Chapitre 4

Caractéristiques métrologiques du mesurage

MEC6405 - Analyse expérimentale des contraintes

COURS #5

Automne 2011

Définitions

- ***Mesurande*** : La grandeur physique qui est l'objet de la mesure et qui est représentée par le symbole "$\boldsymbol{m}$"

- Les domaines d'évolution sont:
  - **statique** → peu ou pas de changement dans le temps
  - **dynamique** → évolution continuelle dans le temps

- *Mesurage ou mesure* : Ensemble des opérations expérimentales qui concourent à la connaissance dans le temps de la valeur numérique du mesurande.

Capteur

- Dispositif qui transforme la grandeur physique à mesurer en un **signal de nature électrique** "s"
- La mesure de "s" doit permettre la connaissance aussi exacte que possible du mesurande "m".

$$\underline{\textit{mesurande "m"}} \rightarrow \textbf{Capteur} \rightarrow \underline{\textit{signal électrique "s"}}$$

$$s = f(m)$$

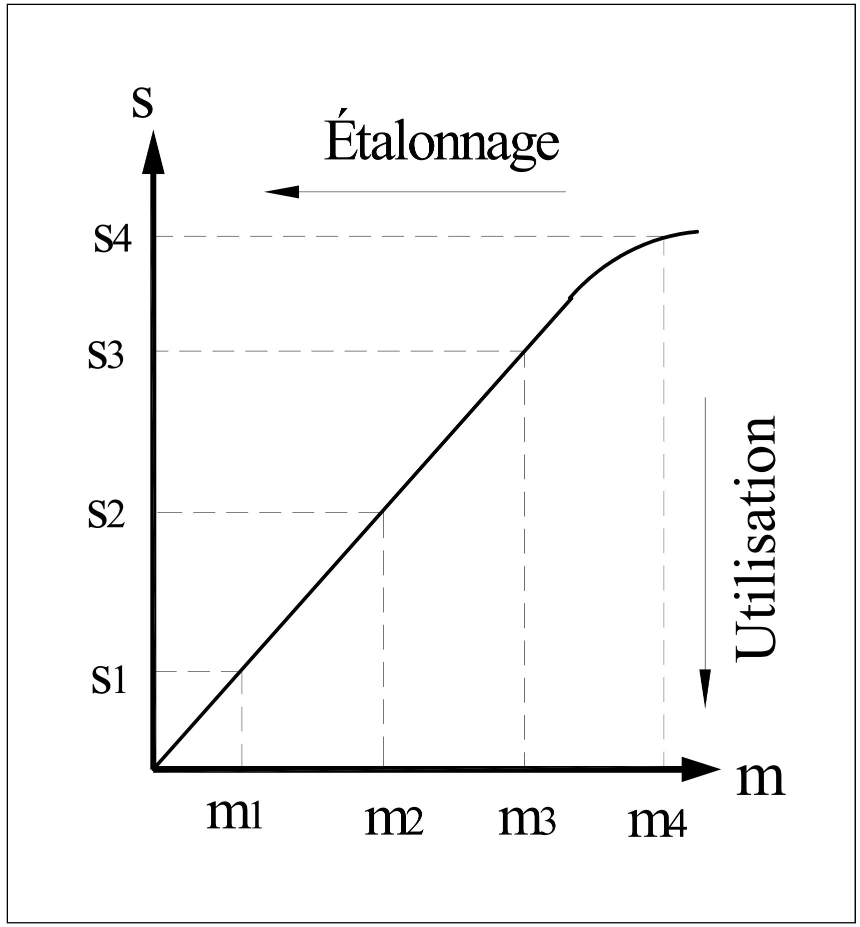
- La fonction f dépend de plusieurs facteurs:
  - Lois physiques qui régissent le fonctionnement du capteur
  - Construction, matériau, environnement, etc.

Relation linéaire

- Pour des raisons de facilité d'exploitation on essaie généralement d'obtenir pour la fonction f une relation linéaire:

$$S = \frac{\Delta s}{\Delta m}$$

où S est la sensibilité



Capteurs actifs et passifs

a) **Capteur actif :** <u>Source</u> qui produit un signal électrique traduisant le mesurande aussi fidèlement que possible. La sortie "s" est une:

- charge
- tension
- courant

b) **Capteur passif :** <u>Impédance</u> dont la variation traduit le mesurande et qui est mesurable que par un circuit approprié (conditionneur) alimenté par une source extérieure. La sortie "s" est une:

- résistance
- inductance
- capacité

Capteurs actifs, quelques exemples

- Effet thermoélectrique :

Un circuit formé de 2 conducteurs chimiquement différents dont les jonctions J_1 et J_2 sont à des températures différentes (T_1 et T_2) induisent une force électromotrice (fém) proportionnelle à la différence de température.

Ex. : Thermocouple

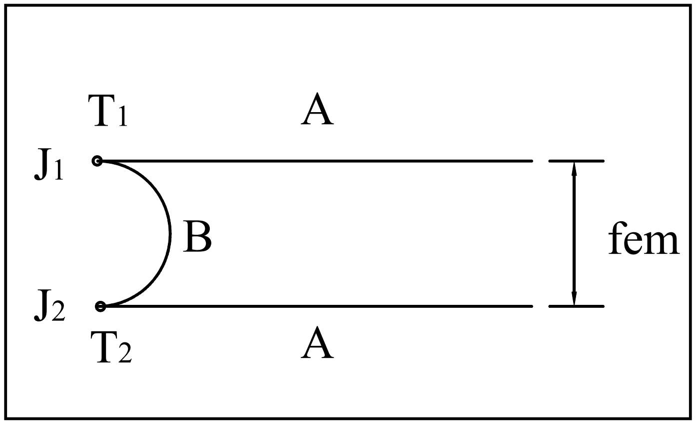


Figure 4.3

- Effets pyroélectrique :

Polarisation électrique spontanée de certains cristaux (Ex. sulfate de triglycine) qui dépend de leur température. Ils portent en surface des charges électriques proportionnelles à cette polarisation et de signes contraires sur les 2 faces.

Φ : flux de rayonnement lumineux

V : variation de tension aux bornes d'un condensateur associé

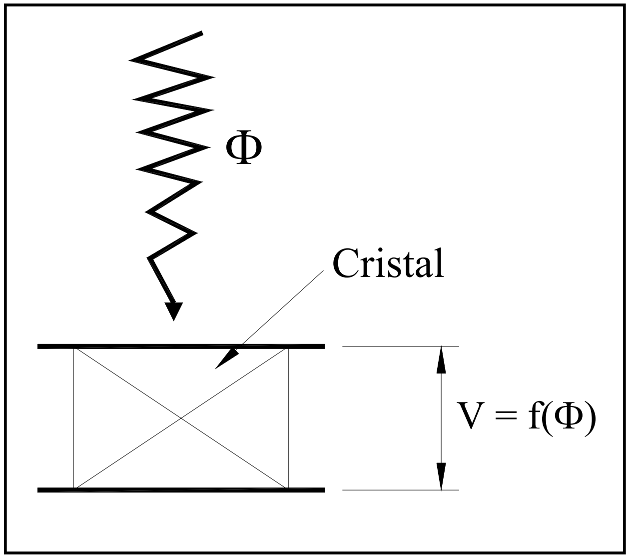


Figure 4.4

- **Effets piezo-électrique** :

L'application d'une contrainte mécanique à certains matériaux (Ex. cristaux de quartz) entraîne une déformation qui crée des charges électriques égales et de signes opposés sur les faces sous charge.

F : force de compression
V : variation de tension aux bornes d'un condensateur associé

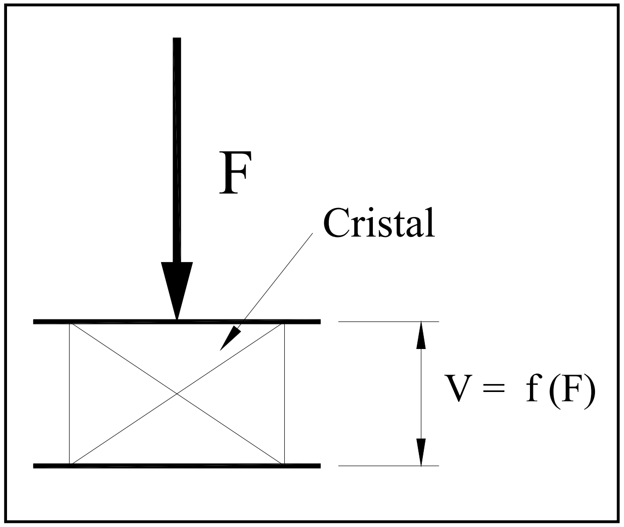


Figure 4.5

- **Induction électromagnétique** :

Lorsqu'un conducteur se déplace dans un champ d'induction fixe, il se crée une fém proportionnelle au flux coupé par unité de temps, donc à sa vitesse de déplacement.

Ω : rotation du cadre
$\vec{B}$: induction fixe
V : fém créé

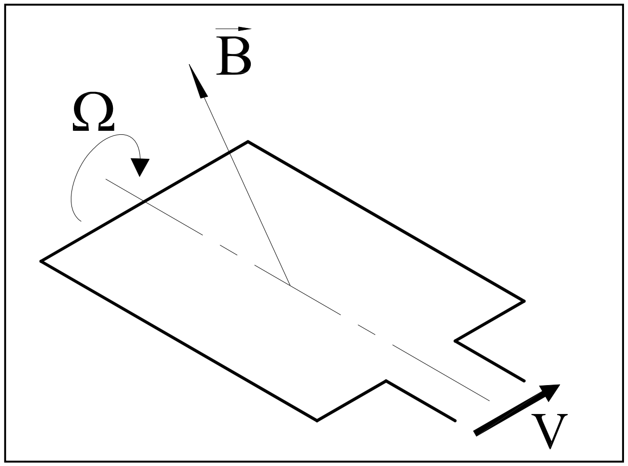


Figure 4.6

- **Effets photoélectriques** :

Libération de charges électriques dans la matière sous l'incidence d'un rayonnement électromagnétique lumineux dont la longueur d'onde est inférieure à une valeur seuil qui dépend du matériau. Ce phénomène peut prendre plusieurs formes : effet photoémissif, photovoltaïque, photoélectromagnétique.

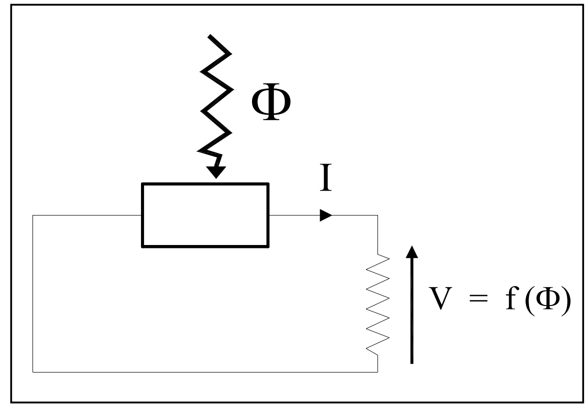


Figure 4.7

- **Effets Hall** :

Lorsqu'un matériau semi-conducteur est parcouru par un courant I et est soumis à une induction B (champ magnétique) faisant un angle θ avec le courant, il apparaît alors dans le matériaux une tension V perpendiculaire à B et à I. La source réelle de l'énergie liée au signal est le courant I et non pas le mesurande.

$$V = K_H \cdot I \cdot B \cdot \sin\theta$$

K_H : dépend du matériau et des dimensions du semi-conducteur

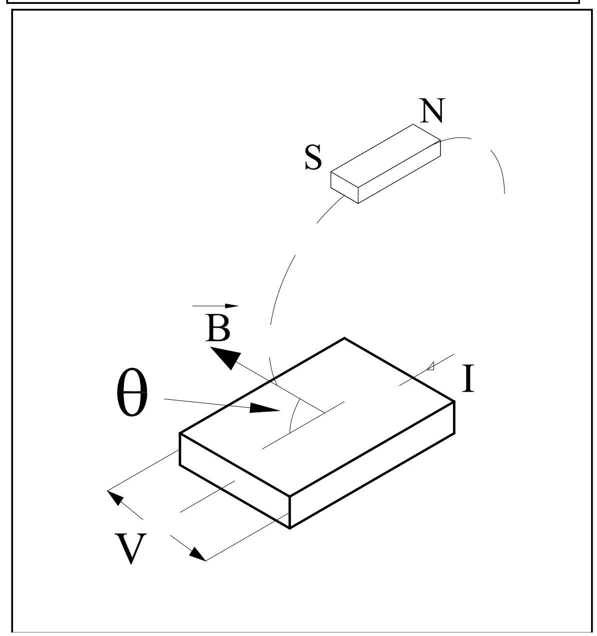


Figure 4.8

Sommaire des principaux **capteurs actifs**

Mesurande	Principe physique	Sortie
Température	Thermoélectricité	Tension
Flux de rayonnement lumineux	Pyroélectricité Photoémissif Photovoltaïque Photoélectromagnétique	Charge Courant Tension Tension
Force, pression, accélération	Piezo-électricité	Charge
Vitesse de déplacement	Induction électromagnétique	Tension
Position	Effet Hall	Tension

Capteurs passifs

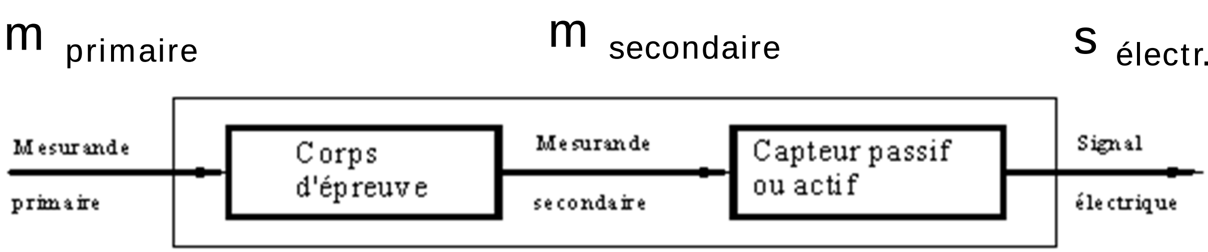
- La valeur de l'impédance du capteur est liée:
  - à sa géométrie
  - aux propriétés des matériaux qui la constituent

