

Chapitre 7

Plans en blocs – Analyse covariance

PLANS en BLOCS

- **FACTEURS** : primaires - secondaires
- **CONTRÔLE**
- **ANALYSE**
- **plans fractionnaires** : **LATINS - GRÉCO-LATINS**
- **blocs** : **PLANS 2^k** et **PLANS 2^{k-p}**
- **BLOCS INCOMPLETS**

ANALYSE de COVARIANCE

- **CONTEXTE**
- **EXEMPLES**
- **MODÈLES**
- **STATISTICA**

Plans en blocs – Analyse covariance

- **Blocage de essais** méthode pour traiter facteurs « secondaires » aussi appelés facteurs « nuisibles »
- **Facteurs secondaires** presque toujours présents
- **Absence de contrôle des facteurs secondaires**
peut conduire à ne pas détecter les effets importants des facteurs primaires
- **Facteurs secondaires**
 - typiquement : matière première, unités expérimentales hétérogènes, opérateurs, équipement, temps, ...
 - ont probablement effet (influence) sur la réponse Y
 - ne présentent aucun intérêt en soi
 - non liés aux objectifs de l'expérience liés aux facteurs primaires
- **Stratégies** : contrôler / minimiser l'impact des facteurs secondaires
 - construire plans en bloc : bloquer les essais avec facteurs secondaires
 - analyse covariance : mesurer les facteurs secondaires et éliminer leurs effets potentiels sur la réponse
 - randomiser les essais

Plans en blocs – Analyse covariance

FACTEURS SECONDAIRES		
connu	contrôle	méthode
oui	oui	bloquer les essais = plans en blocs
oui	mesurable	analyse de covariance = enlever effet sur la réponse
non	non	randomiser les essais

« block what you can and randomize what you cannot »
Sir Ronald A. Fisher

blocs : définis par 1 ou plus facteurs secondaires

- carrés latins , Gréco-latins , Hyper Gréco-latins
- 2^{k-p} , Central Composite Design (CCD)
- Box – Benkhen
- BIBD : Balanced Incomplete Block Designs

Ex – 7.1 test de dureté Rockwell

	type matériau			
pointe	m1	m2	m3	m4
A	7,69	10,77	15,75	12,82
B	10,61	9,81	2,03	12,22
C	12,22	13,02	13,55	15,36
D	13,18	14,65	14,96	17,15

BLOCS : matière première

plan factoriel complet avec 2 facteurs

quoi de nouveau ?

- **randomisation** l'intérieur chaque bloc
- **hypothèse** : pas d'interaction
facteur **pointe** et facteur **matériau**
répétitions pas absolument
nécessaire dans chaque cellule

- **Objectif** : comparer 4 types de pointe
A B C D différences ?
- **facteur primaire** : type de pointe
modalités A B C D
- **facteur secondaire** : matériau
4 catégories : m1 m2 m3 m4
facteur bloc
ici: **facteur aléatoire** : car unités
choisies par échantillonnage
- 16 unités expérimentales :
4 m1 + 4 m2 + 4 m3 + 4 m4
- **hypothèse**
 - **hétérogénéité** entre m1 m2 m3 m4
 - **homogénéité** intérieur chaque m
- **but** : étendre les conclusions
aux différents matériaux
- **analyse** : éliminer influence **facteur bloc matériau** pour comparer **pointes**

Ex - 7.2 : carré latin 4 x 4

étude 4 **additifs** essence **A – B – C – D** **facteur principal**

réponse : **Y = consommation (m/g)**

2 facteurs nuisibles : **voiture v1– v2 – v3 - v4**

conducteur c1– c2 – c3 – c4

plan : carré latin 4 x 4

	voiture			
conducteur	v1	v2	v3	v4
c1	A / 21	B / 26	D / 20	C / 25
c2	D / 23	C / 26	A / 20	B / 27
c3	B / 15	D / 13	C / 16	A / 16
c4	C / 17	A / 15	B / 20	D / 20

facteur principal / réponse Y

propriétés du plan carré latin 4 x 4

- 16 des $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ combinaisons Additif x Voiture x Cond
- plan fractionnaire : 4^{3-1}
- **chaque ligne (conducteur)** : 4 **additifs** présents une seule fois
- **chaque colonne (voiture)** : 4 **additifs** présents une seule fois

Ex- 7.3 (Ex-6.1) filtration

ID	A	B	C	D	Y	ABCD	
						= 1	= - 1
					fraction		
1	24	10	2	15	45	oui	
2	35	10	2	15	71		oui
3	24	15	2	15	48		oui
4	35	15	2	15	65	oui	
5	24	10	4	15	68		oui
6	35	10	4	15	60	oui	
7	24	15	4	15	80	oui	
8	35	15	4	15	65		oui
9	24	10	2	30	43		oui
10	35	10	2	30	100	oui	
11	24	15	2	30	45	oui	
12	35	15	2	30	104		oui
13	24	10	4	30	75	oui	
14	35	10	4	30	86		oui
15	24	15	4	30	70		oui
16	35	15	4	30	96	oui	

A : temp (deg C)	24 - 35
B: pression (psig)	10 - 15
C: concentration (%)	2 - 4
D : taux rotation (rpm)	15 - 30
Y : taux de filtration (g/h)	réponse

Utiliser ABCD - mettre un 5^{ième} facteur E

$$E = ABCD$$

= facteur bloc = facteur secondaire

randomisation

à l'intérieur de chaque bloc (-1) et (+1)

modèle pour l'analyse

- pas d'effet d'interaction entre E
et A, B, C, D

- E effet principal seulement

Ex- 7.3 (Ex-6.3)

moulage injection

		FACTEUR	UNITÉS	- 1	+ 1
1	A	Température moule	deg F	130	180
2	B	Holding Pressure	psig	1200	1500
3	C	Booster Pressure	psig	1500	1800
4	D	Moisture	pourcent	0.05	0.15
5	E	Vitesse vis	po /sec	1.5	4.0
6	F	Temps cycle	secondes	25	30
7	G	Gate size	mille	30	50

facteur 6 = **F** = ABCD

facteur 7 = **G** = ABDE

facteur 8 = **LINE** = facteur bloc

= ligne 1 ou ligne 2

= facteur secondaire

= **H** = CDG

plan : 2 blocs de 16 essais

Plan 2⁷⁻²

1 std	2 run	3 line	4 A temp moule	5 B temps cycle	6 C pression booster	7 D humidité	8 E vitesse vis	9 F pression retenue	10 G taille ouverture	11 Yret %
4	28	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	0,898
5	26	2	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	0,916
6	2	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1,130
7	17	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0,760
8	12	2	1	1	1	-1	-1	-1	1	0,730
9	14	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0,838
10	23	2	1	-1	-1	1	-1	1	1	0,669
11	5	2	-1	1	-1	1	-1	1	1	1,060
12	31	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	0,956
13	27	2	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1,780
14	3	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1,660
15	18	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1,080
16	16	2	1	1	1	1	-1	1	-1	1,230
17	32	2	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	0,922
18	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	0,815
19	20	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1,100
20	9	2	1	1	-1	-1	1	1	-1	0,858
21	13	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1,170
22	24	2	1	-1	1	-1	1	1	1	1,040
23	6	2	-1	1	1	-1	1	1	1	0,780
24	29	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1,020
25	30	2	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0,939
26	8	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0,909
27	22	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1,060
28	15	2	1	1	-1	1	1	-1	1	0,916
29	10	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1,680
30	19	2	1	-1	1	1	1	-1	-1	1,440
31	7	2	-1	1	1	1	1	-1	-1	1,330
32	25	1	1	1	1	1	1	1	1	1,210

Analyse plan en bloc complet avec 1 facteur principal

plan en bloc avec 1 facteur primaire (principal)

- **facteur primaire A** avec **a modalités** : $i = 1, 2, \dots, a$
- **facteur bloc (secondaire) B** avec **b modalités** : $j = 1, 2, \dots, b$
- **randomisation des essais** à l'intérieur de chaque bloc
- **en général** : pas de répétitions dans chaque cellule (i, j)
- **modèle sans interaction** entre A et B

modèle

réponse = effet général + effet traitement + effet bloc + erreur

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b$$

tableau des données

A \ B	1	2	3	b	moyennes
1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	$\dots y_{1b}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	$\dots y_{2b}$	$\bar{y}_{2.}$
i	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	$\dots y_{ib}$	$\bar{y}_{i.}$
a	y_{a1}	y_{a2}	y_{a3}	$\dots y_{ab}$	$\bar{y}_{a.}$
moyennes	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$	$\bar{y}_{.3}$	$\dots \bar{y}_{.b}$	$\bar{y}_{..}$

$$\bar{y}_{i.} = \sum y_{ij} / b$$

$$\bar{y}_{.j} = \sum y_{ij} / a$$

$$\bar{y}_{..} = \sum \sum y_{ij} / ab$$

ANOVA : décomposition de la variabilité

$$\begin{aligned}\sum\sum(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= \sum\sum [(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})]^2 \\ &= b \sum(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a \sum(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \sum\sum (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2\end{aligned}$$

$$SS_{\text{tot}} = \sum\sum(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \quad \text{variabilité totale}$$

$$SS_{\text{trait}} = b \sum(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \quad \text{variabilité traitement}$$

$$SS_{\text{bloc}} = a \sum(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 \quad \text{variabilité bloc}$$

$$SS_{\text{err}} = \sum\sum (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \quad \text{erreur (résiduelle)}$$

$$SS_{\text{tot}} = SS_{\text{trait}} + SS_{\text{bloc}} + SS_{\text{err}}$$

ANOVA : décomposition de la variabilité

Tableau d'analyse de la variance

Source	SS	df	MS	F
traitement	SS_{trait}	$a - 1$	$SS_{\text{trait}} / (a - 1)$	$F_0 = MS_{\text{trait}} / MS_{\text{err}}$
bloc	SS_{bloc}	$b - 1$	$SS_{\text{bloc}} / (b - 1)$	$F_1 = MS_{\text{bloc}} / MS_{\text{err}}$
resid	SS_{err}	$(a - 1)(b - 1)$	$S_{\text{err}} / (a - 1)(b - 1)$	-----
total	SS_{tot}	$ab - 1$	-----	-----

hypothèse principale à tester $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$
rejet si $F_0 > F_{df1, df2, 1 - \alpha}$ $df1 = a - 1$ $df2 = (a-1)(b-1)$

hypothèse $H_1 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$ **pas d'effet bloc**
rejet si $F_1 > F_{df3, df2, 1 - \alpha}$ $df3 = b - 1$ $df2 = (a-1)(b-1)$

