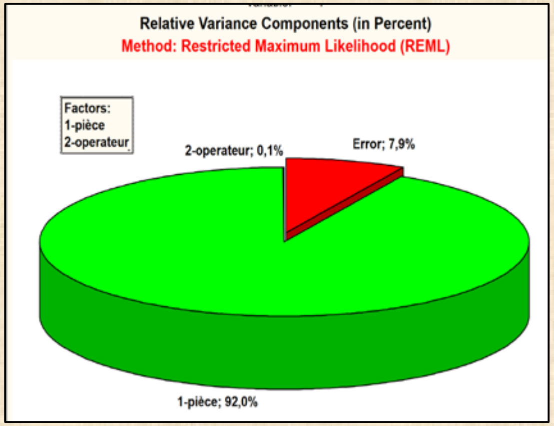
Méthode ANOVA

Source	Y
{1}pièce	10,27982
{2}operateur	0,01491
1*2	-0,13991
Error	0,99167

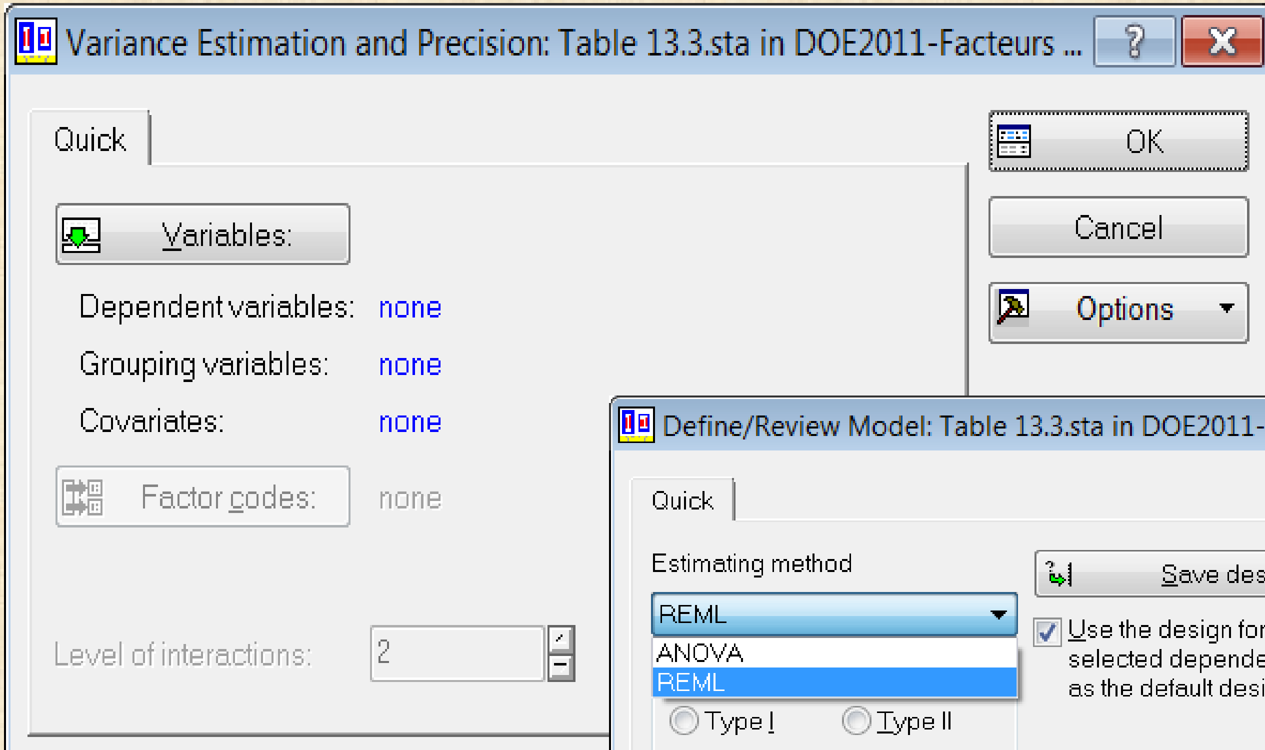


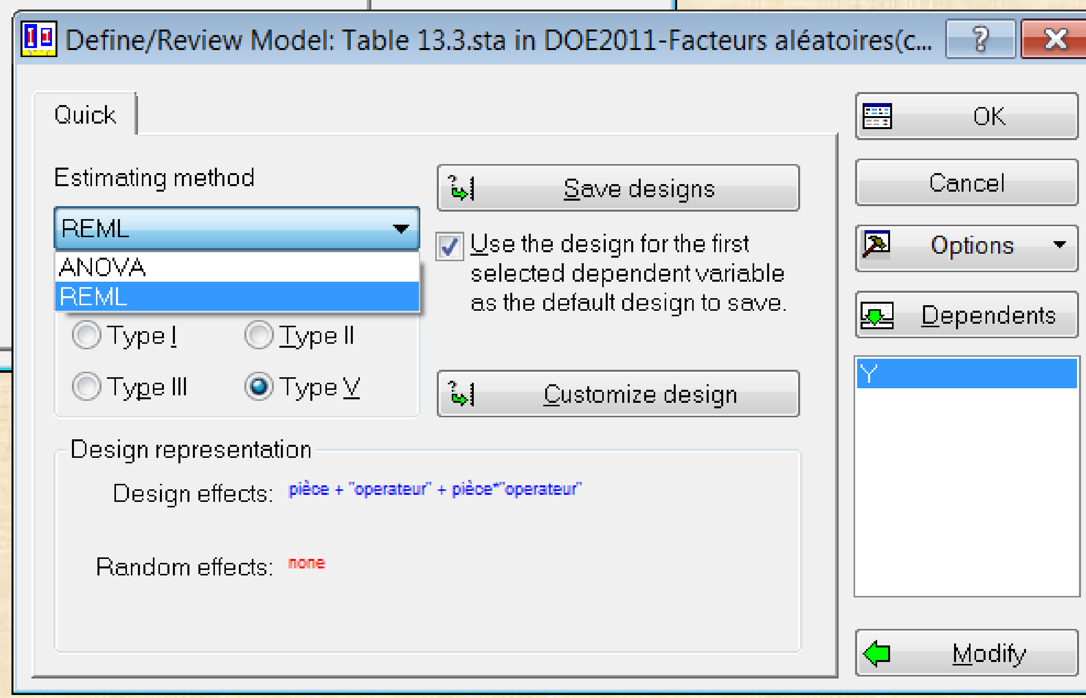
Méthode REML

Effect	Variance Comp.
{1}pièce	10,25127
{2}operateur	0,01063
1*2	
Error	0,88316



VEPAC : Variance Estimation Precision And Comparison
modèles mixtes



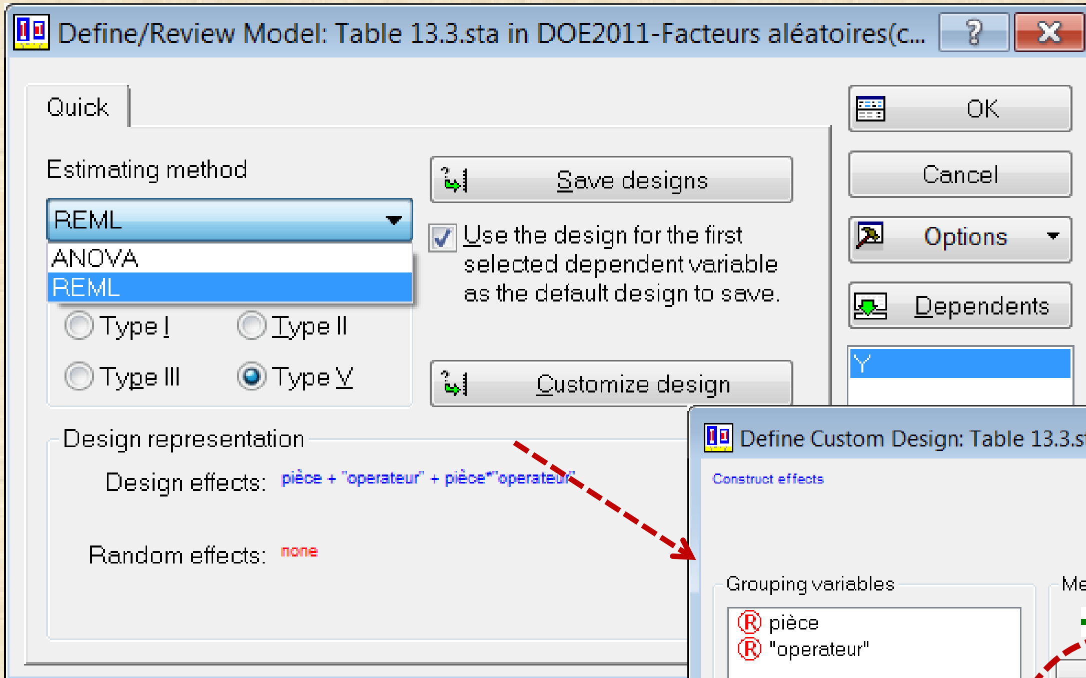


2 méthodes pour estimer les variances

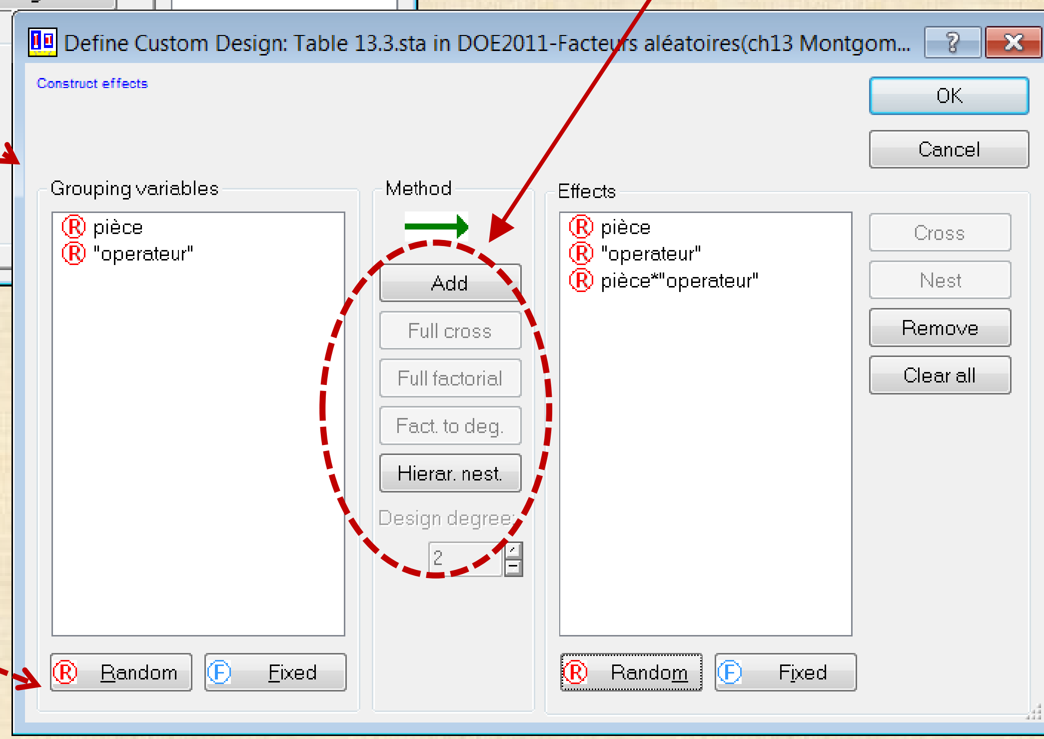
méthode 1 : ANOVA
méthode 2 : REML

Exemple 2a Étude d'un processus de mesure

cas classique :   A pièce aléatoire   B: opérateur aléatoire



spécification modèle



spécification

facteurs:

Random ou Fixed

Exemple 2a Étude d'un processus de mesure
cas classique : A pièce aléatoire B: opérateur aléatoire

ANOVA								
	Effect (F/R)	SS	DF	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	60076,87	1	60076,9	19,0768	62,13816	966,83	0,000000