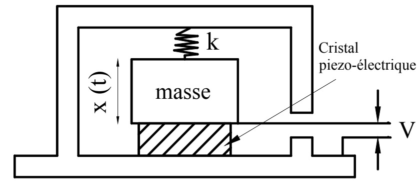
- Exemples de capteurs:
  - Capteurs à élément mobile (potentiomètre)
  - Capteurs à élément déformable (corps d'épreuve)
  - Résistivité électrique ρ
  - Perméabilité magnétique μ
  - Constante diélectrique ε

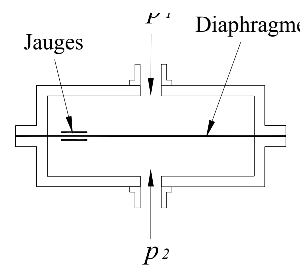
Capteurs passifs, exemples

Mesurande	Caractéristique électrique sensible	Matériaux utilisés
Température Très basse température	Résistivité, ρ Constante diélectrique, ε	Platine, nickel, cuivre, Semi-conducteurs, Verres
Flux de rayonnement optique	Résistivité, ρ	Semi-conducteurs
Déformation	Résistivité, ρ Perméabilité magnétique, μ	Alliage de nickel, silicium dopé Alliages ferromagnétiques
Position (aimant)	Résistivité, ρ	Matériaux magnéto-résistants : bismuth, antimoniure d'indium
Humidité	Résistivité, ρ Constante diélectrique, ε	Chlorure de lithium Alumine, polymères
Niveau	Constante diélectrique, ε	Liquides isolants

Le corps d'épreuve

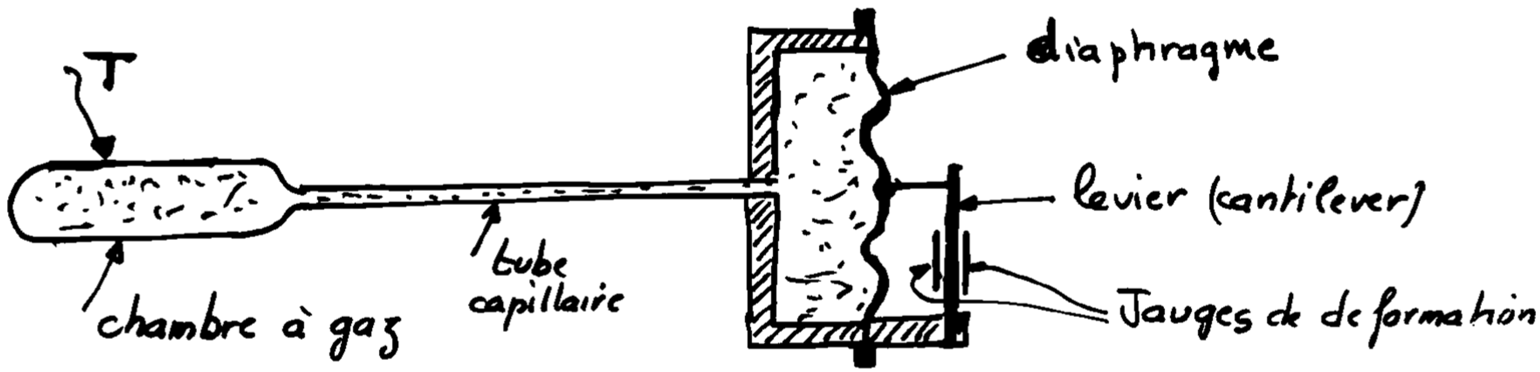






- Dispositif qui, soumis à l'action du mesurande (ex. une force), en assure une première transformation en une autre grandeur physique non-électrique, **le mesurande secondaire**, que le capteur traduit en signal électrique grâce au circuit de conditionnement.

Ex. Chambre à gaz (capteur de température)



Mesurande primaire : **Température**

→ Dilatation du gaz

→ Augmentation de pression

→ Déflexion du diaphragme

→ Flexion de la poutre

→ Déformation des jauges

→Variation de résistance

Grandeurs d'influence

- Les grandeurs d'influence sont les **"parasites"** de la mesure
- Les principales grandeurs d'influence comprennent:
  - Température
  - Pressions, accélérations, vibrations, forces
  - Humidité
  - Champs magnétiques
  - Tension d'alimentation
- De façon générale, on peut écrire : $s = f(m, g_1, g_2, \ldots)$
- On cherche à réduire l'importance des grandeurs d'influence en les stabilisant à des valeurs connues, en compensant, en isolant, etc.

Les erreurs de mesure

- La valeur vraie du mesurande détermine l'excitation du capteur mais l'expérimentateur <u>n'a accès qu'à la réponse globale de la chaîne de mesure</u>
- L'écart entre la valeur vraie et la valeur mesurée, sera toujours <u>inconnu</u> et il y aura toujours une <u>incertitude</u> sur la valeur vraie du mesurande
- **L'erreur de mesure ne peut être qu'estimée** (le mieux possible, bien sûr!)

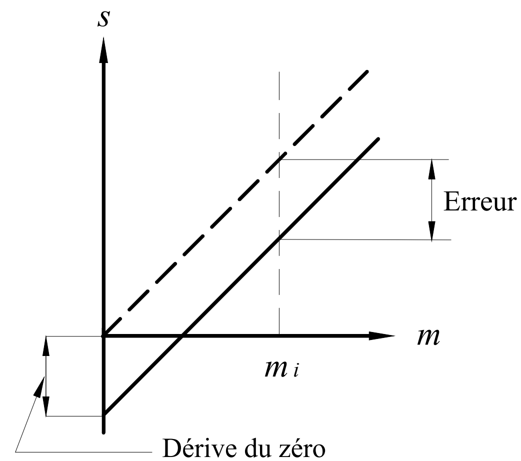
Types d'erreurs de mesure

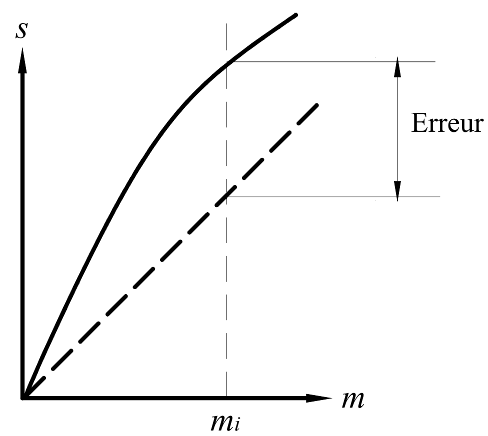
- Erreurs **systématiques**
  - peuvent être éliminées
- Erreurs **accidentelles**
  - sont aléatoires et imprévisibles

Erreurs systématiques

- Ce type d'erreur produit un **décalage constant** ou **croissant** entre la valeur vraie et la valeur mesurée

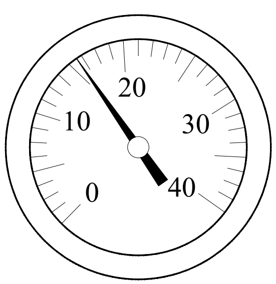
- <u>Détection possible </u>: Vérifier l'écart entr les valeurs d'une série de mesurages portant sur le même mesurande et effectuée par des méthodes et des instruments différents



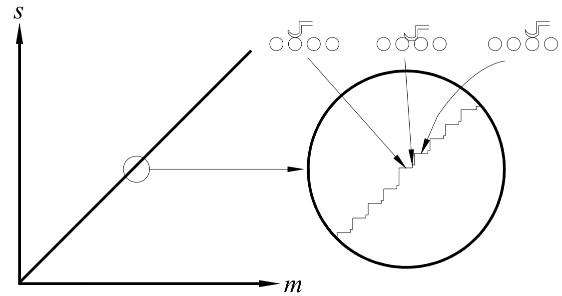


Erreurs aléatoires

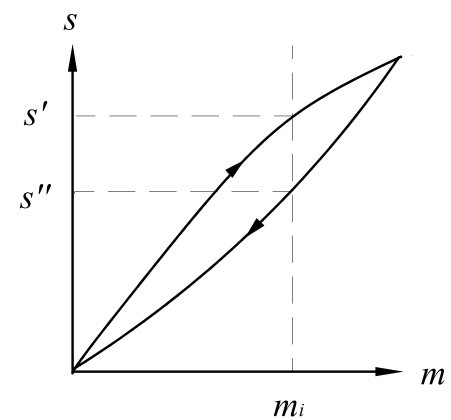
- Erreurs liées aux **indéterminations** des caractéristiques des instruments
  - Erreur de lecture, de mobilité
  - Erreur d'hystérésis, de quantification (½LSB)
  - Erreurs dues aux signaux parasites aléatoires
- Erreurs dues aux grandeurs d'influence



Err. de parallaxe



Err. mobilité



Err. hystérésis

Erreur de quantification

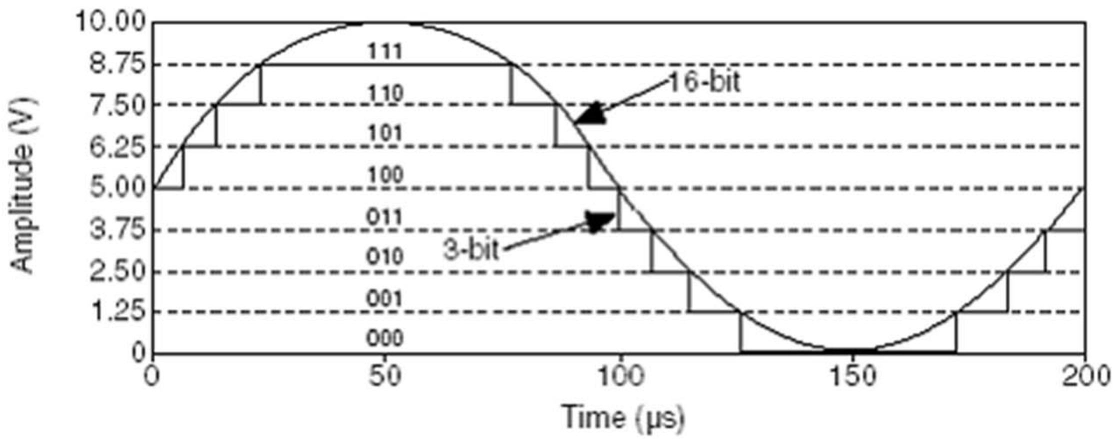
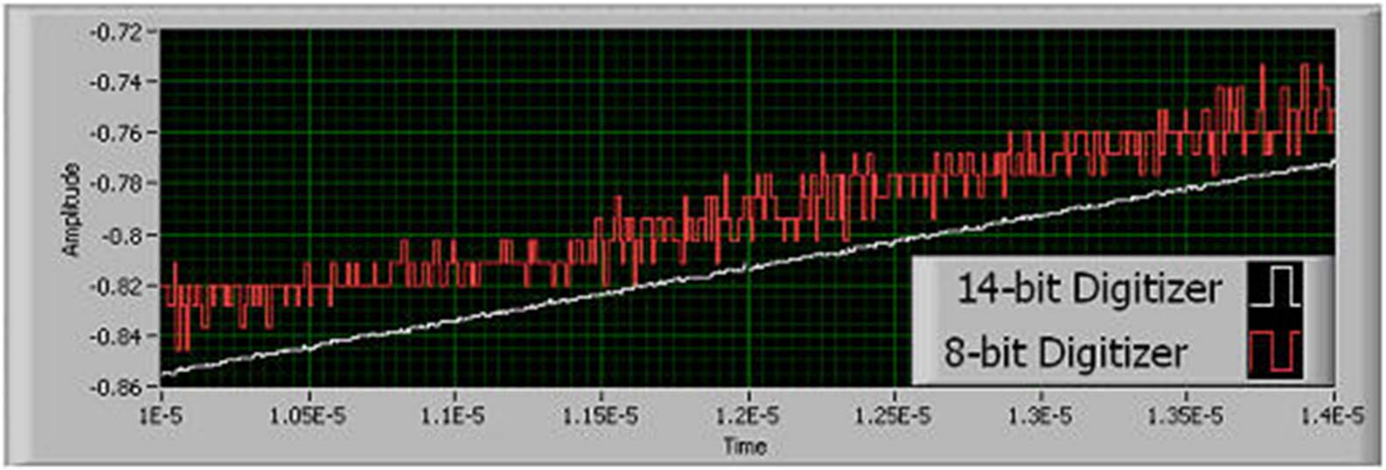


Figure 10. Digital image of a 5 kHz sine wave obtained by a 3 bit ADC

Lors de la conversion analogique/numérique, l'opération de quantification attribue <u>une valeur unique à l'ensemble des valeurs analogiques</u> comprises dans une plage correspondant à 1 bit de poids le plus faible (LSB)

→ **L'incertitude** maximale = ±½ LSB

Ex. Mesure d'un signal rampe



<u>Étendue de mesure</u>: -2V à + 2 V

Avec un convertisseur analogue-numérique de 8 bits:

2^8 = 256 → *err. quant.* = ½ LSB = ½ • 4 Volt / 256 = 8.0 mV

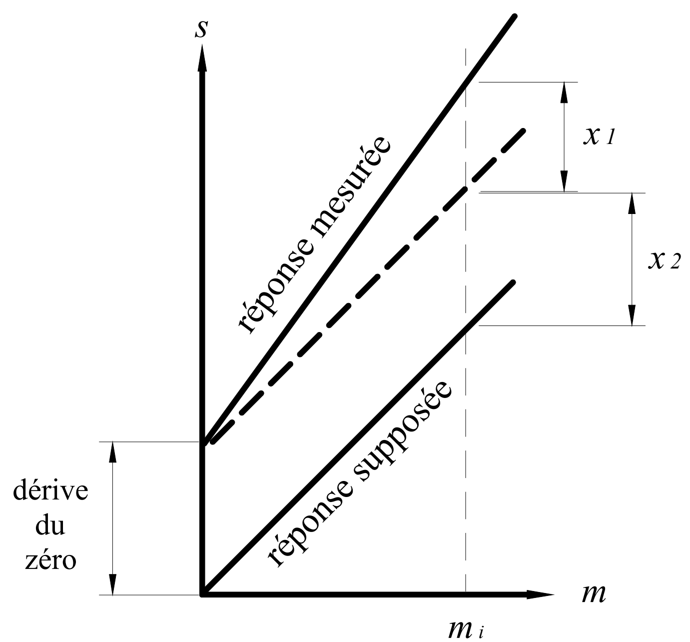
Avec un convertisseur A/N 14 bits :

2^{14} = 16384 → *err. quant.* = ½ • 4 Volt / 16384 = 0.12 mV

Erreurs dues aux grandeurs d'influence

Ex. effet de la température sur les jauges

- Dérive du zéro
- Changement de sensibilité (S_G)



Principales grandeurs d'influence :

-**La température** : modifie les caractéristiques électriques, mécaniques, géométriques

-**Pressions, accélérations, vibrations, forces**, etc. : créent des déformations du corps d'épreuve qui altèrent la réponse.

