

LABORATOIRE NO. 6  
**PHOTOÉLASTICITÉ BIDIMENTIONNELLE**  
(Automne 2006)

---

## Buts du laboratoire

- Montage et alignement des filtres d'un polariscope circulaire (para. 1):
- Étalonnage d'un matériau photoélastique (para. 2).
- Étude de la distribution des contraintes dans un modèle (para. 3).

## 1 Montage et alignement du polariscope

### Matériel fourni (Fig. 1)

- Deux filtres polaroids gradués, le polariseur et l'analyseur (filtres foncés)
- Deux lames quart-d'onde (filtres clairs)
- Un bâti avec système d'entraînement en rotation des filtres
- Un source de lumière blanche
- Un modèle de polyuréthane avec trou central
- Poids

Un bref résumé du principe de fonctionnement des polariscopes plan et circulaire est présenté dans l'annexe 1. Au paragraphe 4 de l'annexe, on décrit également la méthode de Tardy pour l'interpolation angulaire des isochromes. L'application de cette méthode est absolument nécessaire pour réaliser les mesures de contrainte en un point.

### **1.1 Alignement des filtres**

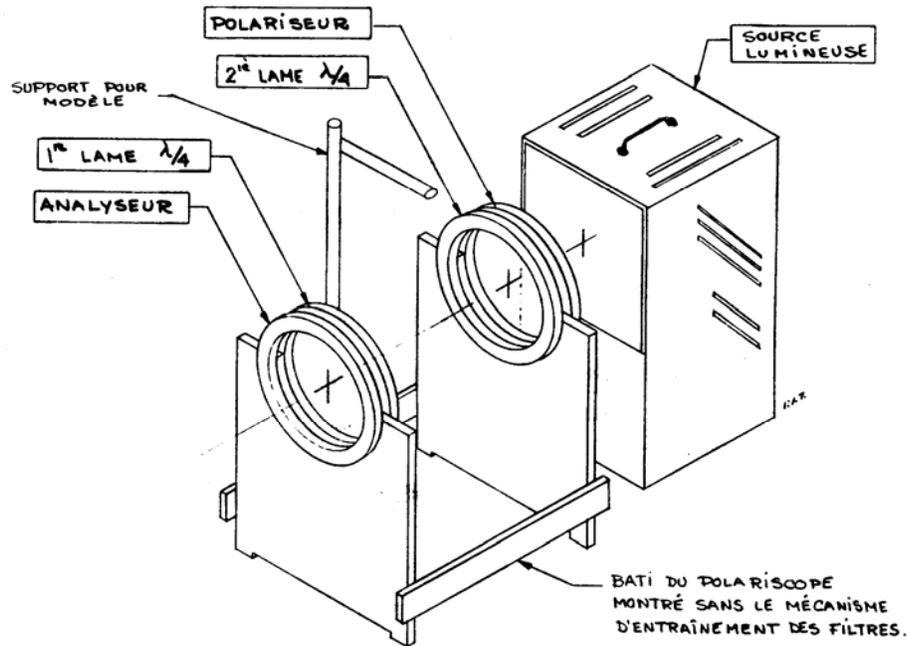
Pour obtenir des mesures précises, il est essentiel d'aligner optiquement le polariseur et l'analyseur de manière à ce que leurs axes respectifs de polarisation soient vertical et horizontal. Par la suite, les axes des lames quart d'onde pourront être trouvés facilement à l'aide du polariscope plan que l'on vient d'aligner.

### Procédure

#### A- Polariscope plan (pour l'étude des isoclines)

- a) Placer les polaroids en position, les tourner l'un par rapport à l'autre jusqu'à ce qu'il y ait extinction totale.
- b) Placer le modèle en position, y suspendre un poids léger (250 g). Observer le modèle à travers l'analyseur, on y voit une isocline.

- c) Tourner les deux polaroids simultanément jusqu'à ce que l'isocline soit parfaitement symétrique par rapport à l'axe vertical au centre du modèle.
- d) Les polaroids ont maintenant leurs axes alignés suivant la verticale et l'horizontale. S'assurer que la position de l'analyseur est à  $0^\circ$ .



**Figure 1** - Schéma montrant le bâti et la position des filtres

### B- Polariscope circulaire (pour l'étude des isochromes)

On doit ajouter deux lames quart d'onde au polariscope plan pour obtenir un polariscope circulaire.

- a) Enlever le modèle, et verrouiller les polaroids qui sont alignés suivant la verticale et l'horizontale.
- b) Placer la 1<sup>ère</sup> lame quart d'onde en position, puis la tourner jusqu'à extinction (on a ainsi les axes principaux de cette lame). Ensuite, par rapport à cette position, faire tourner la lame quart d'onde de  $45^\circ$ . Marquer cette orientation sur la lame quart d'onde.
- c) Placer la 2<sup>ème</sup> lame quart d'onde en position et la tourner jusqu'à l'extinction. Marquer cette orientation. Le polariscope circulaire est maintenant aligné.

