
Théorie de P. GY (chapitre 5)

Septembre 2008

Plan

- Qui est Pierre Gy?
- Qu'est ce que la théorie de Gy et quand s'applique t-elle?
- Facteurs pris en compte par la théorie
- Procédures multistages
- Exemples d'application

Qui est Pierre Gy?



- Un consultant de renommée internationale, la sommité pour l'échantillonnage de matières morcelées (≈ 10 livres + dizaines d'articles).
- Théorie développée en référence à des problèmes miniers
Nombreuses applications dans d'autres domaines.
- Toute sa vie a été consacrée au développement et surtout à l'application et à la vulgarisation de ce problème.

Théorie de Gy

- Prédire la précision d'un échantillon donné pour représenter un lot donné.

- Prémisses essentielles :
 - l'échantillon est probabiliste et sans biais
(un échantillon probabiliste est un échantillon où chaque fragment a une probabilité non-nulle d'être sélectionné, il est sans biais si chaque fragment a une chance égale d'être sélectionné).
Ex. Un échantillon pris dans la benne de la chargeuse-navette n'est pas probabiliste car les fragments au fond de la benne n'ont aucune chance d'être sélectionnés.
 - Le lot peut-être représenté par 2 phases distinctes :
 - phase comprenant le minéral (ou la variable) d'intérêt
 - phase formée du reste (gangue)

-
- Facteurs pris en compte explicitement
 - Taille des plus gros fragments
 - Masse du lot et masse de l'échantillon
 - Étalement de la courbe granulométrique
 - Forme des fragments
 - Teneur du lot
 - Masses spécifiques du minéral d'intérêt et de la gangue
 - Taille des plus petits grains du minéral d'intérêt (taille de libération)

 - Sources
 - Lois statistiques de distribution hypergéométrique et binomiale
 - Observations empiriques suites à de multiples expériences
-

Observations préliminaires (loi binomiale)

Loi binomiale B(n,p):

- Probabilité d'avoir « n1 » succès parmi « n »
p : probabilité d'avoir un succès
- la teneur vraie est « p » (fragments identiques en masse et en volume)
- Soit « n1/n » la « teneur » observée

$$\text{Var}(n1) = n p (1-p) \Rightarrow \text{Var}(n1/n) = p(1-p)/n$$

- La variance relative est donc:

$$s_r^2 = \frac{\text{Var}(n1/n)}{p^2} = \frac{(1-p)}{p} \frac{1}{n}$$

- Que nous dit cette formule ?
 - **variance relative** ↑ si # de fragments ↓
 - **variance relative** ↑ si la teneur de la population « p » ↓

-
- On ne contrôle pas « p »
 - On peut augmenter « n »
 - En prenant un échantillon plus volumineux $n \propto$ Masse échant.
 - En diminuant la taille des particules : $n \propto 1/d^3$

Voilà les éléments essentiels de la formule de Gy. Les autres éléments apparaissent pour tenir compte que:

- Particules de taille et de masse qui varient
- Le lot à échantillonner est de taille fini
- Les particules ne sont pas « pures »

Formule de Gy (erreur fondamentale)

$$s_r^2 = \frac{s^2}{a_L^2} = K l \frac{d^3}{M_e} \left(1 - \frac{M_e}{M_L} \right) \approx K l \frac{d^3}{M_e}$$

- s_r^2 Variance relative
- a_L Teneur du lot (en fraction)
- M_e Masse de l'échantillon (en g)
- M_L Masse du lot (en g)
- d Taille des plus gros fragments (en cm) (en pratique, $d=d_{5\%}$)
- l Facteur de libération du minéral d'intérêt
 $l=1$ si $d < d_0$
 $l = (d_0/d)^{0.5}$ d_0 : taille de libération du minéral d'intérêt (en cm)

$$K = (\mu\delta) f g$$

f facteur de forme: prendre 0.5 dans la majorité des cas (sphère)
(sans unités) (ratio volume particule/volume d'un cube de côté égal
à la plus grande dimension de la particule)

g étalement granulométrique, entre 0 et 1 (sans unités)

le plus souvent, on pose $g=0.25$ (courbe étalée, i.e. $d_{5\%retenu}/d_{5\%passant}>4$)

$$\mu\delta = \frac{(1 - a_L)}{a_L} [(1 - a_L) \delta_A + a_L \delta_G]$$

Ce facteur tient compte de la teneur et des masses volumiques (en g/cm³)

