





- **Facteurs croisés**: toutes les combinaisons des modalités du facteur A et B sont présentes
- **Facteurs emboîtés**: modalités facteur B sont spécifiques aux modalités d'un facteur A
 - notation $B(A)$: facteur B emboîté dans facteur A
 - concept interaction $A*B$ n'existe pas pour 2 facteurs emboîtés
- **Avec plus de 2 facteurs, types de structures des traitements** :
 - facteurs *complètement* emboîtés (hiérarchie)
 - facteurs *partiellement* emboîtés (*partiellement* croisés)
- **Exemple 1 : évaluation procédé mesurage – facteurs emboîtés (test destructif)**
aussi appelée étude Reproductibilité & Répétabilité (étude R&R)
Bernard Clément, (2009) Évaluation Processus Mesure avec Statistica, 109 pages, Genistat Conseils Inc.
https://cours.polymtl.ca/mth6301/WEB-mth8301/D/Clement-Evaluation_Processus_Mesure.pdf
- **Exemple 2 : étude R&R : 6 opérateurs - 4 instruments - 2 répétitions**
- **Exemple 3 : 2 facteurs emboîtés – étude comparative de performance**
- **Exemple 4 : 3 facteurs complètement emboîtés**
- **Utilisation Statistica : Analyse variance (ANOVA) avec facteurs emboîtés**
- **Exemple 5 : étude R&R avec test destructif**
- **Exemple 6 : étude de 4 facteurs**
- **Exemple 7 : mesures répétées**

Plan avec facteurs emboîtés : exemple processus de mesurage

Exemple 1 : évaluation d'un processus de mesurage (étude R&R)
étude de Répétabilité (erreur appareil) et de Reproductibilité (opérateur)

<u>FACTEURS</u>	<u>plan d'échantillonnage</u>	<u>source de variabilité</u>	<u>nombre</u>
LOT (i)	L1 L2 L3 ... 	σ^2 LOT	a
PRODUIT (LOT) (j)	P1 P2 P3 P4 ... 	σ^2 PRODUIT	b
OPÉRATEUR (k)	O1 O2 ... 	σ^2 OPÉRATEUR reproductibilité	c
RÉPÉTITION (l)	R1 R2 ... 	σ^2 RÉPÉTITION erreur de mesure répétabilité	n
MESURE	Y_{ijkl}	$i = 1, \dots, a$ $j = 1, \dots, b$ $k = 1, \dots, c$ $l = 1, \dots, n$	

PRODUIT est emboîté dans le facteur LOT. En général on étudie UN lot (a=1)

OPÉRATEUR peut être emboîté ou croisé avec le facteur PRODUIT.

RÉPÉTITION est toujours emboîté dans le facteur OPÉRATEUR.

L'objectif principal : estimer les *composants de la variance*

$$\sigma^2_{\text{LOT}} \quad \sigma^2_{\text{PRODUIT}} \quad \sigma^2_{\text{OPÉRATEUR}} \quad \sigma^2_{\text{RÉPÉTITION}}$$

Tous les facteurs sont aléatoires

plan d'échantillonnage souvent employé a = 1 b = 10 à 20 c = 2 ou 3 n = 2 ou 3

Plan avec facteurs emboîtés : exemple processus de mesurage

Exemple 2 : évaluation d'un processus de mesurage (étude R&R)

étude de Répétabilité (erreur appareil) et de Reproductibilité (variabilité opérateur)

C = 6 opérateurs (Sally, Clara, Edouardo, Jane, Robert, Sally) - b = 9 pièces distinctes par opérateur
4 instruments – A B C D - n = 2 répétitions mesure Y

1 ID	2 Operator	3 Part	4 Instrument	5 Y
1	Sally	p1	A	0,8177
2	Sally	p1	B	0,0253
3	Sally	p1	C	0,0419
4	Sally	p1	D	0,2356
5	Sally	p1	A	0,9456
6	Sally	p1	B	0,0241
7	Sally	p1	C	0,4084
8	Sally	p1	D	0,2416
9	Sally	p1	A	0,2460
10	Sally	p1	B	0,1138
11	Sally	p1	C	0,5102
12	Sally	p1	D	0,1240

97	Sally	p9	A	2,3235
98	Sally	p9	B	0,8331
99	Sally	p9	C	3,6696
100	Sally	p9	D	4,8659
101	Sally	p9	A	0,1347
102	Sally	p9	B	0,6576
103	Sally	p9	C	1,4678
104	Sally	p9	D	0,2239
105	Sally	p9	A	2,5665
106	Sally	p9	B	0,7655
107	Sally	p9	C	1,0315

541	Eduardo	p51	A	0,2414
542	Eduardo	p51	B	0,4710
543	Eduardo	p51	C	0,1278
544	Eduardo	p51	D	0,3444
545	Eduardo	p51	A	0,0102
546	Eduardo	p51	B	0,1537
547	Eduardo	p51	C	0,4760
548	Eduardo	p51	D	0,0023
549	Eduardo	p51	A	0,2218
550	Eduardo	p51	B	0,4588
551	Eduardo	p51	C	0,8868
552	Eduardo	p51	D	0,0246

636	Eduardo	p58	D	0,7307
637	Eduardo	p59	A	0,8198
638	Eduardo	p59	B	1,6398
639	Eduardo	p59	C	4,5196
640	Eduardo	p59	D	2,3528
641	Eduardo	p59	A	0,4757
642	Eduardo	p59	B	0,6283
643	Eduardo	p59	C	1,4447
644	Eduardo	p59	D	1,3441
645	Eduardo	p59	A	0,3549
646	Eduardo	p59	B	2,5957
647	Eduardo	p59	C	1,6277
648	Eduardo	p59	D	2,3260

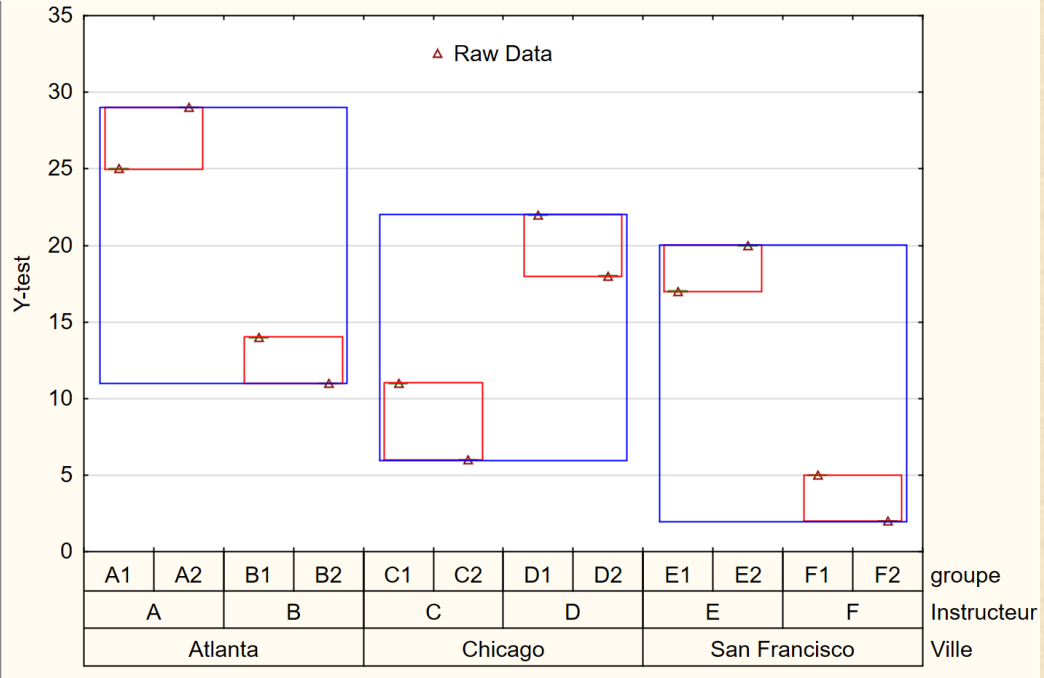
Plan avec facteurs emboîtés : exemple

Ex 9.1 : 2 facteurs emboîtés

1	2	3	4	5
ID	Ville	Instructeur	groupe	Y_test
1	Atlanta	A	1	25
2	Atlanta	A	2	29
3	Atlanta	B	1	14
4	Atlanta	B	2	11
5	Chicago	C	1	11
6	Chicago	C	2	6
7	Chicago	D	1	22
8	Chicago	D	2	18
9	San Francisco	E	1	17
10	San Francisco	E	2	20
11	San Francisco	F	1	5
12	San Francisco	F	2	2

