MODÈLES d'ANALYSE de la VARIANCE - partie 5
facteurs fixés et facteurs aléatoires - modèle mixtes

- Facteurs aléatoires - facteurs fixés - modèle mixte
- Exemples
- VEPAC module de STATISTICA
  Variance Estimation Precision And Comparison
- Advanced Linear / Nonlinear Models module de STATISTICA
  … Variance components and Mixed Models
- Exemple 1 : 1 facteur aléatoire
- Exemple 2 : évaluation processus de mesure
  étude R&R : étude de Répétabilité et Reproductibilité
  facteurs : opérateurs - pièces
- Exemple 3 : 2 facteurs aléatoires
- Exemple 4 : modèle mixte : 1 facteur fixé + 1 facteur aléatoire
- Exemple 5 : modèle mixte : 2 facteurs fixés + 2 facteurs aléatoires

ANOVA - partie 5 - facteurs aléatoires - modèle mixtes

Facteurs fixés

niveaux spécifiques choisis (fixes) pour l'expérience
inférence : confinée à ces niveaux seulement
influence : affecte la moyenne de la réponse : $\mu(Y)$
facteurs quantitatifs: sont souvent facteurs fixés

Facteurs aléatoires

niveaux resultant de l'échantillonnage d'une population de niveaux potentiels
inférence : population entière
influence : affecte la variance de la réponse : $\sigma^2(Y)$
exemple : étude d'un processus de mesure

Exemple 1 facteur aléatoire - Loom (rouleaux)
supposons 4 rouleaux - échantillon au hasard
L1 L2 L3 L4 - hasard échantillonnage
mesure Y = force L : facteur aléatoire

mesures Y	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	y_{i4}
i=1 Loom L1	98	97	99	96
i=2 Loom L2	91	90	93	92
i=3 Loom L3	96	95	97	95
i= 4 Loom L4	95	96	99	98

Expériences avec facteurs aléatoires

Ex1 facteur aléatoire

modèle

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij} \text{ est } NID(0, \sigma^2) \text{ et } \tau_i \text{ est } NID(0, \sigma_\tau^2)$$

$$V(y_{ij}) = \sigma^2 + \sigma_\tau^2$$

modèle à effets fixes: test nullité des moyennes $H_0 : \tau_i = 0$

modèle à effets aléatoires: test nullité de variance $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$

$$E(MS_E) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad E(MS_{Treatments}) = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$$

Tableau ANOVA: identique à celui avec 1 effet fixe (page suivante)

test de H_0

$$F_0 = MS_{Treatments} / MS_E$$

estimation des variances

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E \text{ et } \hat{\sigma}^2 + n\hat{\sigma}_\tau^2 = MS_{Treatments}$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{Treatments} - MS_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

Expériences avec facteurs aléatoires

Ex 1 : 1 facteur aléatoire

L1	98
L1	97
L1	99
L1	96
L2	91
L2	90
L2	93
L2	92
L2	96
L3	95
L3	97
L3	95
L4	95
L4	96
L4	99
L4	98

ANOVA

	DF	Y SS	Y MS	Y F	Y p
Intercept	1	145733,19	145733,19	76870,19	0,000000
Loom	3	89,19	29,73	15,68	0,000188
Error	12	22,75	1,90		
Total	15	111,94			

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$ = 1,90

$\sigma_\tau^2 = 0$ rejetée

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{Treatments} - MS_E}{n}$$ = (29,73 – 1,90) / 4 = 6,96

Expériences avec facteurs aléatoires

Ex2 : 2 facteurs aléatoires

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$V(\tau_i) = \sigma_\tau^2, V(\beta_j) = \sigma_\beta^2, V[(\tau\beta)_{ij}] = \sigma_{\tau\beta}^2, V(\varepsilon_{ijk}) = \sigma^2$$

$$V(y_{ijk}) = \sigma_\tau^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\tau\beta}^2 + \sigma^2$$

tests

nullité

variances

$$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0 \qquad H_0 : \sigma_\beta^2 = 0 \qquad H_0 : \sigma_{\tau\beta}^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_\tau^2 > 0 \qquad H_1 : \sigma_\beta^2 > 0 \qquad H_1 : \sigma_{\tau\beta}^2 > 0$$

$$E(MS_A) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + bn\sigma_\tau^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}}$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 + an\sigma_\beta^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}}$$

$$E(MS_{AB}) = \sigma^2 + n\sigma_{\tau\beta}^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

Expériences avec facteurs aléatoires

Ex. 2 :
2 facteurs aléatoires

calcul des estimations de variances

$$\hat{\sigma}_{\tau}^{2} = \frac{MS_{A} - MS_{AB}}{bn}$$

$$\hat{\sigma}_{\beta}^{2} = \frac{MS_{B} - MS_{AB}}{an}$$

$$\hat{\sigma}_{\tau\beta}^{2} = \frac{MS_{AB} - MS_{E}}{n}$$

$$\hat{\sigma}^{2} = MS_{E}$$

Attention !

peut donner des estimations **négatives**

Exemple 2
Étude d'un processus (appareil) de mesure

A: pièce p=20
B: opérateur o=3
répétition n=2

20*3*2 = 120 obs.

A B facteurs aléatoires

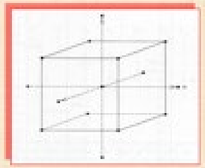
Étude R&R

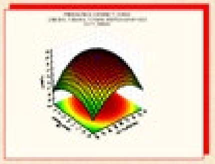
Répétabilité et Reproductibilité

ID	pièce	operateur	rep	Y
1	p1	op1	1	21
2	p2	op1	1	24
3	p3	op1	1	20
4	p4	op1	1	27
5	p5	op1	1	19
6	p6	op1	1	23
7	p7	op1	1	22
8	.	.	.	.
.	.	.	.	.
119	p19	op3	2	25
120	p20	op3	2	17

Fichier Statistica

1 ID	2 A_pièce	3 B_opérateur	4 rep	5 Y_mesure
1	p1	op1	1	21
2	p2	op1	1	24
3	p3	op1	1	20
4	p4	op1	1	27
5	p5	op1	1	19
6	p6	op1	1	23
7	p7	op1	1	22
8	p8	op1	1	19
9	p9	op1	1	24
10	p10	op1	1	25
...	...	...	...	...
113	p13	op3	2	23
114	p14	op3	2	25
115	p15	op3	2	30
116	p16	op3	2	27
117	p17	op3	2	20
118	p18	op3	2	23
119	p19	op3	2	25
120	p20	op3	2	17