δ_A : masse volumique du minéral d'intérêt

δ_g : masse volumique de la gangue

Ce facteur a beaucoup d'influence sur la variance relative

Ex. Or natif,	$a_L = 5\text{ppm}$, $\delta_a = 19$, $\delta_g = 3$, \Rightarrow	$\mu\delta = 3\,800\,000\text{ g/cm}^3$
Chalcopyrite	$a_L = 5\%$, $\delta_a = 4.1$, $\delta_g = 3$, \Rightarrow	$\mu\delta = 76.8\text{ g/cm}^3$

D'où vient le facteur « g »?

Dans le développement de la théorie, le terme suivant apparaît naturellement dans l'expression de s_r^2 :

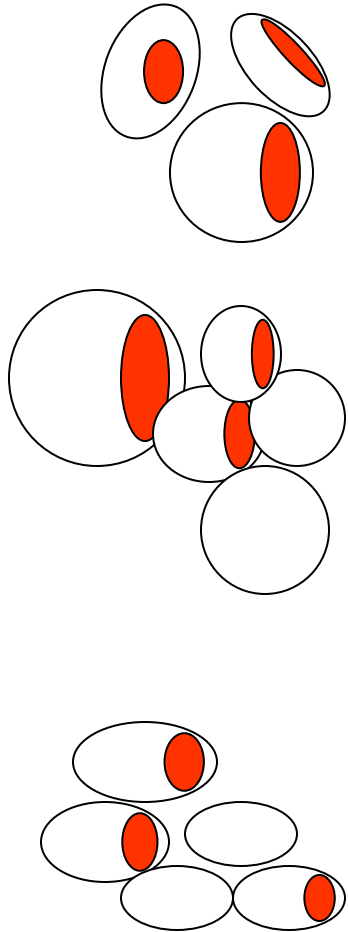
$$\sum_{i=1}^{nc} p_i d_i^3 \quad (1)$$

Où nc est le nombre de classes granulométriques et p_i est la proportion poids observée dans la classe « i ».

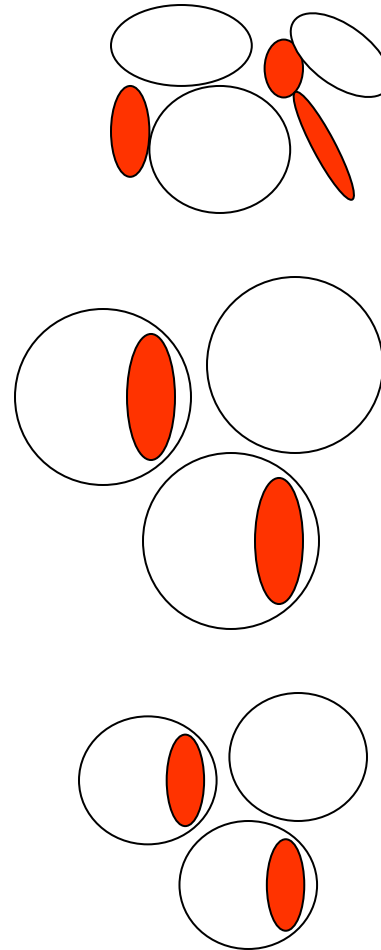
Gy a eu l'idée de remplacer ce terme par: $g d^3$ où « d » serait une grandeur caractéristique des particules. Pour plusieurs courbes granulométriques, il a évalué (1), puis il a construit les courbes $g(d)$ correspondantes. Toutes les courbes passaient à proximité du point $d=d_{5\% \text{ retenu}}, g=0.25$.

Remarques

+ favorable



- favorable



Facteur de libération

g

f

- La teneur a_L est celle du minéral d'intérêt, pas celle du métal !