en général, cette hypothèse ne présente pas d'intérêt

Ex – 7.1 test de dureté Rockwell

analyse avec STATISTICA

Statistics ... ANOVA ... Main effects ANOVA

General ANOVA/MANOVA: Ex-7.3-réaction.sta

Quick | OK | Cancel | Options | Open Data

Type of analysis: **Main effects ANOVA**

Specification method: Quick specs dialog

ANOVA/MANOVA Main Effects ANOVA: Ex-7.1-durété.sta

Quick | Options

Dependent variables: Y

Categorical factors: **Pointe-Matériau**

Factor codes: none

Between effects: **Pointe + Matériau**

ANOVA Results 1: Ex-7.1-durété.sta

Profiler | Custom tests | Residuals 1 | Residuals 2 | Matrix | Report

Summary | Means | Planned comps | Post-hoc | Assumptions

All effects/Graphs | Test all effects | Effect sizes

Univariate results | Desc. cell statistics

Between effects: Design terms | Whole model R | Coefficients | Estimate

Alpha values: Conf.: .950 | Signif.: .050

ANOVA Results 1: Ex-7.1-dur

Profiler | Resids | Matrix | Report

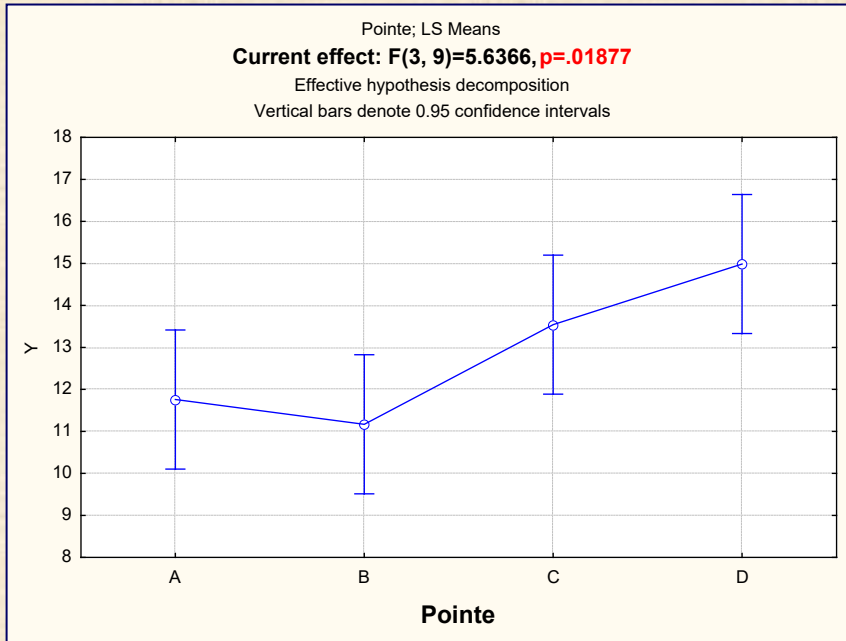
Quick | Summary | Means | Comps

All effects/Graphs | All effects | Effect sizes

Alpha values: Confidence limits: .950 | Significance level: .050

More results | Modify | Close | Options

Ex – 7.1 test de dureté Rockwell

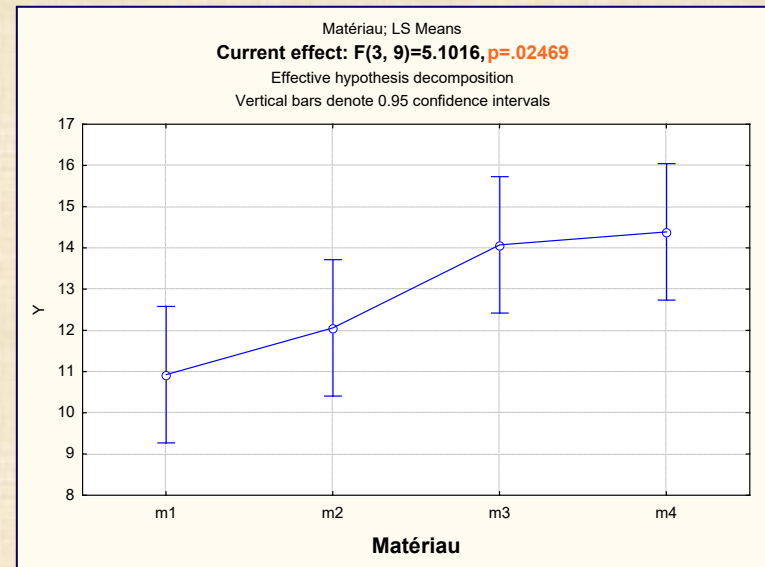


pointes différentes

**lesquelles ?
comparaisons Tukey**

ANOVA

	df	Y SS	Y MS	Y F	Y p
Intercept	1	2646.59	2646.59	1236.07	0.00000
Pointe	3	36.21	12.07	5.64	0.01877
Matériau	3	32.77	10.92	5.10	0.02469
Error	9	19.27	2.14		
Total	15	88.25			



**matériaux : différents
mais on savait**

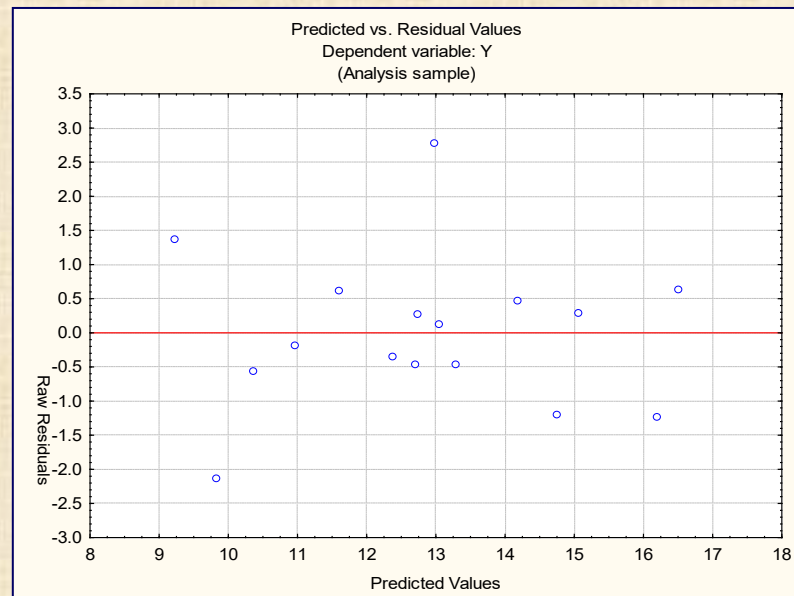
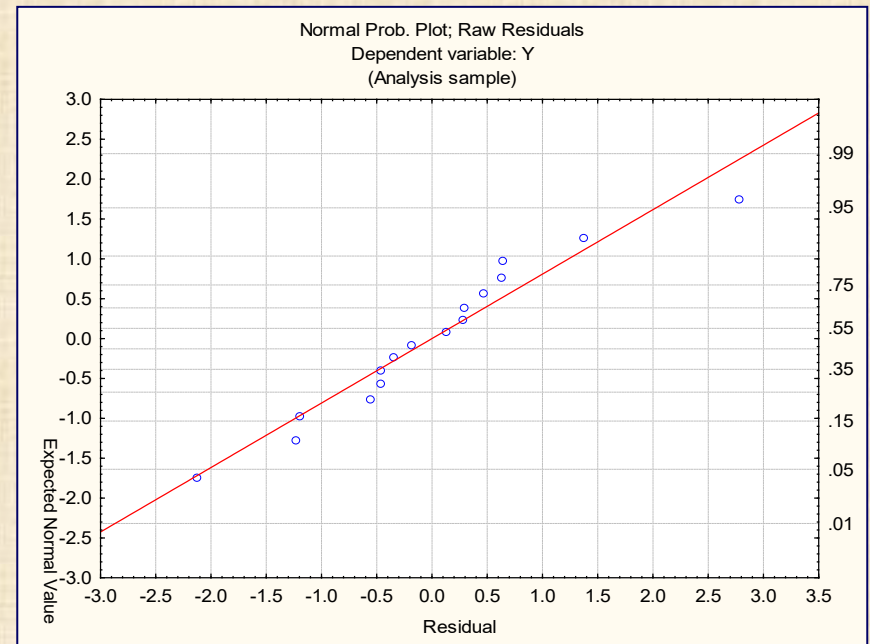
Ex – 7.1 test de dureté Rockwell

Tukey HSD test; variable Y

	Pointe	{1}	{2}	{3}	{4}
1	A		0.9387	0.3672	0.0503
2	B			0.1711	0.0215
3	C				0.5319
4	D				

différence entre :
 pointe A et pointe D
 pointe B et pointe D

analyse des résidus : OK



Plans carrés latins

3 facteurs : **1 principal** + **2 secondaires**

secondaire1 = rangée secondaire2 = colonne

- facteur principal avec **m** modalités A B C D ...
 - **2** facteurs secondaires avec chacun **m** modalités
- agrégation des modalités pour en avoir **p** si nécessaire

modèle d'analyse

- effets principaux seulement
- aucun effet d'interaction

carrés latins standards p = 3 - 4 - 5 - 6

3 x 3

A B C
B C A
C A B

4 x 4

A B C D
B C D A
C D A B
D A B C

5 x 5

A B C D E
B C D E A
C D E A B
D E A B C
E A B C D

6 X 6

A B C D E F
B C D E F A
C D E F A B
D E F A B C
E F A B C D
F A B C D E

autres carrés latins : permutation des rangées et colonnes

Plans : carrés Latins avec Statistica: p = 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9

The screenshot shows the Statistica interface with several dialog boxes open. The main window is 'Design & Analysis of Latin Square Experiments: Chap2-un facteur.st...'. A 'Select 1 Latin Squa...' dialog box is open, showing two designs: Design 1 and Design 2. Design 1 is selected and shows the following permutations: ABC, BCA, CAB. Design 2 is unselected and shows: ABC, CAB, BCA. The 'Display' option is set to 'Letters'. Another dialog box, 'Select 1 Latin Square: C...', is also open, showing two designs: Design 1 (checked) and Design 2. Design 1 shows the following permutations: ABCDEFG, BCDEFGA, CDEFGAB, DEFGABC, EFGABCD, FGABCDE, GABCDEF. Design 2 shows: ABCDEFG, CDEFGAB, EFGABCD, GABCDEF, BCDEFGA, DEFGABC, FGABCDE. The 'Display' option is set to 'Letters'. In the background, the 'Design & Analysis of Experiments: Ex-7.2-carré latin.s' window is visible, showing a list of design types, with 'Latin squares, Greco-Latin squares' selected. The 'Design & Analysis of Latin Square Experiments: Chap2-un facteur.st...' window shows 'Design: 3 factor Latin Square' and 'No of levels: 7 (min=3; max=9)'. The 'Available designs' section indicates 'There are 2 valid designs available'. The 'Selection of specific design' section has 'by user' selected, with a 'Select' button.

modalités doivent être représentées avec des valeurs entières : 1, 2, 3, ... dans le fichier d'analyse

**Plans Gréco-latins : contrôle de 3 facteurs secondaires
superposition de 2 carrés latins orthogonaux**

Plans carrés Latins

- contrôle **2** facteurs secondaires

Plans Gréco-Latins

- contrôle **3** facteurs secondaires
- construction :
superposition de 2
plans latins orthogonaux
- exemple : 4 plans orthogonaux
avec $p = 5$ modalités
- n'existe pas pour $p = 6$

Plans Hyper Gréco-Latins

- contrôle de **k = 4 et plus**
facteurs secondaires
- construction : superposition de
k-1 plans latins orthogonaux

Carrés latins 3 x 3

plan1	plan2
A B C	A B C
B C A	C A B
C A B	B C A

Carrés latins 4 x 4

plan1	plan2	plan3
A B C D	A B C D	A C B D
B A D C	C D A B	D B C A
C D A B	D C B A	C A D B
D C B A	B A D C	B D A C

Carrés latins 5 x 5

plan1	plan2	plan3	plan4
A B C D E	A B C D E	A B C D E	A B C D E
B C D E A	C D E A B	E A B C D	D E A B C
C D E A B	E A B C D	D E A B C	B C D E A
E A B C D	D E A B C	B C D E A	C D E A B
D E A B C	B C D E A	C D E A B	E A B C D

Carré latin 6 x 6 il n'y a pas de plans Gréco-Latin 6 X 6

A B C D E F
B C F A D E
C F B E A D
D E A B F C
E A D F C B
F D E C B A

Carrés latins 7 x 7

Level	2 carrés latins 7 x 7 : 1=A 2=B 3=C 4=D 5=E 6=F 7=G														
	1	2	3	4	5	6	7	new	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	4	5	6	7	1		3	4	5	6	7	1	2
3	3	4	5	6	7	1	2		5	6	7	1	2	3	4
4	4	5	6	7	1	2	3		7	1	2	3	4	5	6
5	5	6	7	1	2	3	4		2	3	4	5	6	7	1
6	6	7	1	2	3	4	5		4	5	6	7	1	2	3
7	7	1	2	3	4	5	6		6	7	1	2	3	4	5

Carrés latins 8 x 8

Design 1	Design 2
12345678	12345678
21436587	56781234
34127856	21436587
43218765	65872143
56781234	78563412
65872143	34127856
78563412	87654321
87654321	43218765

Ex - 7.2a : carré latin 4 x 4

étude 4 **additifs** essence **A – B – C – D** **facteur principal**

réponse : Y = consommation (m/g)

2 facteurs nuisibles : **voiture v1– v2 – v3 - v4**

conducteur c1– c2 – c3 – c4

plan : carré latin 4 x 4

	voiture			
conducteur	v1	v2	v3	v4
c1	A / 21	B / 26	D / 20	C / 25
c2	D / 23	C / 26	A / 20	B / 27
c3	B / 15	D / 13	C / 16	A / 16
c4	C / 17	A / 15	B / 20	D / 20

facteur principal
/ réponse Y

propriétés du plan carré latin 4 x 4

- 16 des $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ combinaisons **Additif x Voiture x Conducteur**
- plan fractionnaire : 4^{3-1}
- **chaque ligne (conducteur)** : 4 **additifs** présents une seule fois
- **chaque colonne (voiture)** : 4 **additifs** présents une seule fois

moyenne additif	A : 18	B : 22	C : 21	D : 19
moyenne conducteur	c1 : 23	c2 : 24	c3 : 15	c4 : 19
moyenne voiture	v1 : 19	v2 : 20	v3 : 19	v4 : 22

Ex - 7.2a : carré latin 4 x 4

1	2	3	4	conducteur	vo1	vo2	vo3	vo4
1	2	3	4	c1	A	B	C	D
2	1	4	3	c2	B	A	D	C
3	4	1	2	c3	C	D	A	B
4	3	2	1	c4	D	C	B	A

Design & Analysis of Latin Square Experiments: Ex-7.2-carré la... ?

Design experiment Analyze design

Design: 3factor Latin Square

No of levels: 4 (min=3; max=9)

Available designs: There are 3 valid designs available

Selection of specific design

by random

by user

OK Cancel Options

Standard Run	F			NewVar
	1	2	3	
1	1	1	1	
2	1	2	2	
3	1	3	3	
4	1	4	4	
5	2	1	2	
6	2	2	1	
7	2	3	4	
8	2	4	3	
9	3	1	3	
10	3	2	4	
11	3	3	1	
12	3	4	2	
13	4	1	4	
14	4	2	3	
15	4	3	2	
16	4	4	1	

Select 1 Latin Square: Ex-7.2-c... ?

Design 1 Design 2 Design 3

OK Cancel

1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4

2 1 4 3 3 4 1 2 4 3 2 1

3 4 1 2 4 3 2 1 2 1 4 3

4 3 2 1 2 1 4 3 3 4 1 2

Display

Numbers

Letters

Select 1 Latin Square: Ex-7.2-c... ?