Évaluation d'un processus de mesure avec STATISTICA

Bernard CLÉMENT, PhD

document : 103 pages - 25 exemples

méthodes pour évaluer un processus de mesurage

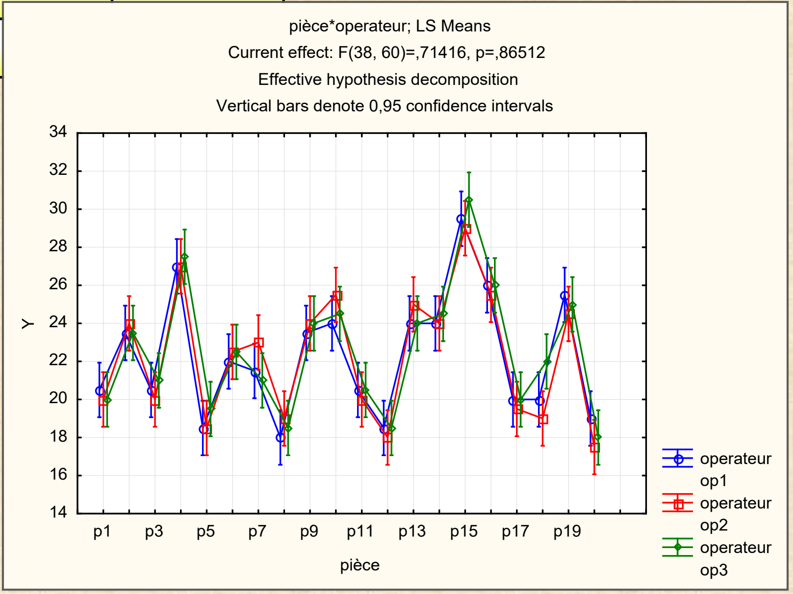
Expériences avec facteurs aléatoires

Exemple 2 : Étude d'un processus de mesure
A: pièce B: opérateur SI facteurs considérés FIXÉS

ANOVA					
	DF	SS	MS	F	p
Intercept	1	60076,88	60076,88	58611,59	0,000000
pièce	19	1176,96	61,95	60,43	0,000000
operateur	2	1,85	0,92	0,90	0,411012
pièce*opera	38	27,82	0,73	0,71	0,865117
Error	60	61,50	1,02		
Total	119	1268,12			

pas d'interaction

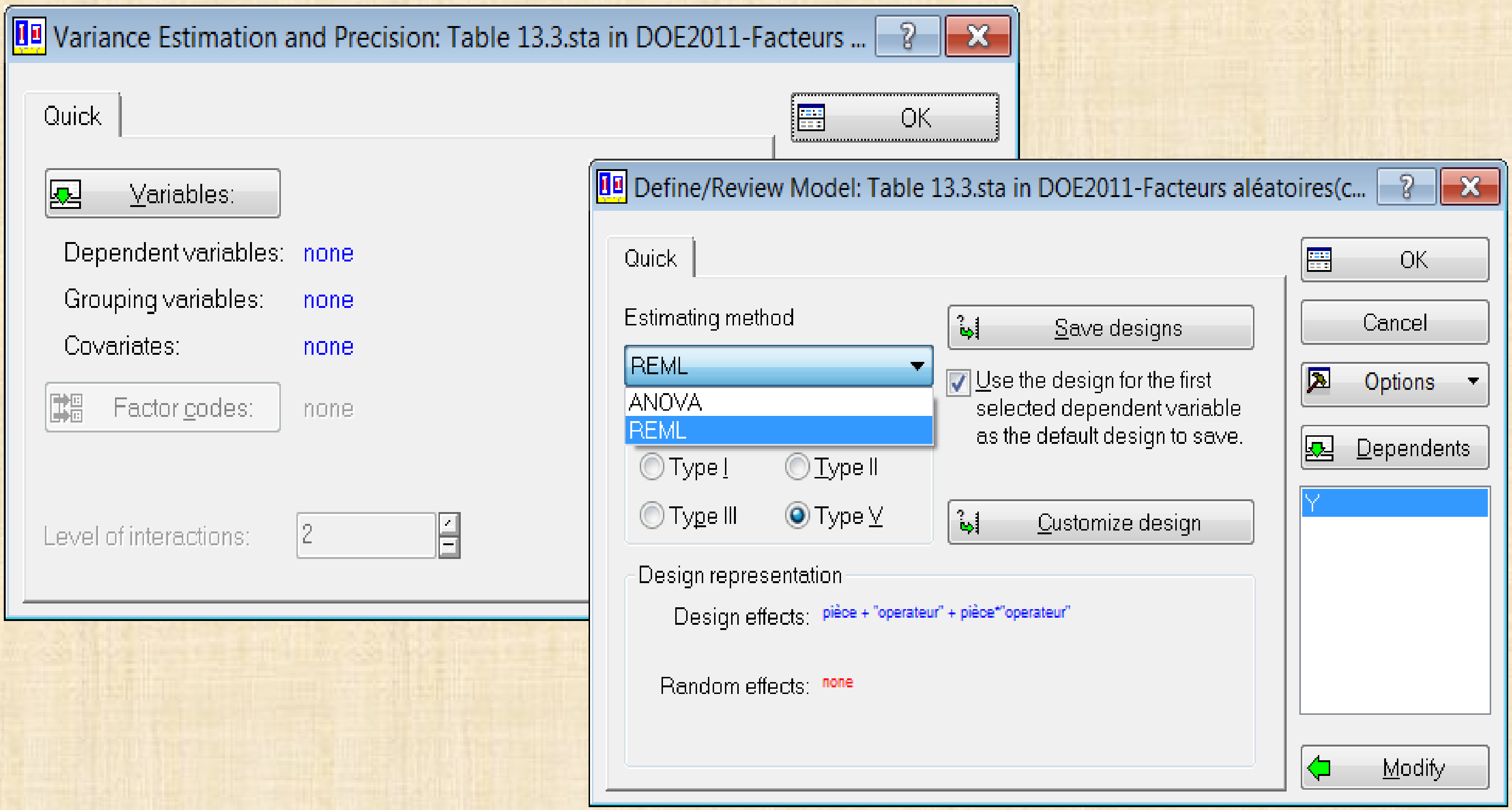
pièce*opérateur



Expériences avec facteurs aléatoires

Exemple 2 : Étude d'un processus de mesure
A: pièce B: opérateur facteurs ALÉATOIRES

