

# Chapitre 1 – Introduction

- **Data Science (DS) = ?**
- **Machine Learning (ML) = ?**
- **Processus - modélisation statistique**
- **Étapes d'une étude statistique**
- **Types de variables**
- **Classification des modèles**

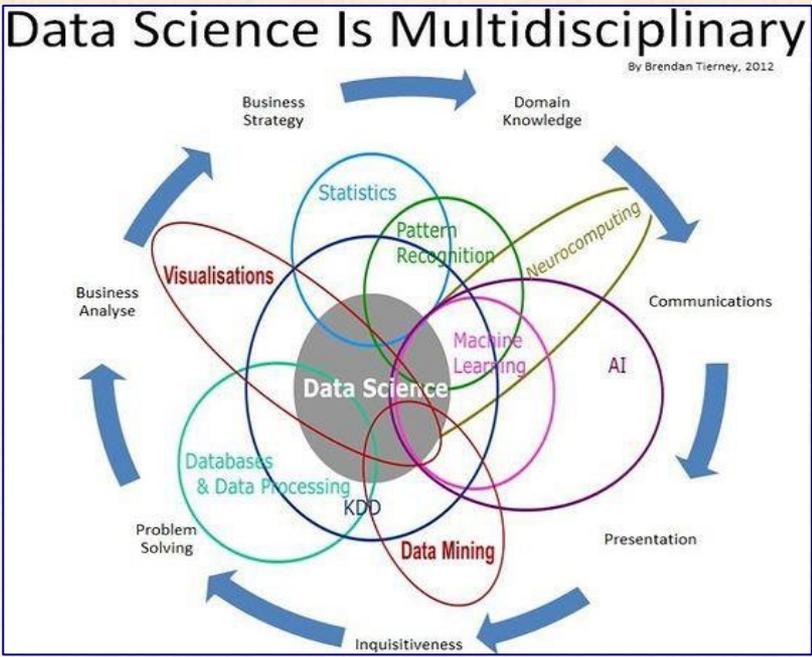
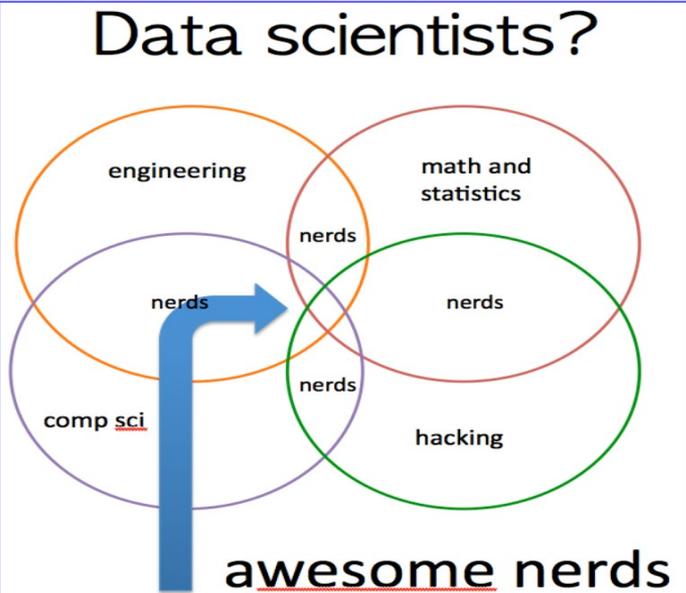
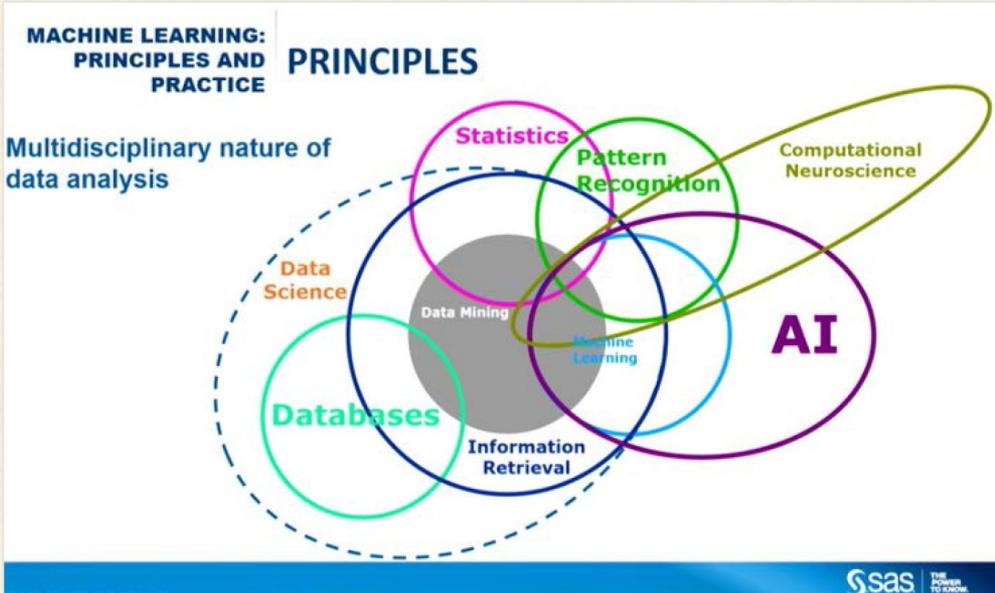
## Référence