### C- Vérification de la convention de signe (Fig. 2)

Afin que les polarisopes possèdent tous le même principe d'utilisation quant à la lecture des isochromes, il est nécessaire de se fixer une convention de signe pour cette lecture et d'ensuite ajuster les lames quart d'onde en fonction de cette convention.

Lorsqu'une isocline passe par un point du modèle, les directions principales des contraintes en ce point sont alignées avec les axes du polariseur (P) et de l'analyseur (A) de la façon suivante:

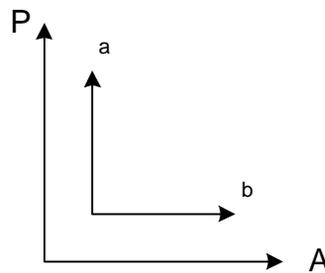
En tournant l'analyseur dans le sens horaire,

- 1) Si une frange inférieure arrive vers le point, alors  $\sigma_a > \sigma_b$  algébriquement i.e.

$$\sigma_a = \sigma_1 \quad ; \quad \sigma_b = \sigma_2$$

- 2) Si une frange supérieure arrive vers le point, alors  $\sigma_b > \sigma_a$  algébriquement i.e.

$$\sigma_a = \sigma_2 \quad ; \quad \sigma_b = \sigma_1$$



**Figure 2** - Convention de signe pour les contraintes

Pour vérifier la convention de signe, on observe le modèle chargé en traction pure à un point où la direction des contraintes principales est alignée avec les axes des polaroids (horizontal et vertical). À ce point, la valeur relative des contraintes est également connue, par exemple  $\sigma_a > \sigma_b$ . On tourne ensuite l'analyseur dans le sens horaire. Si la convention de signe n'est pas observée, il faut alors tourner les deux lames quart d'onde de  $90^\circ$ .

Lorsqu'un polariseur est réglé selon la convention de signe, la méthode d'interpolation de Tardy permet de déterminer l'orientation de  $\sigma_1$  (ou de  $\sigma_2$ ) en observant quel type de frange, inférieure ou supérieure, arrive au point.

## 2 Étalonnage du matériau photoélastique

Avec les polariscope utilisés en laboratoire, nous sommes limités quant à la magnitude des charges à appliquer sur les modèles que l'on veut étudier. Il nous faudra donc un matériau photoélastique assez mou sur lequel on n'aura pas besoin d'appliquer de fortes charges afin d'obtenir un état de contrainte facilement analysable avec un polariscope. La polyuréthane répond assez bien à ces besoins et c'est le matériau<sup>1</sup> que nous allons utiliser.

### 2.1 Coefficient de frange "f" du matériau

Pour déterminer le coefficient de frange "f" du matériau de l'éprouvette, on choisit une région soumise à un état de contrainte uniaxiale (ou supposée uniaxiale). Afin de connaître la relation qui existe entre le niveau de contrainte et les isochromes, le coefficient de frange du matériau est établi par un étalonnage statique.

Soit les contraintes théoriques au point K dans la région d'étalonnage (fig. 3):

$$\sigma_{yK} = \frac{P}{bd} = \sigma_1 \quad \sigma_{xK} = 0 = \sigma_2$$

où  $b$  = largeur du modèle  
 $d$  = épaisseur du modèle  
 $P$  = charge uniaxiale

Donc  $(\sigma_1 - \sigma_2)_K = (\sigma_y - 0)_K = \frac{P}{bd} = N'_K \frac{f}{d}$

d'où  $f = \frac{1}{\left(\frac{N'_K}{P}\right)} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{S_K \times b}$

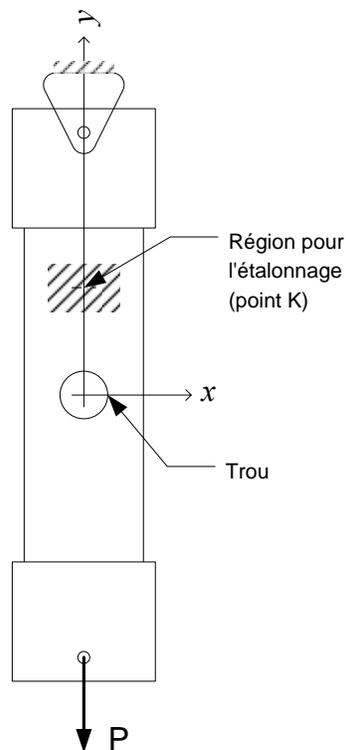
où  $f$  = coefficient de frange (MPa .m/frange)  
 $S_K$  = pente de la droite  $N'_K$  vs  $P$

À l'aide du polariscope circulaire et de la méthode d'interpolation de Tardy, déterminez la valeur  $f$  pour le matériau du modèle de la façon suivante :

- Mesurez  $N'_K$ , pour un cycle de chargement ( $P$  max. 1 Kg)
- Tracez le graphe  $N'_K$  vs  $P$  et déterminez la pente de la droite  $S_K$
- Calculez la valeur de  $f$  (il faut aussi connaître la valeur de la largeur  $b$ )