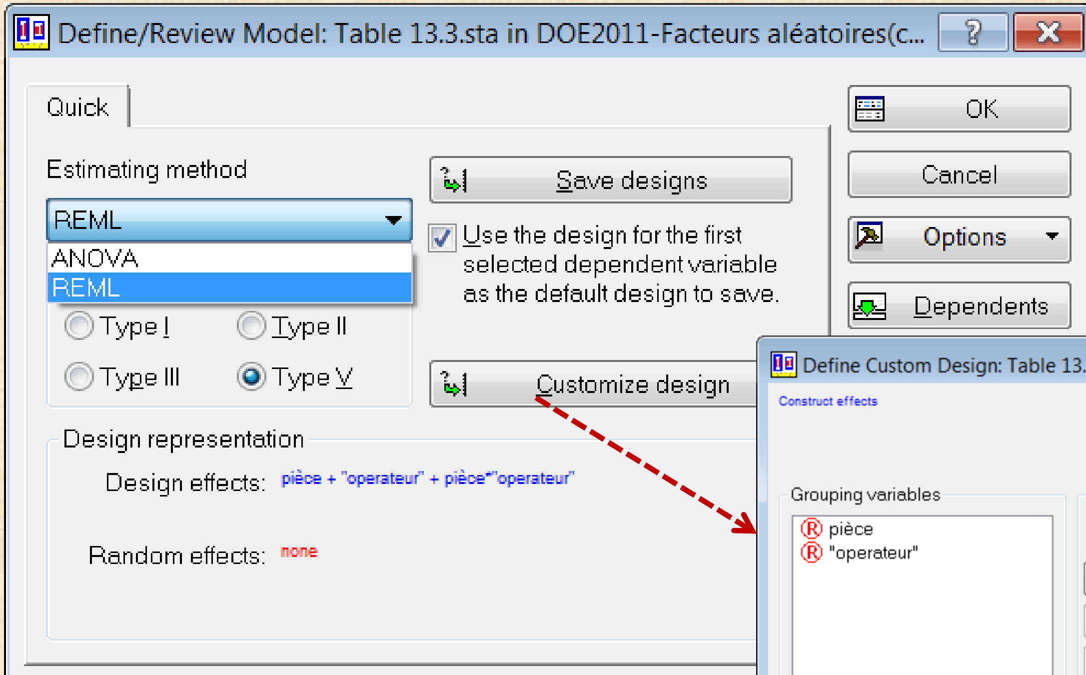
module VEPAC : Variance Estimation Precision And Comparison
2 méthodes pour estimer les variances : tableau ANOVA ou REML
REML : Restricted Estimation Maximum Likelihood

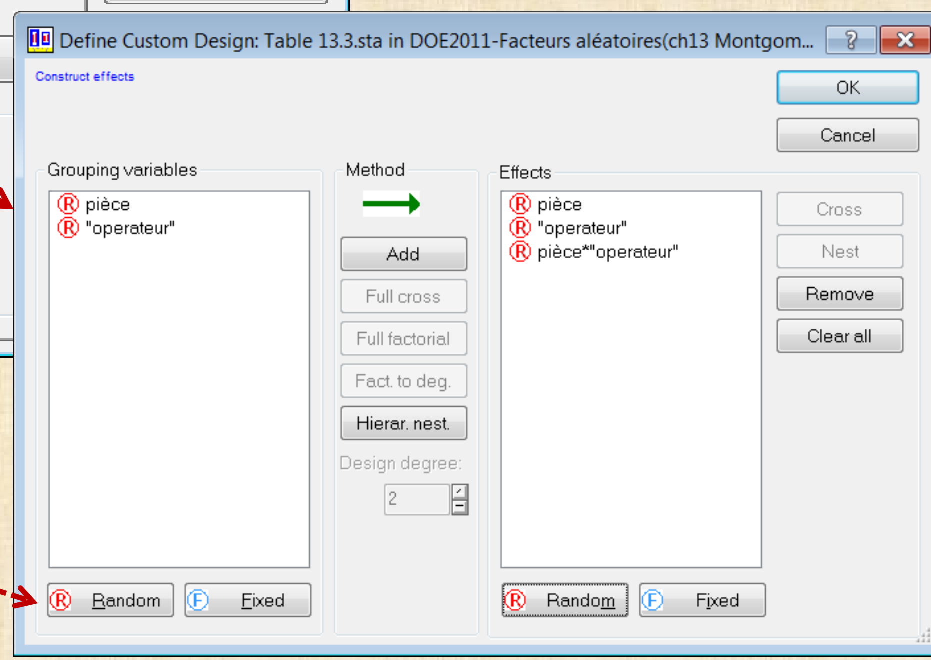


Expériences avec facteurs aléatoires

Exemple 2: Étude d'un processus de mesure

A: pièce   B: opérateur   **facteurs aléatoires**





spécification

Facteurs:

Random / Fixed

Expériences avec facteurs aléatoires

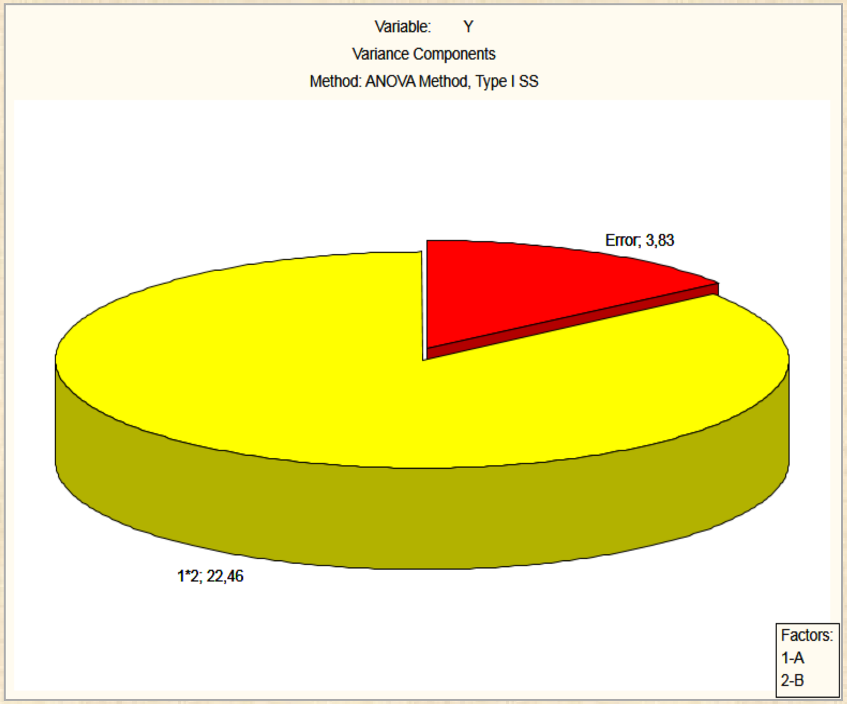
Exemple 2 : Étude d'un processus de mesure
A: pièce B: opérateur **facteurs aléatoires**