Ex. - la teneur du lot est 1% Cu, le Cu est contenu dans la chalcoppyrite, la teneur de la chalcoppyrite (CuFeS_2) est de

$$1\% / 0.35 = 2.86\% \quad 0.35 = \text{Cu} / (\text{Cu} + \text{Fe} + \text{S}_2)$$

Ex. - or dans la pyrite (1% or dans la pyrite),

le lot a une teneur de 5 ppm d'or;

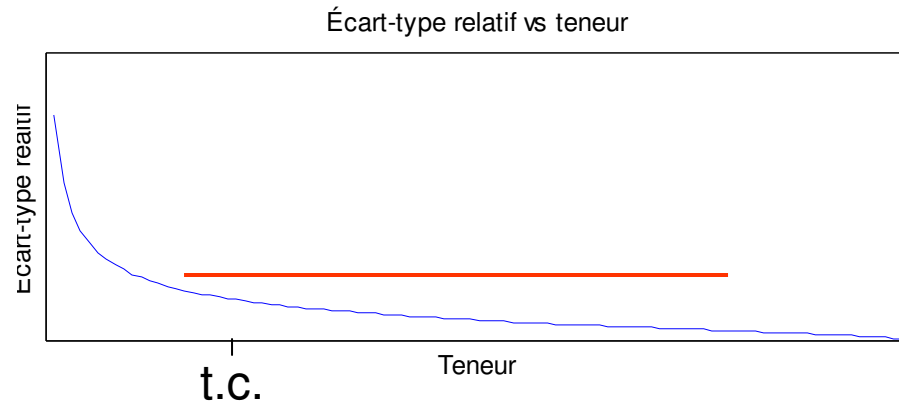
la teneur de la pyrite est : $5e-6 / .01 = 5e-4$

Si l'or est natif, on a :

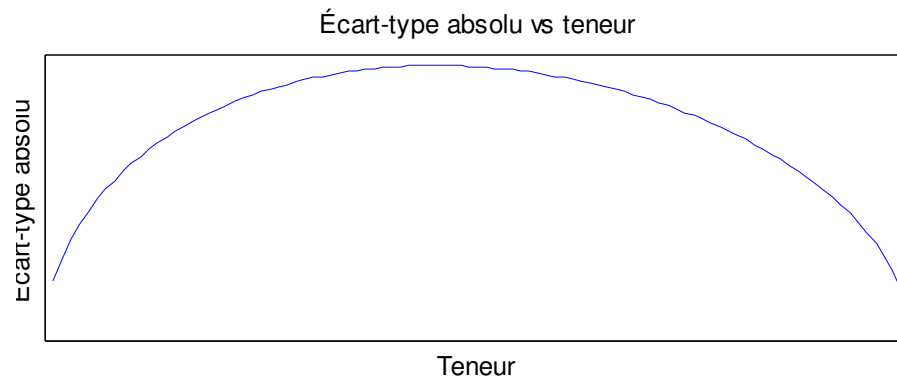
$$S_{r, \text{Au natif}} / S_{r, \text{Au pyrite}} \approx 20 \text{ (si 1\% or dans la pyrite),}$$

$$S_{r, \text{Au natif}} / S_{r, \text{Au pyrite}} \approx 60 \text{ (si 0.1\% or dans la pyrite),}$$

Remarques (suite)



L'écart-type relatif diminue avec la teneur



En valeur absolue, l'écart-type augmente puis diminue

a_L inconnu !