pièce	Random	1176,96	19	61,95	38,0000	0,73202	84,62	0,000000
operateur	Random	1,85	2	0,92	38,0000	0,73202	1,26	0,294232
pièce*operateur	Random	27,82	38	0,73	60,0000	1,02500	0,71	0,865117
Error		61,50	60	1,03				

composants de la variance : méthode REML					
	variance	DF	Sum	Percent	RSD (%)
pièce	10,20219	18,55	10,20	90,83	14,28
operateur	0,00482	0,08	10,21	0,035	0,31
pièce*operateur	0,00000				
Error	1,02500	60,00	11,23	9,126	4,52

Exemple 2b cas mixte - A fixe et B aléatoire

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$V(\gamma_j) = \sigma_\beta^2, V[(\alpha\gamma)_{ij}] = \sigma_{\alpha\gamma}^2, V(\varepsilon_{ijk}) = \sigma^2$$

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$$

$$E(MS_A) = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1} \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}}$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2 + an\sigma_\gamma^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}}$$

$$E(MS_{AB}) = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

Estimation variances méthode ANOVA

$$\hat{\sigma}_\gamma^2 = \frac{MS_B - MS_{AB}}{an}$$

$$\hat{\sigma}_{\alpha\gamma}^2 = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

Exemple 2c cas mixte - A aléatoire B fixé

A aléatoire B fixé ANOVA								
	Effect (F/R)	SS	DF	MS	Den.Syn. Error DF	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	60076,88	1	60076,88	19,00000	61,94518	969,8395	0,000000
B	Fixed	1,85	2	0,92	38,00000	0,73202	1,2636	0,294232
A	Random	1176,96	19	61,95	38,00000	0,73202	84,6225	0,000000
AB	Random	27,82	38	0,73	60,00000	1,02500	0,7142	0,865117
Error		61,50	60	1,03				

A alétaoire B fixé composants de la variance					
	variance	DF	Sum	Percent	RSD (%)
A	10,20	18,55	10,20	90,87	14,28
A*B	0,000				
Error	1,025	60,0	11,23	9,13	4,52