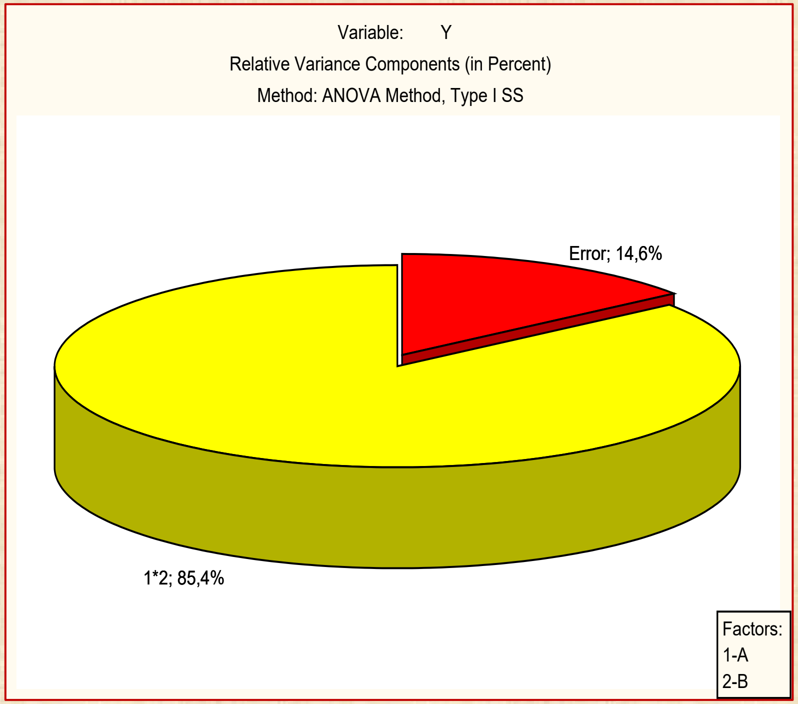
ANOVA								
	Effect (F/R)	SS	DF	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	60076,87	1	60076,9	19,0768	62,13816	966,83	0,000000
pièce	Random	1176,96	19	61,95	38,0000	0,73202	84,62	0,000000
operateur	Random	1,85	2	0,92	38,0000	0,73202	1,26	0,294232
pièce*operateur	Random	27,82	38	0,73	60,0000	1,02500	0,71	0,865117
Error		61,50	60	1,03				

composants de la variance					
	variance	DF	Sum	Percent	RSD (%)
pièce	10,20	18,55	10,20	90,83	14,28
operateur	0,0048	0,08	10,21	0,035	0,31
pièce*operateur	0,00000				
Error	1,025	60,00	11,23	9,126	4,52

Expériences avec facteurs aléatoires

Exemple 2 : Étude d'un processus de mesure
A: pièce B: opérateur facteurs aléatoires





Expériences avec facteurs aléatoires

2 facteurs: modèle mixte A facteur fixe - B facteur aléatoire

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \gamma_j + (\alpha\gamma)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$V(\gamma_j) = \sigma_\beta^2, V[(\alpha\gamma)_{ij}] = \sigma_{\alpha\gamma}^2, V(\varepsilon_{ijk}) = \sigma^2$$

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0$$

$$E(MS_A) = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\alpha_i^2}{a-1} \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_A}{MS_{AB}}$$

$$E(MS_B) = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2 + an\sigma_\gamma^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_B}{MS_{AB}}$$

$$E(MS_{AB}) = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\gamma}^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{MS_{AB}}{MS_E}$$

$$E(MS_E) = \sigma^2$$

$$\hat{\sigma}_\gamma^2 = \frac{MS_B - MS_{AB}}{an}$$

$$\hat{\sigma}_{\alpha\gamma}^2 = \frac{MS_{AB} - MS_E}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

Expériences avec facteurs aléatoires

modèle mixte A facteur fixé - B facteur aléatoire

Exemple 3 : évaluation pour choisir parmi 3 machines M1 M2 M3

A = facteur 1 = type machine - 3 modalités M1-M2-M3 - facteur fixé
B = facteur 2 = Person - 6 modalités P1-P2,…-P6 - facteur aléatoire

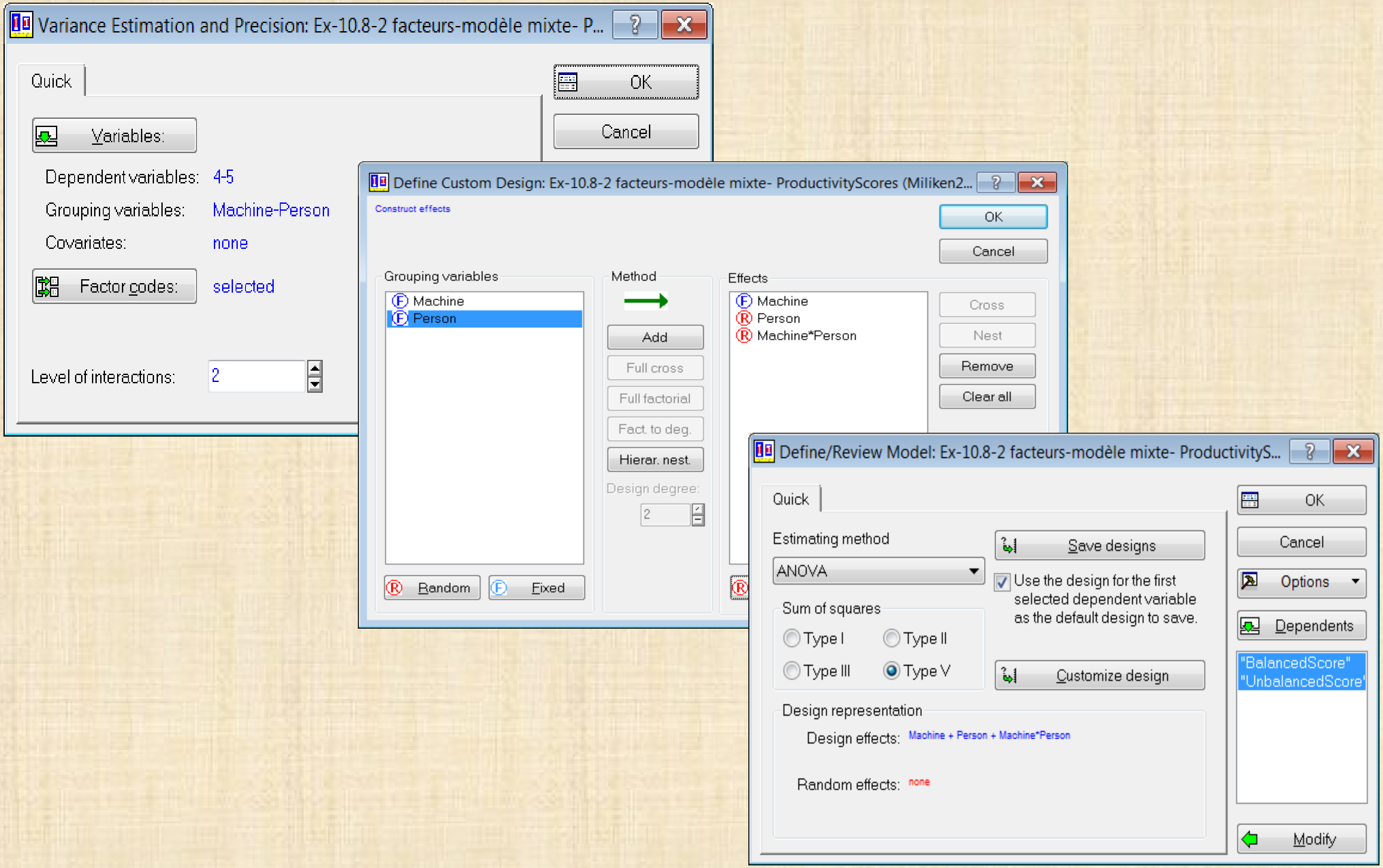
3 répétitions - 3 *6 *3 = 54 observations
réponse
Y = BalancedScore - indicateur de productivité
Y = UnbalancedScore = BalancedScore avec données manquantes