Design 1 Design 2 Design 3

OK Cancel

A B C D A B C D A B C D

B A D C C D A B D C B A

C D A B D C B A B A D C

D C B A B A D C C D A B

Display

Numbers

Letters

1	2	3	4	5	6	7	8
ID	Conducteur	Voiture	Additif	Y_consom	Cond	Voit	Add
1	c1	v1	A	21	1	1	1
2	c1	v2	B	26	1	2	2
3	c1	v3	D	20	1	3	4
4	c1	v4	C	25	1	4	3
5	c2	v1	D	23	2	1	4
6	c2	v2	C	26	2	2	3
7	c2	v3	A	20	2	3	1
8	c2	v4	B	27	2	4	2
9	c3	v1	B	15	3	1	2
10	c3	v2	D	13	3	2	4
11	c3	v3	C	16	3	3	3
12	c3	v4	A	16	3	4	1
13	c4	v1	C	17	4	1	3
14	c4	v2	A	15	4	2	1
15	c4	v3	B	20	4	3	2
16	c4	v4	D	20	4	4	4

Plans carrés latins : modèle et analyse

modèle carré latin $p \times p$

réponse = effet général + effet traitement + effet rangée +
 + effet colonne + erreur

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \beta_k + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, p \quad j = 1, 2, \dots, p \quad k = 1, 2, \dots, p$$

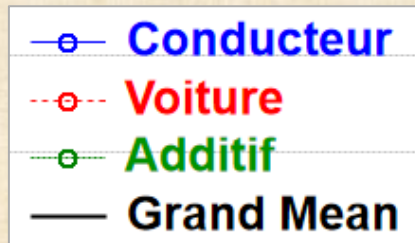
p^2 triplets (i, j, k) utilisés parmi p^3 cas possibles

ANOVA

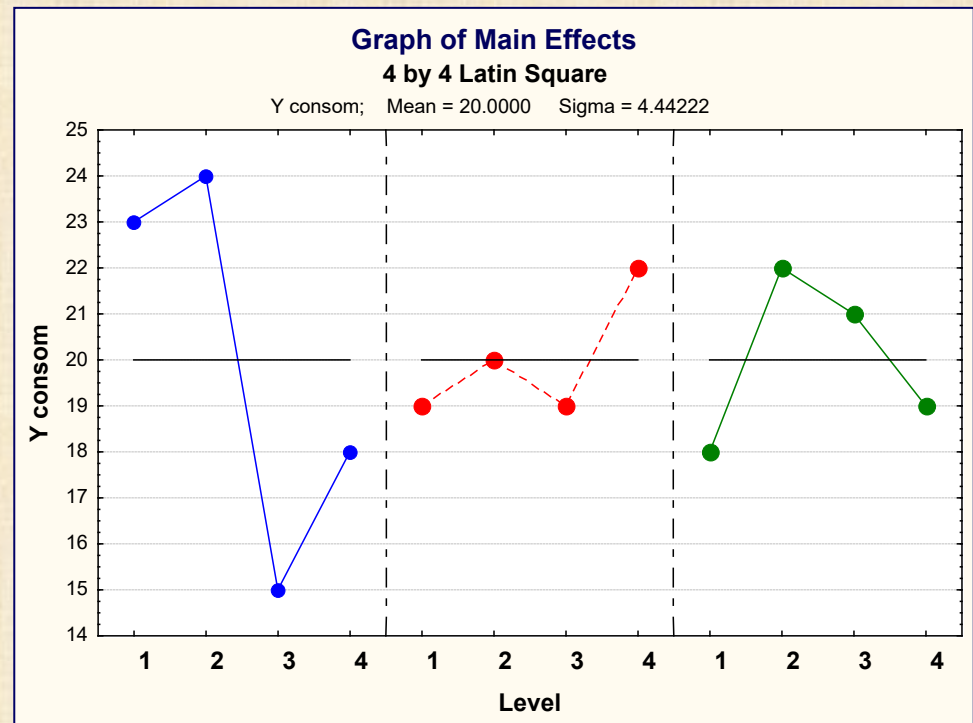
Source	SS	df	MS = SS/df	F
traitement	SS_{trait}	$p - 1$	MS_{trait}	MS_{trait} / MS_E
rangée	$SS_{\text{rangée}}$	$p - 1$	$MS_{\text{rangée}}$	-----
colonne	SS_{colonne}	$p - 1$	MS_{colonne}	-----
erreur	SS_E	$(p-2)(p-1)$	MS_E	-----
Total	SS_{tot}	$p^2 - 1$	-----	

Ex - 7.2a : carré latin 4 x 4

	Cond	Voiture	Additif	Y
1	1	1	1	21
2	1	2	2	26
3	1	3	4	20
4	1	4	3	25
5	2	1	4	23
6	2	2	3	26
7	2	3	1	20
8	2	4	2	27
9	3	1	2	15
10	3	2	4	13
11	3	3	3	16
12	3	4	1	16
13	4	1	3	17
14	4	2	1	15
15	4	3	2	20
16	4	4	4	20



Source	SS	df	MS	F	p
Conducteur	216.00	3	72.000	27.000	0.0007
Voiture	24.00	3	8.000	3.000	0.1170
Additif	40.00	3	13.333	5.000	0.0452
Residual	16.00	6	2.667		



Ex - 7.2b : Plan Gréco-Latin 5 x 5

Plan Greco-Latin 5 x 5

Plan Greco-Latin 5 x 5

Exemple Montgomery 8ed p.159-161-167 Rocket Propellant

Facteur1 fact_ligne : lot matériau / modalités = m1 m2 m3 m4 m5

1L 2L 3L 4L 5L

Facteur2 fact_colonne : opérateurs / modalités = op1 op2 op3 op4 op5

1C 2C 3C 4C 5C

Facteur3 fact_1 : formulation / modalités = A B C D E

1 2 3 4 5

Facteur4 fact_2 : usine / modalités = a b c d e

1 2 3 4 5

structure du plan Gréco-Latin

2 info	3 ligne	4 1C	5 2C	6 3C	7 4C	8 5C
2 carrés	1L	A a	B b	C c	D d	E e
latins	2L	B c	C d	D e	E a	A b
orthogonaux	3L	C e	D a	E b	A c	B d
superposés	4L	D b	E c	A d	B e	C a
	5L	E d	A e	B a	C b	D c

9 new	10 ligne	11 colonne	12 facteur1	13 facteur2
réorganisation	1L	1C	A	a
du carré	1L	2C	B	b
latin	1L	3C	C	c
	1L	4C	D	d
	1L	5C	E	e
	2L	1C	B	c
	2L	2C	C	d
	2L	3C	D	e
	2L	4C	E	a
	2L	5C	A	b
	3L	1C	C	e
	3L	2C	D	a
	3L	3C	E	b
	3L	4C	A	c
	3L	5C	B	d
	4L	1C	D	b
	4L	2C	E	c
	4L	3C	A	d
	4L	4C	B	e
	4L	5C	C	a
	5L	1C	E	d
	5L	2C	A	e
	5L	3C	B	a
	5L	4C	C	b
	5L	5C	D	c

9 new	10 ligne	11 colonne	12 facteur1	13 facteur2	14 new	15 lig_mat	16 col_o p	17 fact_1 formulation	18 fact_2 usine	19 new	20 matériau	21 operateurs	22 formulation	23 usine	24 Y_reponse
réorganisation	1L	1C	A	a	modalités	m1	op1	A	a	valeurs	1	1	1	1	24
du carré	1L	2C	B	b	réelles	m1	op2	B	b	entières	1	2	2	2	20
latin	1L	3C	C	c		m1	op3	C	c	pour	1	3	3	3	19
	1L	4C	D	d		m1	op4	D	d	l'analyse	1	4	4	4	24
	1L	5C	E	e		m1	op5	E	e		1	5	5	5	24
	2L	1C	B	c		m2	op1	B	c		2	1	2	3	17
	2L	2C	C	d		m2	op2	C	d		2	2	3	4	24
	2L	3C	D	e		m2	op3	D	e		2	3	4	5	30
	2L	4C	E	a		m2	op4	E	a		2	4	5	1	27
	2L	5C	A	b		m2	op5	A	b		2	5	1	2	36
	3L	1C	C	e		m3	op1	C	e		3	1	3	5	18
	3L	2C	D	a		m3	op2	D	a		3	2	4	1	38
	3L	3C	E	b		m3	op3	E	b		3	3	5	2	26
	3L	4C	A	c		m3	op4	A	c		3	4	1	3	27
	3L	5C	B	d		m3	op5	B	d		3	5	2	4	21
	4L	1C	D	b		m4	op1	D	b		4	1	4	2	26
	4L	2C	E	c		m4	op2	E	c		4	2	5	3	31
	4L	3C	A	d		m4	op3	A	d		4	3	1	4	26
	4L	4C	B	e		m4	op4	B	e		4	4	2	5	23
	4L	5C	C	a		m4	op5	C	a		4	5	3	1	22
	5L	1C	E	d		m5	op1	E	d		5	1	5	4	22
	5L	2C	A	e		m5	op2	A	e		5	2	1	5	30
	5L	3C	B	a		m5	op3	B	a		5	3	2	1	20
	5L	4C	C	b		m5	op4	C	b		5	4	3	2	29

modèle analyse Gréco-Latin p x p : effets principaux seulement

réponse = effet général + effet traitement + effet rangée + effet colonne + effet grec + erreur

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \beta_k + \gamma_l + \epsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \dots, p \quad j = 1, 2, \dots, p \quad k = 1, 2, \dots, p$$

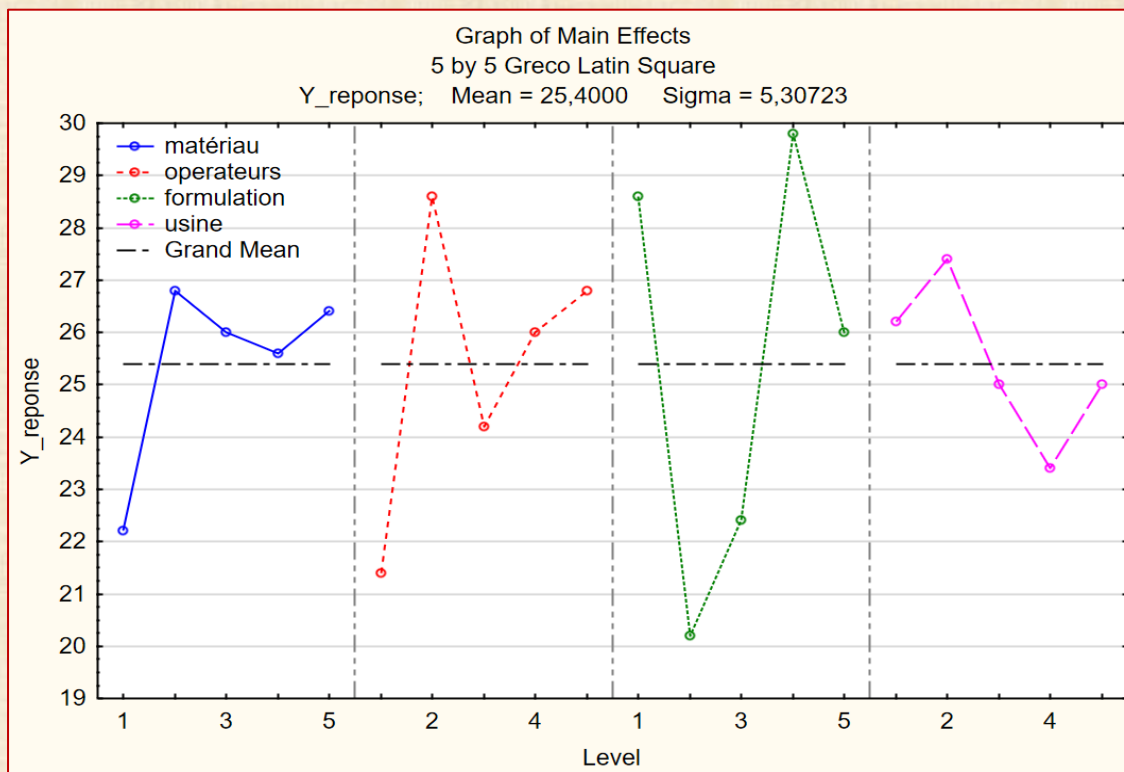
p² quadruplets (i, j, k, l) utilisés parmi p⁴ cas possibles d'un plan complet

ANOVA

Analysis of Variance (Ex-7.2b-Gréco-Latin 5x5-ex.sta)						
5 by 5 Greco Latin Square						
Y_reponse; Mean = 25,4000 Sigma = 5,30723						
Effect	Effect	SS	df	MS	F	p
matériau	matériau	68,0	4	17,0	1,63	0,2566
opérateurs	opérateurs	150,0	4	37,5	3,61	0,0579
formulation	formulation	330,0	4	82,5	7,93	0,0069
usine	usine	44,8	4	11,2	1,08	0,4284
Residual	Residual	83,2	8	10,4		

design orthogonal

Correlations (Ex-7.2b-Gréco-Latin 5x5-ex.sta)						
Marked correlations are significant at $p < ,05000$						
N=25 (Casewise deletion of missing data)						
Variable	Means	Std.Dev.	matériau	opérateurs	formulation	usine
matériau	3	1,44	1	0	0	0
opérateurs	3	1,44	0	1	0	0
formulation	3	1,44	0	0	1	0
usine	3	1,44	0	0	0	1



CRÉATION de PLANS EN BLOCS avec des répétitions ($n > 1$)

départ : plan complet de facteurs primaires

b = nombre modalités du (des) facteur(s) nuisibles (secondaires)

= nombre blocs = nombre de répétitions (aussi noté n)

N = nombre essais plan facteurs primaires

$N_B = N \times b$ = nombre d'essais plan en blocs ... peut être grand

**PLAN en blocs : croisement du plan de facteurs primaires par lui-même X b fois
(plan facteurs primaires) X (plan facteurs primaires) X ... X (plan facteurs primaires)**

APPLICATION : plans 2^k avec $n (=b)$ répétitions

- **répétitions employées pour définir le facteur bloc**
- **bloc = facteurs secondaires**

autres cas : plans en bloc si répétitions non disponibles ($n = 1$)

- **plans 2^k / plans 2^{k-p}**
- **plans central composite (surface réponse)**

BLOCCAGE plans 2^k / plans 2^{k-p}

k = nombre variables b = nombre de blocs t = taille bloc

plans sans répétition (n = 1)

COMMENT BLOQUER ?

méthode: ajout de variables additionnelles

combien de blocs : 2? 4? 8?