Exemple 3 : 3 facteurs - modèle mixte

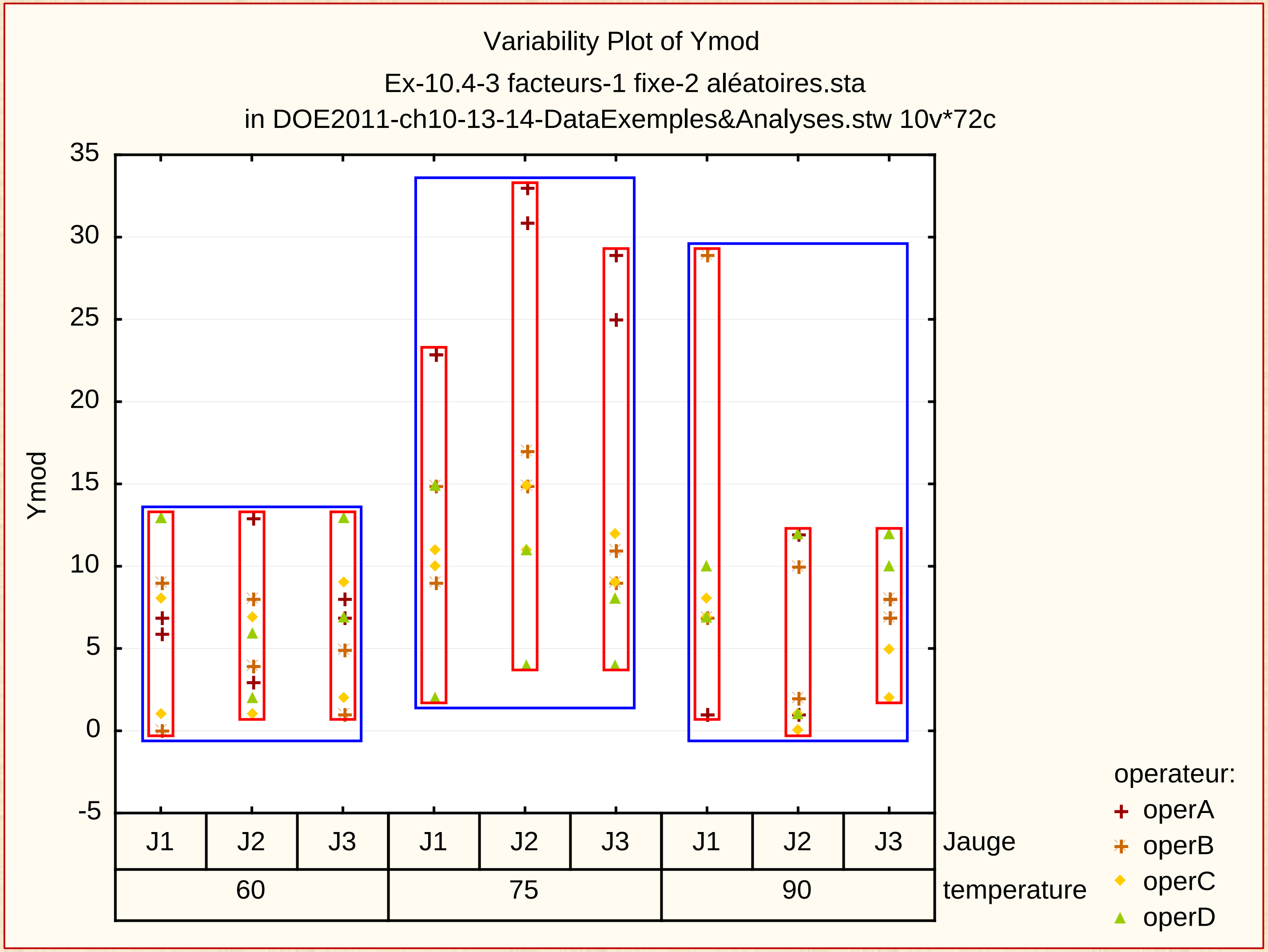
A = température (fixe) = 60 75 90
B = opérateur (aléatoire) = A B C D
C = jauge (fixe) = J1 J2 J3
2 répétitions
facteurs croisés - 3x4x3x2 = 72 obs

	temp	opera	jauge	rep	Y	Ymod = Y+9
1	60	operA	J1	1	-2	7
2	60	operA	J1	2	-3	6
3	60	operA	J2	1	-6	3
4	60	operA	J2	2	4	13
5	60	operA	J3	1	-1	8
6	60	operA	J3	2	-2	7
7	60	operB	J1	1	0	9
8	60	operB	J1	2	-9	0
9	60	operB	J2	1	-5	4
10	60	operB	J2	2	-1	8
11	60	operB	J3	1	-4	5
12	60	operB	J3	2	-8	1
13	60	operC	J1	1	-1	8
14	60	operC	J1	2	-8	1
15	60	operC	J2	1	-8	1
16	60	operC	J2	2	-2	7
17	60	operC	J3	1	0	9
18	60	operC	J3	2	-7	2
19	60	operD	J1	1	4	13
20	60	operD	J1	2	4	13
21	60	operD	J2	1	-3	6
22	60	operD	J2	2	-7	2
23	60	operD	J3	1	-2	7
24	60	operD	J3	2	4	13

	temp	oper	jauge	rep	Y	Ymod = Y+9
25	75	operA	J1	1	14	23
26	75	operA	J1	2	14	23
27	75	operA	J2	1	22	31
28	75	operA	J2	2	24	33
29	75	operA	J3	1	20	29
30	75	operA	J3	2	16	25
31	75	operB	J1	1	6	15
32	75	operB	J1	2	0	9
33	75	operB	J2	1	8	17
34	75	operB	J2	2	6	15
35	75	operB	J3	1	2	11
.	.	.	.	.	.	.
63	90	operC	J2	1	-9	0
64	90	operC	J2	2	-8	1
65	90	operC	J3	1	-4	5
66	90	operC	J3	2	-7	2
67	90	operD	J1	1	-2	7
68	90	operD	J1	2	1	10
69	90	operD	J2	1	-8	1
70	90	operD	J2	2	3	12
71	90	operD	J3	1	1	10
72	90	operD	J3	2	3	12