Milliken and Johnson, vol 1 p.285 - modèle mixte

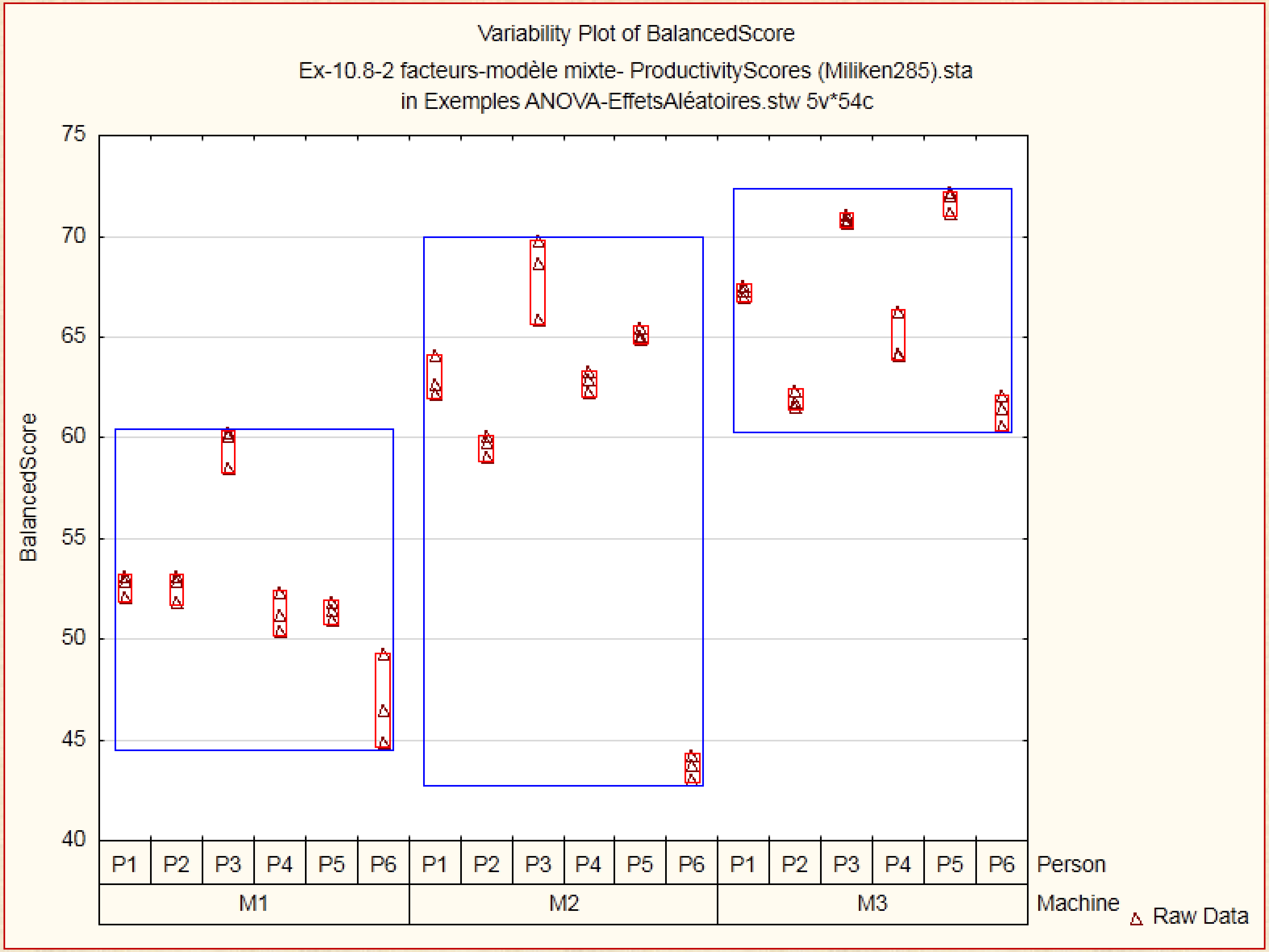
ID	Machine	Person	repeat	Balanced Score	Unbalanced Score
1	M1	P1	1	52,0	52,0
2	M1	P1	2	52,8	.
3	M1	P1	3	53,1	.
4	M1	P2	1	51,8	51,8
5	M1	P2	2	52,8	52,8
6	M1	P2	3	53,1	.
7	M1	P3	1	60,0	60,0
8	.	.	.	.	.
53	M3	P6	2	61,4	61,4
54	M3	P6	3	60,5	60,5

Expériences avec facteurs aléatoires

Ex3 : modèle mixte A facteur fixé - B facteur aléatoire



Expériences avec facteurs aléatoires



Expériences avec facteurs aléatoires

Ex 3 : modèle mixte A facteur fixe - B facteur aléatoire

Univariate Tests of Significance for BalancedScore

Type III decomposition

	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	192138,615	1	192138,61	5	248,38	773,57	0,000001
Machine	Fixed	1755,263	2	877,63	10	42,65	20,58	0,000285
Person	Random	1241,895	5	248,38	10	42,65	5,82	0,008949
Machine*Person	Random	426,53	10	42,65	36	0,92	46,13	0,000000
Error		33,29	36	0,92				