---

<sup>1</sup> Vvendu par la compagnie Vishay sous le nom de "Photolastic PSM 4"



**Figure 3** - Diagramme montrant une région de contrainte uniaxiale dans l'éprouvette

### 3 Étude de la distribution des contraintes

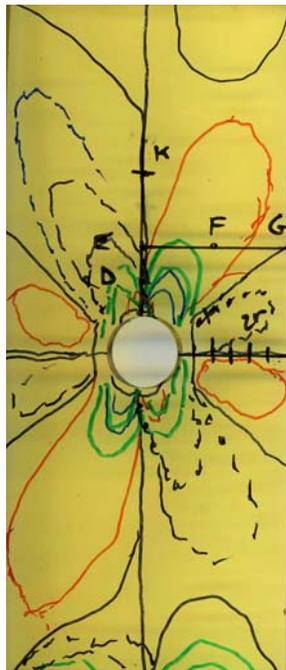
Cette étude comporte la détermination des valeurs suivantes:

- 1) Les isoclines dans tout le modèle. Tracer directement sur le modèle, à l'aide d'un crayon feutre, les isoclines à tous les  $5^\circ$ . Il faut repérer toutes les isoclines, soit de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ . Cependant, la géométrie du modèle fait en sorte que l'on retrouvera la plupart les isoclines de  $0^\circ$  à  $25^\circ$  et de  $65^\circ$  à  $90^\circ$ . Puisque les deux contraintes principales sont séparées de  $90^\circ$ , on devrait retrouver les mêmes isoclines de  $90^\circ$  à  $125^\circ$  et de  $155^\circ$  à  $180^\circ$  (à vérifier). Une fois le traçage des isoclines complété, numériser le modèle (voir exemple fig. 4)
- 2) Le tracé des isostatiques autour de la zone du trou en se servant des isoclines obtenues en 1). Vous pouvez consulter le paragraphe 5.3.9 des notes de cours pour connaître les méthodes de traçage des isostatiques. Prenez note que cette étape du travail doit être faite après le laboratoire.
- 3) Les isochromes pour une charge faisant apparaître au moins  $N=2$ . Tracer les isochromes avec un crayon feutre sur le modèle, en fond noir (polaroïds croisés) et en fond blanc (polaroïds parallèles). Numériser le modèle.
- 4) Le facteur de concentration de contrainte ( $K_t$ ) sur le bord du trou (point A, fig. 5). Afin d'assurer une plus grande précision à vos mesures, mesurer la contrainte sur le bord du trou pour un cycle de chargement ( 0 à 1 Kg. max.) Pour déterminer le numéro d'une

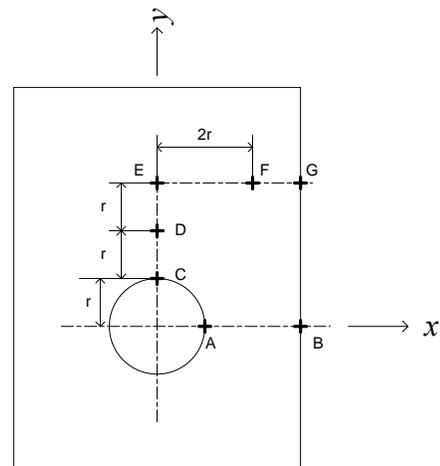
isochrome, appliquer graduellement la charge et compter les franges au fur et à mesure qu'elles apparaissent sur le bord du trou. Pour le calcul du facteur de concentration de contrainte, consulter l'annexe 2.

- 5) La distribution de contrainte le long de la ligne horizontale A-B (fig. 5). Prendre la charge maximale de l'étape 4).
- 6) Les contraintes aux points C à G (fig. 5). Assurez-vous qu'une isocline passe par chacun des points avant d'appliquer la méthode d'interpolation de Tardy. Prendre la même charge qu'à l'étape 5).
- 7) Le signe de la contrainte principale non-nulle aux points A, B, C, G (fig. 5). Vous pouvez utiliser la méthode de séparation des contraintes pour les parois non chargées qui est décrite au paragraphe 5.3.8 des notes de cours.

Tous les autres renseignements nécessaires seront donnés au cours de la séance.



**Figure 4** – Exemple d'un tracé d'isoclines sur le modèle. Les résultats peuvent différer selon l'éprouvette que vous utilisez.



**Figure 5** – Position des points de mesure autour du trou central de l'éprouvette ( $r$  est le rayon du trou)

Luc Marchand, Ph. D., Ing.  
 Professeur  
 École Polytechnique de Montréal  
 Novembre 2006

## Annexe 1

### Principe de fonctionnement des polariscope

#### 1 - Le polariscope plan

Dans un polariscope plan (Fig. 6), le modèle est placé entre deux polaroïds croisés (i.e. dont les axes de polarisation sont orthogonaux). Ces polaroïds sont appelés "polariseur" et "analyseur" respectivement.