2 blocs = 1 variable à 2 modalités

X = - = bloc 1 X = + = bloc 2

4 blocs = 2 variables à 2 modalités

4 doublets (- -) (- +) (+ -) (+ +)

8 blocs = 3 variables à 2 modalités

8 triplets (- - -) (- - +) (- + -) (- + +)
(+ - -) (+ - +) (+ + -) (+ + +)

k	b	t	générateurs blocs
3	2	4	bloc = ABC
	4	2	bloc = 4 doublets (AB, AC)
4	2	8	bloc = ABCD
	4	4	bloc = 4 doublets (ABD, ACD)
	8	2	bloc = 8 triplets (AB, BC, CD)
5	2	16	bloc = ABCDE
	4	8	bloc = 4 doublets (ABC, CDE)
	8	4	bloc = 8 triplets (ABE, BCE, CDE)
	16	2	bloc = 16 quadruplets (AB, AC, CD, DE)
6	2	32	bloc = ABCDEF
	4	16	bloc = (ABCF, CDE F)
	8	8	bloc = (ACD, ABE F, ABCD)
	16	4	bloc = (ABF, ACF, CDF, DEF)
	32	2	bloc = (AB, BC, CD, DE, EF)

autres cas

▶ logiciel *STATISTICA*

▶ Wu et Hamada

- plans 2^k pp.150-151

- plans 2^{k-p} pp.201-203

Modèle plan en blocs

A, B, ... facteurs primaires

$$Y = \gamma_j + \beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_{12} AB + \dots \quad j = 1, 2, \dots, b = \text{nombre blocs}$$

β_0 : effet général γ_j : effet bloc j $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_b = 0$

Y_{ij} : observation i bloc j $i = 1, 2, \dots, k$ $j = 1, 2, \dots, b$

$\bar{Y}_{.j}$ = moyenne bloc j

$\hat{\beta}_0 = \bar{Y}_{..}$ = grande moyenne = moyenne sur les blocs

$\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$: écart bloc

$$SS_{\text{bloc}} = k \sum (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \quad \text{variabilité bloc}$$

$$SS_{\text{tot}} = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \quad \text{variabilité totale}$$

$$SS_{\text{tot}} - SS_{\text{bloc}} = \text{variabilité facteurs primaires}$$

Ex – 7.4 : réaction chimique

2 facteurs primaires : A_concentration (- +) B_catalyseur (- +)

1 facteur bloc : C_laboratoire 1 - 2 - 3

Y: rendement réaction

A	B	Y	BLOC
-1	-1	28	1
1	-1	36	1
-1	1	18	1
1	1	31	1
<hr/>			
-1	-1	25	2
1	-1	32	2
-1	1	19	2
1	1	30	2
<hr/>			
-1	-1	27	3
1	-1	32	3
-1	1	23	3
1	1	29	3

<u>bloc</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
moyenne	28.25	26.50	27.75
moyenne globale	27.50		
écart	0.75	-1.00	0.25
effet 1 bloc = -1.00 - (0.75+ 0.25) = - 2.00			
effet 2 bloc = 0.75 - 0.25 = 0.50			

$$SS_{\text{bloc}} = 4 [0.75^2 + 1.00^2 + 0.25^2] = 6.50$$

$$SS_{\text{tot}} = (28.5 - 27.5)^2 + (36 - 27.5)^2 + \dots (29 - 27.5)^2 = 323$$

$$SS_{\text{tot}} - SS_{\text{bloc}} = 323 - 6.5 = 316.5$$

Ex – 7.4: réaction chimique

Select dependent and independent variables, and (optional) blocki... ? X

1 - A 2 - B 3 - Y 4 - labo	1 - A 2 - B 3 - Y 4 - labo	1 - A 2 - B 3 - Y 4 - labo
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

OK
Cancel
[Bundles]...

Use the "Show appropriate variables only" option to pre-screen variable lists and show categorical and continuous variables. Press F1 for more information.

Spread Zoom Spread Zoom Spread Zoom

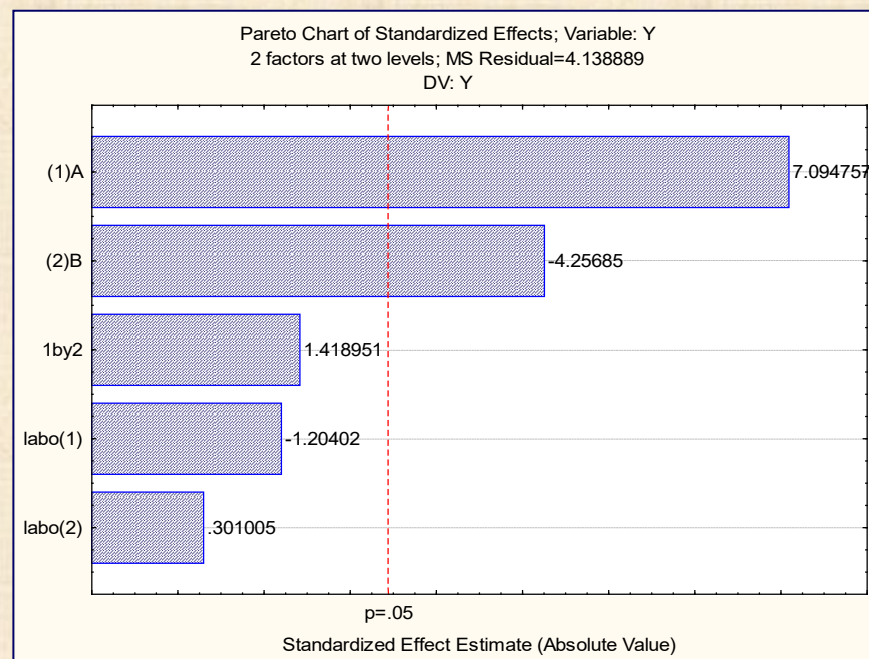
Dependent: 3 Indep. (factors): 1-2 Blocking variable: 4

Show appropriate variables only

ANOVA; Var.:Y; R-sqr=0.92; Adj:0.86

	SS	df	MS	F	p
Blocks	6.50	2	3.25	0.785	0.4978
(1)A	208.33	1	208.33	50.336	0.0004
(2)B	75.00	1	75.00	18.121	0.0053
1 by 2	8.33	1	8.33	2.013	0.2057
Error	24.83	6	4.14		
Total SS	323.00	11			

	Effect	p	Coeff
Mean/Interc.	27.500	0.0000	27.500
(1)A	8.333	0.0004	4.167
(2)B	- 5.000	0.0053	-2.500
labo(1)	- 2.000	0.2739	-1.000
1 by 2	1.667	0.2057	0.833
labo(2)	0.500	0.7736	0.250



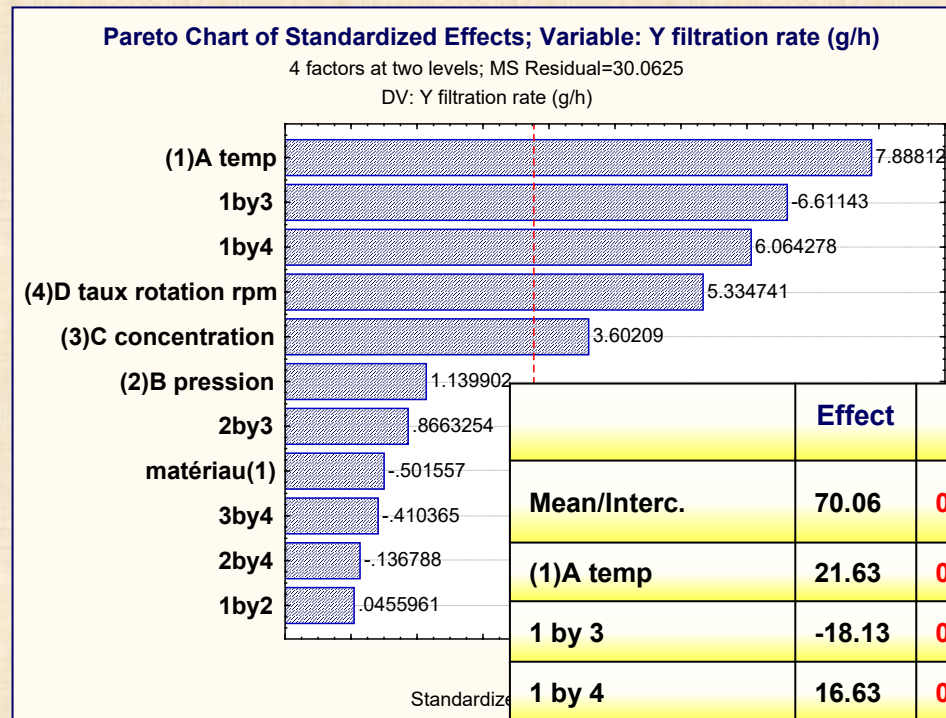
Ex – 7.4 -filtration avec 2 blocs (matériau)

essai	A	B	C	D	trait	Y	bloc
1	-	-	-	-	(1)	25	1
2	+	-	-	-	a	71	2
3	-	+	-	-	b	48	2
4	+	+	-	-	ab	45	1
5	-	-	+	-	c	68	2
6	+	-	+	-	ac	40	1
7	-	+	+	-	bc	60	1
8	+	+	+	-	abc	65	2
9	-	-	-	+	d	43	2
10	+	-	-	+	ad	80	1
11	-	+	-	+	bd	25	1
12	+	+	-	+	abd	104	2
13	-	-	+	+	cd	55	1
14	+	-	+	+	acd	86	2
15	-	+	+	+	bcd	70	2
16	+	+	+	+	abcd	76	1

bloc 1 = ABCD = +
essais 1- 4 - 6 - 7
10-11-13-16

bloc 2 = ABCD = -
essais 2 - 3 – 5 -8
9-12-14-15

Effect Estimates; R-sqr=0.98; Adj:0.92



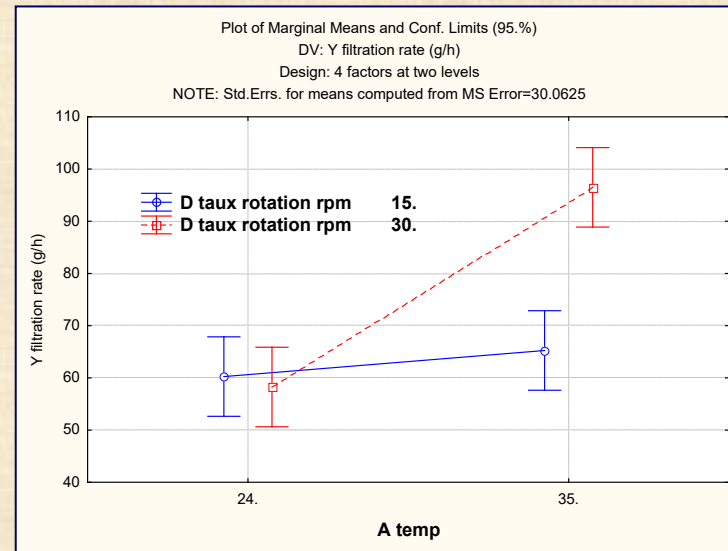
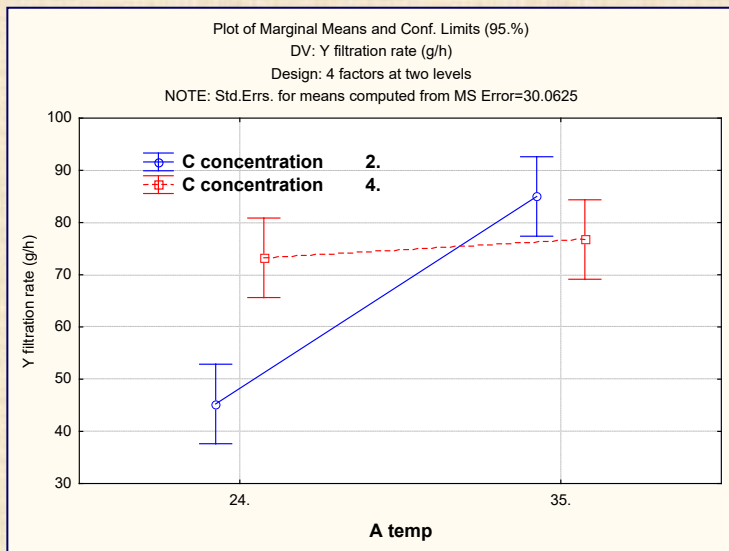
	Effect	p	Coeff.
Mean/Interc.	70.06	0.0000	70.063
(1)A temp	21.63	0.0014	10.813
1 by 3	-18.13	0.0027	-9.063
1 by 4	16.63	0.0037	8.313
(4)D taux rotation	14.63	0.0059	7.313
(3)C concentration	9.87	0.0227	4.937
(2)B pression	3.12	0.3180	1.562
2 by 3	2.37	0.4352	1.187
matériau(1)	-1.38	0.6423	-0.688
3 by 4	-1.13	0.7026	-0.563
2 by 4	-0.38	0.8978	-0.188
1 by 2	0.13	0.9658	0.063