Ville	Atlanta				Chicago				San Francisco			
Instructeur	A		B		C		D		E		F	
Groupe	g1	g2	g3	g4	g5	g6	g7	g8	g9	g10	g11	g12
Note Y	25	29	14	11	6	22	18	17	17	20	5	2

Instructeur emboîté dans Ville
Groupe emboîté instructeur



Modèle pour 2 facteurs emboîtés

facteur A avec a modalités

facteur B avec b modalités emboîté dans A

plan équilibré avec n répétitions

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$\mu_{..}$: effet général

α_i : effet du facteur A et $\sum \alpha_i = 0$

$\beta_{j(i)}$: effet du facteur B et $\sum \beta_{j(i)} = 0$ pour tout i

ε_{ijk} : terme d'erreur distribué $N(0, \sigma^2)$

Conséquences

$$E(Y_{ijk}) = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} \quad \text{Var}(Y_{ijk}) = \sigma^2$$

$$\text{Var}(Y_{ijk}) = \sigma^2$$

il n'y pas de terme d'interaction dans le modèle

Estimation des paramètres

$$\hat{\mu} = \overline{Y_{...}} \quad \hat{\alpha}_i = \overline{Y_{i..}} - \overline{Y_{...}} \quad \hat{\beta}_{j(i)} = \overline{Y_{ij.}} - \overline{Y_{i..}}$$

$$\text{résidus } r_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = \overline{Y_{ijk}} - Y_{ij.}$$

ANOVA avec facteurs emboîtés

Analyse de la variance

totale	$SSTO = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - Y_{...})^2$
facteur A	$SSA = bn \sum (Y_{i..} - Y_{...})^2$
facteur B (emboité A)	$SSB(A) = n \sum \sum (Y_{ij.} - Y_{i..})^2$
erreur	$SSE = \sum \sum \sum (Y_{ijk} - Y_{ij.})^2$

ANOVA

Source	SS	df	MS	E(MS)
Facteur A	SSA	a - 1	MSA	$\sigma^2 + (bn/(a-1)) \sum \alpha_i^2$
Facteur B(A)	SSB(A)	b - 1	MSB(A)	$\sigma^2 + (n/b(a-1)) \sum \sum \beta_{j(i)}^2$
Erreur	SSE	ab(n-1)	MSE	σ^2
Totale	SSTO	abn - 1	-----	-----

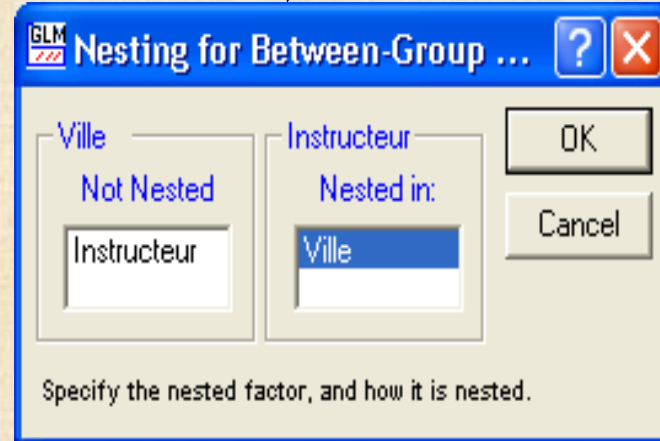
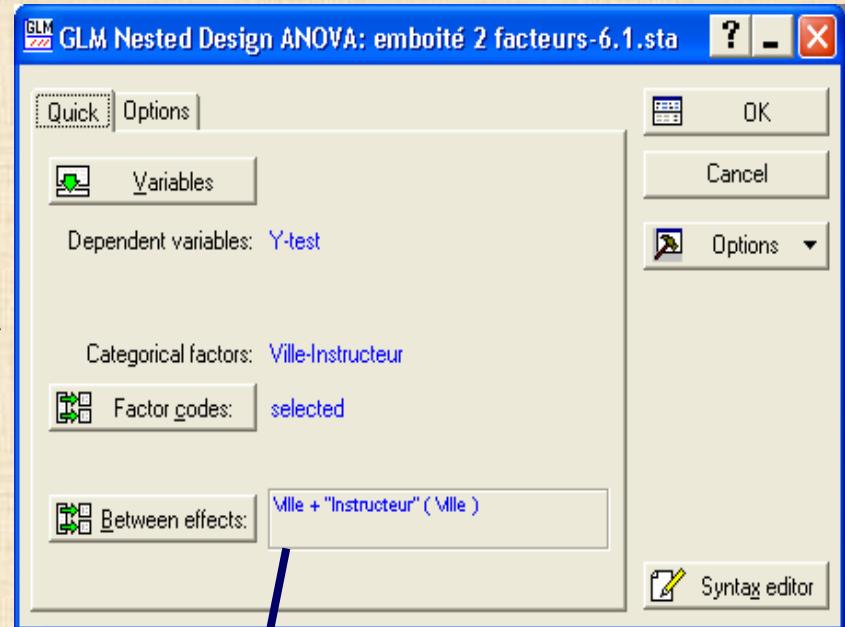
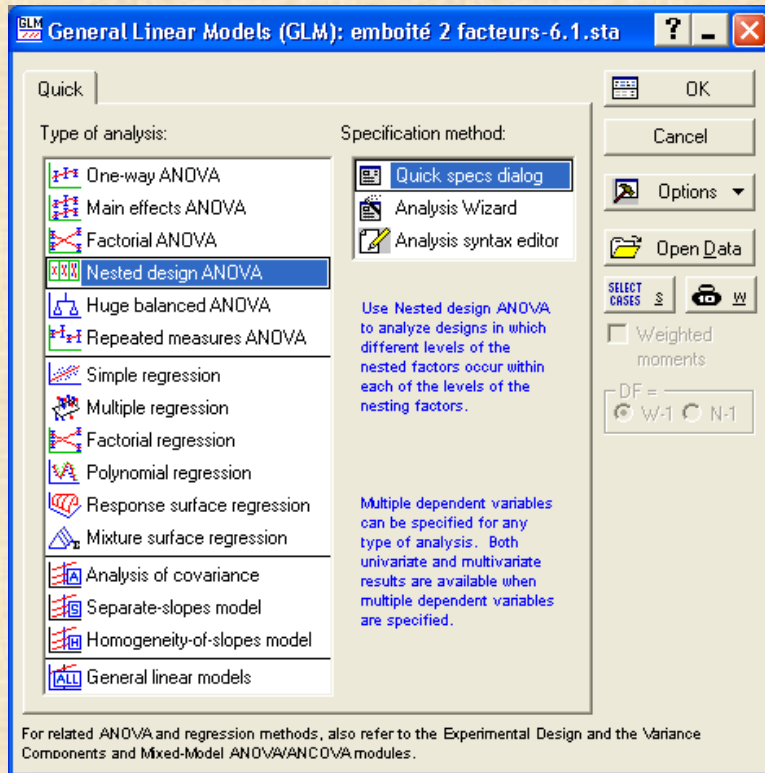
Tests