Exemple 3 : 3 facteurs - modèle mixte - 2 fixes + 1 aléatoire

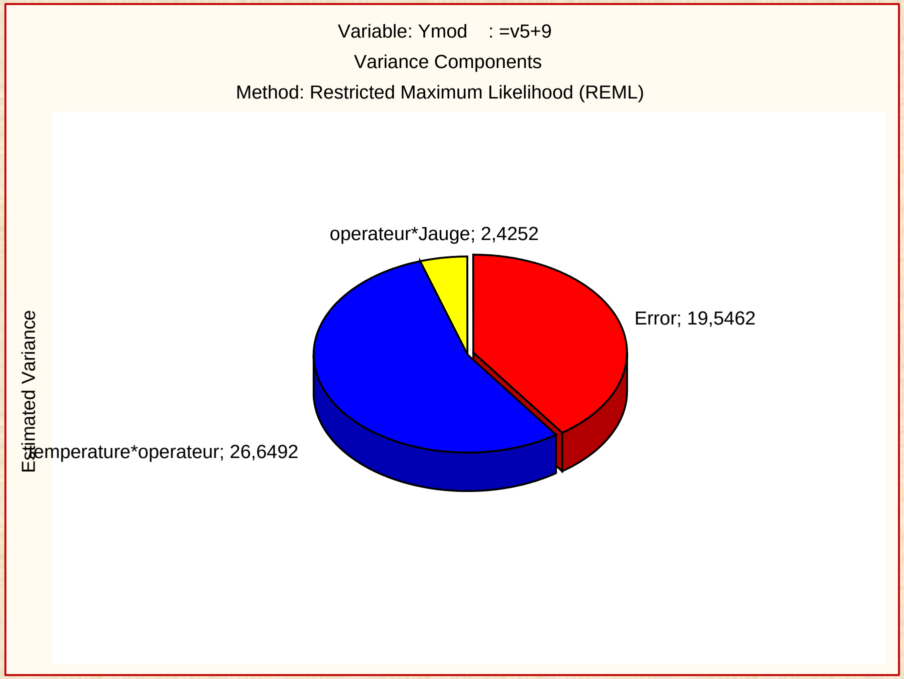
A = température (fixe) = 60 75 90 B = opérateur (aléatoire) = A B C D
C = jauge (fixe) = J1 J2 J3 2 répétitions facteurs croisés - 3x4x3x2

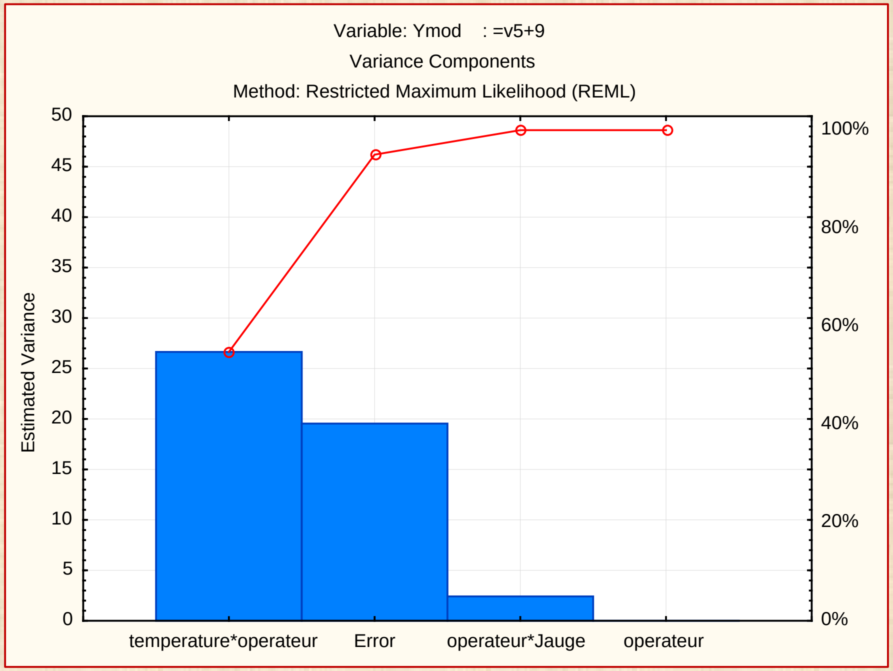


Exemple 3 : 3 facteurs - modèle mixte - 2 fixes + 1 aléatoire

A = température (fixe) = 60 75 90 B = opérateur (aléatoire) = A B C D
C = jauge (fixe) = J1 J2 J3 2 répétitions facteurs croisés - 3x4x3x2

component	variance	Std error	df	Z-value	Prob z
operateur	0,00000				
temperature*operateur	26,64924	14,37388	6,87467	1,854005	0,031869
operateur*Jauge	2,42525	3,26397	1,10420	0,743035	0,228730
Error	19,54618	3,99619	47,84767	4,891200	0,000001