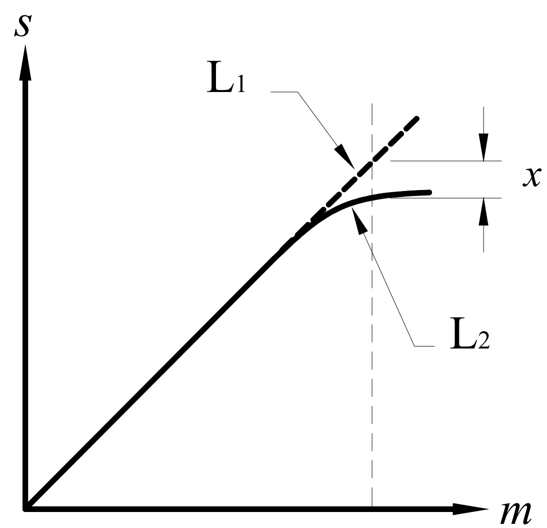
-**Humidité** : la constante diélectrique ε et la résistivité ρ y sont sensibles. Dégradation de l'isolation électrique.

-**Champs magnétiques** statiques et champs magnétiques variables

-**Tension d'alimentation** (fluctuations)

Dépassement de la plage de linéarité

La réponse "s" supposée linéaire (L_1)
dépasse la réponse réelle (L_2)



Réduction des erreurs accidentelles

- Protection de la chaîne de mesure
  - Isolation thermique, hygrométrique, vibratoire
  - Régulation de la tension d'alimentation
  - Élimination des dérives d'amplificateurs
  - Utilisation d'amplificateurs à taux de réjection élevé en mode commun
  - Blindage des fils et mise à la terre
  - Filtrage des signaux parasites
  - Résolution suffisante des convertisseurs analogique/numérique (C.A.N.)

Réduction des erreurs accidentelles

- Utilisation de modes opératoires judicieux
  - mesures différentielles (ponts)
  - détection synchrone (bruit)
  - convertisseurs double-rampe (induction parasites)
  - corrélations entre les mesures par répétition des mesures

Précision des valeurs mesurées

- Les erreurs accidentelles entraînant une dispersion des résultats, il est nécessaire d'introduire le **traitement statistique** pour obtenir :
  - La valeur la plus probable
  - Fixer les limites de l'incertitude.
- Lorsque le mesurage d'une même valeur du mesurande est répété "n" fois, on définit alors :
  - la valeur **moyenne** arithmétique ; la valeur la plus probable
  - **l'écart-type** ("*standard deviation*"); une mesure de la dispersion des résultats

$$\overline{m} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$\sigma = \left[\left(\frac{1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(m_i - \overline{m}\right)^2\right]^{1/2}$$

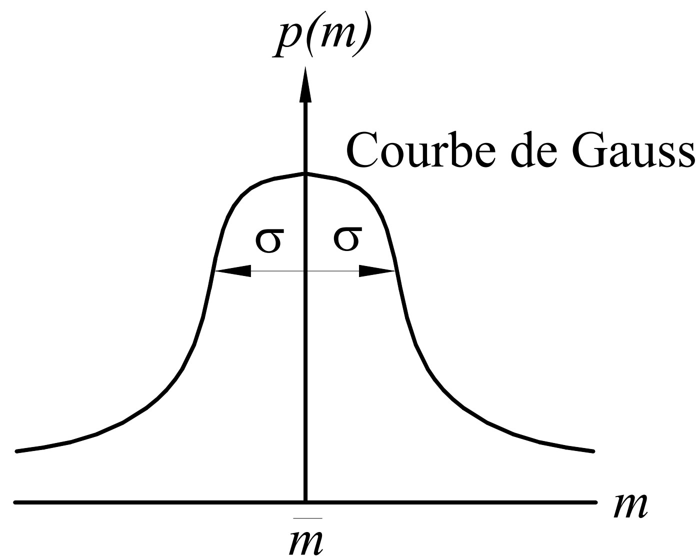
Loi de Gauss

La probabilité d'apparition d'un résultat de mesurage dans les limites indiquées est :

$P(\overline{m} \pm \sigma)$ -------> 68.3 %

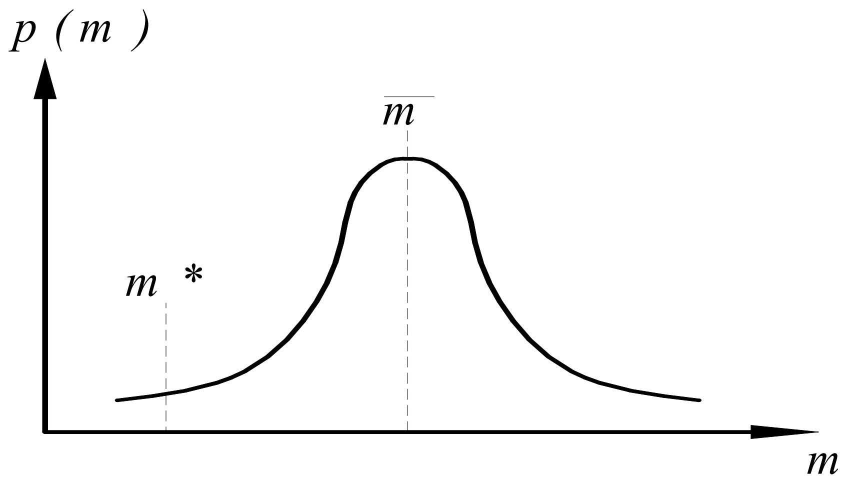
$P(\overline{m} \pm 2\sigma)$ -----> 95.5 %

$P(\overline{m} \pm 3\sigma)$ -----> 99.7 %



Fidélité

- C'est la qualité d'un appareillage de mesure dont **les erreurs accidentelles sont faibles**
- Les résultat de mesurage sont alors groupés autour de la moyenne
- **L'écart type** "σ" qui caractérise la dispersion des résultats est souvent considéré comme l'erreur de fidélité



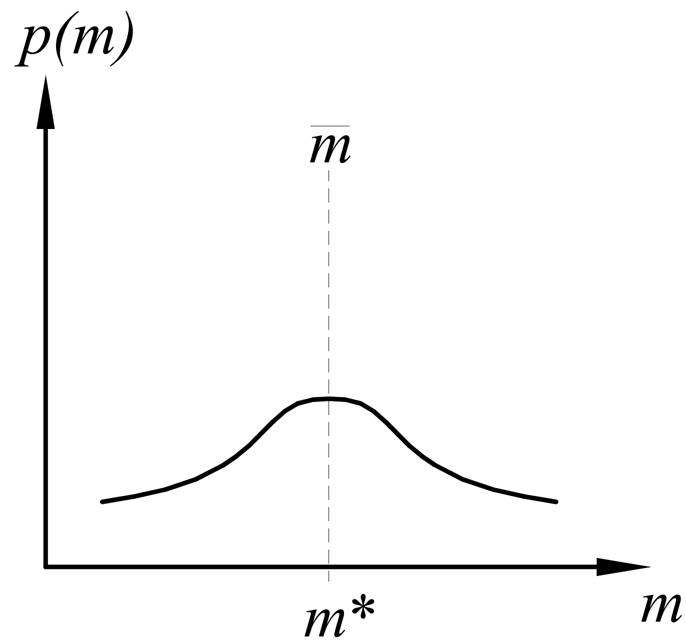
Ex. d'appareil fidèle mais pas juste

(m* est la valeur vraie)

Justesse

- Qualité d'un appareillage de mesure dont les **erreurs systématiques sont faibles**

- La valeur la plus probable d'un mesurande peut être, à ce moment très proche de la valeur vraie

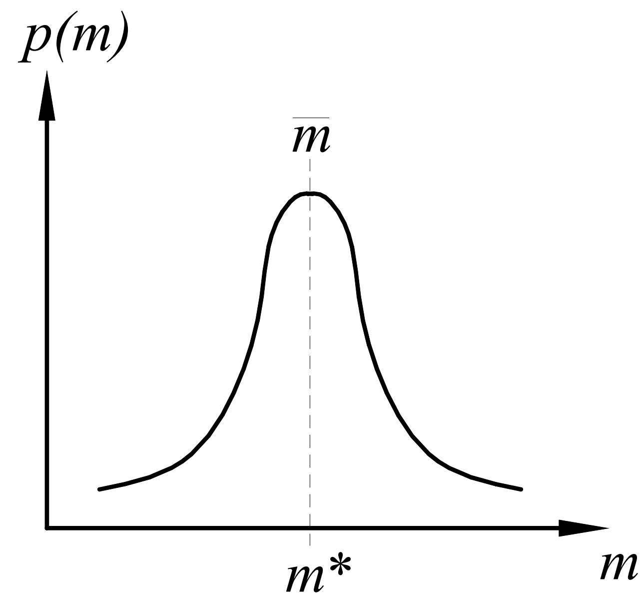


Ex. d'appareil juste mais pas fidèle

Précision

- Qualifie l'aptitude d'un appareillage à donner des résultats qui **individuellement sont proches de la valeur vraie** du mesurande

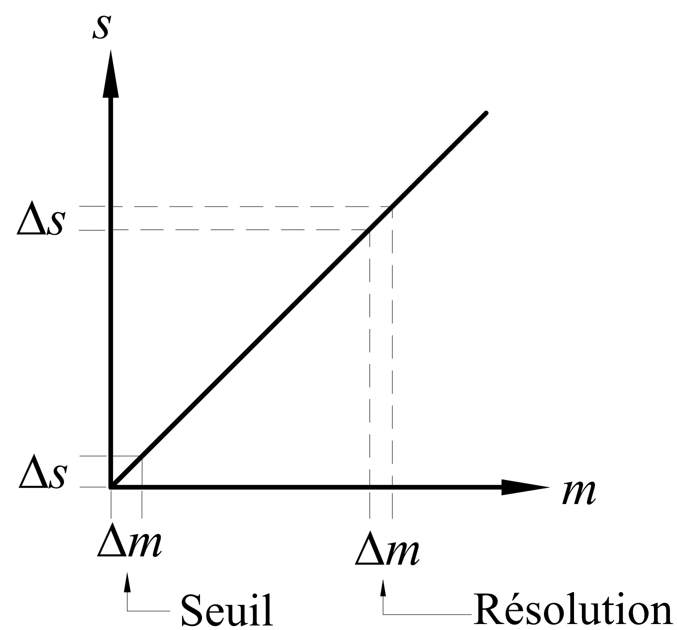
- Un appareil précis est à la fois fidèle et juste



Ex. d'appareil fidèle et juste, donc précis

Résolution (ou seuil)

- Valeur de l'incrément Δm, en dessous duquel aucune variation du signal de sortie Δs ne peut être détectée
- Quand on fait varier le signal d'entrée à partir de zéro, la résolution s'appelle le seuil de l'appareil



ÉTALONNAGE DES CAPTEURS

Étalonnage d'un capteur

- L'étalonnage comprend l'ensemble des opérations nécessaires pour expliciter graphiquement ou algébriquement la relation

$$s = f(m, g_1, g_2, \ldots., g_n)$$

- Deux types:
  - L'étalonnage simple
  - L'étalonnage multiple

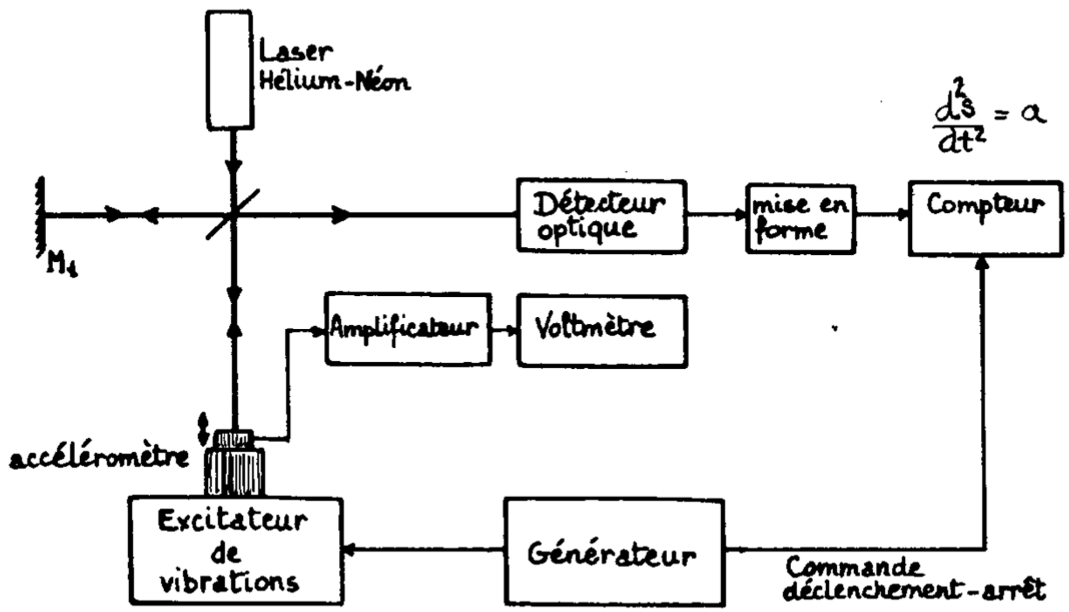
Étalonnage simple

- L'étalonnage simple consiste à associer un signal électrique de sortie s , à une valeur connue du mesurande m (on néglige les grandeurs d'influence)

- Étalonnage direct ou absolu
  - Les valeurs du mesurande sont fournies soit par des valeurs étalon, Ex. : températures de fusion de métaux, cales étalons, résistances électriques étalons, soit par des appareils de référence très précis.