H_0 : tous les $\alpha_i = 0$ $FA = MSA / MSE$ suit loi $F(1 - \alpha ; a - 1 ; ab(n-1))$

H_0 : tous les $\beta_{j(i)} = 0$ $FB = MSB(A) / MSE$ suit loi $F(1 - \alpha ; b - 1 ; ab(n-1))$

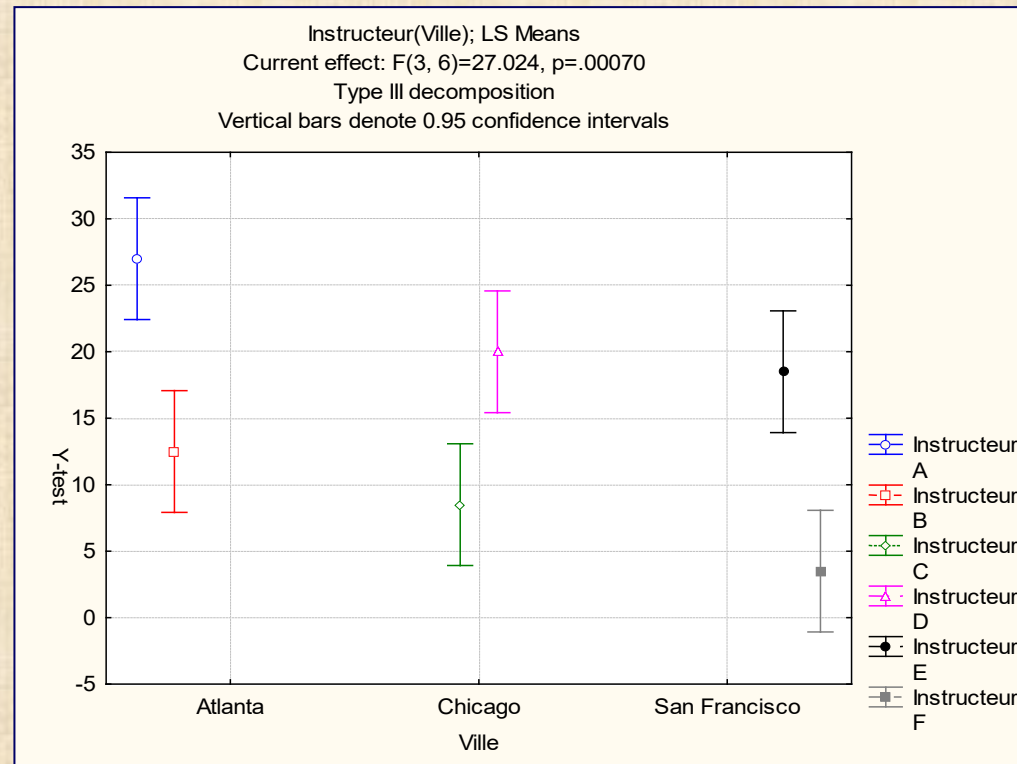
Identification des différences significatives : méthode HSD de Tukey

Plan avec facteurs emboîtés : STATISTICA



**Ex 9.1 : 2 facteurs
emboîtés**

	df	SS	MS	F	p
Intercept	1	2700.00	2700.00	385.714	0.00000
Ville	2	156.50	78.25	11.179	0.00947
Instructeur (Ville)	3	567.50	189.17	27.024	0.00070
Error	6	42.00	7.00		
Total	11	766.00			



Ex 9.2

2 facteurs emboîtés

design complètement hiérarchique

3 facteurs (variables) indépendants A, B, C sont considérés comme ayant des effets aléatoires (variances) sur la variable de réponse Y. Le facteur B est emboîté dans le facteur A et le facteur C est emboîté dans le facteur B. Le système est dit complètement hiérarchique. On peut représenter un tel système en employant plusieurs systèmes de codage. Nous illustrons ici le cas avec 2 exemplaires de système de codage (A B C) et (A2 B2 C2). Les systèmes sont équivalents et donnent des résultats identiques. Les composantes de variance (σ_A , σ_B , σ_C) ne sont pas significativement différentes de zéro. Le système est uniquement caractérisé par l'erreur expérimentale.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	ID	A	B	C	n	new	A2	B2	C2	Y
1	1	a1	b1	c1	2		a	c	1	7
2	2	a1	b1	c1			a	c	1	1
3	3	a1	b1	c2	4		a	c	3	4
4	4	a1	b1	c2			a	c	3	1
5	5	a1	b1	c2			a	c	3	8
6	6	a1	b1	c2			a	c	3	7
7	7	a1	b2	c3	3		a	d	2	7
8	8	a1	b2	c3			a	d	2	6
9	9	a1	b2	c3			a	d	2	6
10	10	a1	b2	c4	2		a	d	7	0
11	11	a1	b2	c4			a	d	7	3
12	12	a2	b3	c5	2		b	e	6	6
13	13	a2	b3	c5			b	e	6	5
14	14	a2	b3	c6	3		b	e	5	0
15	15	a2	b3	c6			b	e	5	0
16	16	a2	b3	c6			b	e	5	4
17	17	a2	b4	c7	2		b	f	4	3
18	18	a2	b4	c7			b	f	4	2
19	19	a2	b4	c8	1		b	f	8	8
20	20	a2	b5	c9	2		b	g	10	8
21	21	a2	b5	c9			b	g	10	7
22	22	a2	b5	c10	2		b	g	11	3
23	23	a2	b5	c10			b	g	11	4
24	24	a2	b5	c11	2		b	g	9	2
25	25	a2	b5	c11			b	g	9	8

design hierarchique								
3 facteurs A B C sont emboîtés: B dans A et C dans B								
les facteurs sont aléatoires.								
2 manières de présenter le design:								
A1 B1 C1 qui sera reconnu naturellement pas Statistica								
A2 B2 C2 ou il faut préciser l'inclusion : B dans A et C dans B								
	1	2	3	4	5	6	7	8
	A1	B1	C1	c4	A2	B2	C2	Y
1	1	1	1		1	1	1	7
2	1	1	1		1	1	1	1
3	1	1	2		1	1	2	4
4	1	1	2		1	1	2	1
5	1	1	2		1	1	2	8
6	1	1	2		1	1	2	7
7	1	2	3		1	2	1	7
8	1	2	3		1	2	1	6
9	1	2	3		1	2	1	6
10	1	2	4		1	2	2	0
11	1	2	4		1	2	2	3
12	2	3	5		2	1	1	6
13	2	3	5		2	1	1	5
14	2	3	6		2	1	2	0
15	2	3	6		2	1	2	0
16	2	3	6		2	1	2	4
17	2	4	7		2	2	1	3
18	2	4	7		2	2	1	2
19	2	4	8		2	2	2	8
20	2	5	9		2	3	3	8
21	2	5	9		2	3	3	7
22	2	5	10		2	3	4	3
23	2	5	10		2	3	4	4
24	2	5	11		2	3	5	2
25	2	5	11		2	3	5	8