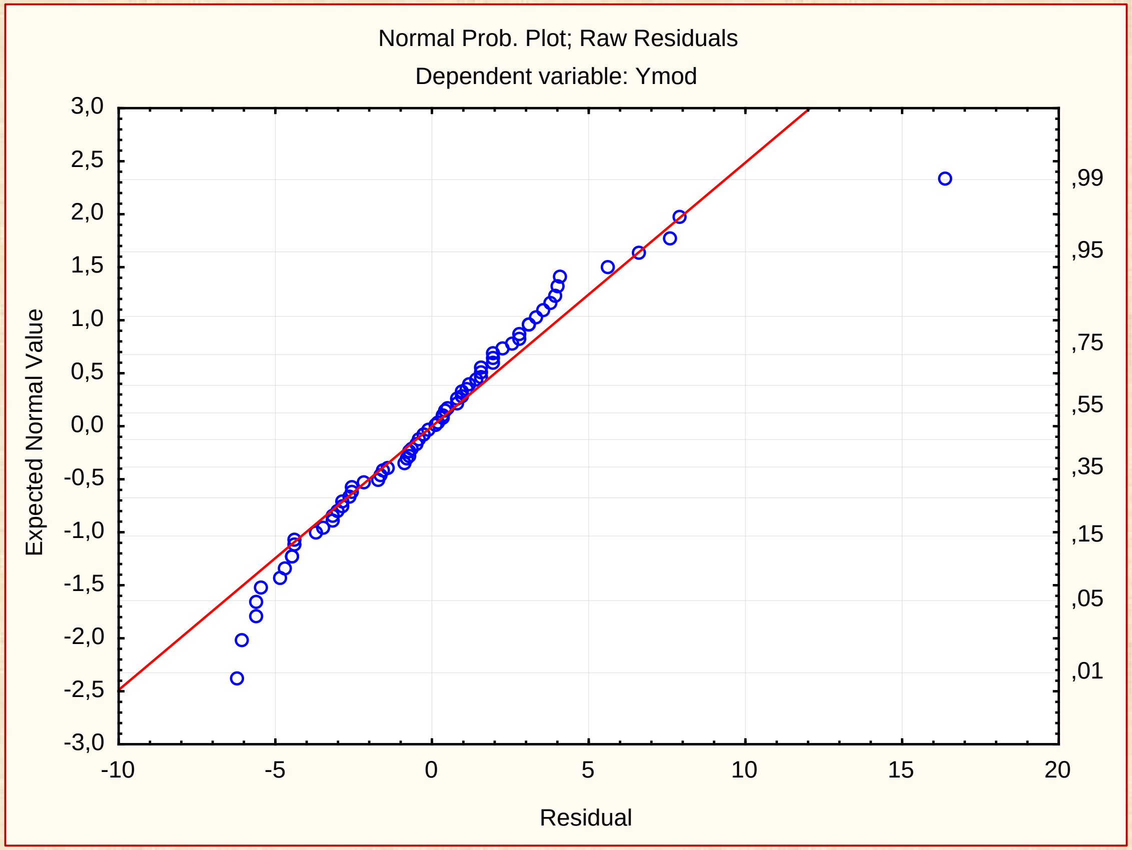




Exemple 3 : 3 facteurs - modèle mixte

A = température (fixe) = 60 75 90 B = opérateur (aléatoire) = A B C D
C = jauge (fixe) = J1 J2 J3 2 répétitions facteurs croisés - 3x4x3x2

EFFECT	Num DF	Den DF	F	P-value
temperature	2	6	2,851516	0,134759
Jauge	2	6	0,105498	0,901509
temperature*Jauge	4	48	1,763629	0,151676



Exemple 4: 4 facteurs – 2 facteurs fixes - 2 facteurs aléatoires

Milliken, G. A., & Johnson, D. E. (1984). *Analysis of messy data: Vol. I. Designed Experiments.* New York: Van Nostrand Reinhold, Co. Chapter 30, Figure 30.2
Milliken, G. A., & Johnson, D. E. (1992). *Analysis of messy data: Vol. I. Designed Experiments.* New York: Chapman & Hall.

A comfort experiment : study the effects of temperature and gender on a person's comfort.

interested only in 3 temperature settings : 65, 70, and 75 degrees Fahrenheit.
Each temperature setting was randomly assigned to 3 of nine 9 environmental chambers.

18 males and 18 females were randomly assigned to chambers so that
2 males and 2 females were assigned to each of the 9 chambers.

Pople were subjected to the environmental condition for 3 hours,
their comfort Y was measured.