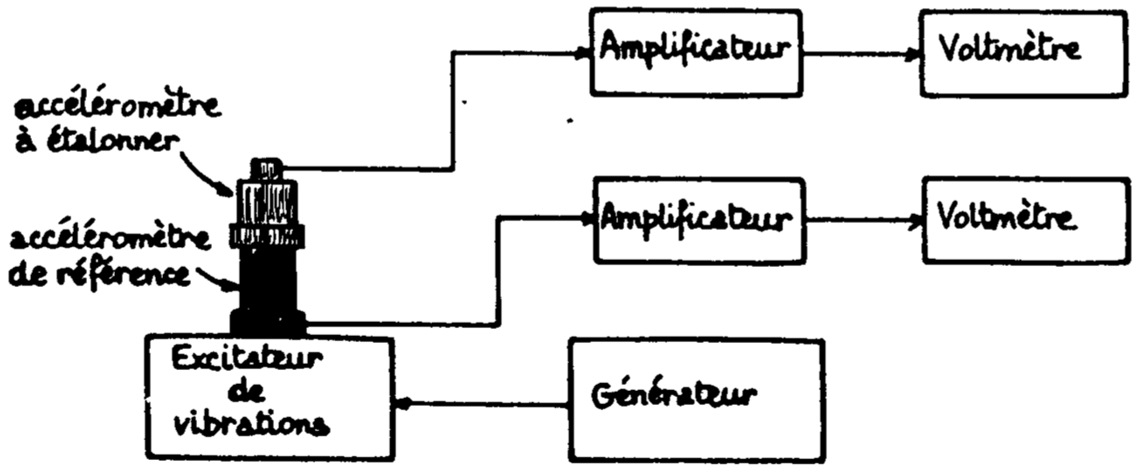
- Étalonnage indirect ou par comparaison
  - Les valeurs connues d'un mesurande sont obtenues par un capteur de référence dont on connaît l'étalonnage et la stabilité

Ex. d'étalonnage direct ou absolu



Étalonnage d'un accéléromètre soumis à une vibration sinusoïdale de fréquence connue. L'amplitude de l'accélération est évaluée directement à partir du déplacement mesuré avec un laser.

Ex. d'étalonnage indirect ou par comparaison



Étalonnage de l'accéléromètre par comparaison avec un accéléromètre de référence

Étalonnage multiple

- Se pratique lorsque le mesurande seul ne permet pas de définir la réponse du capteur

- Une série d'étalonnages successifs sont nécessaires afin que soit précisé l'influence de chacun des paramètres qui affectent la réponse

  - Ex. 1 : Cas de capteurs présentant de l'hystérésis mécanique ou magnétique. Après que la mise à zéro soit faite, la réponse du capteur est relevée pour des valeurs croissantes suivies de valeurs décroissantes du mesurande.

Étalonnage multiple (suite)

- Ex. 2 : Le mesurande est dynamique
  1. déterminer la réponse en fréquence du capteur à une amplitude constante du mesurande → **bande passante**
  2. déterminer la réponse en amplitude à des fréquences fixes de la bande passante

- Ex. 3 : Influence des propriétés physiques du support matériel du mesurande
  – Ex., la réponse d'un capteur de proximité à courants de Foucault dépend non seulement de la distance mais aussi de la résistance et de la perméabilité magnétique du capteur et de la cible

- Ex. 4 : Influence des grandeurs indépendantes
  – Ex., étalonnage en température

Répétabilité - interchangeabilité

- <u>Répétabilité</u> (fidélité) : assure à l'utilisateur que le capteur produira la même grandeur de sortie, dans des limites spécifiées, chaque fois que ce capteur est utilisé dans des conditions identiques.
  - L'erreur de répétabilité est obtenue en faisant des étalonnages successifs et est exprimée en % de l'échelle de sortie. Ce sont les erreurs aléatoires qui engendrent ce type d'erreur.

- <u>Interchangeabilité</u> : garantit à l'utilisateur d'obtenir des résultats identiques, aux tolérances près, quand il utilise différents capteurs d'une même série dans des conditions identiques. Ex. : facteur de jauge.

Limites d'utilisation

Exemple de spécification des limites d'emploi pour un capteur piézoélectrique de force

Domaine	Mesurande	Température	
Nominal (Étendue de mesure)	0-100 N (EM)	0° @ 60°C	fonctionnement normal
Non-détérioration	1.5 x EM	-20° @ 100°C	altération réversible
Non-destruction	3.0 x EM	-50° @ 120°C	réétalonnage nécessaire

La sensibilité

Permet :

- d'estimer l'ordre de grandeur de la réponse connaissant l'ordre de grandeur des variations du mesurande

- de choisir le capteur de façon à ce que la chaîne de mesure dans son ensemble satisfasse aux conditions de mesure imposées.

$$S = \left.\frac{\Delta s}{\Delta m}\right|_{m = m_i}$$

Ex. d'unités

- Ω / °C
- µ V / °C
- mV / V / N

S dépend de:

- choix du matériau
- dimensions du capteur
- mode d'assemblage
- tension d'alimentation (amplitude, fréquence)
- température du milieu
- fréquence de variation du mesurande

Sensibilité en régime statique

- À un **point de fonctionnement** Q_i

$$S = \left(\frac{\Delta s}{\Delta m} \right)_{Qi}$$

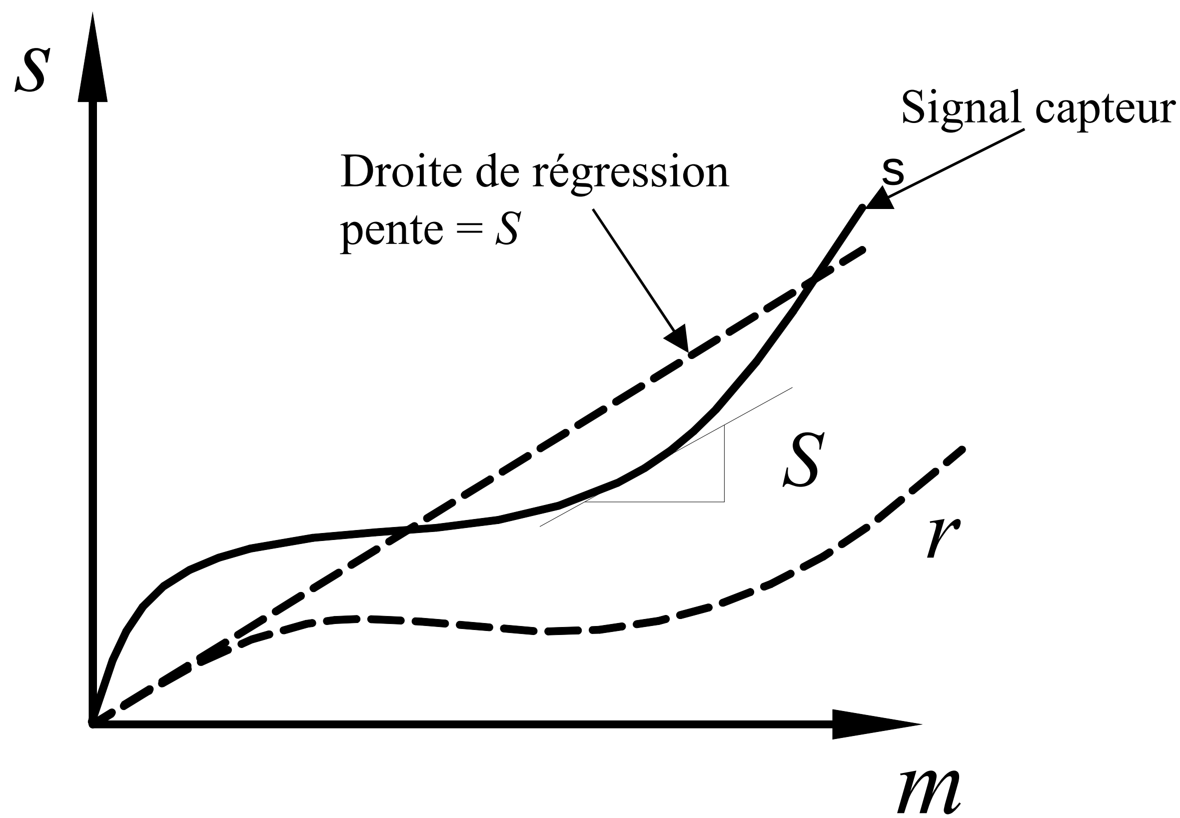
- Le **rapport de transfert** statique r_i

$$r_i = \left[\frac{s}{m} \right]_i$$

- Le rapport de transfert est égal à S seulement dans le cas où l'équation caractéristique est une droite passant par l'origine

- Lorsque la relation $s = f\,(m)$ n'est pas une droite, la sensibilité dépend du point de fonctionnement particulier Q_i

Sensibilité et rapport de transfert



Sensibilité en régime dynamique

Le mesurande est une fonction **périodique** du temps, par exemple:

Variation sinusoïdale

$$m = m_0 + m_1 \cos \omega t$$

Série de Fourier

$$m(t) = m_0 \sum_{n=1}^{\infty} m_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

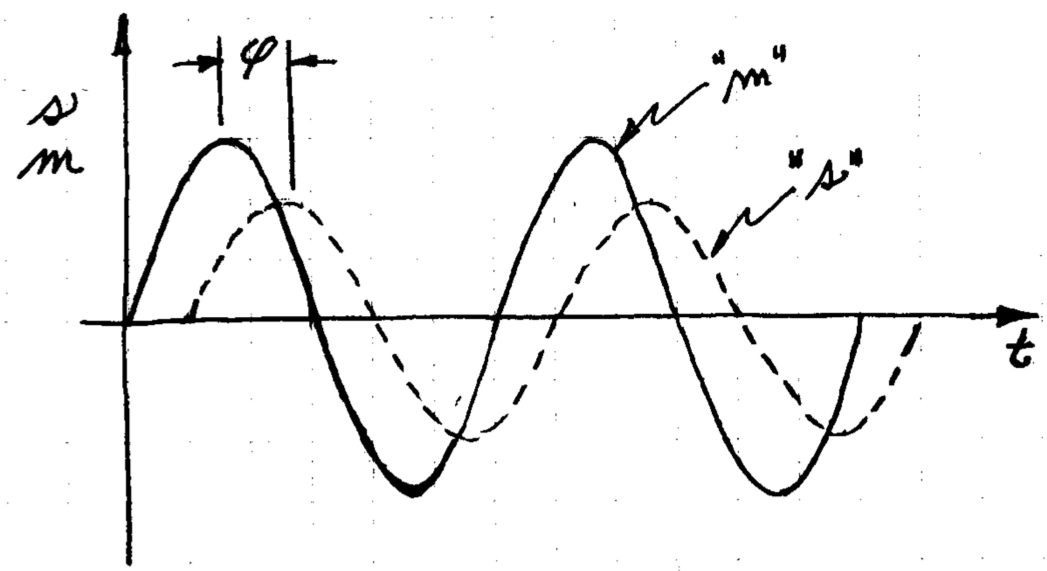
Pour une variation sinusoïdale

<u>Mesurande</u>

$$m = m_0 + m_1 \cos \omega t$$

<u>Réponse du capteur</u>

$$s = s_0 + s_1 \cdot \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$



Variation de sensibilité

- La sensibilité au point de fonctionnement Q_0 avec un mesurande de fréquence f sera donc:

$$S = \left[\frac{s_1}{m_1} \right]_{Q_0}$$

$$S = S(f)$$

- La variation de la sensibilité en régime dynamique a généralement pour origine **les inerties mécaniques, thermiques ou électriques** de la tête de mesure du capteur et des dispositifs directement associés.
- L'inertie est inhérente au principe physique du capteur

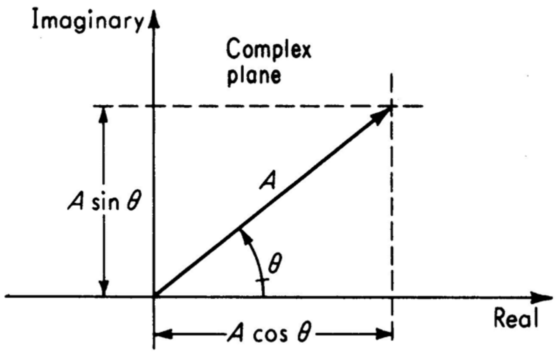
Phaseurs

- Définition: Un phaseur positif est un vecteur qui tourne dans le sens anti-horaire à une vitesse angulaire ω et qui s'exprime par un terme réel et un terme imaginaire

$$\overline{A} = A(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

$$\overline{A} = A e^{j\omega t}$$

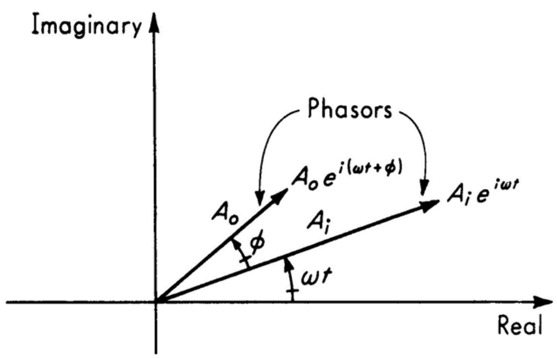
$$\text{où} \quad j = \sqrt{-1}$$



(a)

On peut ajouter un angle de phase

$$\overline{A}_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi)} = A_1 e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$



(b)

Dérivées d'un phaseur

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \frac{dAe^{j\omega t}}{dt} = j\omega\ A\ e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^2\overline{A}}{dt^2} = j^2\omega^2\ A\ e^{j\omega t} = -\omega^2 A\ e^{j\omega t}$$

De façon générale

$$\frac{d^n\overline{A}}{dt^n} = j^n\omega^n\ A\ e^{j\omega t}$$

Instrument d'ordre 0 (zéro)

- Par définition, un instrument d'ordre 0 répond à l'équation

$$\boxed{a_o q_o = b_o q_i}$$

$$q_o = \frac{b_o}{a_o} q_i = K q_i$$

- L'output q_o est donc identique à une constante (K) près à l'input q_i et est en phase (φ=0) avec celui-ci.
- L'instrument d'ordre 0 est **l'instrument idéal** puisqu'il ne change pas sa réponse en fonction de la fréquence du mesurande
    - Oscilloscope
    - Potentiomètre