Avant d'insérer le modèle, ou lorsque celui-ci n'est pas chargé, aucune lumière ne traverse l'analyseur. Lorsque le modèle est chargé, l'onde lumineuse plan polarisée issue du polariseur se décompose suivant les directions principales, 1 et 2, en passant à travers le modèle. À la sortie du modèle, ces deux composantes sont déphasées temporellement en proportion de  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  comme on peut le voir à la figure 6. Lorsque ces deux ondes traversent l'analyseur, seules leurs composantes selon l'axe de l'analyseur sont transmises et elles sont toujours d'amplitudes égales. Elles vibrent maintenant dans un même plan et peuvent interférer entre-elles causant des phénomènes d'extinction que peut voir l'observateur.

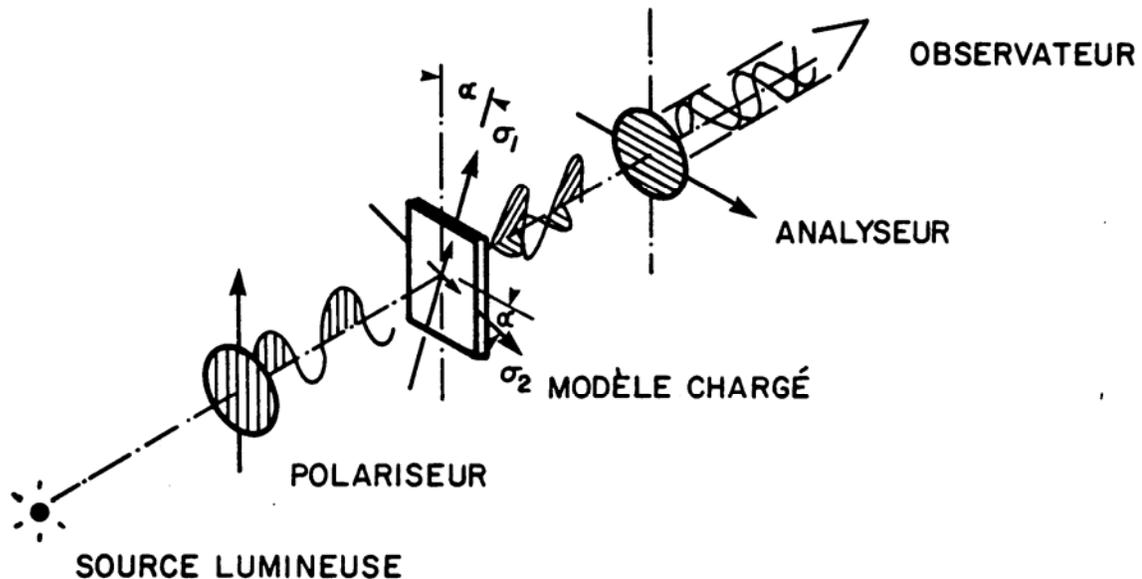


Fig. 6 – Polariscopes plan

À la sortie de l'analyseur, l'intensité de la lumière obéit à l'équation suivante :

$$I = A^2 \sin^2(2\alpha) \times \sin^2 \left[ \frac{\pi C d}{\lambda} (\sigma_1 - \sigma_2) \right]$$

où  $I$  : intensité  
 $A, C$  : constantes  
 $\lambda$  : longueur d'onde  
 $d$  : épaisseur du modèle  
 $\alpha$  : angle entre les axes des polaroïds et les directions principales

Selon l'équation précédente, deux conditions peuvent causer l'extinction du faisceau lumineux traversant le modèle en un point donné:

- (i) lorsque l'orientation des contraintes principales est la même que celle des axes des polaroïds croisés (i.e.  $\alpha = 0^\circ$  ou  $90^\circ$ ), l'onde plane issue du polariseur ne voit qu'un seul indice de réfraction, demeure plane à la sortie du modèle et ne peut traverser l'analyseur: il y a donc extinction totale. Une frange **noire** appelée ISOCLINE passera par tous les points du modèle ayant cette même orientation de contraintes principales.
- (ii) lorsque le déphasage entre les deux composantes issues de l'analyseur est tel qu'elles vibrent en opposition et s'annulent :

$$\frac{Cd}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) = N \text{ entier}$$

Tous les points du modèle ayant la même différence de contraintes principales ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) produiront le même effet. La ligne d'extinction ainsi obtenue est appelée ISOCHROME et sera noire si la source lumineuse est monochromatique ou bien colorée si la lumière est blanche.