effets importants

A, C, D, AC, AD
pas d'effet bloc
type matériau

Ex - 7.4

filtration



max Y

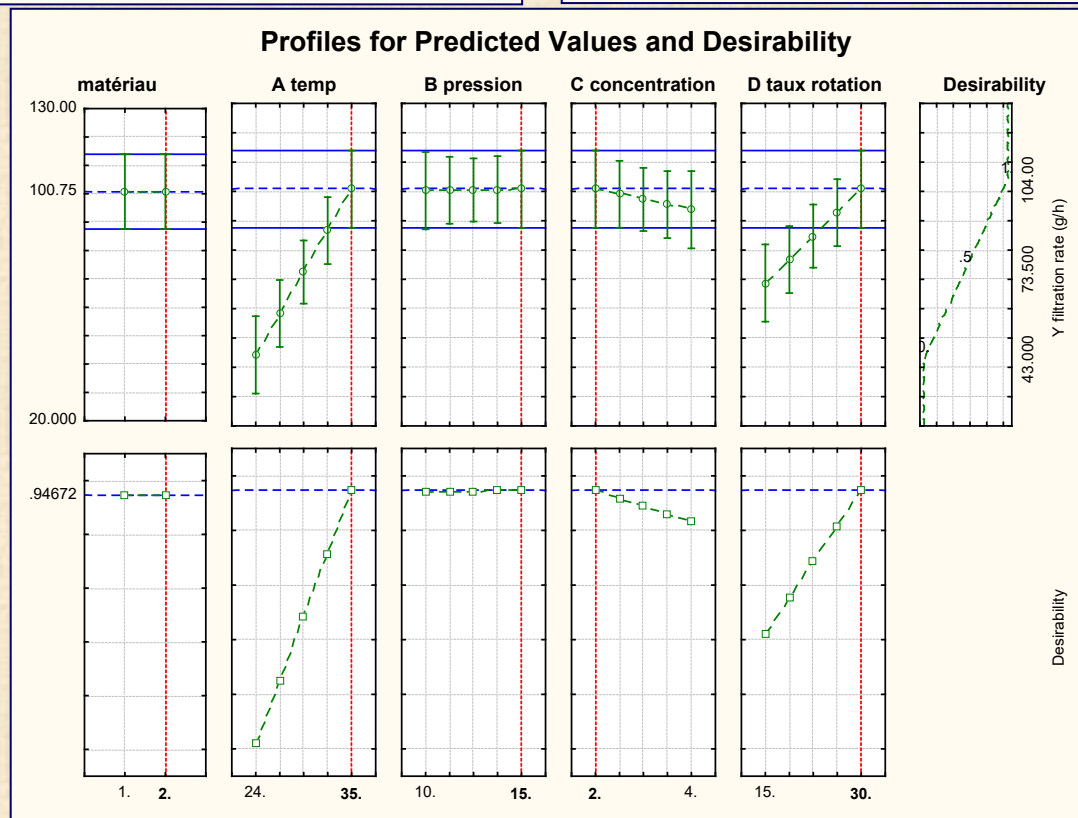
A = 35

C = 2

D = 30

**B pas
influent**

**facteur
inerte
sur Y**



Ex- 7.5 (Ex-6.3) moulage injection

Plan 2⁷⁻²

		FACTEUR	UNITÉS	- 1	+ 1
1	A	Température moule	deg F	130	180
2	B	Holding Pressure	psig	1200	1500
3	C	Booster Pressure	psig	1500	1800
4	D	Moisture	%	0.05	0.15
5	E	Vitesse vis	po /sec	1.5	4.0
6	F	Temps cycle	second	25	30
7	G	Gate size	mille	30	50

Factor	Alias 1	Alias 2
(1)A temp moule		
(2)B temps cycle		
(3)C pression booster	5*6*7	
(4)D humidité		
(5)E vitesse vis	3*6*7	
(6)F pression retenue	3*5*7	
(7)G taille ouverture	3*5*6	
Blocks (8 ième facteur)	3*4*7	4*5*6
1 by 2	3*4*6	4*5*7
1 by 3	2*4*6	
1 by 4	2*3*6	2*5*7
1 by 5	2*4*7	
1 by 6	2*3*4	
1 by 7	2*4*5	
2 by 3	1*4*6	
2 by 4	1*3*6	1*5*7
2 by 5	1*4*7	
2 by 6	1*3*4	
2 by 7	1*4*5	
3 by 4	1*2*6	
3 by 5	6*7	
3 by 6	5*7	1*2*4
3 by 7	5*6	
4 by 5	1*2*7	
4 by 6	1*2*3	
4 by 7	1*2*5	
1*3*5	1*6*7	
1*3*7	1*5*6	
2*3*5	2*6*7	
2*3*7	2*5*6	
3*4*5	4*6*7	

1 std	2 run	3 line	4 A temp moule	5 B temps cycle	6 C pression booster	7 D humidité	8 E vitesse vis	9 F pression retenue	10 G taille ouverture	11 Yret %
4	28	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	0,898
5	26	2	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	0,916
6	2	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1,130
7	17	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0,760
8	12	2	1	1	1	-1	-1	-1	1	0,730
9	14	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	0,838
10	23	2	1	-1	-1	1	-1	1	1	0,669
11	5	2	-1	1	-1	1	-1	1	1	1,060
12	31	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	0,956
13	27	2	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1,780
14	3	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1,660
15	18	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1,080
16	16	2	1	1	1	1	-1	1	-1	1,230
17	32	2	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	0,922
18	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	0,815
19	20	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1,100
20	9	2	1	1	-1	-1	1	1	-1	0,858
21	13	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1,170
22	24	2	1	-1	1	-1	1	1	1	1,040
23	6	2	-1	1	1	-1	1	1	1	0,780
24	29	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1,020
25	30	2	-1	-1	-1	1	1	-1	1	0,939
26	8	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	0,909
27	22	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1,060
28	15	2	1	1	-1	1	1	-1	1	0,916
29	10	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1,680
30	19	2	1	-1	1	1	1	-1	-1	1,440
31	7	2	-1	1	1	1	1	-1	-1	1,330
32	25	1	1	1	1	1	1	1	1	1,210

générateurs avec interactions quadruples

$$F = ABCD \quad G = ABDE$$

$$\text{bloc} = \text{line} = 8^{\text{ième}} \text{facteur} \\ = CDG = DEF$$

2 blocs de 16 essais

Objectif : minimiser Y

Ex- 7.5 (Ex-6.3) moulage injection

effets confondus : inter. doubles et inter. triples

	Alias	Alias
(1)A temp moule		
(2)B temps cycle		
(3)C pression booster	5*6*7	
(4)D humidité		
(5)E vitesse vis	3*6*7	
(6)F pression retenue	3*5*7	
(7)G taille ouverture	3*5*6	
1 by 2	3*4*6	4*5*7
1 by 3	2*4*6	
1 by 4	2*3*6	2*5*7
1 by 5	2*4*7	
1 by 6	2*3*4	
1 by 7	2*4*5	
2 by 3	1*4*6	
2 by 4	1*3*6	1*5*7

	Alias	Alias
2 by 5	1*4*7	
2 by 6	1*3*4	
2 by 7	1*4*5	
3 by 4	1*2*6	
3 by 5	6*7	
3 by 6	5*7	1*2*4
3 by 7	5*6	
4 by 5	1*2*7	
4 by 6	1*2*3	
4 by 7	1*2*5	
1*3*5	1*6*7	
1*3*7	1*5*6	
2*3*5	2*6*7	
2*3*7	2*5*6	
3*4*5	4*6*7	
3*4*7	Blocks	4*5*6

construction du plan

Plan complet de 32 essais avec les 5 facteurs A B C D E

générateurs des facteurs F et G avec inter. quadruples

$$F = ABCD \quad G = ABDE$$

effets principaux confondus avec interactions triples

effet bloc défini avec interaction triple

bloc =

$$= 3*4*7 = 4*5*6$$

$$CDG = DEF$$

3 paires d'interaction doubles confondues

$$3*5 = 6*7$$

$$3*6 = 5*7$$

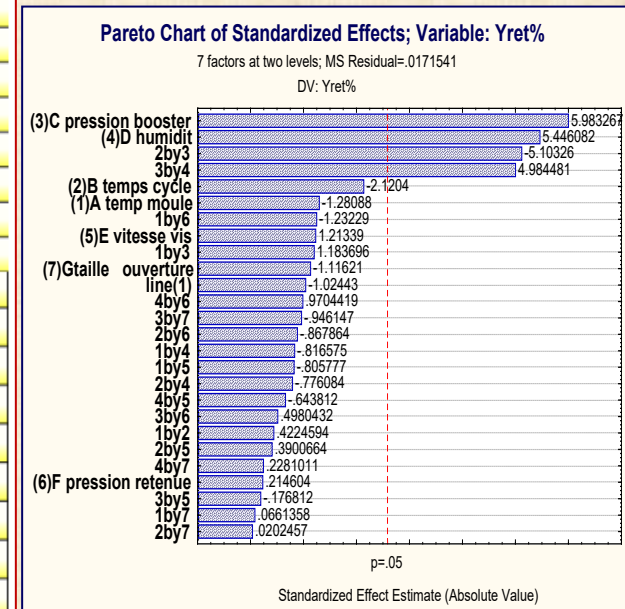
$$3*7 = 5*6$$

Ex- 7.5 (Ex-6.3) moulage injection

Effect Estimates; Var.: Yret%; R-sqr=0.96424; Adj:0.77827

	Effect	p	Coeff.
Mean/Interc.	1.0462	0.0000	1.0462
(3)C pression	0.2771	0.0019	0.1385
(4)D humidité	0.2522	0.0028	0.1261
2 by 3	-0.2363	0.0038	-0.1182
3 by 4	0.2308	0.0042	0.1154
(2)B temps cycle	-0.0982	0.0875	-0.0491
(1)A temp moule	-0.0593	0.2564	-0.0297
1 by 6	-0.0571	0.2726	-0.0285
(5)E vitesse vis	0.0562	0.2792	0.0281
1 by 3	0.0548	0.2897	0.0274
(7)G taille ouvert.	-0.0517	0.3151	-0.0258
line(1)	-0.0474	0.3526	-0.0237
4 by 6	0.0449	0.3764	0.0225
3 by 7 = 5*6	-0.0438	0.3875	-0.0219
2 by 6	-0.0402	0.4252	-0.0201
1 by 4	-0.0378	0.4513	-0.0189
1 by 5	-0.0373	0.4570	-0.0187
2 by 4	-0.0359	0.4728	-0.0180
4 by 5	-0.0298	0.5481	-0.0149
3 by 6 = 5*7	0.0231	0.6396	0.0115
1 by 2	0.0196	0.6902	0.0098
2 by 5	0.0181	0.7126	0.0090
4 by 7	0.0106	0.8286	0.0053
(6)F pression	0.0099	0.8386	0.0050
3 by 5 = 6*7	-0.0082	0.8666	-0.0041
1 by 7	0.0031	0.9498	0.0015
2 by 7	0.0009	0.9846	0.0005

	SS	df	MS	F	p
(3)C pression booster	0.6141	1	0.614	35.80	0.0019
(4)D humidité	0.5088	1	0.509	29.66	0.0028
2 by 3	0.4467	1	0.447	26.04	0.0038
3 by 4	0.4262	1	0.426	24.84	0.0042
(2)B temps cycle	0.0771	1	0.077	4.496	0.0875
(1)A temp moule	0.0281	1	0.0281	1.641	0.2564
1 by 6	0.0260	1	0.0260	1.519	0.2726
(5)E vitesse vis	0.0253	1	0.0253	1.472	0.2792
1 by 3	0.0240	1	0.0240	1.401	0.2897
(7)G taille ouverture	0.0214	1	0.0214	1.246	0.3151
Blocks	0.0180	1	0.0180	1.049	0.3526
4 by 6	0.0162	1	0.0162	0.942	0.3764
3 by 7	0.0154	1	0.0154	0.895	0.3875
2 by 6	0.0129	1	0.0129	0.753	0.4252
1 by 4	0.0114	1	0.0114	0.667	0.4513
1 by 5	0.0111	1	0.0111	0.649	0.4570
2 by 4	0.0103	1	0.0103	0.602	0.4728
4 by 5	0.0071	1	0.0071	0.414	0.5481
3 by 6	0.0043	1	0.0043	0.248	0.6396
1 by 2	0.0031	1	0.0031	0.178	0.6902
2 by 5	0.0026	1	0.0026	0.152	0.7126
4 by 7	0.0009	1	0.0009	0.052	0.8286
(6)F pression	0.0008	1	0.0008	0.046	0.8386
3 by 5	0.0005	1	0.0005	0.031	0.8666
1 by 7	0.0001	1	0.0001	0.004	0.9498
2 by 7	0.0000	1	0.0000	0.000	0.9846
Error	0.0858	5	0.0172		
Total SS	2.3983	31			