Components of Variance - Type III decomposition

	BalancedScore	df	Sum	Percent	RSD (%)
Person	22,86	3,38	22,86	60,64	8,01
Machine*Person	13,91	9,57	36,77	36,90	6,25
Error	0,925	36	37,69	2,45	1,61

Exemple 4 : 3 facteurs modèle mixte

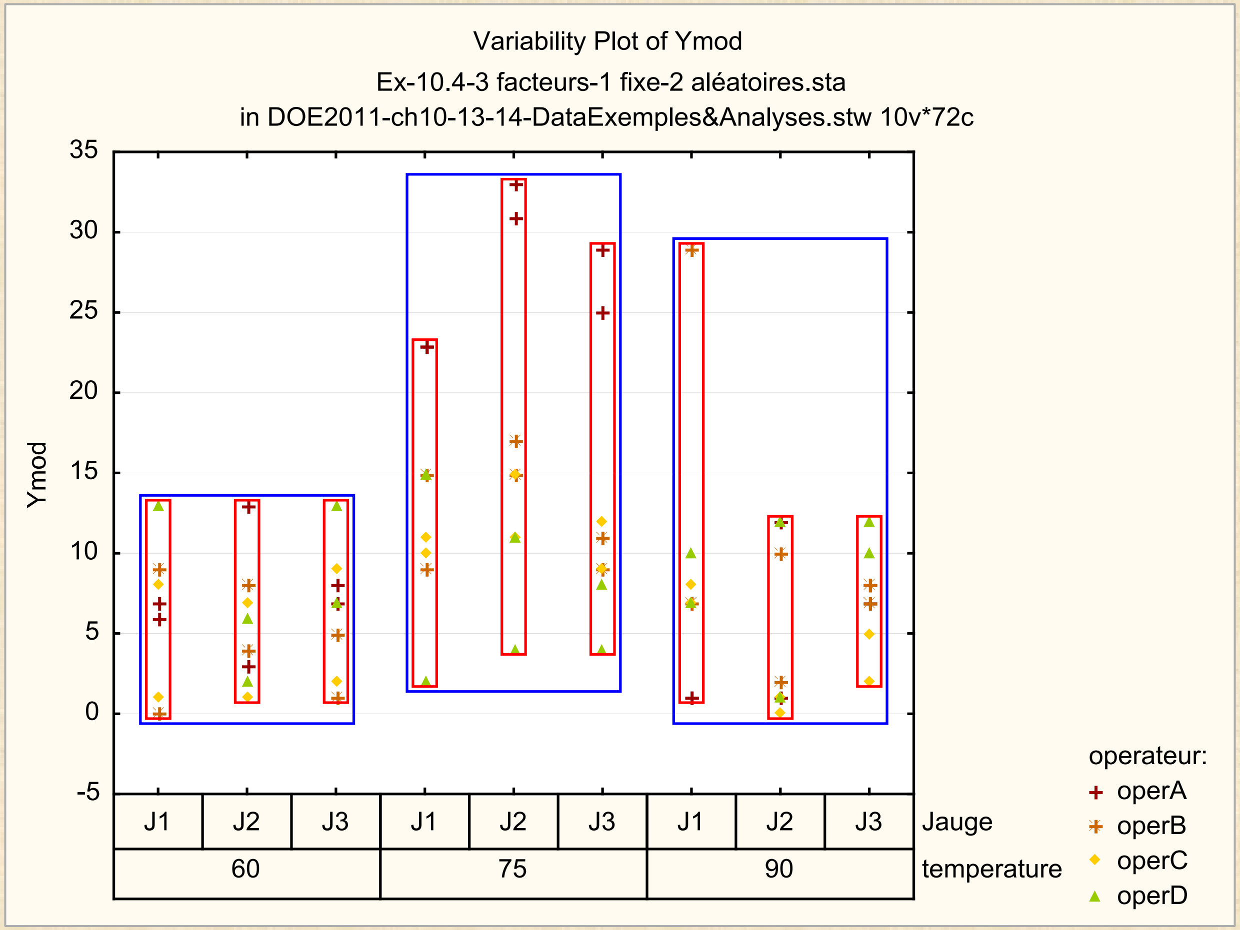
A = température (fixe) = 60 75 90
B = opérateur (aléatoire) = operA operB operC operD
C = jauge (fixe) = J1 J2 J3
2 répétitions - facteurs croisés 3x4x3x2 = 72 obs.

	temp	opera	jauge	rep	Y	Ymod = Y+9
1	60	operA	J1	1	-2	7
2	60	operA	J1	2	-3	6
3	60	operA	J2	1	-6	3
4	60	operA	J2	2	4	13
5	60	operA	J3	1	-1	8
6	60	operA	J3	2	-2	7
7	60	operB	J1	1	0	9
8	60	operB	J1	2	-9	0
9	60	operB	J2	1	-5	4
10	60	operB	J2	2	-1	8
11	60	operB	J3	1	-4	5
12	60	operB	J3	2	-8	1
13	60	operC	J1	1	-1	8
14	60	operC	J1	2	-8	1
15	60	operC	J2	1	-8	1
16	60	operC	J2	2	-2	7
17	60	operC	J3	1	0	9
18	60	operC	J3	2	-7	2
19	60	operD	J1	1	4	13
20	60	operD	J1	2	4	13
21	60	operD	J2	1	-3	6
22	60	operD	J2	2	-7	2
23	60	operD	J3	1	-2	7
24	60	operD	J3	2	4	13

data

	temp	oper	jauge	rep	Y	Ymod = Y+9
25	75	operA	J1	1	14	23
26	75	operA	J1	2	14	23
27	75	operA	J2	1	22	31
28	75	operA	J2	2	24	33
29	75	operA	J3	1	20	29
30	75	operA	J3	2	16	25
31	75	operB	J1	1	6	15
32	75	operB	J1	2	0	9
33	75	operB	J2	1	8	17
34	75	operB	J2	2	6	15
35	75	operB	J3	1	2	11
.	.	.	.	.	.	.
63	90	operC	J2	1	-9	0
64	90	operC	J2	2	-8	1
65	90	operC	J3	1	-4	5
66	90	operC	J3	2	-7	2
67	90	operD	J1	1	-2	7
68	90	operD	J1	2	1	10
69	90	operD	J2	1	-8	1
70	90	operD	J2	2	3	12
71	90	operD	J3	1	1	10
72	90	operD	J3	2	3	12