STRUCTURE : Temp et Gender sont fixes et croisés
Chamber et Person sont aléatoires et emboités
Chamber emboité dans Temperature
Person emboité dans Chamber

MODEL Y = Comfort = Temperature + Gender + Temperature*Gender +
+ Chamber(Temperature) + Person(Chamber) + error

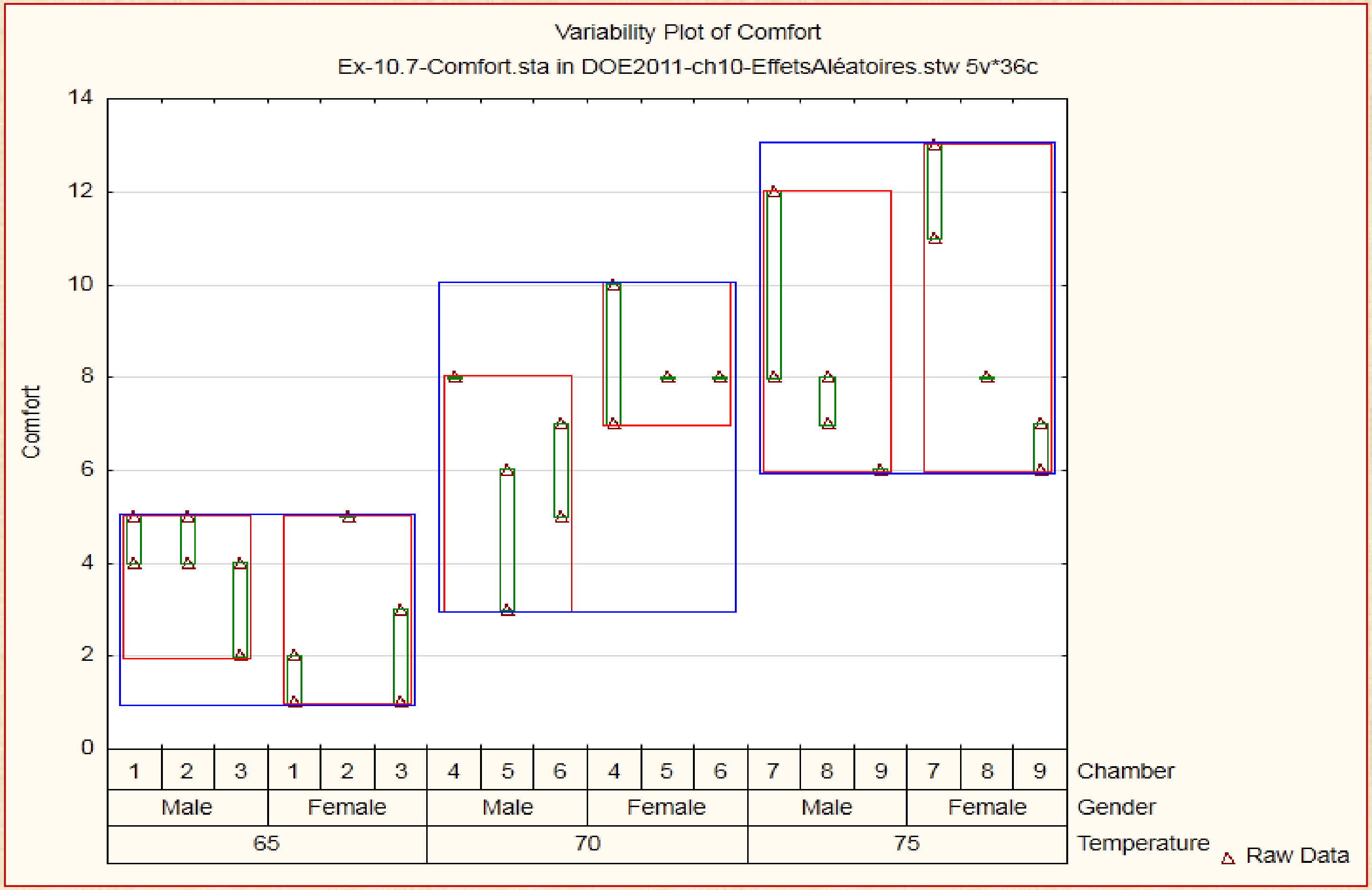
Exemple 4: 4 facteurs – 2 facteurs fixes - 2 facteurs aléatoires

	Temperat	Chamber	Gender	Person	Comfort
1	65	1	Male	1	5
2	65	1	Male	2	4
3	65	1	Female	3	1
4	65	1	Female	4	2
5	65	2	Male	5	5
6	65	2	Male	6	4
7	65	2	Female	7	5
8	65	2	Female	8	5
9	65	3	Male	9	4
10	65	3	Male	10	2
11	65	3	Female	11	1
12	65	3	Female	12	3
13	70	4	Male	13	8
14	70	4	Male	14	8
15	70	4	Female	15	10
16	70	4	Female	16	7
17	70	5	Male	17	6
18	70	5	Male	18	3

	Temperat	Chamber	Gender	Person	Comfort
19	70	5	Female	19	8
20	70	5	Female	20	8
21	70	6	Male	21	5
22	70	6	Male	22	7
23	70	6	Female	23	8
24	70	6	Female	24	8
25	75	7	Male	25	12
26	75	7	Male	26	8
27	75	7	Female	27	11
28	75	7	Female	28	13
29	75	8	Male	29	8
30	75	8	Male	30	7
31	75	8	Female	31	8
32	75	8	Female	32	8
33	75	9	Male	33	6
34	75	9	Male	34	6
35	75	9	Female	35	6
36	75	9	Female	36	7