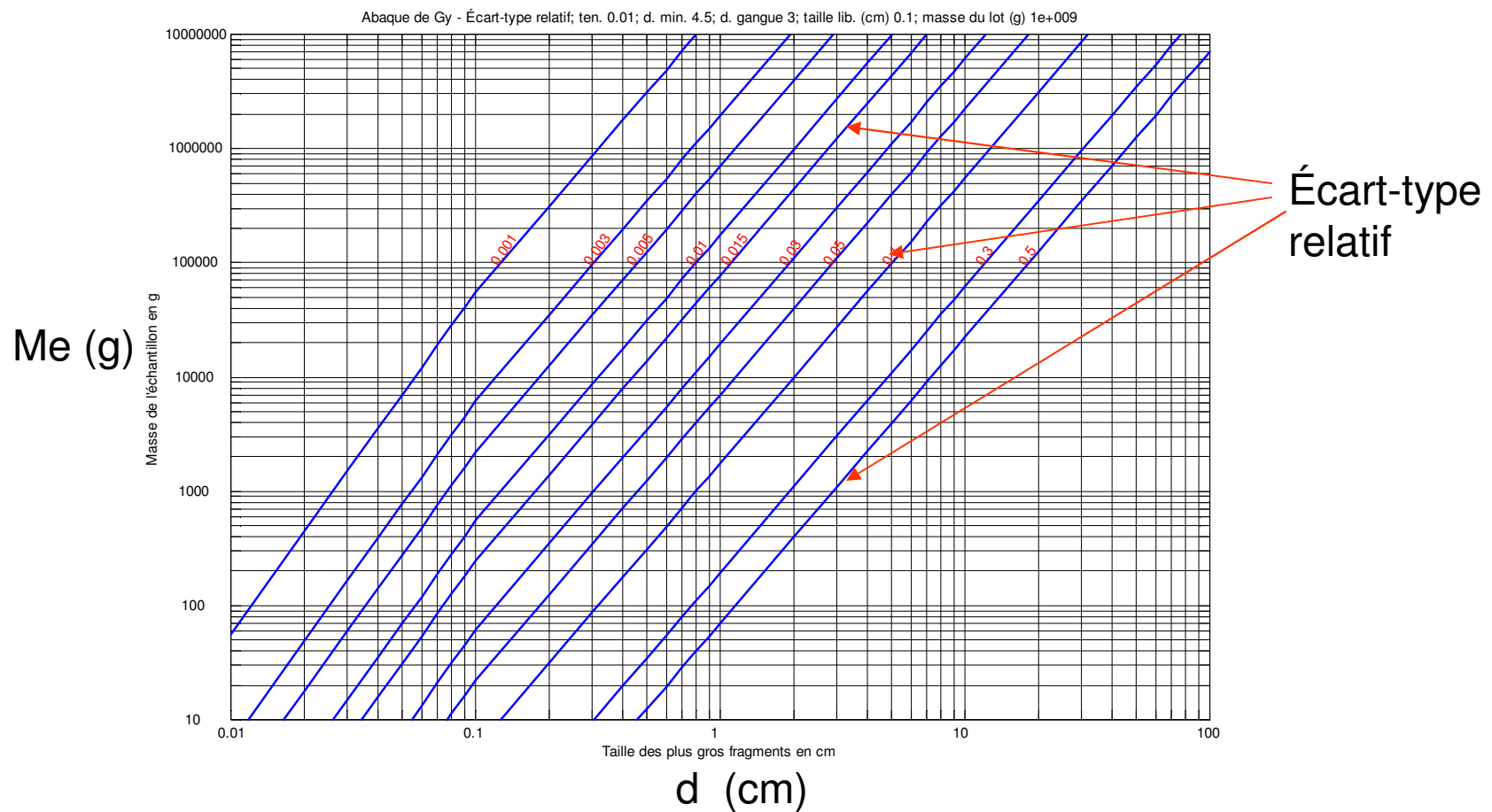
Prendre une teneur légèrement inférieure à la teneur de coupure ou supérieure

Il ne sert à rien d'estimer avec une grande précision une teneur très faible

Ex. t.c. 1%, si $a_L=0.05\%$, même un écart-type relatif de 3 donne un intervalle $[0, 0,35\%]$ au niveau de confiance 95%

Abaques

- Les paramètres que l'on contrôle sont « d », M_e et $S_r^2 \Rightarrow$ abaques où seuls ces paramètres varient