**Bernard CLÉMENT, PhD**

**Statistique, Science des données, Intelligence artificielle**

**Société Statistique de Montréal : 26 avril 2018**

# science des données = ?

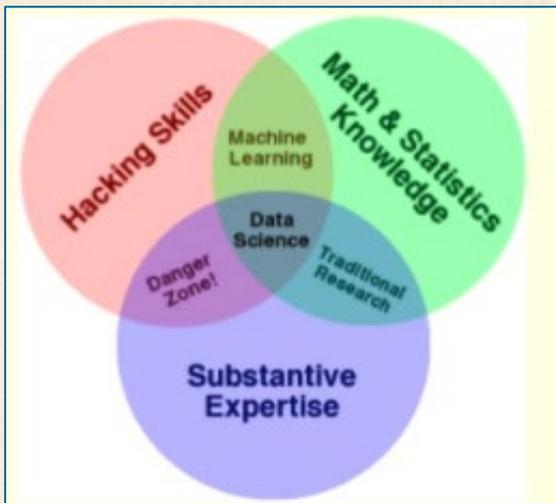


## What on earth is a data scientist ?

“ A data scientist is a statistician who lives in San Francisco.  
Data Science is statistics on a Mac.  
A data scientist is someone who is better at statistics than any software engineer and better at software engineering than any statistician. ”

# DIFFÉRENCE entre STATISTIQUE et DATA SCIENCE ?

DOMAINE	éléments	
<b>STATISTIQUE</b> (classique)	idées, hypothèses, évaluation analyse : primaire , haut vers le bas confirmatoire données : à recueillir	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <b>idée</b>    <b>données</b> </div>
<b>DATA SCIENCE</b> (data mining) machine learning	génération d'hypothèses, création idées analyse : secondaire, bas vers le haut exploratoire (après coup) données : historiques / massives	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> <b>idée</b>    <b>données</b> </div>

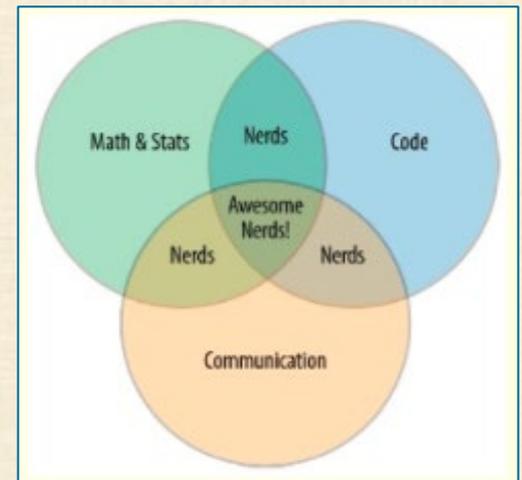


*" Data Science is much older than Kepler .. It is the second oldest profession "*

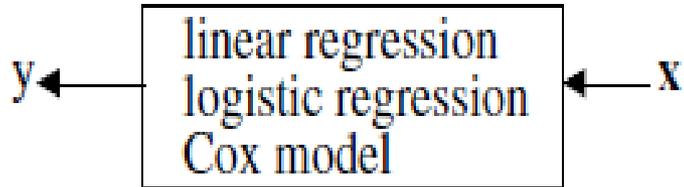
Gregory Piatetsky-Shapiro

*" Statistics has been the most successful information science. Those who ignore statistics are condemned to re-invent it "*