Une isochrome est donc le lieu des points de même différence de contraintes principales et elle est obtenue lorsque :

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\lambda}{Cd} N = f \frac{N}{d} \quad (1)$$

- où
- $N =$  ordre de la frange 0, 1, 2, 3 ..... (nombre entier)
  - $f =$  coefficient de frange du matériau pour une longueur d'onde<sup>2</sup> donnée de la source lumineuse (MPa-m/frange)
  - $d =$  épaisseur du modèle (m)

## 2 - Isochromes en lumière blanche (Fig. 7)

L'appellation "ISOCHROME" vient du fait, qu'en lumière blanche<sup>3</sup>, chaque couleur ( $\lambda$ ) s'éteint à une valeur différente de ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) et l'on observe alors des franges de couleur complémentaire dans le modèle. Pour ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) = 0, toutes les couleurs sont éteintes et l'isochrome est noire ( $N=0$ ). Quand on augmente la valeur de ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ), les couleurs froides (bleu, vert) commencent à faiblir tandis que les couleurs chaudes (jaune, rouge) croissent. On passera progressivement par les jaunes, les bruns, les rouges. Puis, subitement les bleus et les violets reprennent le dessus. Cette séparation très nette est la 1<sup>er</sup> teinte sensible et correspond à la frange 1 ( $N=1$ ). Si on continue à augmenter la valeur de ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ), un phénomène analogue mais non identique recommence. Un second passage du rouge au vert marquera la 2<sup>ième</sup> teinte sensible ( $N=2$ ). Le phénomène se poursuivra, mais au-delà de 5 franges il devient très difficile de repérer les teintes sensibles puisque que la couleur résultante est un blanc uniforme.

Par convention en lumière blanche, on choisira le passage du rouge au bleu (ou vert) comme le centre de l'isochrome. Il est relativement facile de distinguer le numéro des premières isochromes en se basant sur les changements de couleur suivants :

<sup>2</sup> Pour la lumière blanche, la longueur d'onde équivalente est d'environ 0,565  $\mu\text{m}$ .

<sup>3</sup> La lumière blanche est composée d'un mélange de toutes les longueurs d'onde comprises entre 0,4 et 0,7  $\mu\text{m}$ .

Frange ( $N$ )	NOIR 0	JAUNE	ROUGE BLEU	JAUNE	ROUGE VERT
			1		2

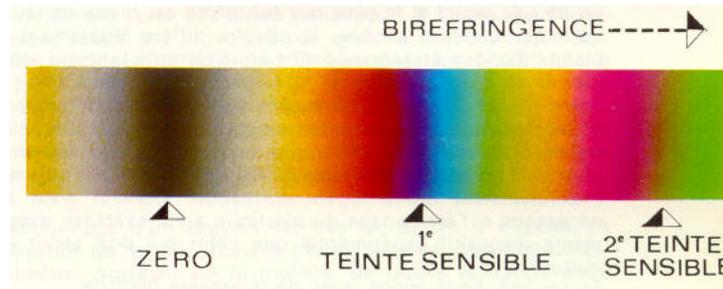


Fig. 7 – Teintes sensibles ou isochromes en fonction d’une valeur ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) croissante (biréfringence croissante)

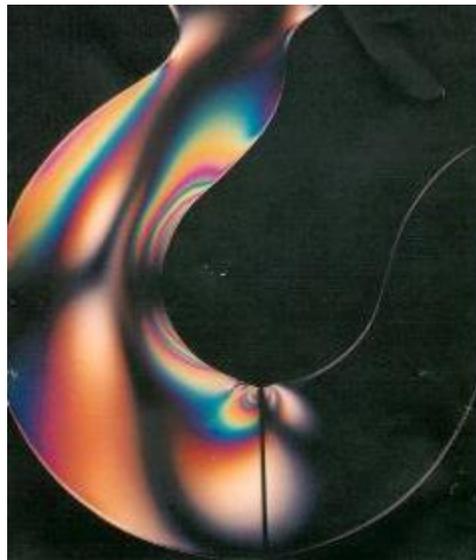


Fig. 8 – Isoclines (noires) et isochromes (colorées) dans un modèle de crochet chargé par un poids vertical. Polariscopes plan, lumière blanche.

### 3 - Élimination des isoclines - Le polariscopes circulaire

Les phénomènes (i) et (ii) décrits précédemment se produisent simultanément. Il y a donc présence d’isoclines et d’isochromes lorsqu’un modèle est chargé (Fig. 8). Les isoclines sont très utiles pour repérer les directions principales. Par contre elles gênent l’observation des isochromes. L’utilisation d’un polariscopes circulaire permet d’éliminer les isoclines sans toutefois modifier la répartition des isochromes.

Principe : Dans le polariscopes circulaire, l’onde lumineuse pénétrant dans le modèle est polarisée circulairement et n’est donc plus influencée par l’orientation des contraintes principales du modèle. Il n’y aura plus d’isoclines<sup>4</sup> et seules les isochromes apparaîtront (Fig. 9).

<sup>4</sup> En fait les isoclines ne sont pas disparues mais à cause de la lumière polarisée circulairement, elles changent constamment de position. Cependant, l’œil de l’observateur ne peut percevoir ces isoclines qui

Polarisation circulaire : On la réalise à l'aide d'une lame optique dont la biréfringence (2 axes de réfraction) est ajustée de telle sorte qu'à la sortie de la lame, le déphasage entre les composantes principales de l'onde lumineuse est d'un quart de longueur d'onde; on l'appelle lame quart d'onde. La figure 10 montre comment on obtient une onde polarisée circulairement à partir d'une onde plane issue du polariseur dont l'axe est à  $45^\circ$  des axes de la lame quart d'onde.