Procédure multistage

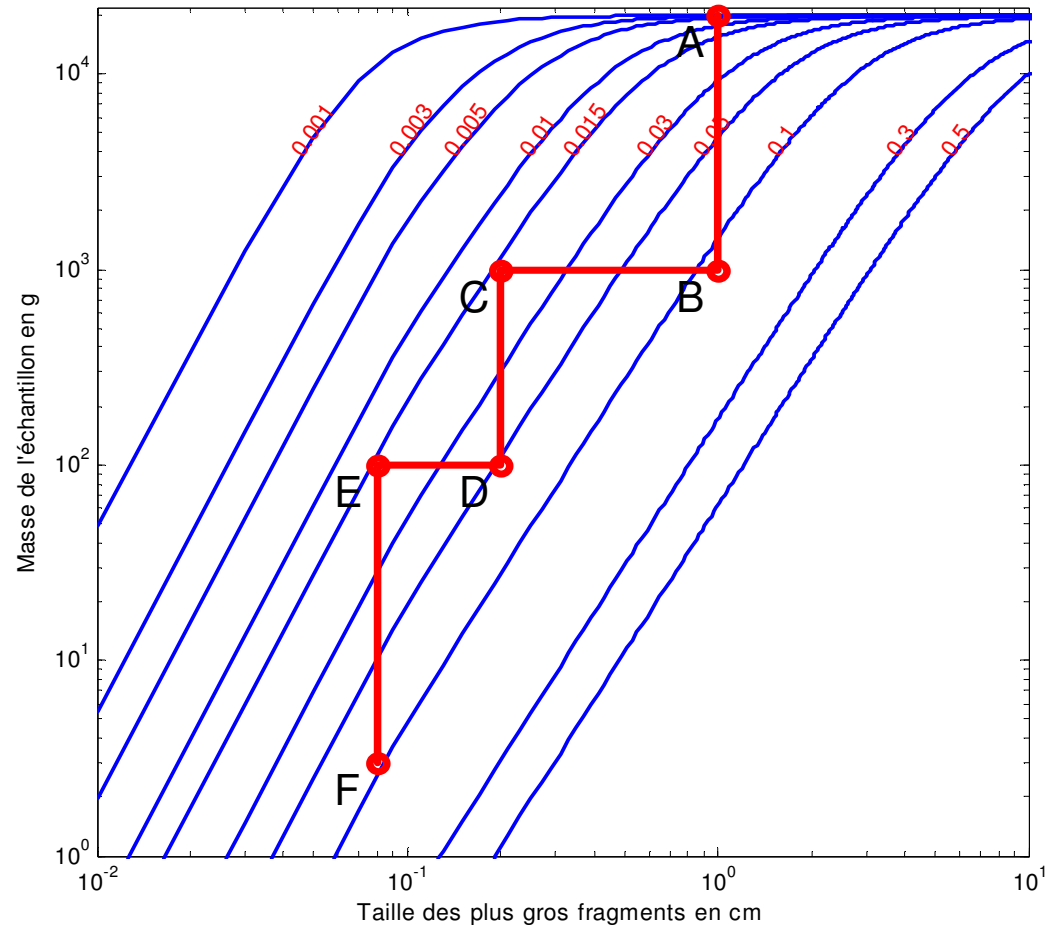
Quelles étapes induisent une erreur?

Comment se combinent les erreurs?

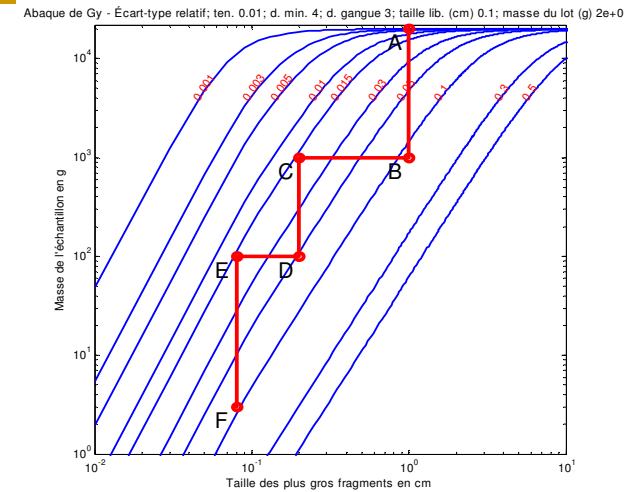
Procédure acceptable ?

Comment l'améliorer ?

Abaque de Gy - Écart-type relatif; ten. 0.01; d. min. 4; d. gangue 3; taille lib. (cm) 0.1; masse du lot (g) 2e+0



Procédure multistage



Quelles étapes induisent une erreur?

Seules les étapes où la masse est réduite (B,D,F)

Comment se combinent les erreurs?

Les variances relatives s'additionnent

Procédure acceptable ?

Non car $s(B)$ et $s(F) \approx 0.1 \Rightarrow$
intervalle 1 ± 0.3 (dans 95% cas)

Comment l'améliorer ?