Système d'ordre 1

Régit par l'équation différentielle suivante:

$$\boxed{A\frac{ds}{dt}+Bs=m\left(t\right) \qquad A,B \text{ constantes}}$$

Mesurande $\quad m\left(t\right)=m_1\cos\omega t \quad \rightarrow \quad m=m_1e^{j\omega t}$

Réponse $\quad s\left(t\right)=s_1\cos\left(\omega t+\phi\right) \quad \rightarrow \quad s=s_1e^{\left(j\omega t+\varphi\right)}$

L'équation du système devient

$$j\omega\, A\, s_1\, e^{j\varphi}+B\, s_1\, e^{j\varphi}=m_1$$

Réponse, système d'ordre 1

Posons

$$f_c = \frac{B}{2\pi A} = \text{ fréquence de coupure}$$

Alors

$$s_1 = \frac{m_1}{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f / f_c \right)^2}}$$

$$\varphi = -\tan^{-1}\left(f / f_c \right)$$

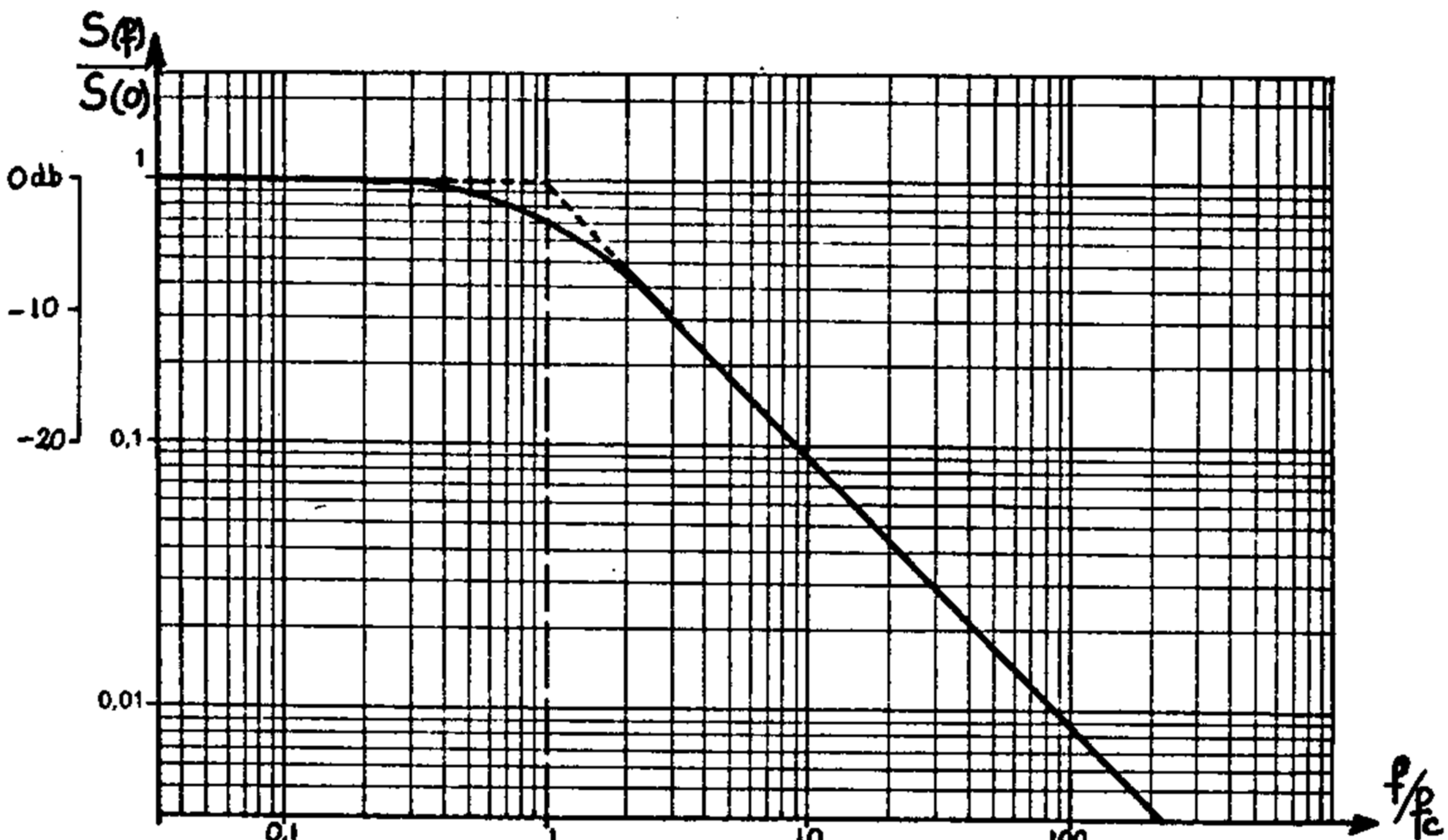
Sensibilité, système d'ordre 1

$$S(f) = \frac{s_1}{m_1} = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f/f_c \right)^2}}$$

- En régime statique (f=0) $$S(0) = \frac{1}{B}$$

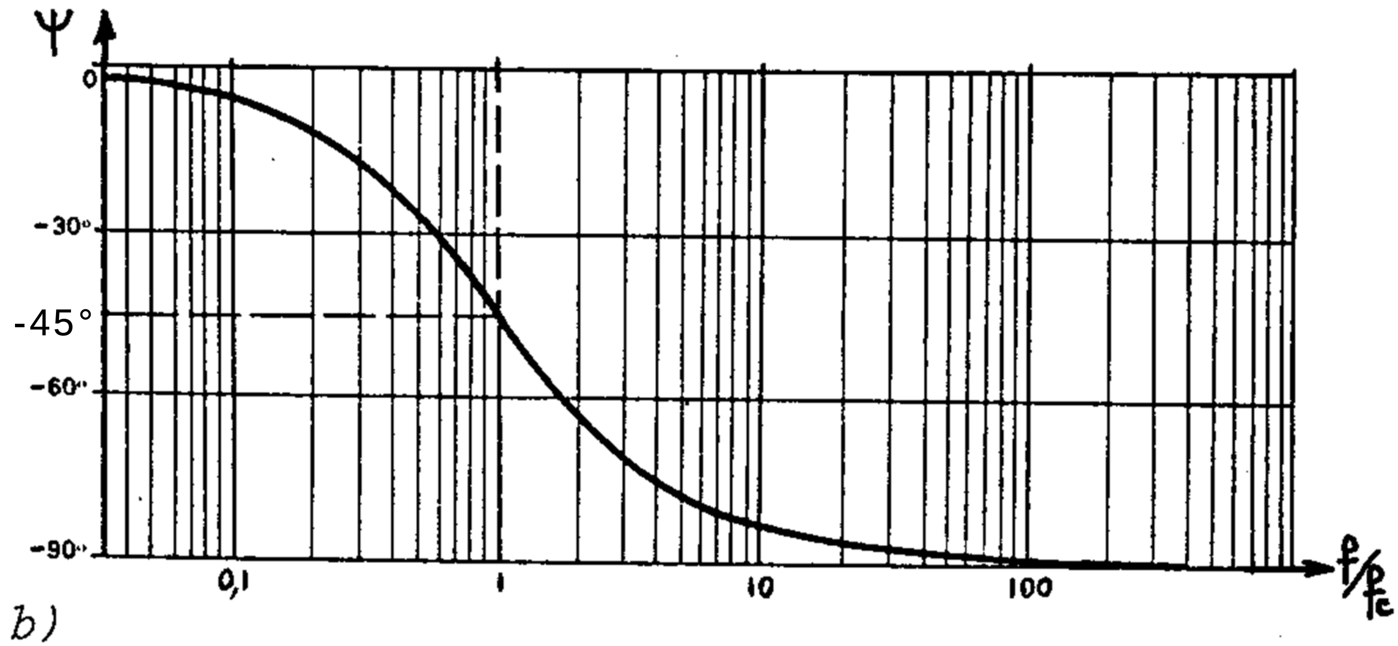
- En régime dynamique(f>0) $$\boxed{S(f) = S(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f/f_c \right)^2}}}$$

Diagramme de Bode (ordre 1)



a)

Diagramme de phase (ordre 1)



Caractéristiques de la réponse (ordre 1)

- Pour $f << f_c$

$$S(f) \approx S(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{S(f)}{S(0)} = 1$$

$$\varphi \approx 0$$

- Pour $f = f_c$

$$S(f) = \frac{S(0)}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{S(f)}{S(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} \qquad (-45°)$$

Sur l'échelle décibel (dB)

$$\left[\frac{S(f)}{S(0)}\right]_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \text{-}3dB$$

Caractéristiques de la réponse (ordre 1)

- Pour $f >> f_c$

$$S(f) \approx S(0)\left(\frac{f_c}{f}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{S(f)}{S(0)} = \left(\frac{f_c}{f}\right)$$

$$\varphi \approx -\frac{\pi}{2} \qquad (-90°)$$

  – La sensibilité décroît linéairement dans graphique log-log
    – **-20 dB** par décade ($10 \text{ x } f$)
    – **-6 dB** par octave ($2 \text{ x } f$)

- **Bande passante**
  – Plage de fréquence dans laquelle la sensibilité **décroît au plus de 3dB** par rapport au régime statique

$$\boxed{0 < f < f_c}$$

Exemples d'instruments d'ordre 1

- Thermomètre au mercure, à l'alcool
- Thermocouple
- Sonde thermométrique à résistance de platine (PRTD)

PRTD: Platinium Resistance Temperature Detector

Système d'ordre 2

- Régit par l'équation différentielle suivante:

$$A\frac{d^2s}{dt^2} + B\frac{ds}{dt} + Cs = m(t) \qquad A, B, C \text{ constantes}$$

$$-A\,\omega^2\, s_1\, e^{j\varphi} + j\omega\, B\, s_1\, e^{j\varphi} + C\, s_1\, e^{j\varphi} = m_1$$

– Pulsation propre/fréquence propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{A}} = 2\pi f_0$$

– Coefficient d'amortissement

$$\xi = \frac{B}{2\sqrt{C \cdot A}}$$

Réponse, système d'ordre 2

$$s_1 = \frac{m_1}{C\sqrt{\left[1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]+4\xi^2\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

$$\varphi = -\tan^{-1}\left\{\frac{2\xi}{\frac{f_0}{f}\left[1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]}\right\}$$

Sensibilité, système d'ordre 2

$$S(f) = \frac{s_1}{m_1} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(f/f_0\right)^2\right] + 4\xi^2 \left(f/f_0\right)^2}} \qquad \text{(p. 4-34)}$$