Exemple 4

4 facteurs



effect	variance	df	sum	percent	RSD(%)
Chamber(Temperature)	0,000000				
Gender(Chamber)	0,000000				
Error	3,538889	30	3,538889	100,0000	29,83391

Exemple 4: 4 facteurs – 2 facteurs fixes - 2 facteurs aléatoires

Effect	Effect - (F/R)	SS	Degr. of - Freedom	MS	Den.Syn. - Error df	Den.Syn. - Error MS	F	p
Intercept	Fixed	1431,36	1	1431,3	6	11,08	129,14	0,000028
Temperature	Fixed	158,389	2	79,194	6	11,08	7,14	0,025856
Gender	Fixed	3,361	1	3,361	6	2,028	1,66	0,245365
Temperature *Gender	Fixed	15,722	2	7,861	6	2,028	3,88	0,083027
Chamber(Temperature)	Random	66,500	6	11,083	6	2,028	5,47	0,028943
Gender(Chamber)	Random	12,167	6	2,028	18	1,53	1,3273	0,295753
Error		27,500	18	1,528				

Expériences en parcelles divisées : présence de facteurs aléatoires (chap 11)

Méthode 1 2 facteurs fixes A et B croisés + plan équilibré + répétition (bloc)

(exemple) A : a modalités B : b modalités c = nombre de WholePlot

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_{k(i)} + \varepsilon_{ijk} \qquad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, a \qquad j = 1, 2, \dots, b \qquad k = 1, 2, \dots, c$

μ : effet général

α_i : effet facteur A dans WholePlot $\sum \alpha_i = 0$

β_j : effet facteur B dans SplitPlot $\sum \beta_j = 0$

$(\alpha\beta)_{ij}$: effet d'interaction AB $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$

$\gamma_{k(i)}$: erreur WholePlot aléatoire distribuée (~) $N(0, \sigma_w^2)$ $n_w = ac$

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{k(ij)}$: erreur SplitPlot ~ $N(0, \sigma^2)$ (terme d'erreur toujours emboitée)

remarque: mettre un terme WholePlot dans le modèle (2ième terme d'erreur)

Méthode 2
a) calcul tous les effets : WholePlot et SplitPlot
b) séparation de effets : WholePlot, SplitPlot
c) graphique des effets WholePlot sur échelle gaussienne
d) graphique des effets SplitPlot sur échelle gaussienne

Méthode 3 régression SplitPlot (General Least Square = GLS) (page suivante)

cas particulier du modèle mixte général (page suivante)

Méthode 3 régression SplitPlot

$$y_i = f(w_i, s_i)\,\beta + z_i\,\gamma + \varepsilon_i, \qquad (2)$$

- $f(w_i, s_i)$ modèle polynômial $(1 \times p)$ des modalités des facteurs
- β vecteur $p \times 1$ des paramètres des effets facteurs
- z_i vecteur indicateur dont l'élément
  - = 1 si l'essai i est assigné au k-ième WholePlot
  - = 0 autrement
- γ vecteur $b \times 1$ effets aléatoires
- ε_i erreur SplitPlot

modèle simple et flexible

- facteurs continus: utilisation de polynômes
- facteurs qualitatifs: utilisation de variables indicatrices (0-1) ou de codage à effets (-1 0 1)

Forme matricielle

$$Y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon \qquad (3)$$

Y vecteur $n \times 1$ des réponses

X matrice $n \times p$ du modèle dont la i-ème rangée est égale à $f(w_i, s_i)$

Z matrice n x b dont la i-ème rangée est égale à z_i,

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ $\varepsilon \sim N(0_n, \sigma^2 I_n)$ I_n matrice identité n x n

Méthode 3 (suite) régression SplitPlot

V matrice variance – covariance de Y

$$V = \sigma^2 I_n + \sigma^2_W ZZ' \qquad (4)$$

Si essais regroupés par Wholeplot alors V est diagonale en bloc

$$\mathbf{V}_i = \sigma^2 \mathbf{I}_{s_i} + \sigma_w^2 \mathbf{1}_{s_i} \mathbf{1}'_{s_i},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{V}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{V}_b \end{bmatrix}.$$

Estimation General Least Square (GLS) (moindres carrés pondérés)

$$\hat{\beta}_{GLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}.$$

$$\hat{\beta}_{FGLS} = (\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{Y}.$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{FGLS}) = \mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X},$$

Test d'hypothèse

$$\mathrm{H}_0 : \mathbf{c}'\beta = 0 \quad \text{vs.} \quad \mathrm{H}_1 : \mathbf{c}'\beta \neq 0,$$

$$t = \frac{\mathbf{c}'\hat{\beta}}{\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})\mathbf{c}}}.$$

$$\nu = \frac{2[\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{V}}^{-1}\mathbf{X})\mathbf{c}]^2}{\mathbf{g}'\mathbf{A}\mathbf{g}},$$