Augmenter la masse à B
Broyer plus finement à E

Remarque

La masse de l'échantillon d'un stage devient la masse du lot pour le stage suivant (théoriquement on doit recalculer l'abaque; en pratique pas nécessaire si la masse de l'échantillon $< 0.2 \cdot$ masse du lot)

Exemples

Gisement Au 3 ppm, 0.01% Au dans pyrite
Demi-carotte 10 kg

Équipements disponibles

Concasseur à mâchoire à 0.5 cm

Broyeur à disque 0.02 cm

« Shuttle box » 0.007 cm

Le laboratoire prend 25 g à 0.007 cm pour analyse par absorption atomique

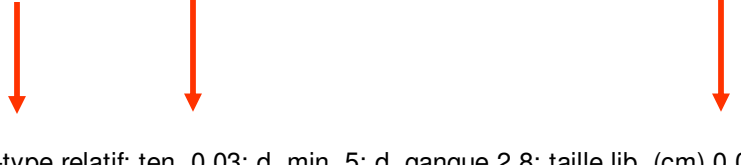
Procédure permettant de connaître teneur en Au à ± 0.05 ppm (95% cas) ?

Note: $s_r = 1/2 (0.05\text{ppm}/3\text{ppm}) = 0.008$

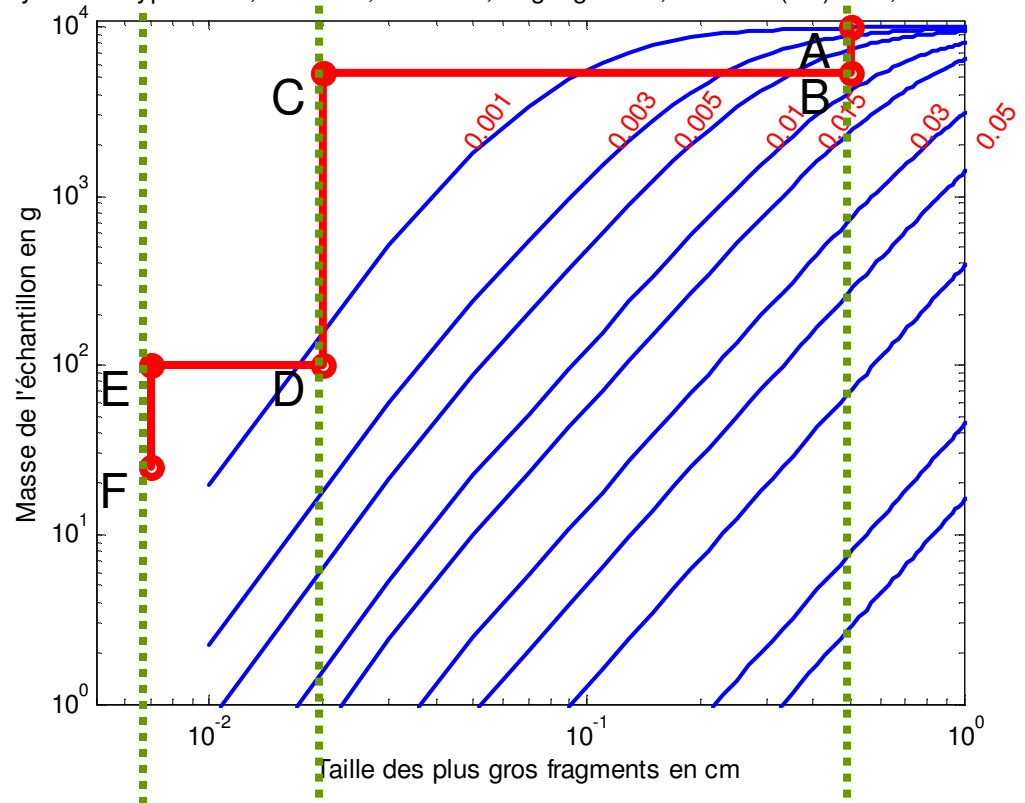
- Il faut broyer la demi-carotte en entier à 0.5 cm => A

Taille de libération des grains de pyrite :
 0.04 cm
 Densité pyrite : 5
 Densité gangue : 2.8
 Teneur de pyrite : $3e-06/0.0001 = 3\%$

« shuttle box » Broyeur à disque Concasseur à mâchoire



Je de Gy - Écart-type relatif; ten. 0.03; d. min. 5; d. gangue 2.8; taille lib. (cm) 0.04; masse du lot (