Fonctionnement du polariscope circulaire : La figure 11 montre le schéma d'un polariscope circulaire. On note que les deux lames quart d'onde ( $\lambda/4$ ), situés de part et d'autre du modèle, sont croisées. Leur effet est donc annulé de sorte que, à la sortie de la deuxième lame quart d'onde, on retrouve deux ondes polarisées planes. L'équation (1) demeure donc valide pour décrire les isochromes obtenues par cette méthode.

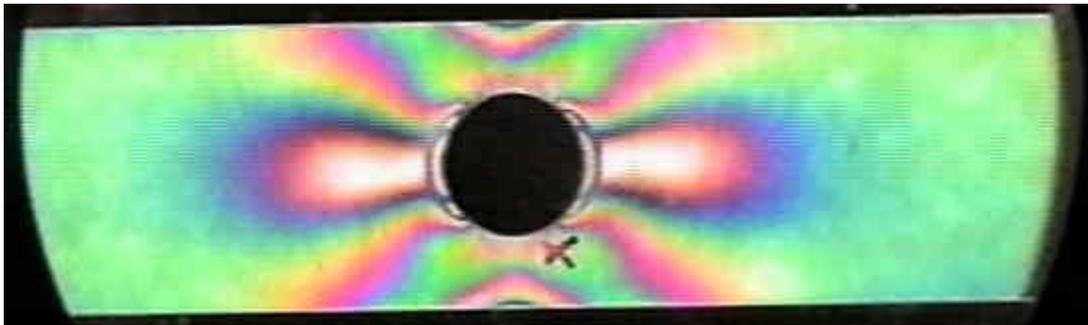


Fig. 9 - Modèle photoélastique d'une plaque trouée chargée en tension uniaxiale.  
Polariscope circulaire, lumière blanche.

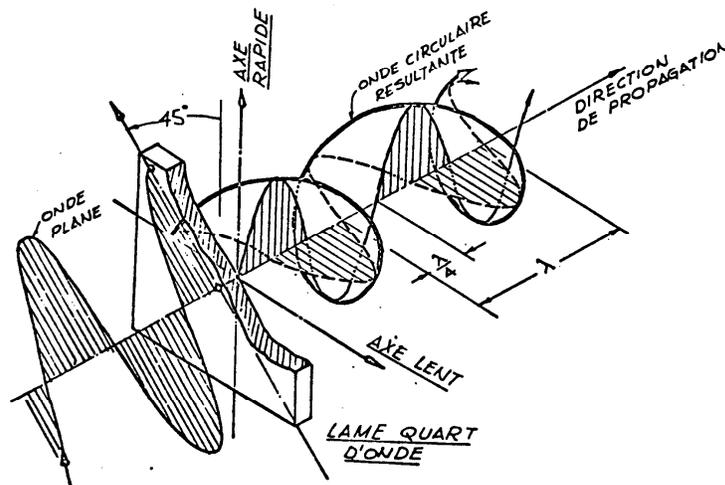


Fig. 10 – Obtention d'une lumière polarisée circulaire à l'aide d'une lame quart d'onde

bougent à la vitesse de la lumière. Mais, celui-ci peut voir que les isochromes qui ne bougent pas si on maintient le chargement constant.