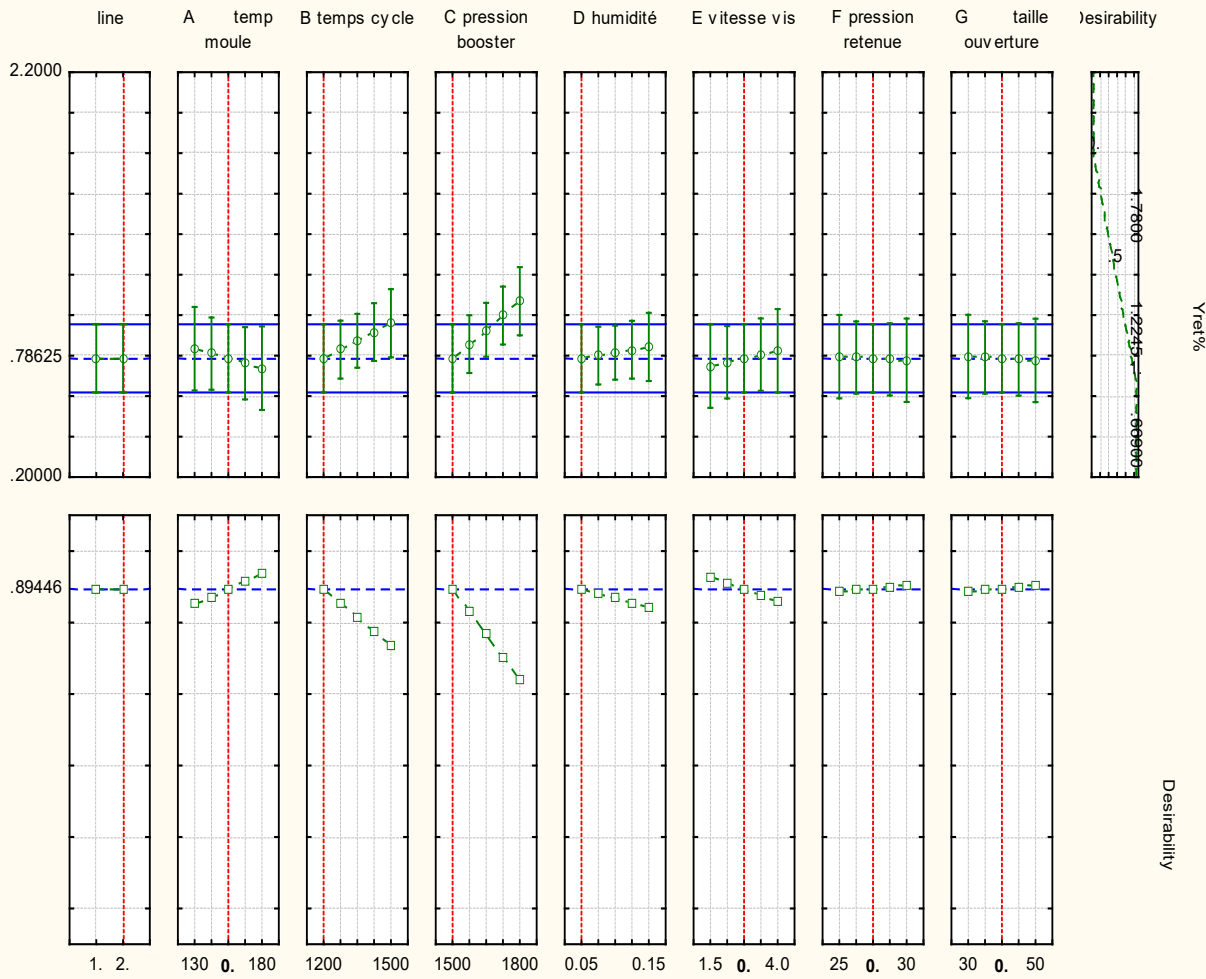


effets importants significatifs : C, D, BC, CD, B

Ex- 7.5 (Ex-6.3) moulage injection

fonction de désirabilité

Profiles for Predicted Values and Desirability



minimum de Y

line = 2 A = 0 (150deg)

B = -1 (1200) C = -1 (1500)

D = -1 (0.05) E = 0 (2.75)

F = 0 (27.5) G = 0 (40)

désirabilité = 0.89

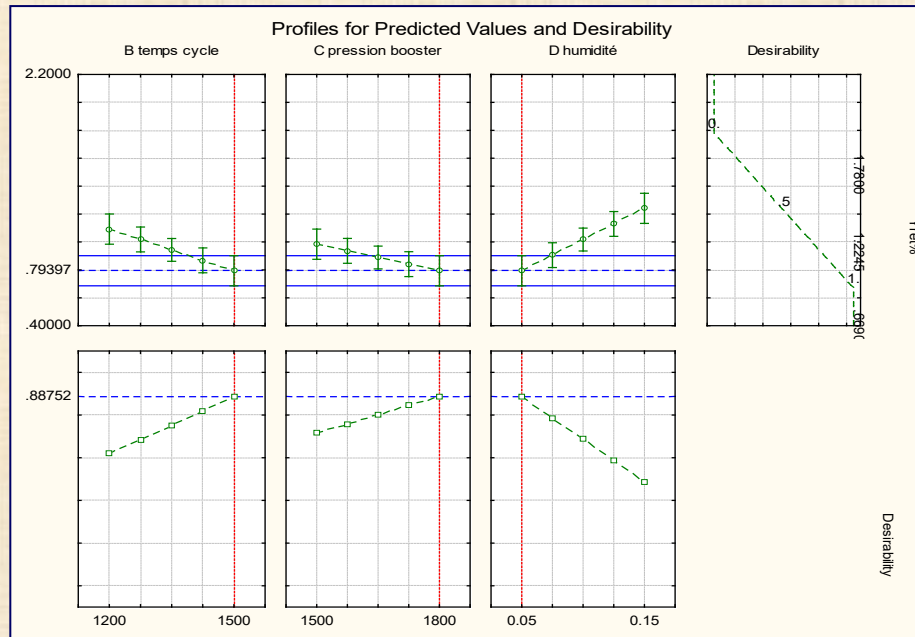
Ex- 7.5 (Ex-6.3) moulage injection

modèle basé sur : C, D, BC, CD, B

Effect Estimates; Var.:Yret%;
R-sqr=.869 ; Adj:.837

	Effect	p	Coeff.
Mean/Interc.	1.0462	0.0000	1.0462
(2)C pression boo	0.2771	0.0000	0.1385
(3)D humidité	0.2522	0.0000	0.1261
1 by 2	- 0.2363	0.0000	- 0.1182
2 by 3	0.2308	0.0000	0.1154
(1)B temps cycle	- 0.0982	0.0205	- 0.0491
1 by 3	- 0.0359	0.3738	- 0.0180

ANOVA	SS	df	MS	F	p
(1)B temps cycle	0.0771	1	0.0771	6.122	0.0205
(2)C pression boo	0.6141	1	0.6141	48.743	0.0000
(3)D humidité	0.5088	1	0.5088	40.383	0.0000
1 by 2	0.4467	1	0.4467	35.459	0.0000
1 by 3	0.0103	1	0.0103	0.820	0.3738
2 by 3	0.4262	1	0.4262	33.828	0.0000
Error	0.3150	25	0.0126		
Total SS	2.3983	31			



minimum Y

B = 1500

C = 1800

D = 0.05

**Plans
en
blocs
Incomplets**

- nombre k d'unités chaque bloc (taille du bloc) plus petit que nombre a de traitements du facteur : $k < a$
cause fréquente : manque de matériel expérimental

- Exemple

trait	bloc (matière première)			
	1	2	3	4
1	-	73	71	74
2	67	-	72	75
3	68	73	-	75
4	72	75	75	-

$a = 4$ traitements $b = 4$ blocs $k = 3$ unités par blocs

- $N =$ nombre total d'observations = $b k = a r$
 a : nombre de traitements k : nombre d'unités chaque bloc
 b : nombre de blocs r : nombre répétitions traitement
- cas important : **Balanced Incomplete Bloc Design (BIBD)**
 - chaque traitement apparaît le même nombre de fois
 - chaque paire de traitements apparaît le même nombre de fois
 - liste de BIBD utiles : $a < 11$ et $k < 7$
 Box, Hunter, Hunter, édition 1 pp. 269-274
 - analyse : voir Montgomery p.

cas particuliers BIBD : plans combinatoires

$b =$ nombre blocs = $a ! / [k! (k - a) !]$

nombre de blocs b grand si $a > 5$ et $k \approx a / 2$

exemple: $a = 6, k = 3$ donne $b = 20$ $N = 20 \cdot 3 = 6 \cdot 10 = 60$

plan BIBD non combinatoire $b = 10$ $N = 10 \cdot 3 = 6 \cdot 5 = 30$

PLANS EN BLOCS ÉQUILIBRÉS

Référence : Voir JMP Plans en blocs équilibrés
Pas disponible le dans Statistica

La taille des blocs ne permet pas d'avoir tous les traitements

EXEMPLE 1 : 4 traitements L1 L2 L3 L4

Nombre de blocs :4 taille blocs : 3 nombre essais : 12

Matrice d'incidence

Bloc	Traitement			
	L1	L2	L3	L4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

Liste des essais

Numéro des essais	Bloc	Traitement
1	1	L2
2	1	L3
3	1	L4
4	2	L3
5	2	L4
6	2	L1
7	3	L4
8	3	L1
9	3	L2
10	4	L1
11	4	L2
12	4	L3

EXEMPLE 2 : 8 traitements

L1 L2 L3 L4 L5 L6 L7 L8

blocs taille : 6 nombre blocs : 28

nombre d'essais : 168

matrice d'incidence

matrice d'incidence

Bloc	Traitement							
	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
1	1	0	1	1	1	0	1	1
2	1	1	1	1	1	0	1	0
3	1	0	1	1	0	1	1	1
4	1	0	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	0	1	1
7	0	1	1	1	1	1	0	1
8	0	1	1	0	1	1	1	1
9	0	0	1	1	1	1	1	1
10	1	1	0	1	0	1	1	1
11	1	1	1	0	1	0	1	1
12	1	1	0	0	1	1	1	1
13	1	1	1	1	0	1	0	1
14	1	1	1	1	0	1	1	0
15	1	0	0	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	0	0	1
17	1	1	1	1	1	1	0	0
18	1	1	0	1	1	0	1	1
19	1	0	1	0	1	1	1	1
20	1	0	1	1	1	1	0	1
21	0	1	0	1	1	1	1	1
22	1	1	1	1	0	0	1	1
23	0	1	1	1	0	1	1	1
24	1	1	1	0	1	1	0	1
25	1	1	0	1	1	1	0	1
26	1	1	0	1	1	1	1	0
27	1	1	1	0	1	1	1	0
28	1	1	1	0	0	1	1	1

Numéro des essais	Bloc	Traitement
1	1	L5
2	1	L1
3	1	L7
4	1	L8
5	1	L4
6	1	L3
7	2	L7
8	2	L1
9	2	L4
10	2	L3
11	2	L2
12	2	L5
13	3	L4
14	3	L3
15	3	L7
16	3	L8
17	3	L1
18	3	L6
19	4	L5
20	4	L7
21	4	L3
22	4	L4
23	4	L6
24	4	L1
25	5	L7
26	5	L4
27	5	L6
28	5	L3
29	5	L5
30	5	L2
31	6	L2
32	6	L4
33	6	L5
34	6	L3
35	6	L7
36	6	L8
37	7	L8
38	7	L3
39	7	L6
40	7	L5
41	7	L4
42	7	L2
43	8	L3
44	8	L5
45	8	L2

Fréquences de traitement par paire								
Traitement	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8
L1	21	15	15	15	15	15	15	15
L2		21	15	15	15	15	15	15
L3			21	15	15	15	15	15
L4				21	15	15	15	15
L5					21	15	15	15
L6						21	15	15
L7							21	15
L8								21

Fréquences positionnelles						
Traitement	Position					
	1	2	3	4	5	6
L1	3	4	4	3	3	4
L2	4	4	3	3	3	4
L3	4	4	4	3	3	3
L4	3	3	4	4	3	4
L5	3	4	3	4	4	3
L6	3	3	3	4	4	4
L7	4	3	3	4	4	3
L8	4	3	4	3	4	3

suite ...