L'étape F est imposée par le labo

⇒ variance négligeable

⇒ Étape D : à 0.02 cm, $m_2=100$ g assure une variance négligeable

⇒ Étape B : à 0.5 cm, $m_1=5.3$ kg, $s_r=0.008$

⇒ Sr global=0.008

Calcul au long:

$$a_l = .03, f = 0.5, g = 0.25$$

$$d_a = 5 \text{ g/cm}^3, d_g = 2.8 \text{ g/cm}^3, d_0 = 0.04 \text{ cm}$$

$$\mu_{\Delta} = (1 - .03) / .03 * ((1 - .03) * 5 + .03 * 2.8) = 159.5$$

$$K = 159.5 * 0.5 * 0.25 = 19.94 \text{ g/cm}^3$$

- Étape B (Me=5300g, Ml=10000g, d=0.5 cm), $l = (0.04/0.5)^{0.5} = 0.2828$

$$S_r^2 = 19.94 * 0.2828 * 0.5^3 / 5300 (1 - 5300/10000) = 6.25e-05 \Rightarrow s_r = 0.008$$

- Étape D (Me=100g, Ml=5300g, d=0.02 cm), $l = 1$

$$S_r^2 = 19.94 * 1 * 0.02^3 / 100 (1 - 100/5300) = 1.56e-06 \Rightarrow s_r = 0.001$$

- Étape F (Me=25g, Ml=100g, d=0.007 cm), $l = 1$

$$S_{2r} = 19.94 * 1 * 0.007^3 / 25 (1 - 25/100) = 2.05e-07 \Rightarrow s_r = 0.0005$$

- Global

$$S_r^2 = 6.25e-05 + 1.56e-06 + 2.05e-07 = 6.43e-05 \Rightarrow S_{r, \text{global}} = 0.008$$

Procédure alternative:

Sauter l'étape B, tout broyer au concasseur à disque.

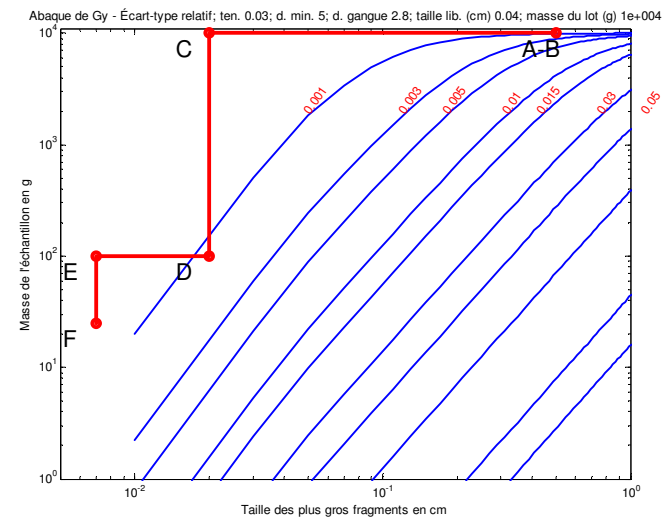
• Étape B : $S_{2r} = 0$

• Étape D (Me=100g, Ml=10000g , d=0.02 cm), l = 1
 $S_r^2 = 19.94 * 1 * 0.02^3 / 100 (1 - 100/10000) = 1.58e-06$

• Étape F (Me=25g, Ml=100g , d=0.007 cm). l=1
 $S_r^2 = 19.94 * 1 * 0.007^3 / 25 (1 - 25/100) = 2.05e-07$

• Global

$$S_r^2 = 0 + 1.58e-06 + 2.05e-07 = 1.76e-06$$
$$S_r = 0.0013$$



7 types d'erreur identifiés par Gy

1. Erreur fondamentale => formule de Gy } **précision**
2. Erreur de délimitation (ex. convoyeurs) => prévention
3. Erreur d'extraction => prévention
4. Erreur de préparation (ex. contamination, perte,...) => prévention
5. Erreur de ségrégation => homogénéisation, composites } **biais**
6. Hétérogénéités de longue portée => géostatistique
7. Hétérogénéités périodiques => composites, géostatistique } **estimation**