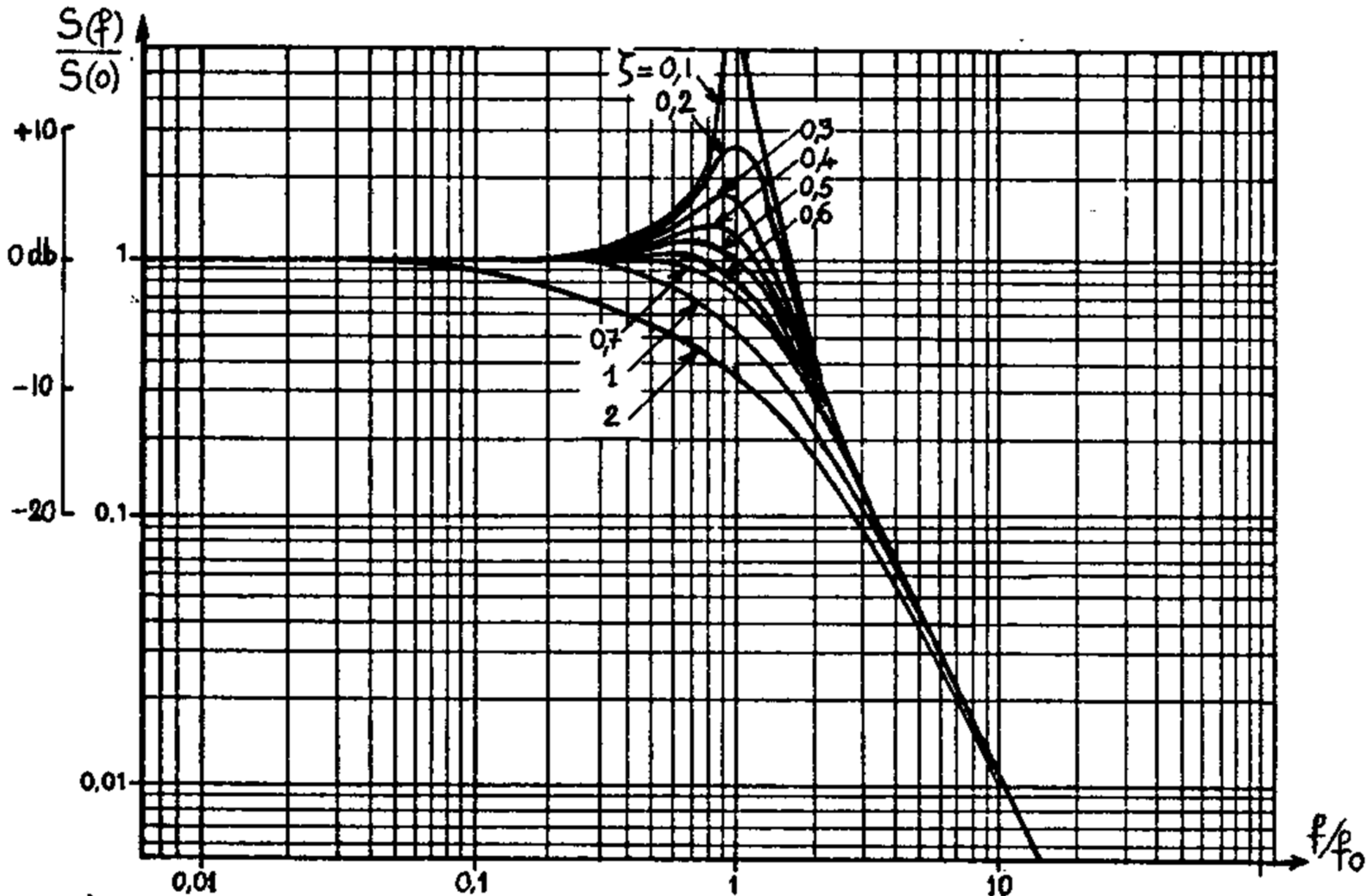
- En régime statique

$$S(0) = \frac{1}{C}$$

- En régime dynamique

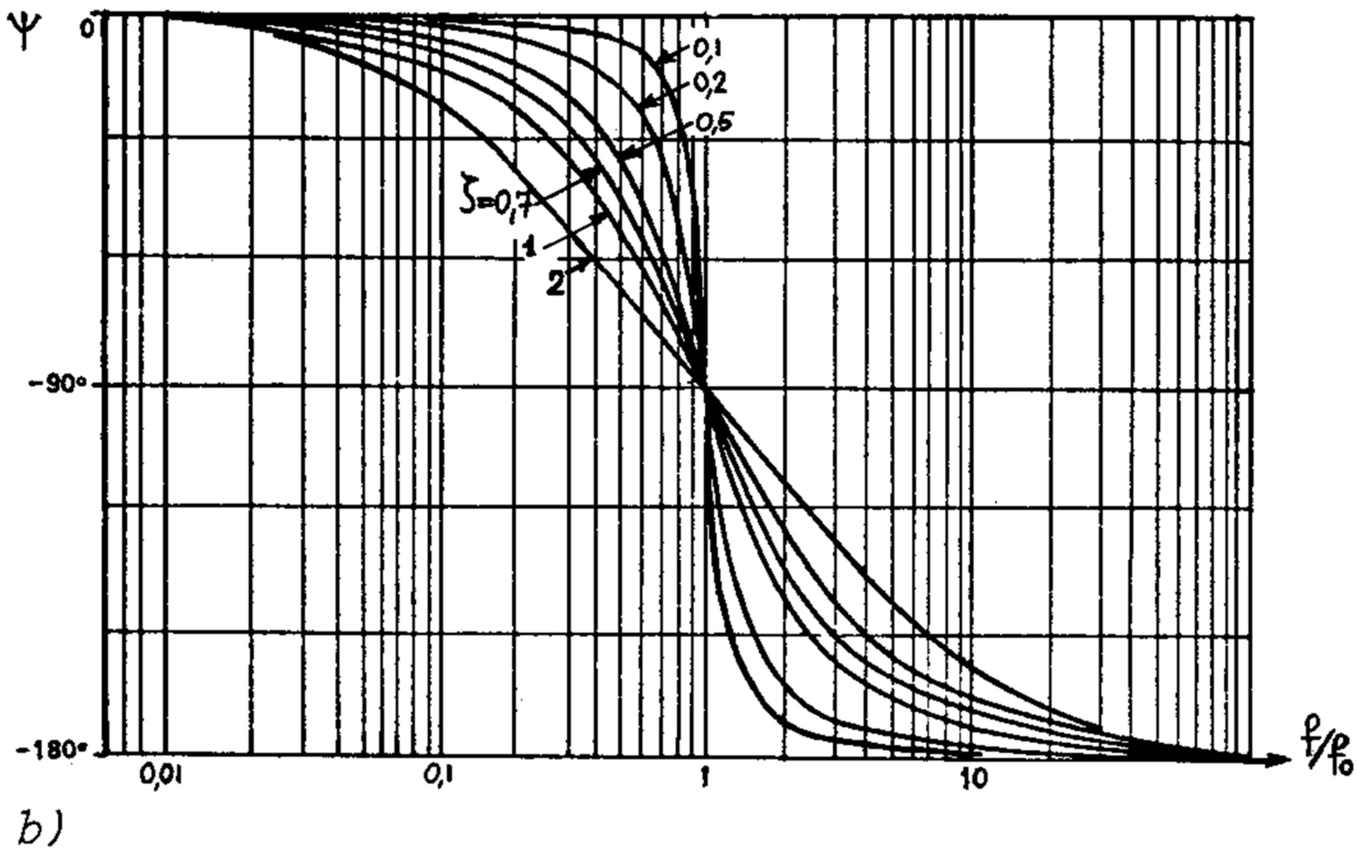
$$S(f) = S(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(f/f_0\right)^2\right] + 4\xi^2 \left(f/f_0\right)^2}}$$

Diagramme de Bode (ordre 2)



a)

Diagramme de phase (ordre 2)



Effet de l'amortissement sur S

$\boxed{\text{Pour } \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}}$

- La réponse en fréquence passe par un maximum

$$S(f_n) = S(0) \cdot \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\boxed{\text{Pour } \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

- La réponse présente le **palier le plus uniforme** de la réponse en fréquence

$$f = f_0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{S(f)}{S(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \qquad (\text{-}3dB)$$

  - Bande passante est $\boxed{0 < f < f_0}$

$\boxed{\text{Pour } \xi > \frac{1}{\sqrt{2}}}$

- La réponse en fréquence est constamment décroissante en fonction de ξ

Système d'ordre 2
Synthèse de l'effet de la fréquence

Le déphasage φ pour:

- $f << f_0$	tend vers 0°
- $f < f_0$	varie de 0° à -90° (dépend à la fois de f et de ξ)
- $f = f_0$	égale -90°
- $f > f_0$	varie de -90° à -180° (dépend à la fois de f et de ξ)
- $f >> f_0$	tend vers -180°

Pour $f >> f_0$ — La sensibilité décroît de
-40 dB par décade
-12 dB par octave

Pour $f << f_0$ — $S(f) \approx S(0)$`

Instruments d'ordre 2

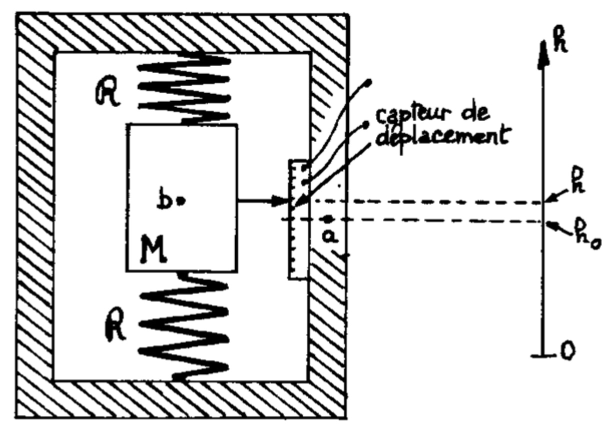
- Il y a intérêt à utiliser un capteur dont le coefficient d'amortissement ξ est compris entre 0.6 et 0.7. Cela permet d'assurer:
  - une bande passante relativement étendue
  - une distorsion de phase réduite

$$0 < f < 1.16 f_0$$

- Ex. d'instrument d'ordre 2

Accéléromètre de type sismique

$$M\frac{d^2z}{dt^2} + F\frac{dz}{dt} + Cz = -M\gamma$$

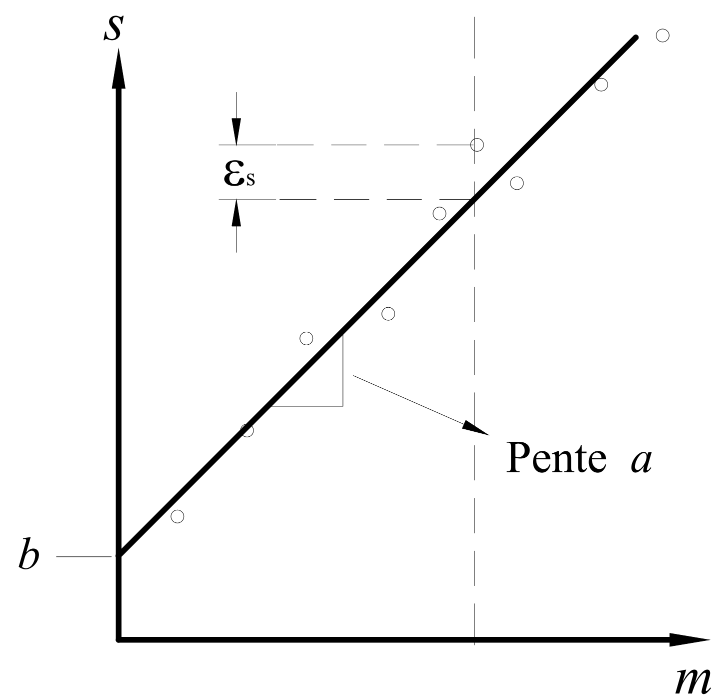


Linéarité, régime statique

<u>Meilleure droite</u> obtenue par régression linéaire

<u>Écart de linéarité:</u>

Écart maximum entre la courbe d'étalonnage et la meilleure droite (% de la valeur maximale)



Linéarité, régime dynamique

Pour les systèmes d'ordre 1 et 2, cela implique:

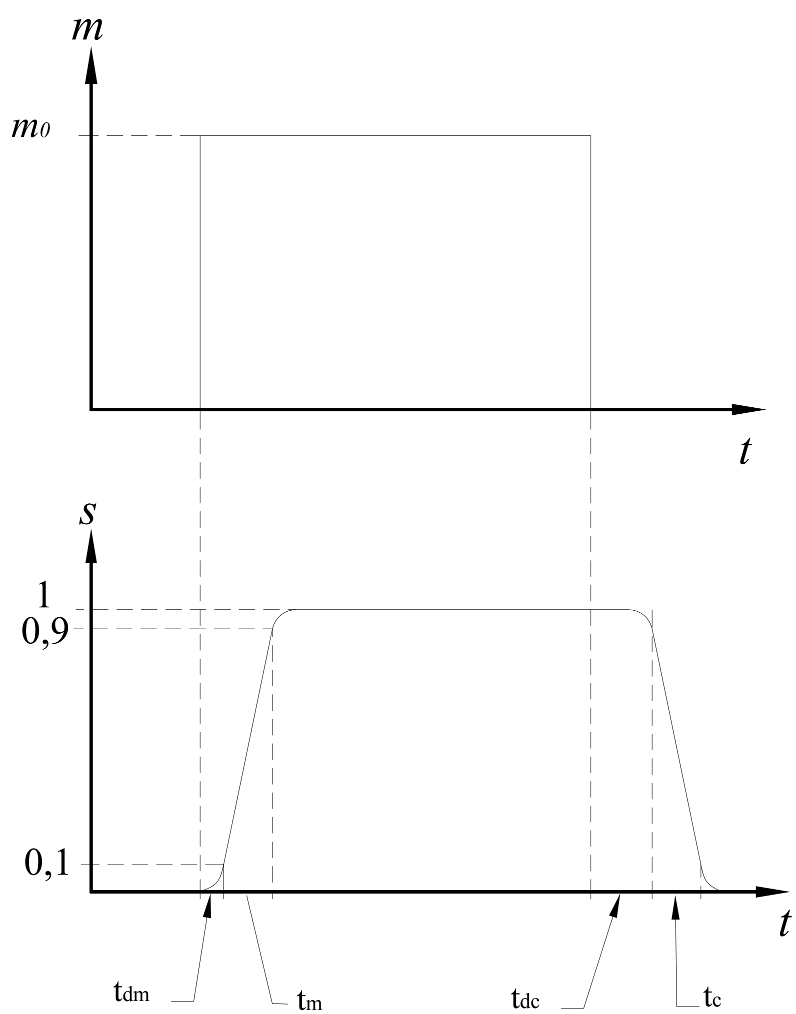
- Une linéarité en régime statique, donc une valeur $S(0)$ indépendante du mesurande m
- Que les paramètres déterminants de la réponse en fréquence du système (f_c, f_0, ξ) soient indépendants de la valeur du mesurande m dans la plage de valeurs où $S(0)$ est constant

Rapidité et temps de réponse

- ***la <u>rapidité</u>*** est la caractéristique qui permet d'apprécier de quelle façon la grandeur de sortie s suit dans le temps les variations du mesurande m .
- ***le <u>temps de réponse</u>*** *(* t_r *)* est l'intervalle de temps qui s'écoule après une variation brusque du mesurande (échelon) jusqu'à ce que la variation de la sortie du capteur ne diffère plus de sa valeur finale d'un écart supérieur à une limite fixée par convention:

$$t_r(\varepsilon\%)$$

Réponse à un échelon



Système d’ordre 1 (réponse à un échelon)

Lorsque soumis à un échelon

$m = 0$	pour $t < 0$
$m = m_0$	pour $t \geq 0$

L'équation différentielle du système est: $$A\frac{ds}{dt} + Bs = m_0$$

La solution est: $$s = s_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$s_0 = \dfrac{m_0}{B}$ valeur de s en régime permanent

$\tau = \dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{2\pi f_c}$ constante de temps du système

Système d'ordre 1 (réponse à un échelon)