PLANS EN BLOCS : résumé

- **facteurs secondaires (nuisibles) généralement présents dans toutes les expériences industrielles et autres domaines**
- **si on peut identifier et contrôler les facteurs nuisibles, on peut construire un plan en bloc**
- **envisager un nombre restreint de modalités pour les facteurs nuisibles**
- **le plan en bloc permettra de dégager l'influence des facteurs primaires indépendamment des facteurs blocs**
- **dans un plan en bloc, la randomisation est faite à l'intérieur de chaque bloc**
- **facteurs blocs n'ont pas d'effet d'interaction avec facteurs primaires**
- **plans 2^k et 2^{k-p} peuvent être bloqués avec des blocs de taille 2, 4, 8,..**

ANALYSE de COVARIANCE

CONTEXTE EXEMPLES MODÈLES STATISTICA

contexte

- Combinaison de modèles d'analyse de la variance (facteurs catégoriques A)
+ modèles de régression (variables continues X)
- idée de base
augmenter les modèles d'analyse de variance contenant les effets de facteurs catégoriques (qualitatifs) avec une ou plusieurs variables continues potentiellement reliées à la variable de réponse.
- **but** : réduire la variance du terme d'erreur dans le modèle
augmente la sensibilité de l'analyse à détecter des effets significatifs

X : covariable quantitative associée avec la réponse Y
: on voudrait que X soit constante mais cela n'est pas possible
: Y théoriquement affectée par X / corrélation possible entre Y et X
: souvent reliée à la variabilité des unités expérimentales
: variable quantitative mesurée mais non contrôlée
: observée avant / durant / après l'expérience
: pas de relation avec les facteurs d'expérimentation A (traitements)

Ex– 7.6 : étude CCA Chromate Copper Arsenate

CCA préserve le bois des dommages causés par l'eau et les insectes.
présente des risques pour la santé et l'environnement.

Nouvelle solution : «ORGANIC» peut-elle remplacée le CCA?

Étude expérimentale : comparer performance solution CCA et ORGANIC.

données : 360 planches de pin (unités expérimentales) traitées avec les 2 solutions à 3 niveaux de concentration: 0.25, 0.80 et 2.25 (lbs/pi cu).

3 niveaux de concentration employés pour 3 applications typiques:
bois exposé à l'air (0,25), bois de fondation (0,80), bois en eau salée (2.25).

Test : planches placées chambre à vieillissement accéléré durant plusieurs heures.
Chaque heure représente l'équivalent d'une exposition d'une année aux éléments.
Chaque planche soumise test de bris à la rupture : réponse Y «Load».

3 facteurs : **SOLUTION (A)** **CONCENTRATION (B)** (facteurs contrôlés)
HEURE (X) facteur continu mesuré (covariable).
traitement : solution X concentration $2 \times 3 = 6$

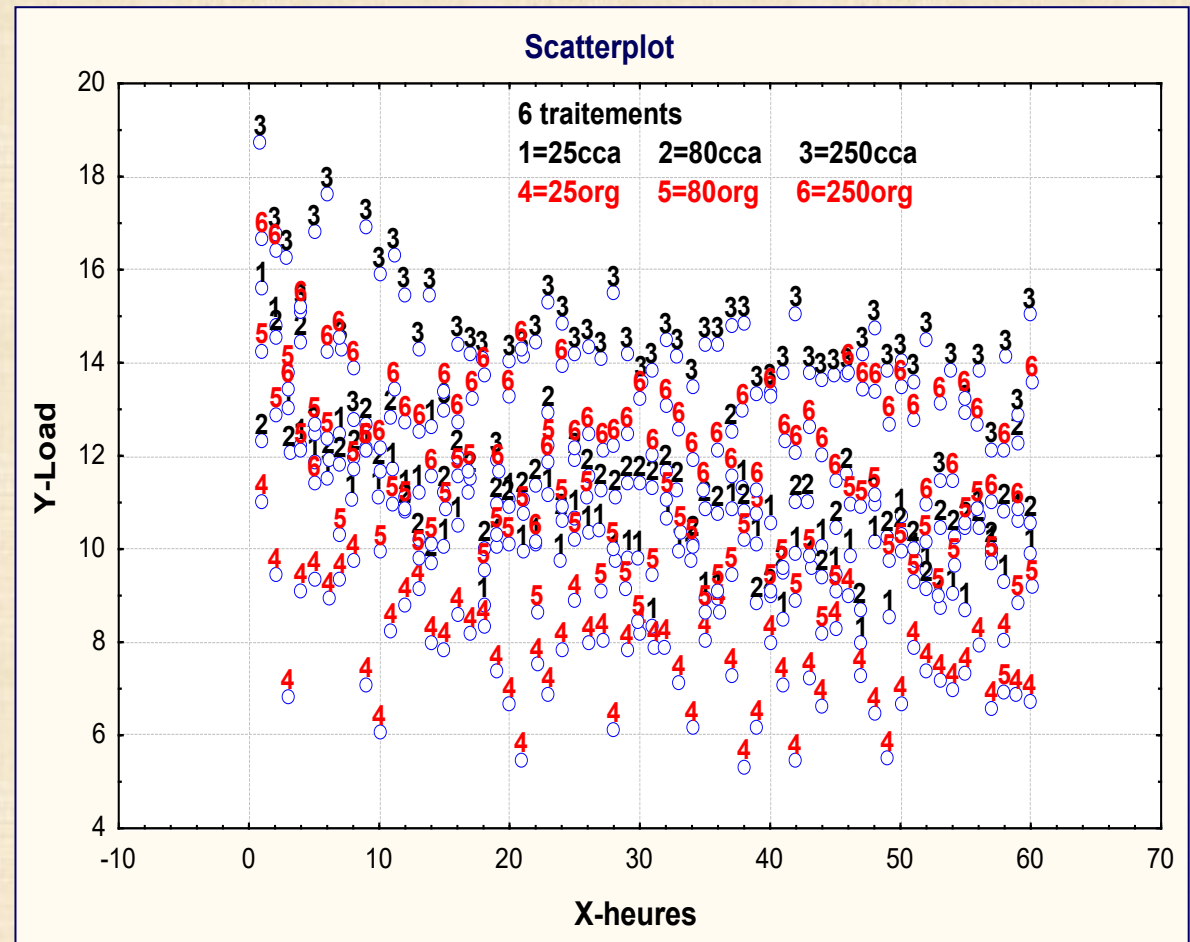
Objectif : comparer la performance de «ORGANIC » avec CCA.

solution «ORGANIC» aussi bonne (Y résistance) que solution CCA?

Ex- 7.6 : étude CCA

Plan avec facteur de covariance

	Co	Sol	X-heu	Y
1	0.25	CCA	1.0	15.597
2	0.25	ORG	1.0	11.025
3	0.80	CCA	1.0	12.329
4	0.80	ORG	1.0	14.275
5	2.50	CCA	0.9	18.739
6	2.50	ORG	1.0	16.668
7	0.25	CCA	2.0	14.826
8	0.25	ORG	2.0	9.447
9	0.80	CCA	2.1	14.553
10	0.80	ORG	2.1	12.894
▪	▪	▪	▪	▪
358	0.80	ORG	60.1	9.183
359	2.50	CCA	59.9	15.035
360	2.50	ORG	60.1	15.569



Influence des variables sur Y ?

Modèle d'analyse de covariance avec un facteur

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma (X_{ij} - \bar{X}_{.i}) + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, g \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

μ : effet général

τ_i : effet différentiel du facteur avec la contrainte $\sum \tau_i = 0$

γ : coefficient de régression (pente) entre X et Y

X_{ij} : constantes connues de la covariable X

ε_{ij} : terme d'erreur $\sim N(0, \sigma^2)$

remarques

- γ constante - pas reliée au facteur d'intérêt
- pas d'interaction entre la covariable X et le facteur d'intérêt
- $Z_{ij} = Y_{ij} - \mu - \gamma (X_{ij} - \bar{X}_{.i}) = \tau_i + \varepsilon_{ij}$ représente la variable d'intérêt mais pas observée directement

inférence principale

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{g-1} = 0$$

$$H_a : \tau_i \text{ ne sont pas tous nuls}$$

General Linear Models (GLM)

Type of analysis:

- One-way ANOVA
- Main effects ANOVA
- Factorial ANOVA
- Nested design ANOVA
- Huge balanced ANOVA
- Repeated measures ANOVA
- Simple regression
- Multiple regression
- Factorial regression
- Polynomial regression
- Response surface regression
- Mixture surface regression
- Analysis of covariance
- Separate-slopes model
- Homogeneity-of-slopes model

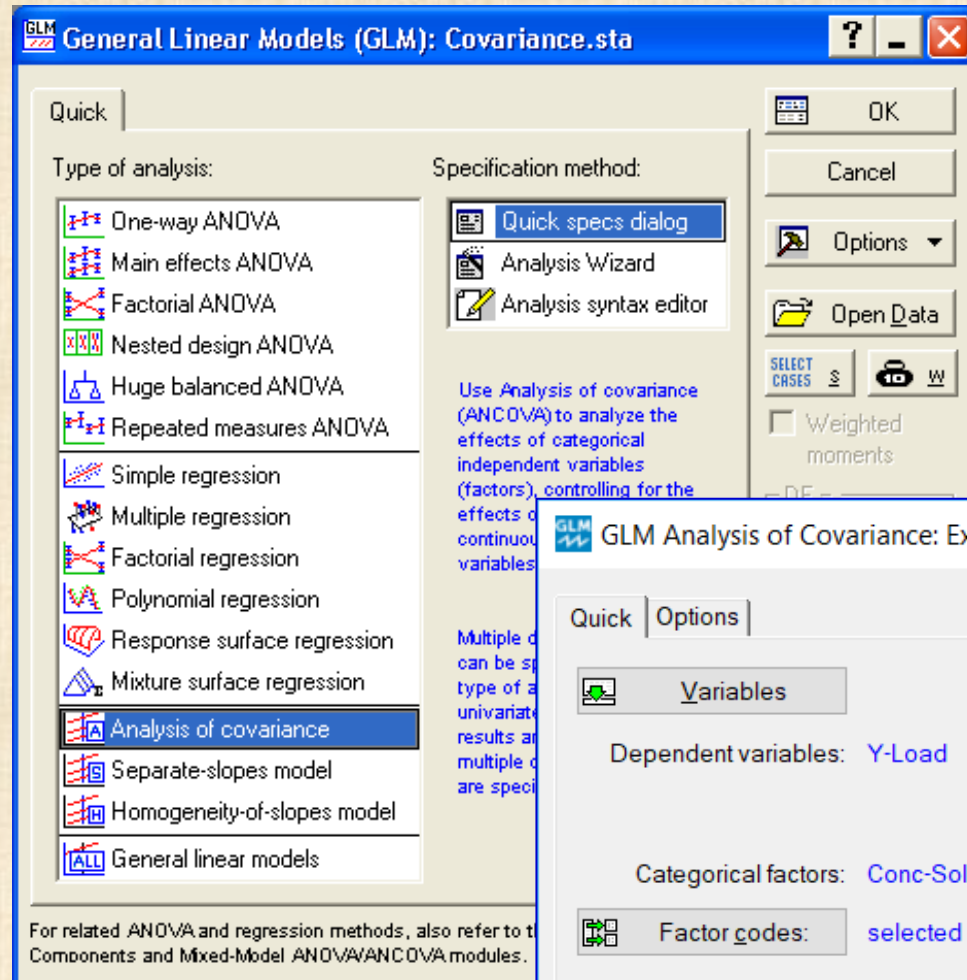
modèle classique pas d'interaction entre X et les facteurs d'expérience

Use Analysis of covariance (ANCOVA) to analyze the effects of categorical independent variables (factors), controlling for the effects of one or more continuous predictor variables (covariates).

Use the Separate-slopes model when one or more continuous predictor variables (covariates) have different effects at different levels of one or more categorical independent variables (factors).

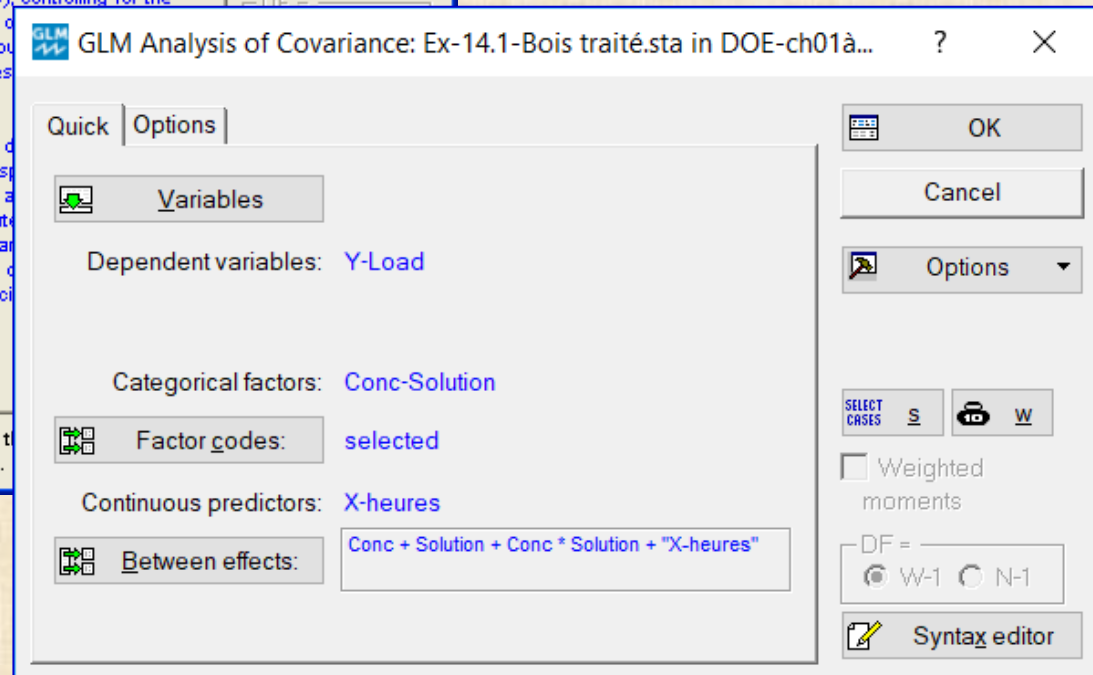
Use the Homogeneity-of-slopes model to test whether continuous predictor variables (covariates) have different effects at different levels of categorical independent variables (factors).