ÉVALUATION PROCESSUS MESURE AVEC 2 FACTEURS emboîtés

Ex 9.3 2 facteurs emboîtés

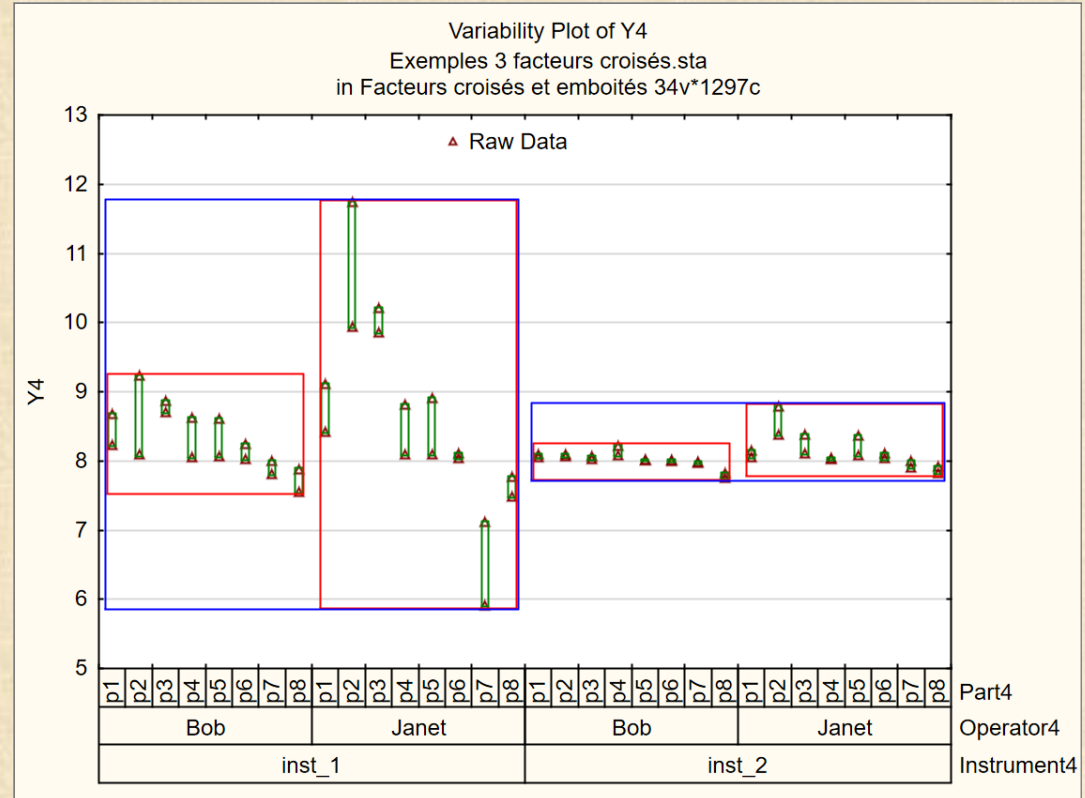
o = 8 opérateurs s = 3 sites (usine) A B C b = 3 batch (b1 , b2 , b3)
opérateur emboîté dans site / batch croisé avec site
 op1-2-3-4 (A) op 5-6 (B) op 7-8-9 (C) 3 batch (b1, b2, b3) n = 2 rep.
 Y = test623 mesure output 27 groupes de n = 2 obs.

Site	A				B		C		
Oper	op1	op2	op3	op4	op5	op6	op7	op8	op9
Batch	b1	b1	b1	b1	b1	b1	b1	b1
	b2	b2	b2	b2	b2	b2	b2	b2
	b3	b3	b3	b3	b3	b3	b3	b3

plant/device	oper	batch	group	rep	test623
plant A / device A	op1	b1	A1b1	1	41,0
plant A / device A	op1	b1	A1b1	2	41,9
plant A / device A	op1	b2	A1b2	1	34,5
plant A / device A	op1	b2	A1b2	2	33,5
plant A / device A	op1	b3	A1b3	1	52,2
plant A / device A	op1	b3	A1b3	2	51,7
plant A / device A	op2	b1	A2b1	1	40,1
plant A / device A	op2	b1	A2b1	2	41,9
plant A / device A	op2	b2	A2b2	1	31,6
plant A / device A	op2	b2	A2b2	2	33,6
plant A / device A	op2	b3	A2b3	1	48,8
plant A / device A	op2	b3	A2b3	2	49,4
plant A / device A	op3	b1	A3b1	1	40,0
plant A / device A	op3	b1	A3b1	2	40,3
plant A / device A	op3	b2	A3b2	1	33,8
plant A / device A	op3	b2	A3b2	2	33,4
plant A / device A	op3	b3	A3b3	1	51,7
plant A / device A	op3	b3	A3b3	2	50,1
plant A / device A	op4	b1	A4b1	1	39,1
plant A / device A	op4	b1	A4b1	2	42,3
plant A / device A	op4	b2	A4b2	1	32,5
plant A / device A	op4	b2	A4b2	2	33,2
plant A / device A	op4	b3	A4b3	1	48,1
plant A / device A	op4	b3	A4b3	2	49,1
plant B / device B	op5	b1	B5b1	1	39,1
plant B / device B	op5	b1	B5b1	2	37,2
plant B / device B	op5	b2	B5b2	1	30,5
plant B / device B	op5	b2	B5b2	2	29,6
plant B / device B	op5	b3	B5b3	1	44,8
plant B / device B	op5	b3	B5b3	2	43,3
plant C / device C	op9	b1	C9b1	1	39,1
plant C / device C	op9	b1	C9b1	2	41,1
plant C / device C	op9	b2	C9b2	1	29,7
plant C / device C	op9	b2	C9b2	2	31,5
plant C / device C	op9	b3	C9b3	1	48,1
plant C / device C	op9	b3	C9b3	2	48,2

Ex 9.5a 3 facteurs emboîtés

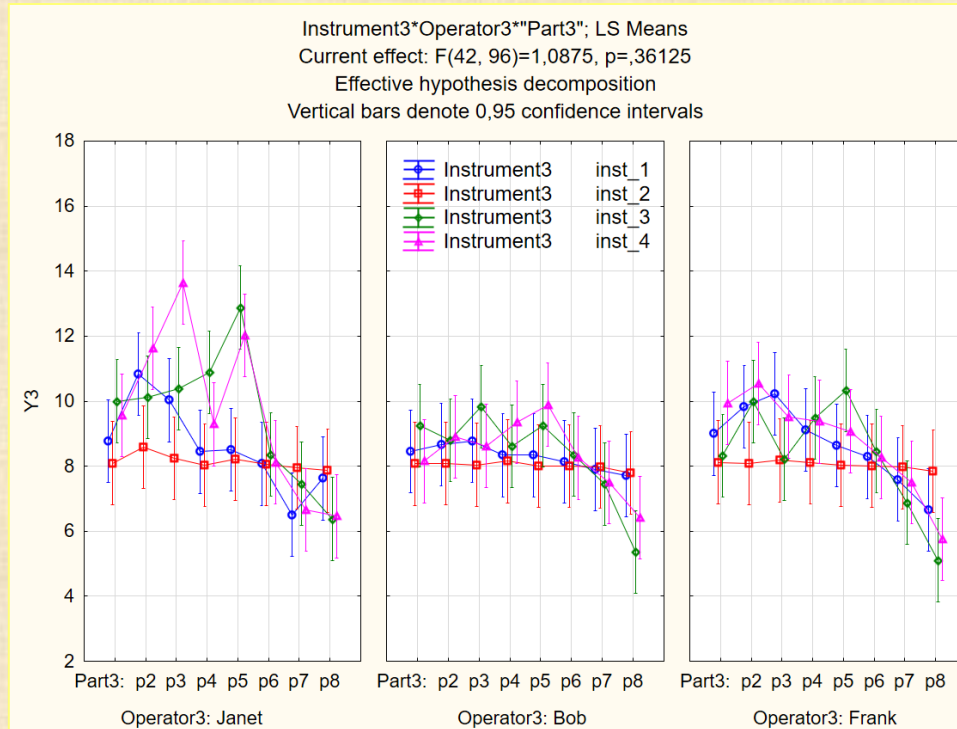
8 c22	9 Instrument4	10 Operator4	11 Part4	12 rep4	13 Y4
ETUDE-4	inst_1	Bob	p1	1	8,2337
données Étude-3	inst_1	Bob	p1	2	8,6809
2 opérateurs : Bob et Janet	inst_1	Bob	p2	1	8,0870
2 instruments : inst1 et inst2	inst_1	Bob	p2	2	9,2345
2 opérateurs : Bob et Janet	inst_1	Bob	p3	1	8,8641
8 pièces distinctes	inst_1	Bob	p3	2	8,7007
2 répétitions (n=2)	inst_1	Bob	p4	1	8,0561
	inst_1	Bob	p4	2	8,6219
3 facteurs croisés	inst_1	Bob	p5	1	8,0690
	inst_1	Bob	p5	2	8,6127
inst X opé X part	inst_1	Bob	p6	1	8,0248
	inst_1	Bob	p6	2	8,2388
2 X 2 X 8 X 2 = 64	inst_1	Bob	p7	1	7,9998
	inst_1	Bob	p7	2	7,8116
.....					
	inst_2	Janet	p7	2	7,9963
	inst_2	Janet	p8	1	7,8178
	inst_2	Janet	p8	2	7,9106