- Le temps de réponse dépend de la fréquence de coupure

$$\tau = \frac{1}{2\pi f_c}$$

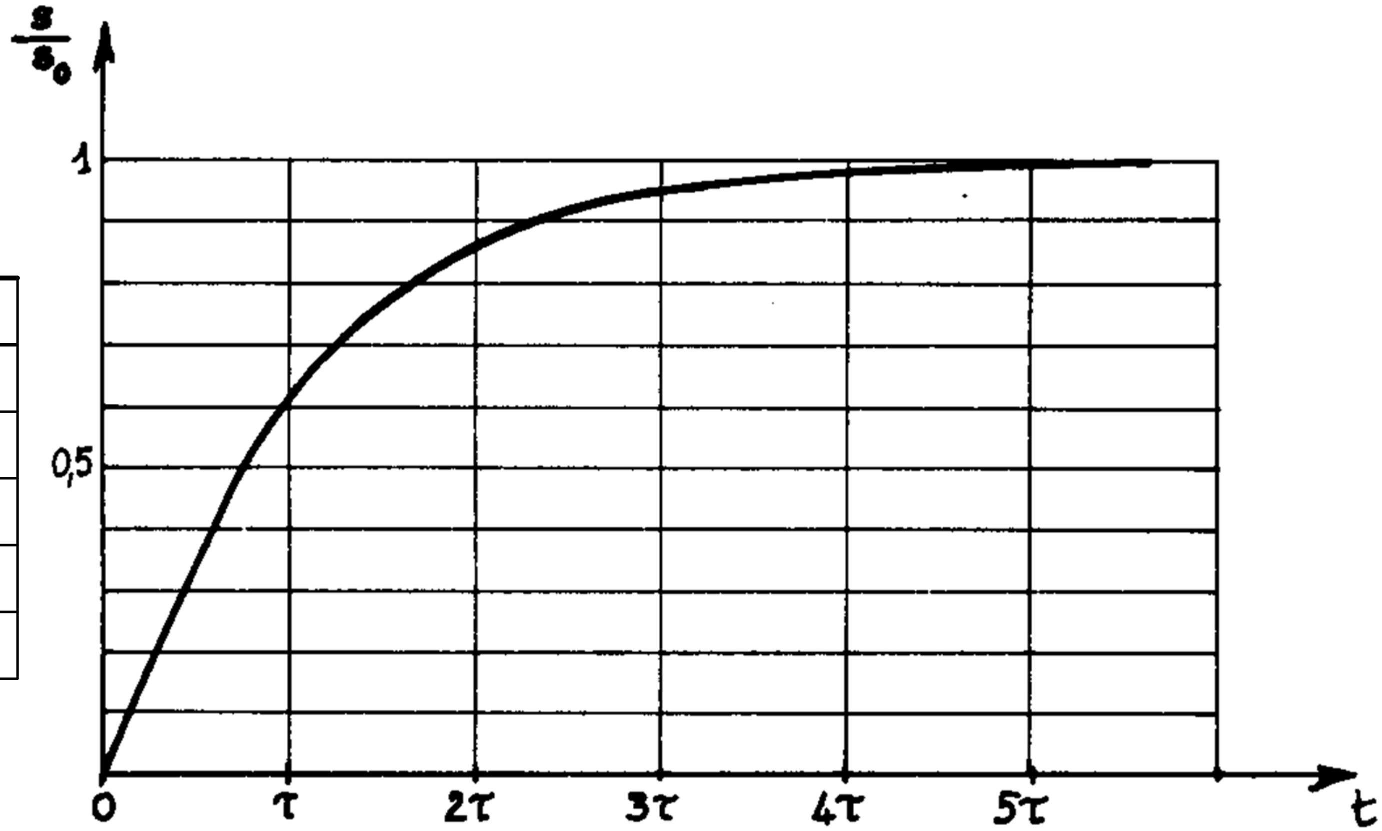
- Plus f_c est grand, plus rapide est la réponse

$$s = s_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

$$t_r(\varepsilon\%) = -\tau \ln\left(\varepsilon\% / 100 \right)$$

Réponse temporelle à un échelon, instrument d'ordre 1

ε%	t_r
10	2.3 τ
5	3.0 τ
2	3.9 τ
1	4.6 τ
0.1	6.9 τ



Système d'ordre 2
(réponse à un échelon)

Lorsque soumis à un échelon

$m = 0$	pour $t < 0$
$m = m_0$	pour $t \geq 0$

L'équation différentielle du système est

$$A\frac{d^2 s}{dt^2} + B\frac{ds}{dt} + Cs = m_0$$

La solution dépend de l'amortissement

$\xi < 1$, Faible amortissement

Régime transitoire périodique amorti

$$s(t) = s_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_0 t + \varphi \right) \right]$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-\xi^2} \right)$$

$\xi \geq 1$

- $\xi = 1$, Amortissement critique, régime apériodique

$$s(t) = s_0\left[1-(1+\omega_0 t)\cdot e^{-\omega_0 t}\right]$$

- $\xi > 1$, Fort amortissement, régime apériodique

$$s(t) = s_0\left[-\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}\cdot e^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0 t}+\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}\cdot e^{\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0 t}+1\right]$$

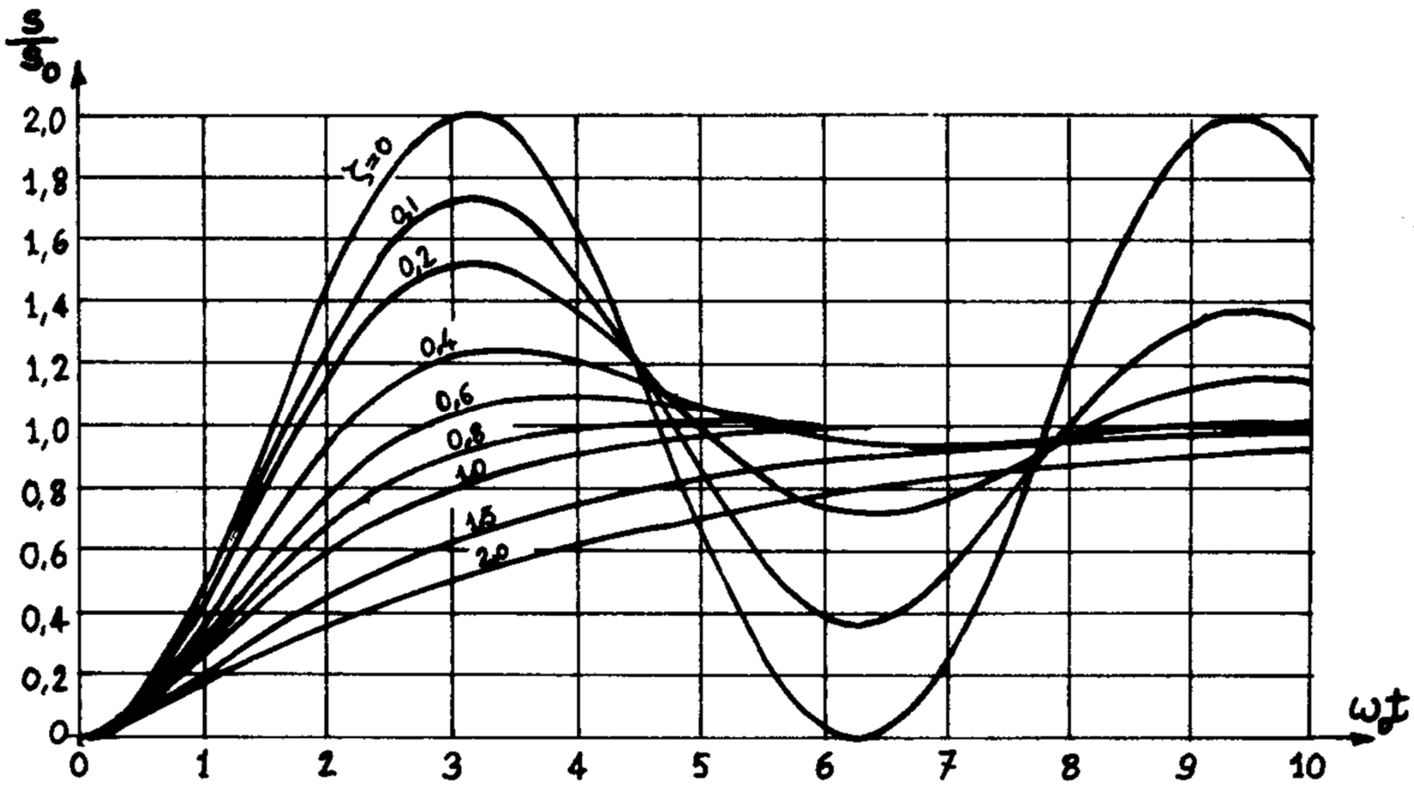
Système d'ordre 2
(Réponse à un échelon)

- Régimes transitoires de types périodique amortie et apériodique selon l'amortissement
  - $\xi < 1$, Faible amortissement
  - $\xi = 1$, Amortissement critique
  - $\xi > 1$, Fort amortissement

- Le temps de réponse dépend de ω_o et de l'amortissement ξ

- L'amortissement idéal se situe entre 0.6 et 0.8 (réponse rapide sans trop de dépassement)

Réponse temporelle à un échelon, instrument d'ordre 2



À retenir:

- Système d'ordre 1
  - Le temps de réponse dépend de $1/2\pi f_c$
  - Plus f_c est grand, plus rapide est la réponse

- Système d'ordre 2
  - Le temps de réponse dépend de f_o et de ξ
  - Régimes transitoires périodique- amorti pour $\xi < 1$ et apériodique pour $\xi \geq 1$
  - ξ idéal entre *0.6* et *0.8*

La finesse

- Spécification qui permet à l'utilisateur d'estimer **l'influence que la présence du capteur** et de ses liaisons peuvent avoir **sur la valeur du mesurande**
  - Pour certains types de capteurs, finesse et sensibilité peuvent être des qualités antagonistes
  - Ex., la rigidité importante du diaphragme d'un capteur de pression accroît sa finesse mais réduit sa sensibilité.
  - Ex., l'augmentation de la masse sismique d'un accéléromètre accroît sa sensibilité mais diminue sa finesse par la perturbation que cette masse apporte aux mouvements de la structure étudiée.
- <u>L'erreur de finesse</u> est la quantité dont est modifiée le mesurande par la présence du capteur

Exemples de capteurs et de grandeurs physiques définissant leur finesse

CAPTEUR	GRANDEUR DÉFINISSANT LA FINESSE ET À MINIMISER SI POSSIBLE	
Capteur de déplacement linéaire LVDT (transfo. différentiel)	masse de la partie mobile (g) et effort de déplacement (N)	faibles par rapport à l'objet en déplacement
Capteur de déplacement angulaire (potentiomètre circulaire)	moment d'inertie (m^4) et couple résistant (N.m)	faibles p/r à l'objet en déplacement
Cellule de force (dynamomètre)	raideur (N/m)	
Capteur de pression (manomètre)	volume mort (cm^3) et volume de respiration (cm^3)	petits par rapport au volume de l'enceinte où on mesure la pression
Capteur température (résistance thermométrique, thermocouple)	capacité calorifique (J/°C) et conductance thermique des fils de liaison vers l'extérieur (W/°C)	faible par rapport à celle du milieu où on mesure la température

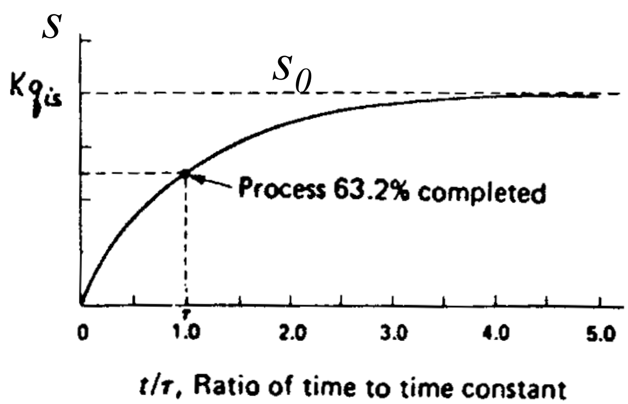
Mesures sans contact

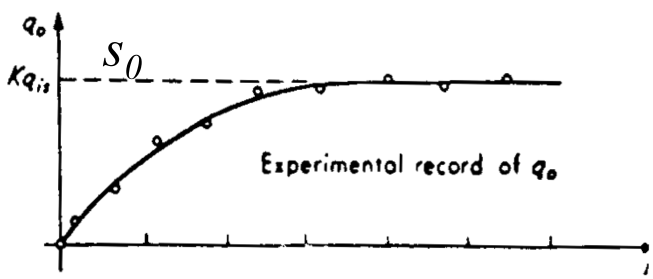
Dans plusieurs cas, la réaction du capteur sur le mesurande peut être annulée par l'emploi de méthodes de mesure <u>sans contact mécanique</u>

- Mesure de déplacements par méthodes optiques
- Mesure de proximité par capteur inductif ou capacitif
- Mesure de vitesse par effet Doppler ou par stroboscopie
- Mesure de température par pyrométrie optique
- Mesures de déformations par photoélasticité ou franges de Moiré

Détermination expérimentale des caractéristiques d'un système de mesure

Instruments d'ordre 1, réponse à un **input échelon**

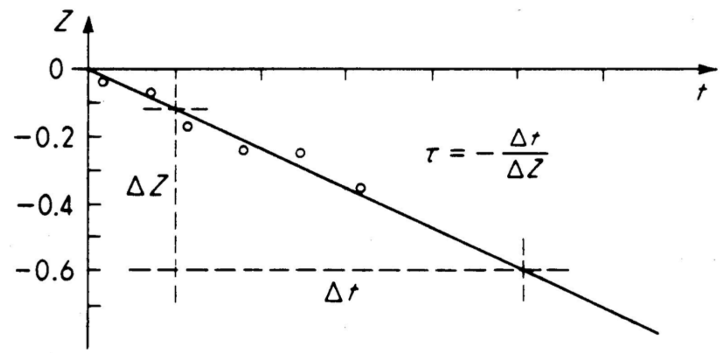




Méthode imprécise

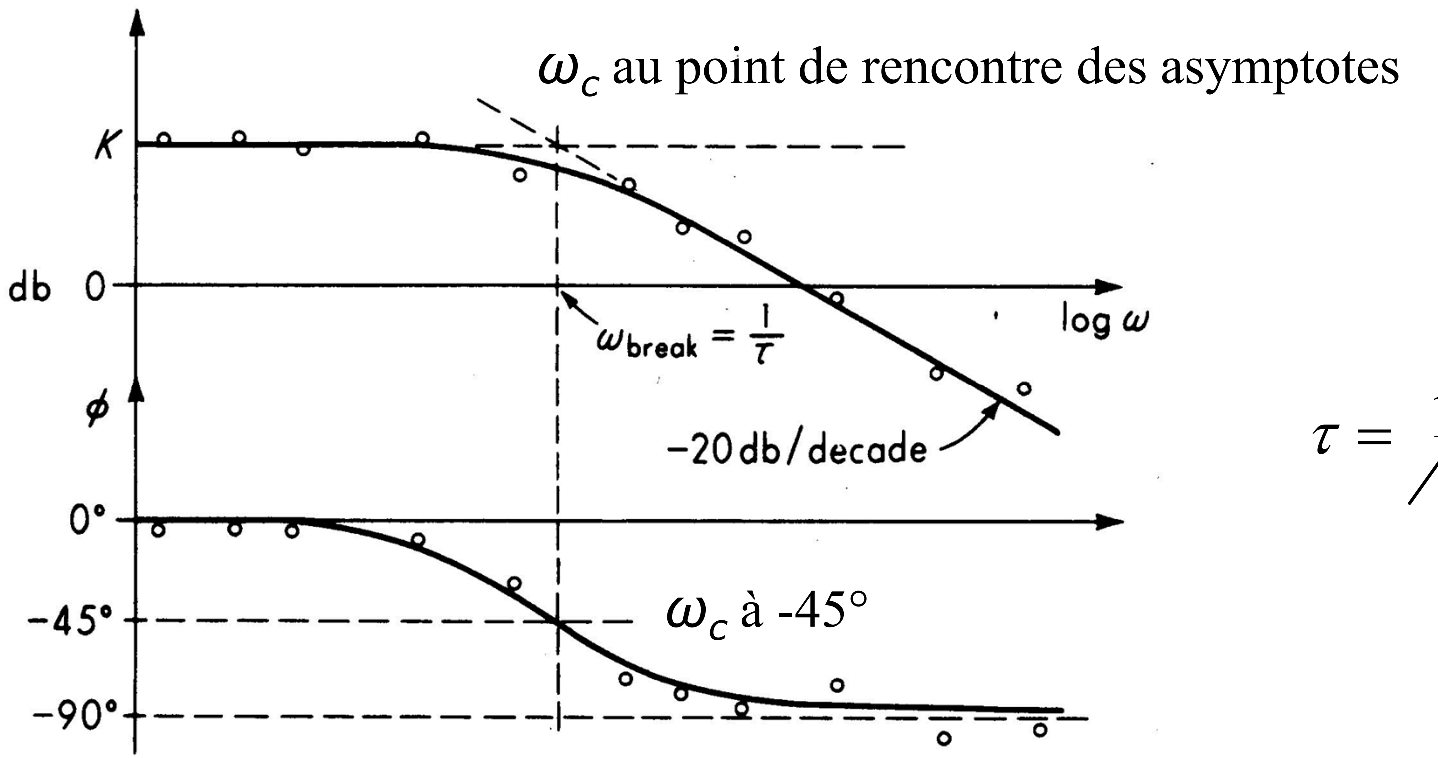
$$Z = \ln\left(1 - \frac{s}{s_0}\right) = \ln\left(e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