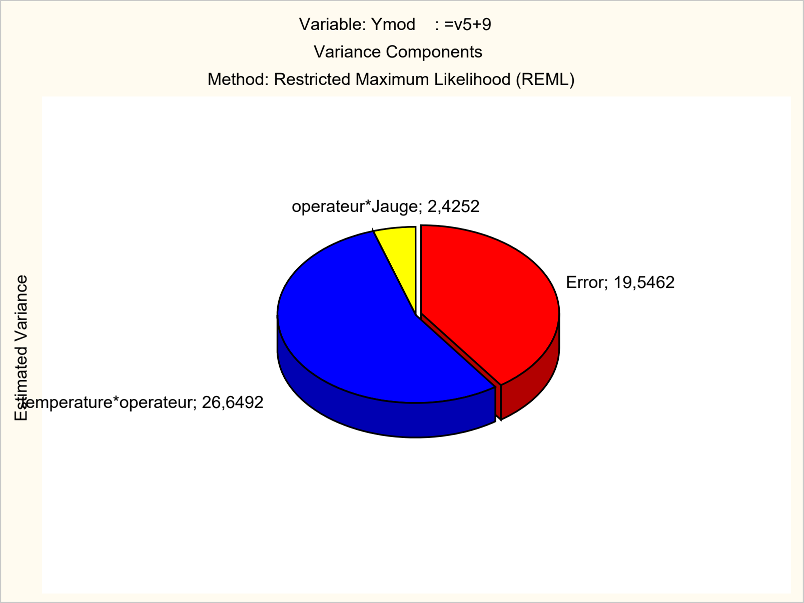
Exemple 4: 3 facteurs modèle mixte

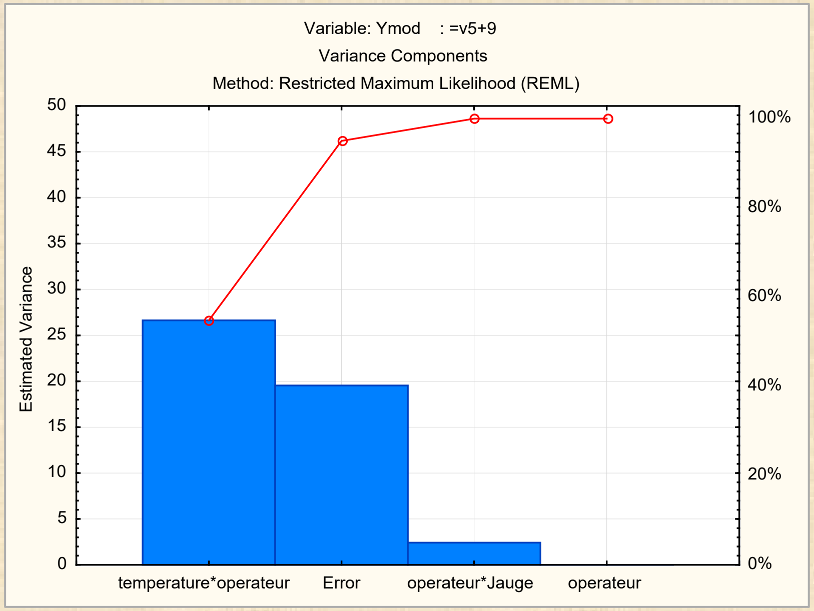


Expériences avec facteurs aléatoires

Exemple 4 : 3 facteurs modèle mixte

component	variance	Std error	df	Z-value	Prob z
operateur	0,00000				
temperature*operateur	26,64924	14,37388	6,87467	1,854005	0,031869
operateur*Jauge	2,42525	3,26397	1,10420	0,743035	0,228730
Error	19,54618	3,99619	47,84767	4,891200	0,000001

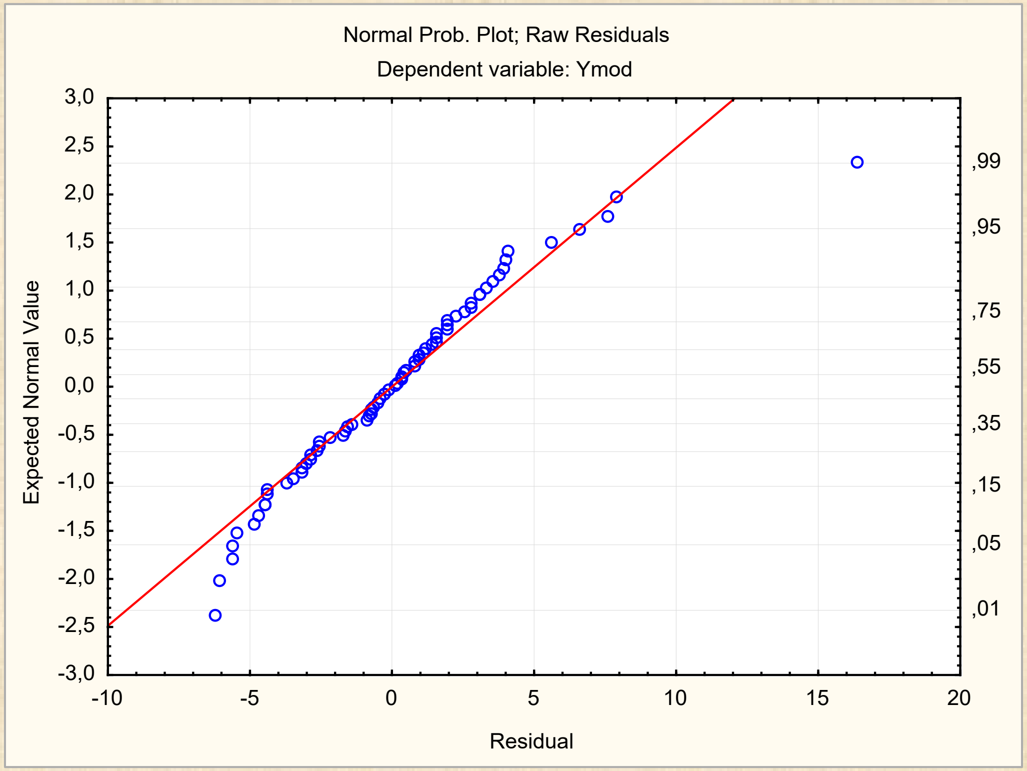




Expériences avec facteurs aléatoires

Exemple 4 : 3 facteurs modèle mixte

EFFECT	Num DF	Den DF	F	P-value
temperature	2	6	2,851516	0,134759
Jauge	2	6	0,105498	0,901509
temperature*Jauge	4	48	1,763629	0,151676



Exemple 5 : 2 facteurs fixés - 2 facteurs aléatoires

Milliken, G. A., & Johnson, D. E. (1984). Analysis of messy data: Vol. I. Designed experiments. New York: Van Nostrand Reinhold, Co.
Milliken, G. A., & Johnson, D. E. (1992). Analysis of messy data: Vol. I. Designed experiments. New York: Chapman & Hall.

A comfort experiment was conducted to
study the effects of temperature and gender on a person's comfort.