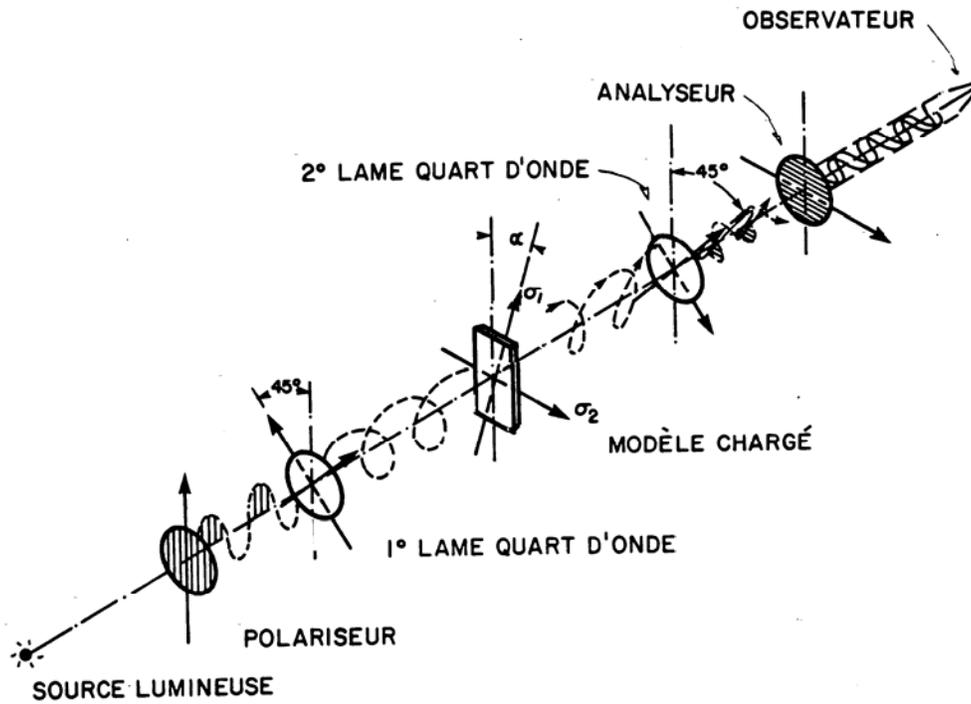


Fig. 11 – Schéma d'un polariscope circulaire

#### 4 - Interpolation angulaire des isochromes: Méthode de TARDY

Au cours de l'analyse d'un modèle photoélastique, il se peut qu'aux points analysés il ne passe pas une isochrome d'ordre entier ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ). Pour connaître alors l'ordre fractionnaire de la frange à ce point, on procède à l'interpolation des isochromes.

Contrairement au polariscope plan où les polaroïds doivent toujours être croisés, le polariscope circulaire permet de tourner l'analyseur dans le but d'interpoler les isochromes et d'augmenter ainsi la précision de la mesure des contraintes. On notera, lors de l'observation au polariscope circulaire, que la rotation de l'analyseur cause le déplacement continu et proportionnel des isochromes.

Soit à déterminer  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  au point A de la figure 12.

On sait que le long de l'isochrone N

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_N = f \frac{N}{d}$$

De même sur l'isochrone N + 1, on a

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_{N+1} = f \frac{(N+1)}{d}$$

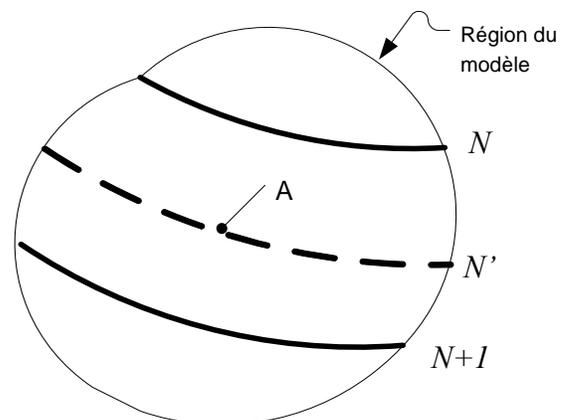


Fig. 12 – Interpolation des isochromes

En tournant l'analyseur d'un angle  $\theta$ , il peut se produire deux situations :

- a) Soit que l'isochrome  $N$  se déplacera vers le point A.  $N$  est une frange dite inférieure et elle s'approchera du point A par son côté bleu (ou vert);
- b) Ou bien l'isochrome  $N+1$  se déplacera vers le point A. Dans ce cas,  $N+1$  est une frange supérieure et elle s'approchera du point A par son côté rouge.

Si on tourne l'analyseur de  $180^\circ$ , l'isochrome  $N$  occupera la position originale de l'isochrome  $N + 1$ . On peut démontrer alors que:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_A = \frac{f}{d} \left( N + \frac{\theta}{180} \right) = N' \frac{f}{d} \quad (2a)$$

où  $N'$  est un nombre fractionnaire.

D'un point de vue pratique, on peut calculer la valeur  $N'$  selon qu'une frange inférieure ou supérieure se rapproche du point à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{aligned} N' &= N_{\text{inf}} + |\theta|/180^\circ \\ N' &= N_{\text{sup}} - |\theta|/180^\circ \end{aligned} \quad (2b)$$

Les équations (2a) et (2b) ne sont valides que si une isocline passe par le point A<sup>5</sup>. Fait à signaler, une rotation de  $90^\circ$  de l'analyseur donnera les isochromes d'ordre  $\frac{1}{2}$ ,  $1\frac{1}{2}$ ,  $2\frac{1}{2}$ , etc., et le modèle apparaîtra sur fond clair puisque le polariseur et l'analyseur ont le même orientation sous cette condition.

D'un point de vue pratique, pour chaque interpolation il faudra donc procéder comme suit:

- 1) Enlever les lames quart d'onde et faire tourner le polariseur et l'analyseur simultanément pour qu'une isocline passe par le point considéré. Noter l'angle tourné  $\alpha$ .
- 2) Ramener le polariseur et l'analyseur à leurs positions originales. Replacer les lames quart d'onde et faire tourner l'ensemble des filtres du même angle  $\alpha$ .
- 3) Tourner l'analyseur d'un angle  $\theta$  pour qu'une frange (isochrome) passe par le point considéré. Tous les autres filtres sont immobilisés durant cette opération. Déterminer s'il s'agit d'une frange supérieure ou inférieure en suivant la séquence d'apparition des couleurs.