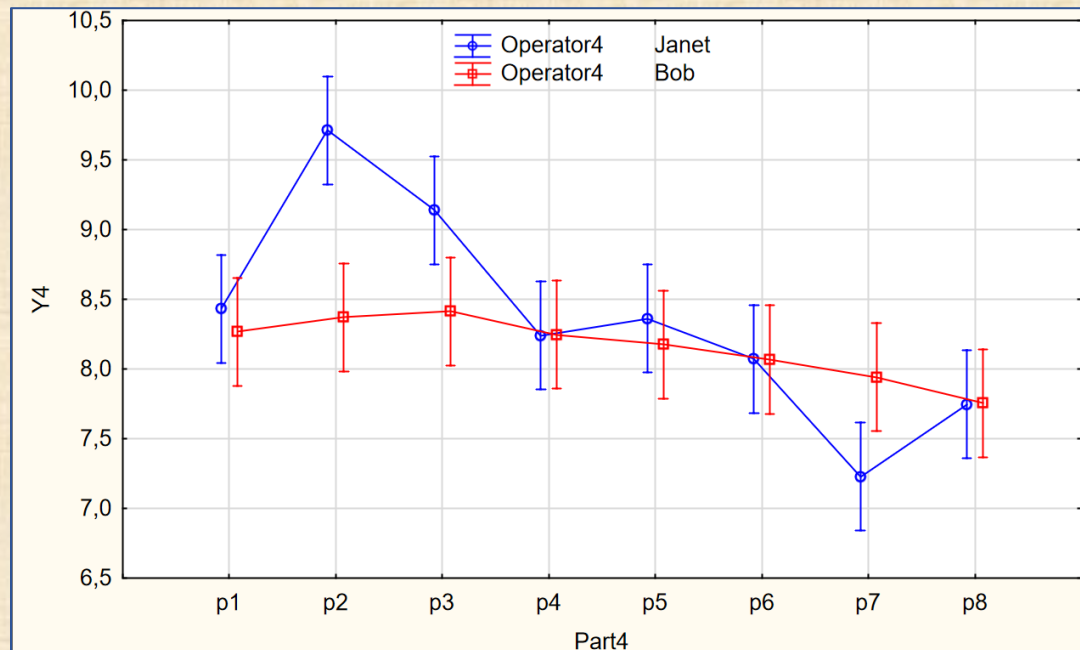
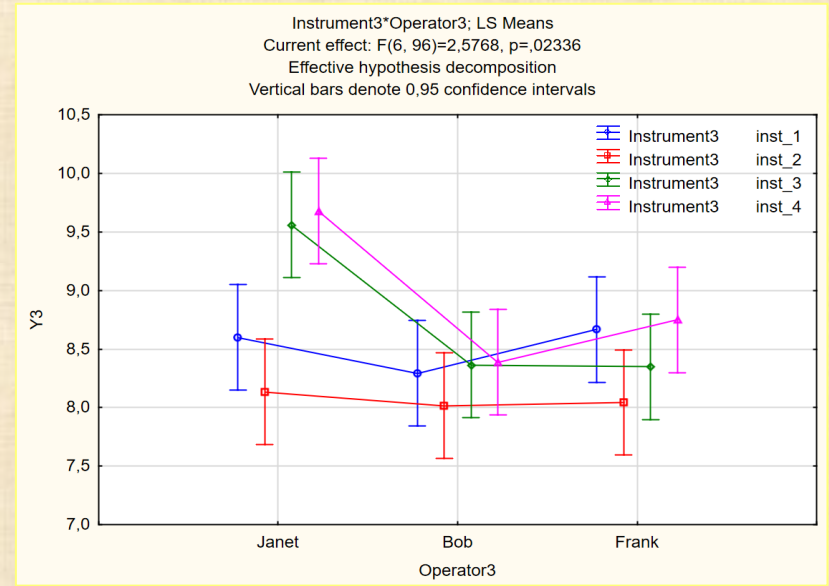
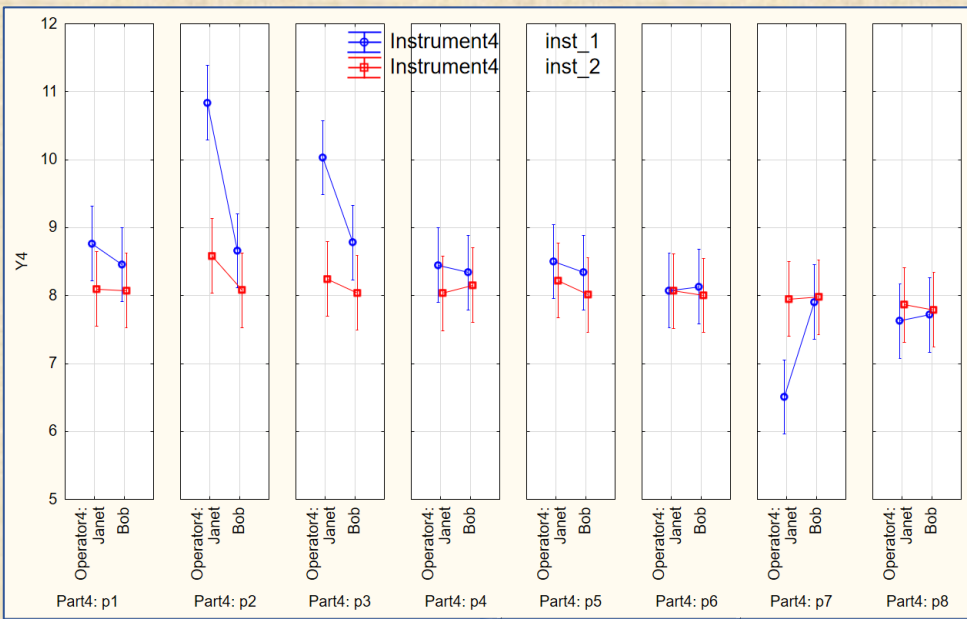