Researchers were interested only in 3 temperature settings: 65, 70, 75 degrees Fahrenheit.
Each temperature setting was randomly assigned to three of 9 available environmental chambers.

18 males and 18 females were randomly assigned to chambers so that
2 males and 2 females were assigned to each of the nine chambers.

After the people were subjected to the environmental condition for three hours,
their comfort Y was measured.

STRUCTURE : Temp et Gender sont fixes et croisés
Chamber et Person sont aléatoires et emboités
Chamber emboité dans Temperature
Person emboité dans Chamber

MODEL Y = Comfort = Temperature + Gender + Temperature*Gender +
+ Chamber(Temperature) + Person(Chamber) + error

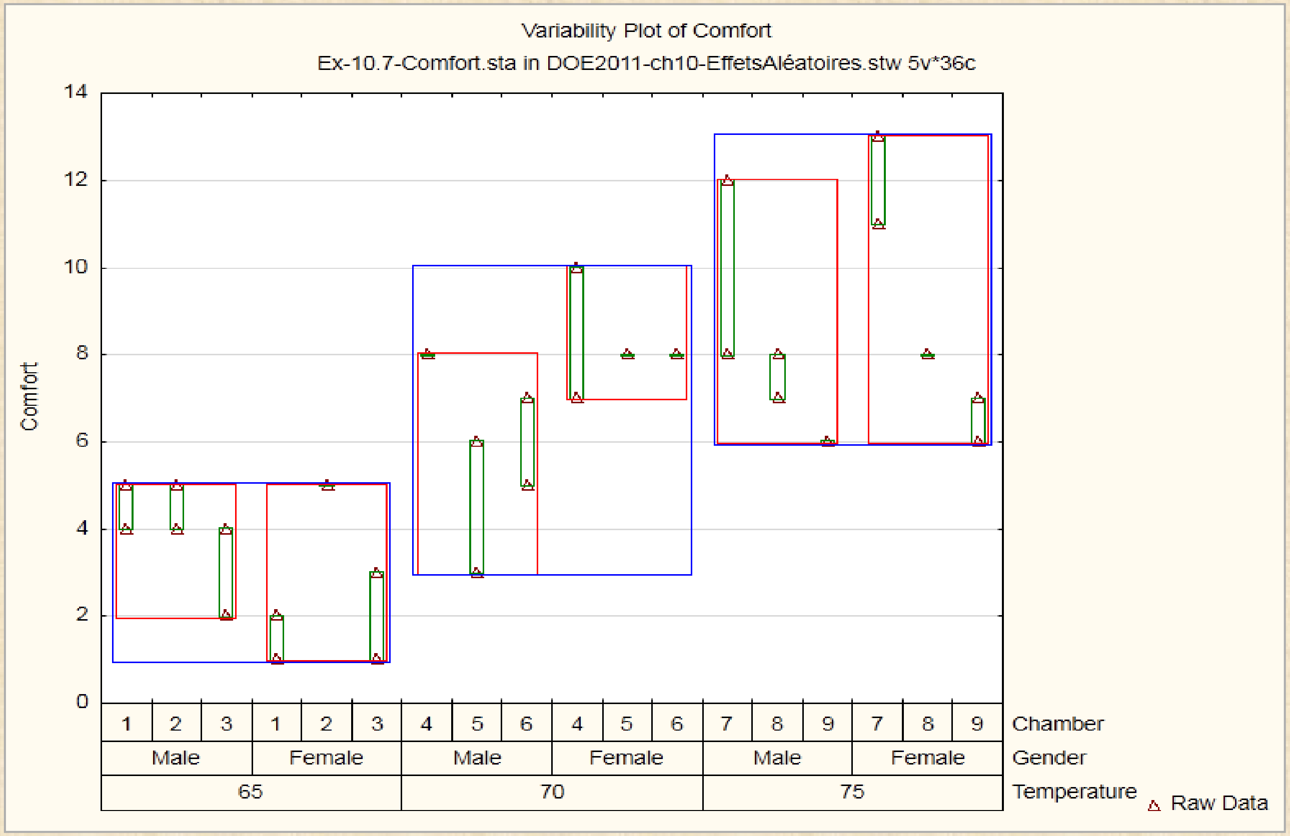
Expériences avec facteurs aléatoires

Exemple 5 : 2 facteurs fixés - 2 facteurs aléatoires

	Temperat	Chamber	Gender	Person	Comfort
1	65	1	Male	1	5
2	65	1	Male	2	4
3	65	1	Female	3	1
4	65	1	Female	4	2
5	65	2	Male	5	5
6	65	2	Male	6	4
7	65	2	Female	7	5
8	65	2	Female	8	5
9	65	3	Male	9	4
10	65	3	Male	10	2
11	65	3	Female	11	1
12	65	3	Female	12	3
13	70	4	Male	13	8
14	70	4	Male	14	8
15	70	4	Female	15	10
16	70	4	Female	16	7
17	70	5	Male	17	6
18	70	5	Male	18	3

	Temperat	Chamber	Gender	Person	Comfort
19	70	5	Female	19	8
20	70	5	Female	20	8
21	70	6	Male	21	5
22	70	6	Male	22	7
23	70	6	Female	23	8
24	70	6	Female	24	8
25	75	7	Male	25	12
26	75	7	Male	26	8
27	75	7	Female	27	11
28	75	7	Female	28	13
29	75	8	Male	29	8
30	75	8	Male	30	7
31	75	8	Female	31	8
32	75	8	Female	32	8
33	75	9	Male	33	6
34	75	9	Male	34	6
35	75	9	Female	35	6
36	75	9	Female	36	7

Exemple 5 : 2 facteurs fixés - 2 facteurs aléatoires



effect	comfort	df	sum	percent	RSD(%)
Chamber(Temperature)	0,000000				
Gender(Chamber)	0,000000				
Error	3,538889	30	3,54	100	29,83

Expériences avec facteurs aléatoires

Exemple 5 : 2 facteurs fixés - 2 facteurs aléatoires

Effect	Effect - (F/R)	SS	Degr. of - Freedom	MS	Den.Syn. - Error df	Den.Syn. - Error MS	F	p
Intercept	Fixed	1431,36	1	1431,3	6	11,08	129,14	0,000028
Temperature	Fixed	158,389	2	79,194	6	11,08	7,14	0,025856
Gender	Fixed	3,361	1	3,361	6	2,028	1,66	0,245365
Temperature *Gender	Fixed	15,722	2	7,861	6	2,028	3,88	0,083027
Chamber(Temperature)	Random	66,500	6	11,083	6	2,028	5,47	0,028943
Gender(Chamber)	Random	12,167	6	2,028	18	1,53	1,3273	0,295753
Error		27,500	18	1,528				