$$Z = \frac{-t}{\tau} \qquad \text{et} \qquad \frac{dZ}{dt} = -\frac{1}{\tau}$$



Méthode + précise

Instruments d'ordre 1, réponse en fréquence



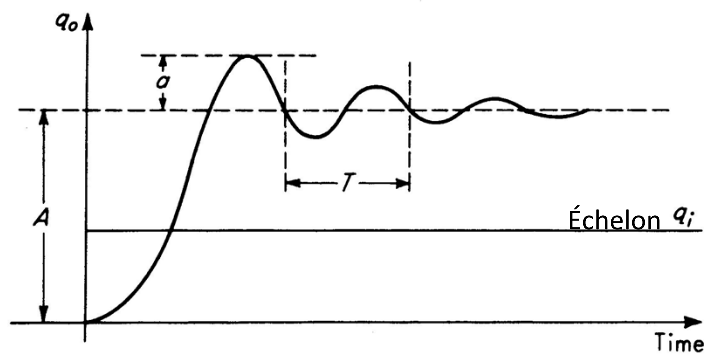
$$\tau = {}^{1}\!/_{\omega_c}$$

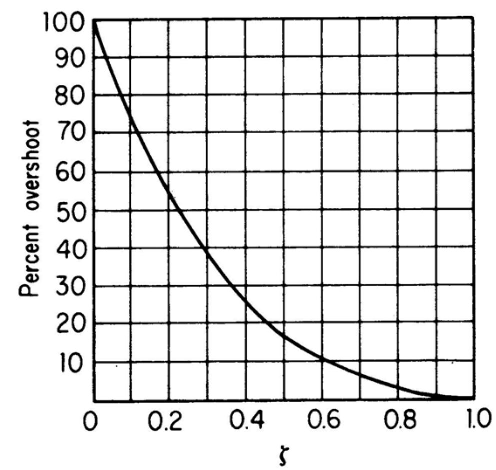
Instruments d'ordre 2, réponse à un **input échelon**

Les valeurs peuvent être évaluées à partir des relations suivantes:

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{\left[\left(\frac{\pi}{\ln\left(a/A\right)}\right)^2 + 1\right]}}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}}$$





(a)

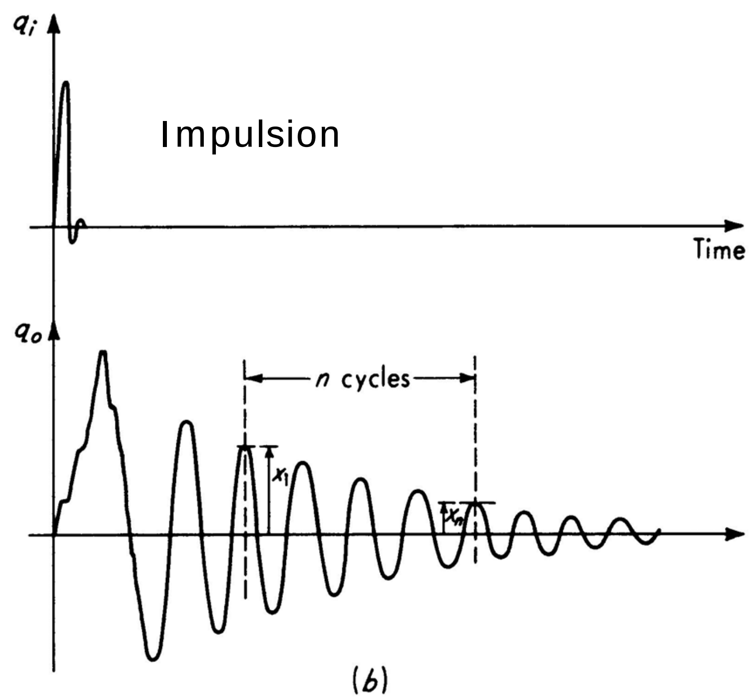
Pour $\xi << 1$
Méthode du décrément logarithmique

Amortissement

$$\xi = \frac{1}{2\pi n}\ln\left(\frac{X_1}{X_{1+n}}\right)$$

Pulsation naturelle non-amortie

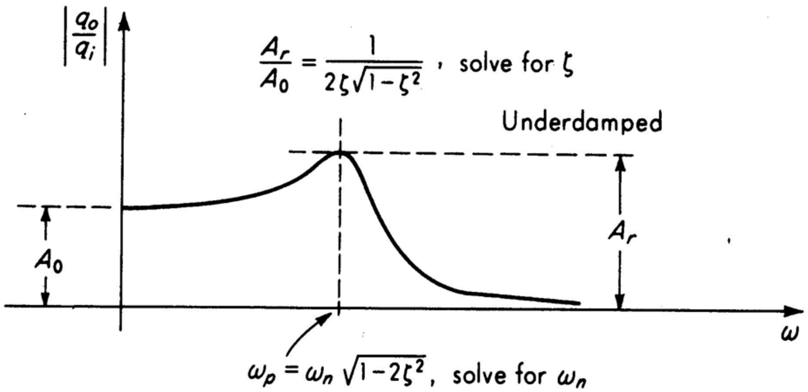
$$\omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}}$$



Instruments d'ordre 2, réponse en fréquence (ξ<1)

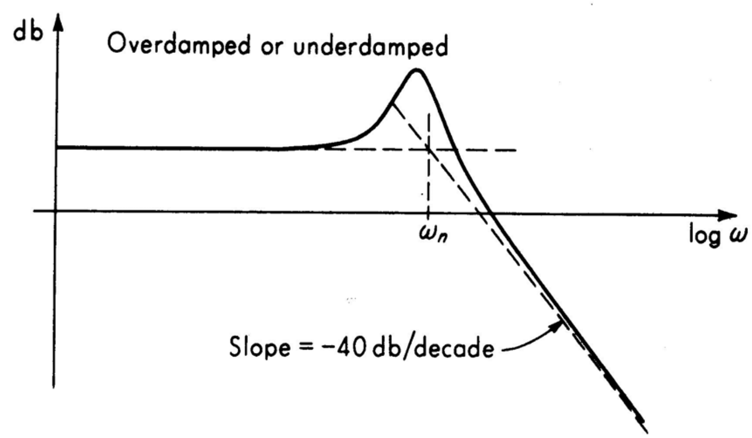
<u>Amortissement</u>

$$\frac{A_r}{A_0} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$



<u>Pulsation naturelle non-amortie</u>

$$\omega_n = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$



Figures de Lissajous (peu utilisées de nos jours)

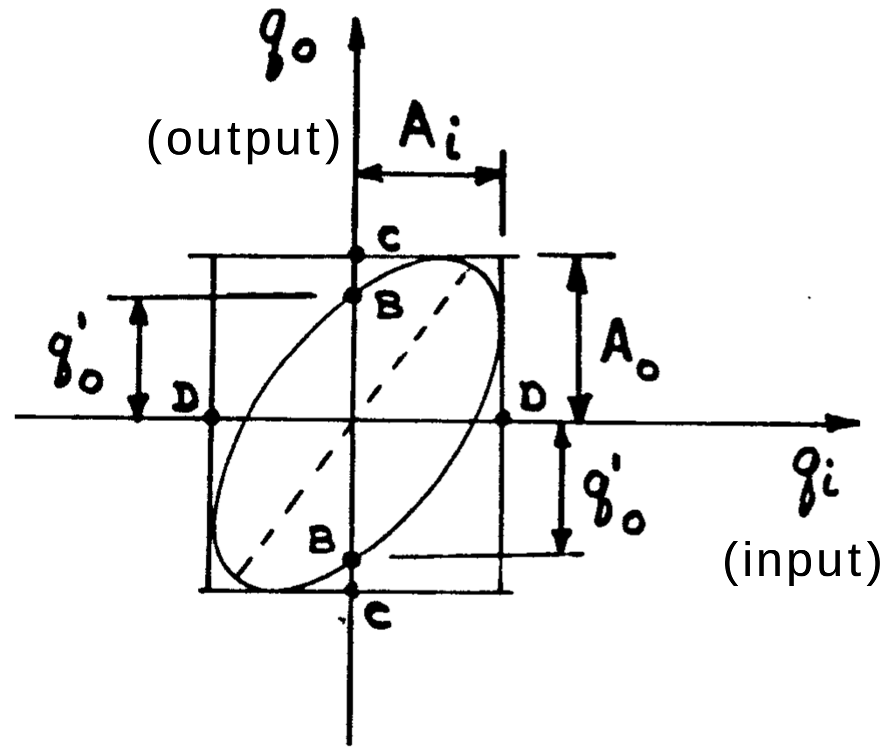
Servent à déterminer graphiquement le gain et le déphasage entre le signal d'entrée (input) et le signal de sortie (output).

<u>Déphasage</u>

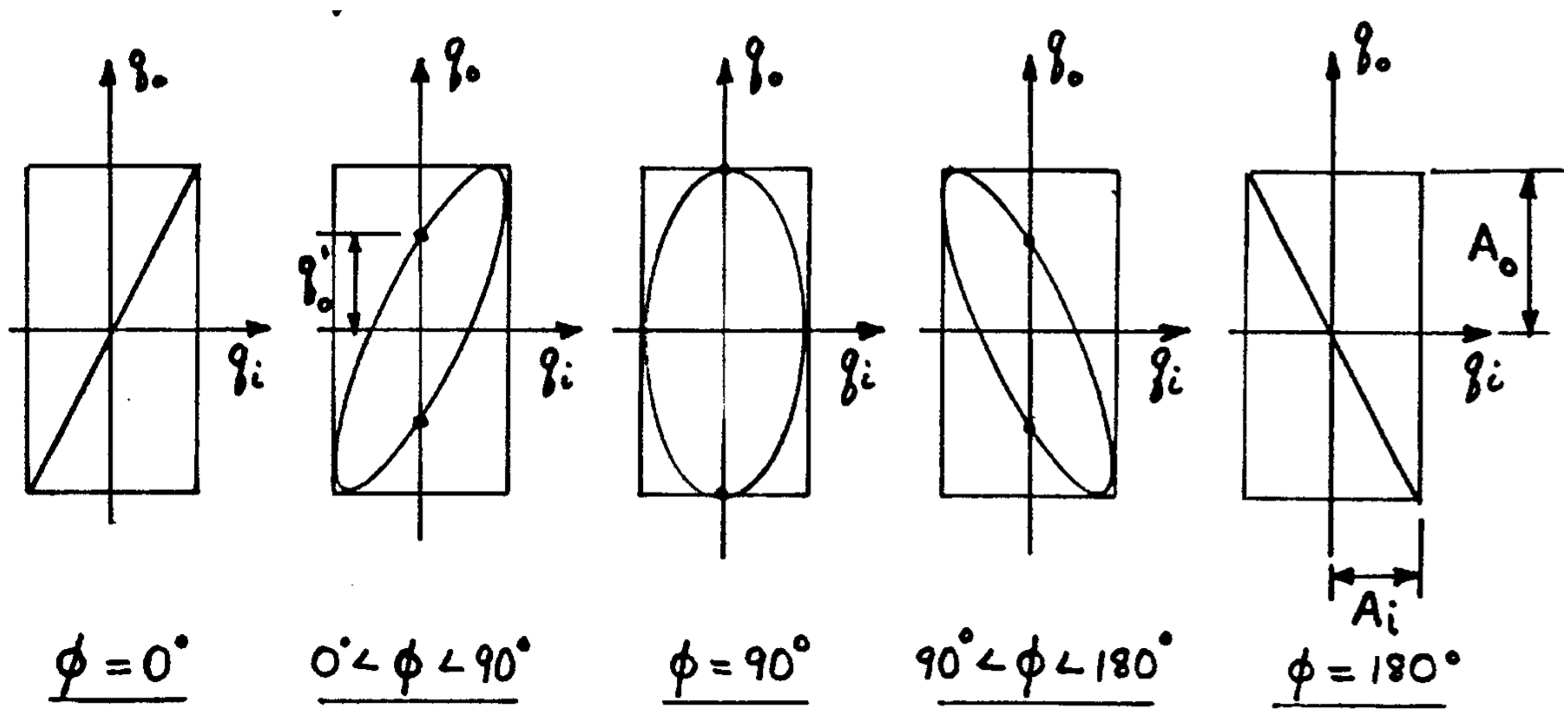
$$\sin\varphi = \frac{q_o'}{A_0} = \frac{\overline{BB}}{\overline{CC}}$$

<u>Le gain ou rapport d'amplitudes</u>

$$\left|\frac{q_0}{q_i}(i\omega)\right| = \frac{A_0}{A_i} = \frac{\overline{CC}}{\overline{DD}}$$



Ex. de figures de Lissajous



Effet du déphase (gain constant)