Hypothèse concernant les facteurs : instrument opérateur pièces sont fixés

Effect	Degr. of Freedom	Y3 SS	Y3 MS	Y3 F	Y3 p
Intercept	1	14099,88	14099,88	17093,67	0,000000
Instrument3	3	20,54	6,85	8,30	0,000058
Operator3	2	18,25	9,13	11,06	0,000047
"Part3"	7	176,53	25,22	30,57	0,000000
Instrument3*Operator3	6	12,75	2,13	2,58	0,023356
Instrument3*"Part3"	21	79,63	3,79	4,60	0,000000
Operator3*"Part3"	14	25,91	1,85	2,24	0,011074
Instrument3*Operator3*"Part3"	42	37,67	0,90	1,09	0,361250
Error	96	79,19	0,82		
Total	191	450,48			

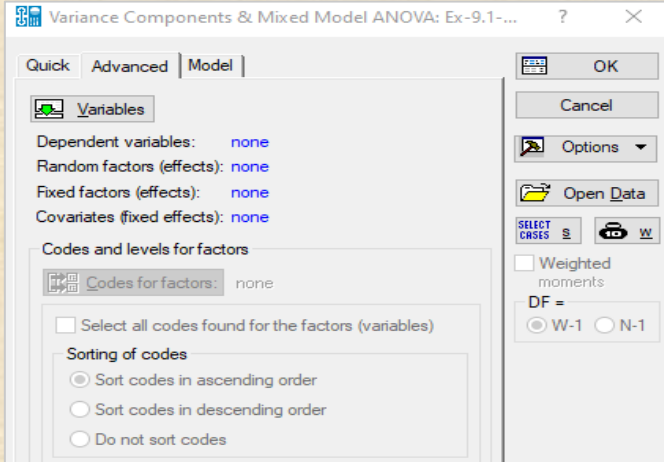
Les 3 facteurs ont un effet principal et d'interaction double significatif sur la mesure Y3



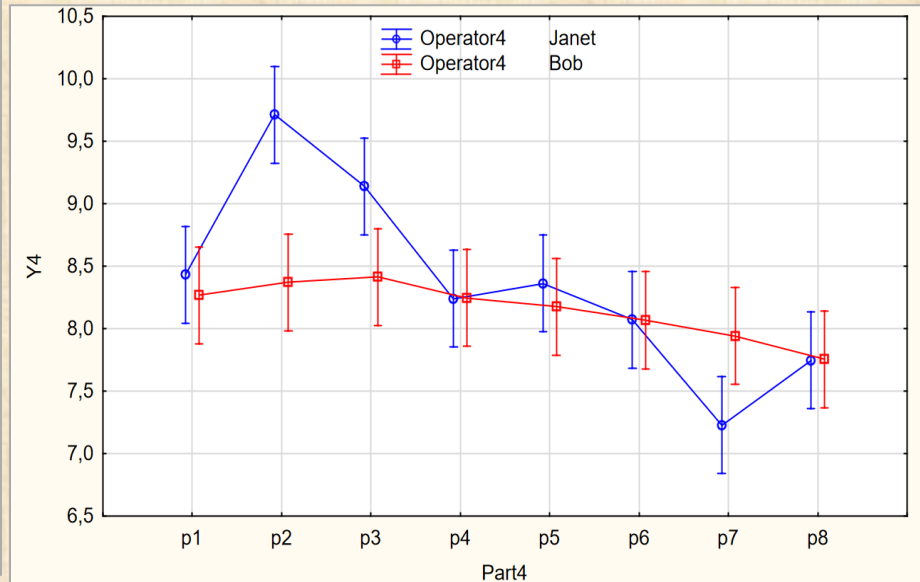
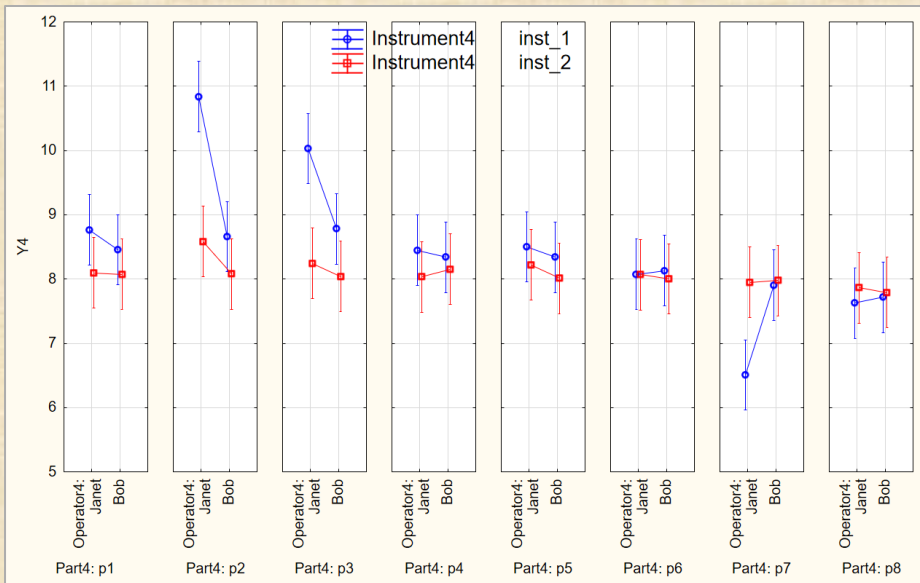


Deuxième hypothèse (plus réaliste) : **instrument** facteur fixé **opérateurs , pièces** facteurs aléatoires

module VEPAC

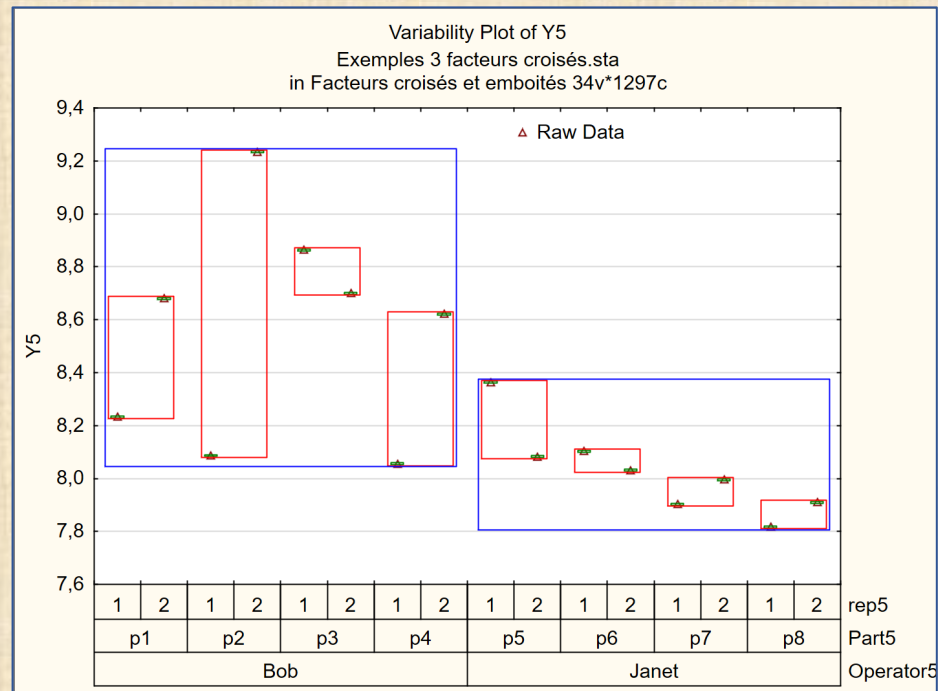


MS Type:	Effect (F/R)	df Effect	MS Effect	df Error	MS Error	F	p
{1}Instrument3	Fixed	3	6,84766	17,30113	5,020385	1,363972	0,286841
{2}Operator3	Random	2	9,12553	9,32583	3,079384	2,963429	0,100862
{3}Part3	Random	7	25,21886	23,74422	4,745780	5,313955	0,000935
1*2	Random	6	2,12549	42,00000	0,896999	2,369561	0,046231
1*3	Random	21	3,79189	42,00000	0,896999	4,227308	0,000035
2*3	Random	14	1,85089	42,00000	0,896999	2,063424	0,035562
1*2*3	Random	42	0,89700	96,00000	0,824860	1,087456	0,361250