---

<sup>5</sup> Pour voir si une isocline passe par le point A, il faut retirer les lames quart d'onde afin d'obtenir un polariscope plan. Cependant, pour les modèles étudiés dans ce laboratoire, cette vérification n'est pas toujours requise puisque certains points d'intérêt sont situés sur les axes de symétrie vertical et horizontal, qui sont aussi des axes principaux. Donc, nécessairement, des isoclines passent par ces points lorsque le polariseur et l'analyseur sont initialement orientés selon la verticale et l'horizontale (polaroïds croisés).

## Annexe 2

### Détermination du facteur de concentration de contrainte

Posons, par exemple, que le point A sur le bord du trou (fig. 5), est le point de contrainte maximale. On retrouve, à cet endroit, une concentration de contrainte causée par le changement brusque de géométrie qu'impose la présence du trou.

La contrainte au point A est,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_A = (\sigma_{yA} - 0) = N'_A \frac{f}{d} \quad (1)$$

À l'aide du polariscope circulaire

- Enregistrez  $N'_A$  pour un cycle de chargement ( $P$  max. 1 kg)
- Tracez le graphe de  $N'_A$  vs  $P$  et déterminez la pente  $S_A$

La contrainte au point A sera donc égale à :

$$\frac{\sigma_A}{P} = \frac{N'_A}{P} \times \frac{f}{d} = \frac{S_A f}{d} \quad (2)$$

où,  $S_A$  est la pente de la droite  $N'_A$  vs  $P$

Le facteur de concentration de contrainte au point A est défini comme suit :

$$K_{tA} = \frac{\sigma_A}{\sigma_0} \quad (3)$$

où,  $\sigma_0$  est la contrainte nominale au point A

$$\sigma_0 = \frac{P}{\text{Aire réelle}} = \frac{P}{(b-2r)d} \quad (4)$$

où,    b: largeur du modèle  
      d: épaisseur du modèle  
      r: rayon du trou

En combinant les équations précédentes on obtient :

$$K_{tA} = \frac{\sigma_A}{\sigma_0} = \frac{\sigma_A/P}{\sigma_0/P} = \frac{\left(\frac{N'_A}{P}\right)}{\left(\frac{N'_K}{P}\right)} \times \frac{(b-2r)d}{bd} = \frac{S_A}{S_K} \times \frac{(b-2r)d}{bd} \quad (5)$$

Noter que  $S_K$  est la pente déterminée à partir de l'essai d'étalonnage du matériau.

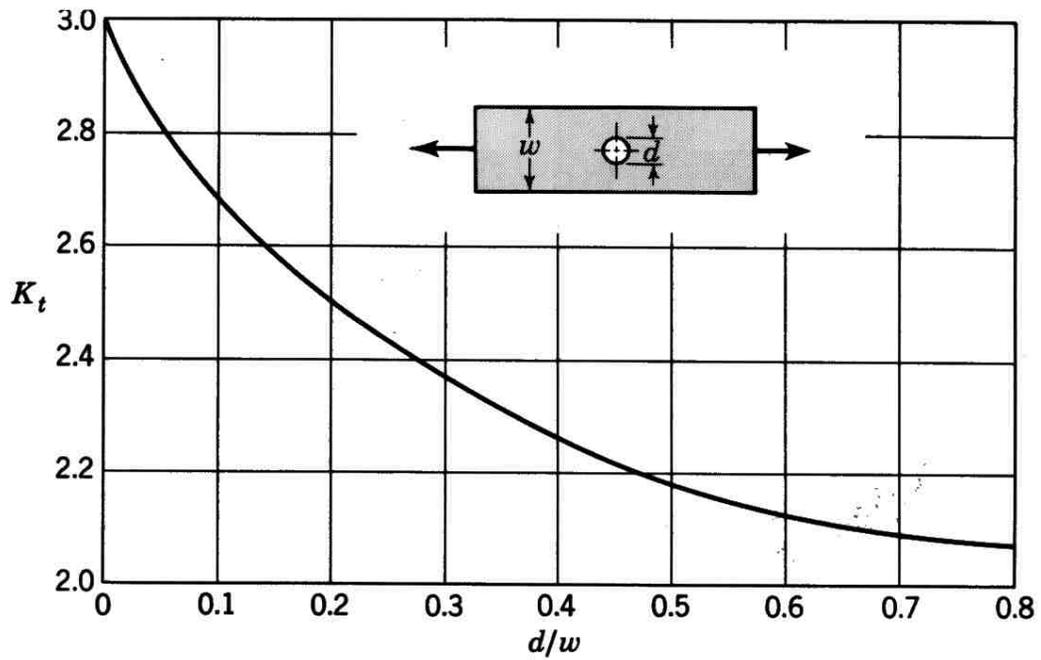


Fig. 14- Barreau en tension simple avec perforation circulaire centrée.  $\sigma_0 = P/A$  où  $A = (w-d)t$ ;  $t$  = épaisseur et  $d$  = diamètre du trou. (Réf. J.E. Shigley Mechanical Engineering Design).