STATISTICA GLM ... Covariance ... pentes



modèle classique

pas d'interaction entre la (les) covariable(s) et les facteurs catégoriques



STATISTICA GLM ... Covariance ... pentes

GLM Analysis of Covariance: Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à...

Quick | Options

Variables

Dependent variables: Y-Load

Categorical factors: Conc-Solution

Factor codes: selected

Continuous predictors: X-heures

Between effects: Conc + Solution + Conc * Solution + "X-heures"

OK

Cancel

Options

SELECT CASES S W

Weighted moments

DF =

W-1 N-1

GLM Results 2: Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17-Exemples&Analyse...

Profiler | Custom tests | Residuals 1 | Residuals 2 | Matrix | Report

Summary | Means | Planned comps | Post-hoc | Assumptions

All effects/Graphs | Test all effects | Effect sizes

Univariate results | Desc. cell statistics

Between effects

Design terms | Whole model R

Coefficients | Estimate

Design matrix

Alpha values

Conf: .950

Signif: .050

Less

Close

Modify

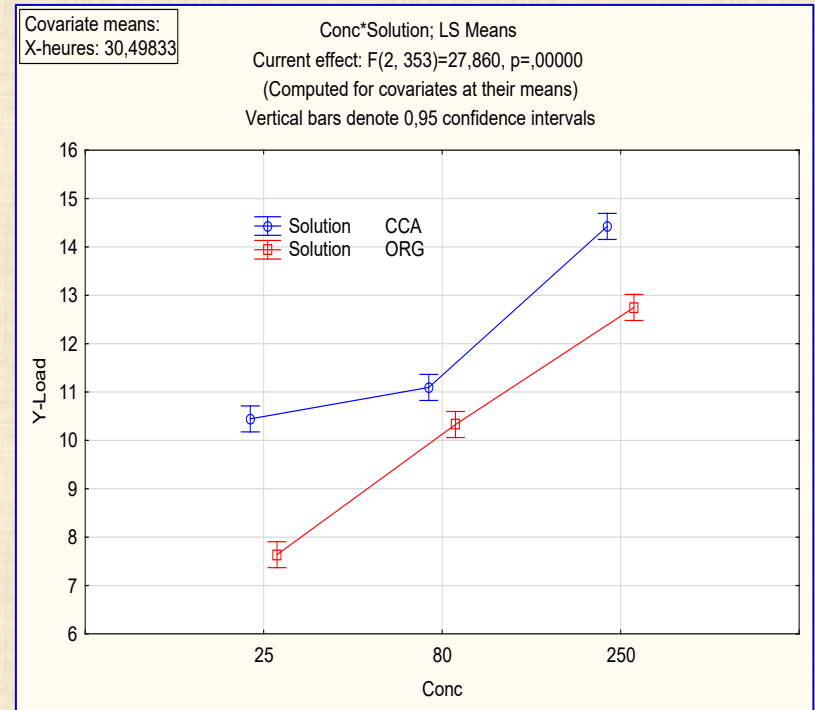
Options

By Group

STATISTICA GLM ... Covariance ... pentes

Column Labels (Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17-Exemples&Analyses.stw)							
Labels for the columns of the design matrix X							
Label	Column	Variable	Level of Variable	versus Level	Variable	Level of Variable	versus Level
Intercept	1						
Conc	2	Conc	25	250			
Conc	3	Conc	80	250			
Solution	4	Solution	CCA	ORG			
Conc*Solution	5	Conc	25	250	Solution	CCA	ORG
Conc*Solution	6	Conc	80	250	Solution	CCA	ORG
X-heures	7	X-heures					

Effect	Degr. of Freedom	Y-Load SS	Y-Load MS	Y-Load F	Y-Load p
Intercept	1	13411,64	13411,64	11934,61	0,000000
Conc	2	1268,41	634,21	564,36	0,000000
Solution	1	275,61	275,61	245,26	0,000000
Conc*Solution	2	62,62	31,31	27,86	0,000000
X-heures	1	180,93	180,93	161,01	0,000000
Error	353	396,69	1,12		
Total	359	2184,32			



Examen interaction heure X solution heure X concentration

General Linear Models (GLM): Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17... ? X

Quick

Type of analysis:

- One-way ANOVA
- Main effects ANOVA
- Factorial ANOVA
- Nested design ANOVA
- Huge balanced ANOVA
- Repeated measures ANOVA
- Simple regression
- Multiple regression
- Factorial regression
- Polynomial regression
- Response surface regression
- Mixture surface regression
- Analysis of covariance
- Separate-slopes model
- Homogeneity-of-slopes model**
- General linear models

Specification method:

- Quick specs dialog**
- Analysis Wizard
- Analysis syntax editor

Use the Homogeneity-of-slopes model to test whether continuous predictor variables (covariates) have different effects at different levels of categorical independent variables (factors).

Multiple dependent variables can be specified for any type of analysis.

OK
Cancel
Options
Open Data
SELECT CASES S W
 Weighted moments
DF = W-1 N-1

For related ANOVA and regression methods, also refer to the Mixed-Model ANOVA/ANCOVA modules.

Column Labels (Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17-Exemples&Analyses.stw)
Labels for the columns of the design matrix X

Label	Column	Variable	Level of Variable	versus Level	Variable	Level of Variable	versus Level	Variable
Intercept	1							
Conc	2	Conc	25	250				
Conc	3	Conc	80	250				
Solution	4	Solution	CCA	ORG				
X-heures	5	X-heures						
Conc*Solution	6	Conc	25	250	Solution	CCA	ORG	
Conc*Solution	7	Conc	80	250	Solution	CCA	ORG	
Conc*X-heures	8	Conc	25	250	X-heures			
Conc*X-heures	9	Conc	80	250	X-heures			
Solution*X-heures	10	Solution	CCA	ORG	X-heures			
Conc*Solution*X-heures	11	Conc	25	250	Solution	CCA	ORG	X-heures
Conc*Solution*X-heures	12	Conc	80	250	Solution	CCA	ORG	X-heures

Examen interaction **heure X solution**
 heure X concentration

Univariate Results for Each DV (Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-c					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	Y-Load SS	Y-Load MS	Y-Load F	Y-Load p
Intercept	1	13411,29	13411,29	12037,08	0,000000
Conc	2	276,09	138,04	123,90	0,000000
Solution	1	90,91	90,91	81,59	0,000000
X-heures	1	180,89	180,89	162,35	0,000000
Conc*Solution	2	33,40	16,70	14,99	0,000001
Conc*X-heures	2	1,52	0,76	0,68	0,506072
Solution*X-heures	1	2,36	2,36	2,12	0,146050
Conc*Solution*X-heures	2	5,07	2,53	2,27	0,104406
Error	348	387,73	1,11		
Total	359	2184,32			

pas d'interaction

modèle avec pentes distinctes

The image shows two overlapping SPSS dialog boxes for General Linear Models (GLM).

Top Dialog: General Linear Models (GLM): Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17...

- Quick** tab is active.
- Type of analysis:** A list of analysis types is shown, with **Separate-slopes model** selected.
- Specification method:** A list of methods is shown, with **Quick specs dialog** selected.
- Buttons: OK, Cancel, Options, Open Data, SELECT CASES, S, W.

Bottom Dialog: GLM Separate-Slopes Model: Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01...

- Options** tab is active.
- Variables** section: **Dependent variables:** Y-Load
- Categorical factors:** Conc-Solution
- Factor codes:** selected
- Continuous predictors:** X-heures
- Between effects:** "X-heures" (Conc * Solution) + Conc + Solution
- Buttons: OK, Cancel, Options, SELECT CASES, S, W, Weighted moments (unchecked), DF = W-1 (selected) / N-1, Syntax editor.

For related ANOVA and regression methods, also refer to the Experimental Design Mixed-Model ANOVA/ANCOVA modules.

STATISTICA GLM ... Covariance ... pentes

Column Labels (Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17-Exemples&Analyses.stw)							
Labels for the columns of the design matrix X							
Label	Column	Variable	Level of Variable	Variable	Level of Variable	Variable	Level of Variable
Intercept	1						
Conc*Solution*X-heures	2	Conc	25	Solution	CCA	X-heures	
Conc*Solution*X-heures	3	Conc	25	Solution	ORG	X-heures	
Conc*Solution*X-heures	4	Conc	80	Solution	CCA	X-heures	
Conc*Solution*X-heures	5	Conc	80	Solution	ORG	X-heures	
Conc*Solution*X-heures	6	Conc	250	Solution	CCA	X-heures	
Conc*Solution*X-heures	7	Conc	250	Solution	ORG	X-heures	
Conc	8	Conc	25				
Conc	9	Conc	80				
Conc	10	Conc	250				
Solution	11	Solution	CCA				
Solution	12	Solution	ORG				

Univariate Results for Each DV (Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-c					
Over-parameterized model					
Type III decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	Y-Load SS	Y-Load MS	Y-Load F	Y-Load p
Intercept	1	13412,05	13412,05	11146,70	0,000000
Conc*Solution*X-heures	6	219,11	36,52	30,35	0,000000
Conc	2	276,01	138,00	114,69	0,000000
Solution	1	90,94	90,94	75,58	0,000000
Error	350	421,13	1,20		
Total	359	2184,32			

Analyse avec le module General Regression Models

General Regression Models: Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17-E... ? X

Quick

Type of analysis:

- Simple regression
- Multiple regression
- Factorial regression
- Polynomial regression
- Response surface regression
- Mixture surface regression
- One-way ANOVA
- Main effects ANOVA
- Factorial ANOVA
- Analysis of covariance
- Homogeneity-of-slopes model
- General linear models**

Specification method:

- Quick specs dialog**
- Analysis Wizard
- Analysis syntax editor

Use General linear models to analyze designs with any combination of categorical independent variables (factors), continuous predictor variables (covariates), or repeated measures.

Multiple dependent variables can be specified for any type of analysis.

OK Cancel Options Open Data

SELECT CASES W W Weighted moments DF = W-1 N-1

GRM Between Effects: Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à1... ? X

Use default effects for the between design
 Use custom effects for the between design

To build custom effects to be included in the between design, select predictor variables for the effects and a method for building the effects.

Predictor vars. Method Effects in between design

Categorical: Conc Solution

Continuous: "X-heures"

Method: Add Full cross Full factorial Surface Mixture Fact to deg.

Effects in between design: Conc Solution "X-heures" Conc*Solution Conc**"X-heures" Solution**"X-heures"

Remove Clear all

OK Cancel

GRM Analysis Syntax Editor: Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17-Exemples&Analyses.stw ? X

Keywords Specifications

DEPENDENT SURFACE
 GROUPS MIXTURE
 COVARIATE SAMPLE
 DESIGN MBUILD
 INTERCEPT FORCE
 ESTIMATE Stepwise
 LACKOFFIT Best subs
 SDELTA
 IDELTA OUTPUT

Analysis syntax

```
GRM:
DEPENDENT = "Y-Load";
GROUPS = Conc(25 80 250)
        Solution(1 2);
COVARIATE = "X-heures";
DESIGN = Conc + Solution + "X-heures" + Conc*Solution
+ Conc**"X-heures" + Solution**"X-heures";
INTERCEPT = include;
LACKOFFIT = no;
ESTIMATE = none;
SDELTA = 7;
IDELTA = 12;
SURFACE = none;
MIXTURE = none;
SAMPLE = none;
MBUILD = all;
OUTPUT = none;
```

OK (Run) Cancel < Back Options

Open Save As

Analyse avec le module General Regression Models

Column Labels (Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-ch01à17-Exemples&Analyses.stw)							
Labels for the columns of the design matrix X							
Label	Column	Variable	Level of Variable	versus Level	Variable	Level of Variable	versus Level
Intercept	1						
Conc	2	Conc	25	250			
Conc	3	Conc	80	250			
Solution	4	Solution	CCA	ORG			
X-heures	5	X-heures					
Conc*Solution	6	Conc	25	250	Solution	CCA	ORG
Conc*Solution	7	Conc	80	250	Solution	CCA	ORG
Conc*X-heures	8	Conc	25	250	X-heures		
Conc*X-heures	9	Conc	80	250	X-heures		
Solution*X-heures	10	Solution	CCA	ORG	X-heures		

Univariate Results for Each DV (Ex-14.1-Bois traité.sta in DOE-c					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition					
Effect	Degr. of Freedom	Y-Load SS	Y-Load MS	Y-Load F	Y-Load p
Intercept	1	13411,60	13411,60	11950,35	0,000000
Conc	2	276,06	138,03	122,99	0,000000
Solution	1	90,92	90,92	81,01	0,000000
X-heures	1	180,92	180,92	161,21	0,000000
Conc*Solution	2	62,61	31,31	27,90	0,000000
Conc*X-heures	2	1,52	0,76	0,68	0,508012
Solution*X-heures	1	2,37	2,37	2,11	0,147358
Error	350	392,80	1,12		
Total	359	2184,32			