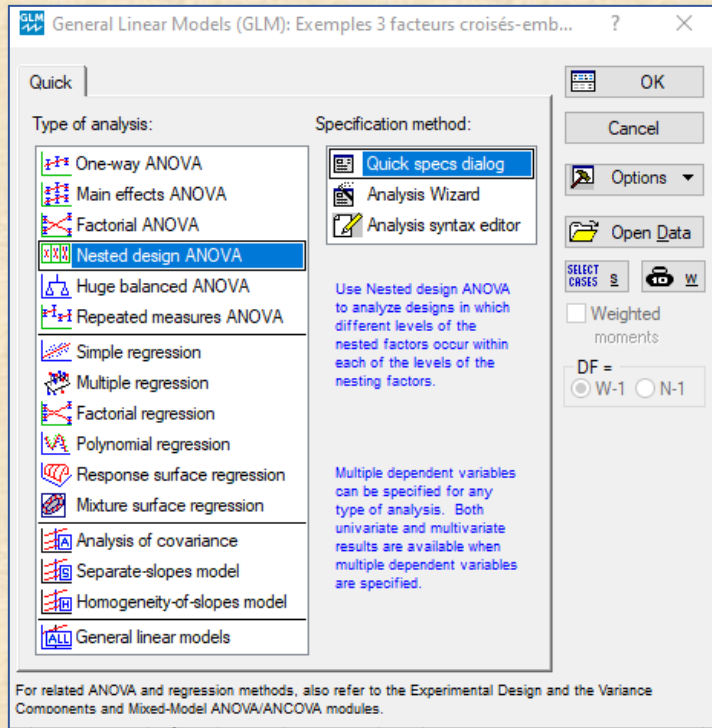


Ex 9.5b 3 facteurs emboîtés

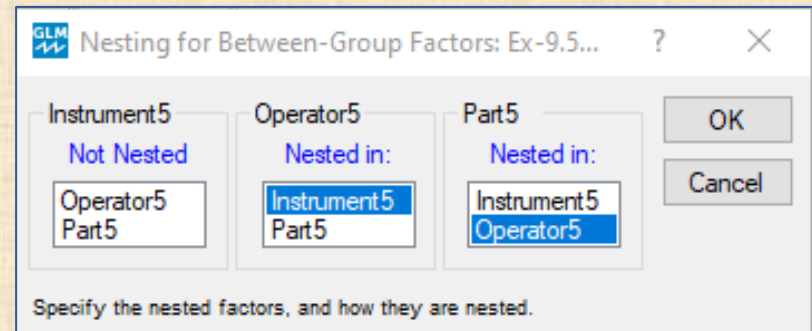
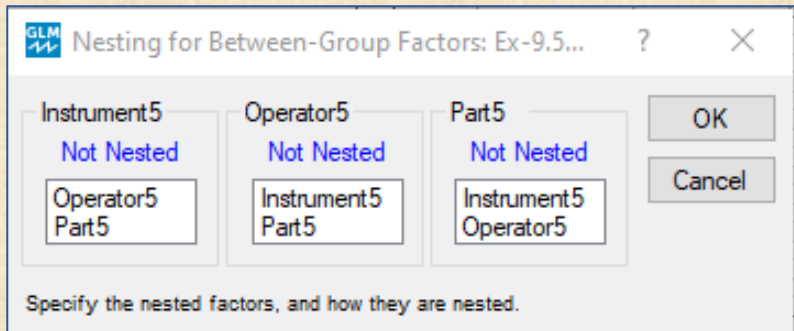
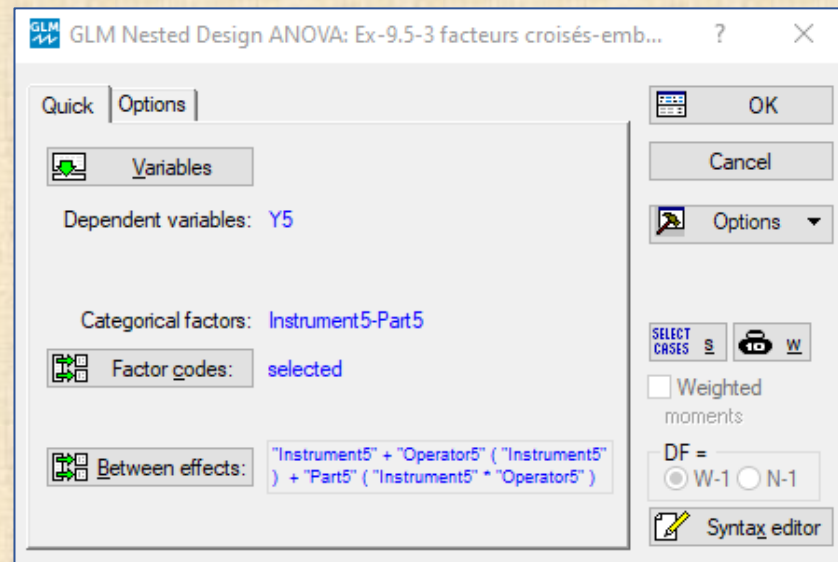
15 c29	16 Instrument5	17 Operator5	18 Part5	19 rep5	20 Y5
Étude-5	inst_1	Bob	p1	1	8,2337
données Étude-3	inst_1	Bob	p1	2	8,6809
3 facteurs complètement emboîtés	inst_1	Bob	p2	1	8,0870
classement hiérarchique	inst_1	Bob	p2	2	9,2345
2 répétitions (n=2)	inst_1	Bob	p3	1	8,8641
	inst_1	Bob	p3	2	8,7007
opérateurs emboîtés dans instrument	inst_1	Bob	p4	1	8,0561
Oper (Inst)	inst_1	Bob	p4	2	8,6219
Bob dans inst_1	inst_2	Janet	p5	1	8,3642
Janet dans inst_2	inst_2	Janet	p5	2	8,0825
	inst_2	Janet	p6	1	8,1035
pieces emboîtées opérateurs	inst_2	Janet	p6	2	8,0316
pieces (opérateurs)	inst_2	Janet	p7	1	7,9033
pièces p1-p2-p3-p4 dans Bob	inst_2	Janet	p7	2	7,9963
pièces p5-p6-p7-p8 dans Janet	inst_2	Janet	p8	1	7,8178
	inst_2	Janet	p8	2	7,9106
2 X 2 X 2 X 2 = 16					



Analyse variance pour facteurs emboîtés



Spécification du modèle



GLM Results 2: Ex-9.5-3 fa... ?

Profiler | Resids | Matrix | Report
Quick | Summary | Means | Comps

All effects/Graphs | All effects

Effect sizes

Between effects

Design terms | Whole model R

Design matrix

Alpha values
Confidence limits: .950
Significance level: .050

More results | Modify | Close
By Group | Options

GLM Results 2: Ex-9.5-3 facteurs croisés-emboîtés.sta in 2021-MTH... ?

Profiler | Custom tests | Residuals 1 | Residuals 2 | Matrix | Report
Summary | Means | Planned comps | Post-hoc | Assumptions

All effects/Graphs | Test all effects | Effect sizes

Univariate results | Desc. cell statistics

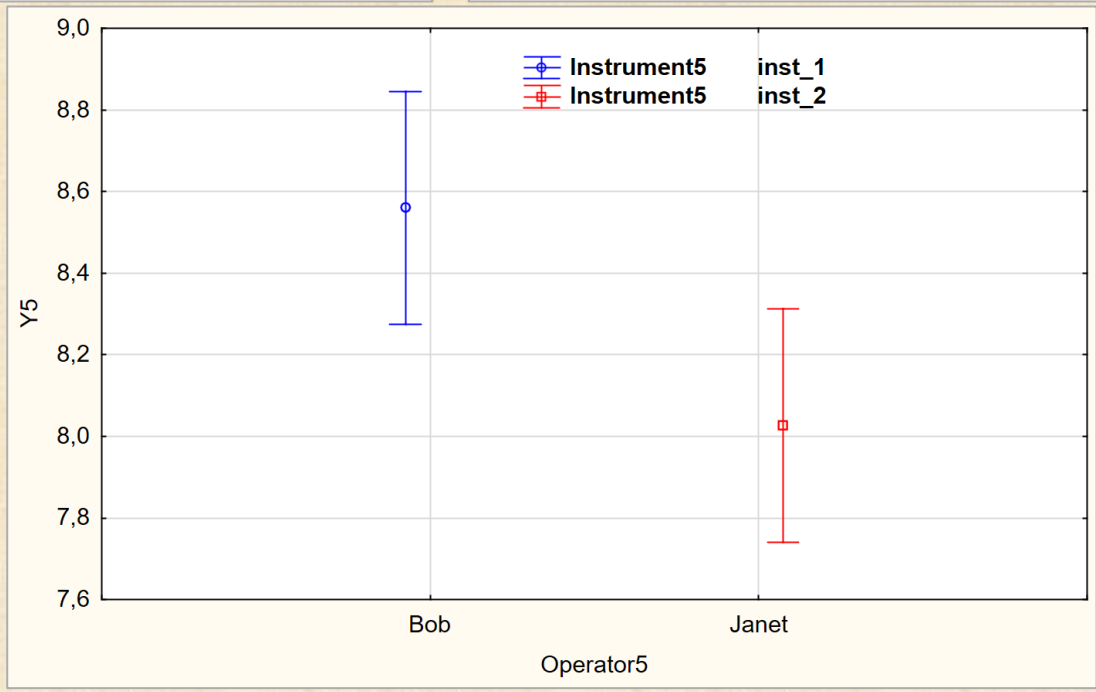
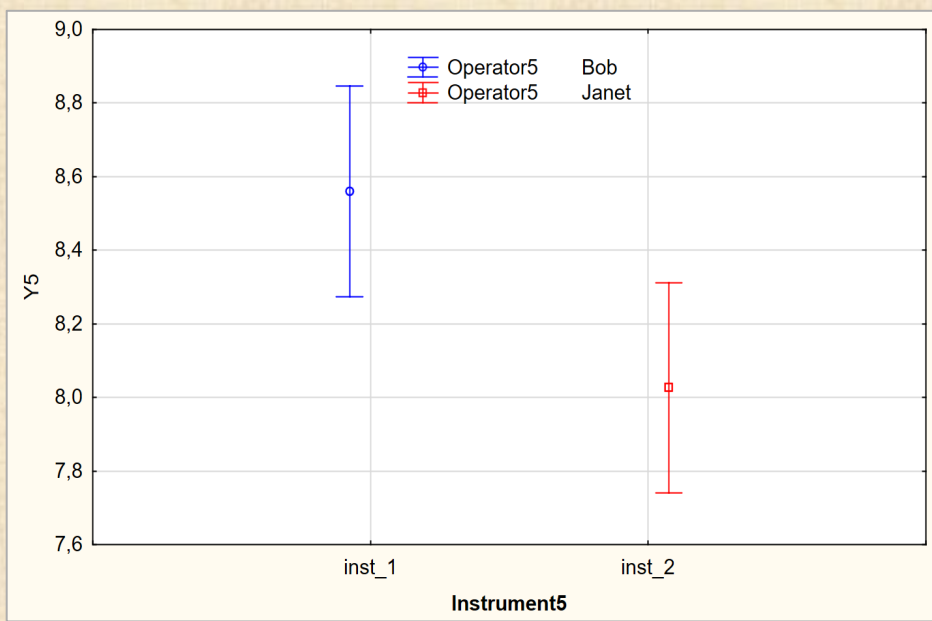
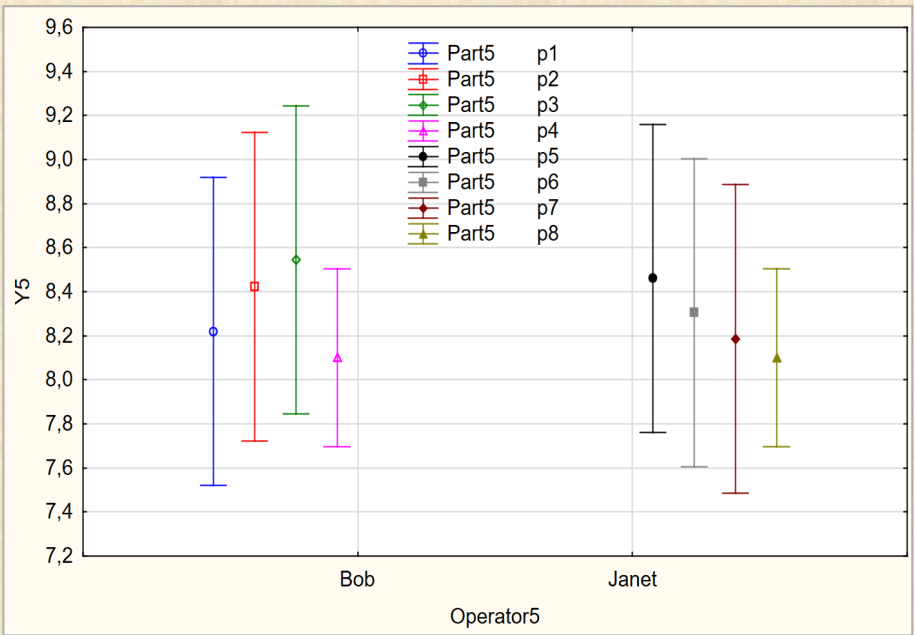
Between effects

Design terms | Whole model R
Coefficients | Estimate
Design matrix

Alpha values
Conf.: .950
Signif.: .050

Less
Close
Modify
Options
By Group

	Degr. of Freedom	Y5 SS	Y5 MS	Y5 F	Y5 p
Effect					
Intercept	1	1100,393	1100,393	8957,813	0,000000
Instrument5	0				
Operator5(Instrument5)	0				
"Part5"(Operator5)	6	0,383	0,064	0,520	0,779354
Error	8	0,983	0,123		
Total	15	2,505			



Effect	Num. DF	Den. DF	F	p
Instrument5	1	6	11,67433	0,014200

Effect	Variance Y5	Standard Error	df	z Value	Prob. z	Alpha	Lower 95,0000%	Upper 95,0000%	Sum	Percent	RSD (%)
Operator5(Instrument5)	0,000000	0,000000							0,000000	0,0000	0,000000
"Part5"(Instrument5*Operator5)	0,000000										
Error	0,122842	0,046430	14,00000	2,645751	0,004075	0,050000	0,065844	0,305537	0,122842	100,0000	4,226287