Brad Efron



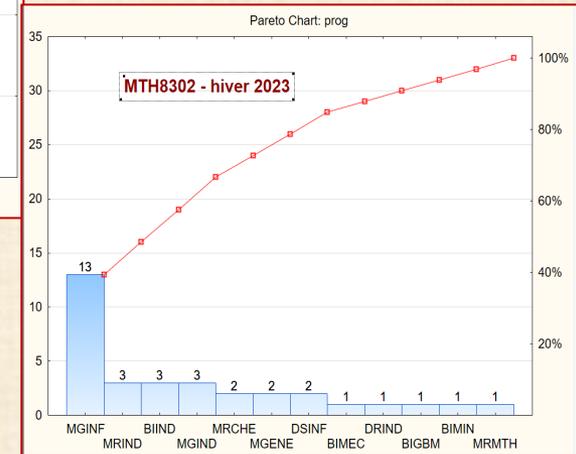
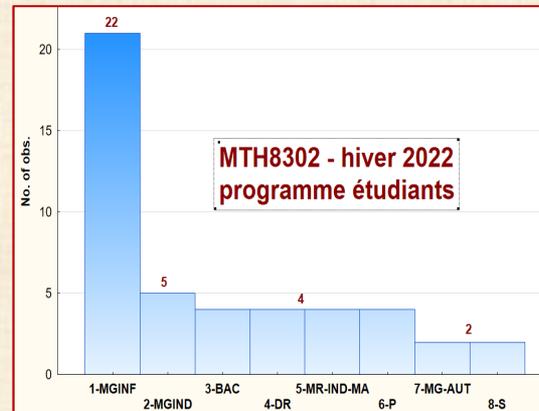
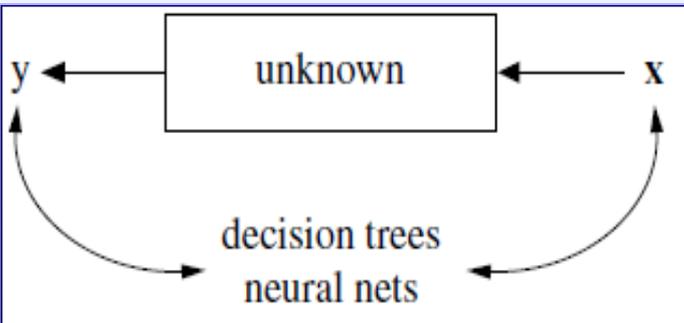
## Stochastic Data Modeling Culture



Statistician : **98%**  
 Computer Scientists : **2%**  
 dép. MAGI

Statistician : **2%**  
 Computer Scientists : **98%**  
 dép. GIGL

## Algorithmic Modeling Culture



Leo Breiman (U Berkely)  
*Statistical Science* 2001, pp. 199–231

[Breiman-two-cultures.pdf \(ku.dk\)](#)

# Terminologie

**DS : Data Science** ... ensemble des méthodes et outils orientés visant à apprendre avec les données et résoudre des problèmes ... compréhension / utilisation  
... science essentiellement **pluridisciplinaire**



**DM : Data Mining** ... « *nontrivial process of identifying valid, novel, potentially useful, and ultimately understandable patterns in data* » G. Piatesky-Shapiro  
(fouille des données)  
le terme **DM** est maintenant remplacé par **ML**

**ML : Machine Learning** ... ensemble d'algorithmes, méthodes, outils, pour développer des modèles visant à améliorer le processus d'apprentissage avec des données ... orientés **prédiction**  
(apprentissage machine)

**AP : Analyse Prédictive** ... analyse pour prédire quelque chose  
méthode **pourrait être non statistique**

**BD : Big Data** ... données trop grosses en taille (à définir) et complexité nécessitant leur traitement informatique / statistique  
(mégadonnées) avec technologies sur des systèmes distribués en parallèle (Hadoop et autres)  
(données massives)  
.... **BD** terme galvaudé trop emphase **quantité**  
pas assez sur la **qualité (véracité)**

# Terminologie

**apprentissage supervisé** .... **apprentissage non supervisé**  
**données structurées** ... **données non structurées (images, textes,...)**  
**apprentissage profond** ... **réseaux de neurones multicouches pour IA**  
**infonuagique (cloud)** ... **systèmes distribués**  
**IOT** ... **internet des objets ... réseaux de capteurs**  
**Open Source Software** ... **R , Python , Weka, Julia ...**  
**technologies** ... **GPU (puces graphiques - traitement parallèle)**  
**économie numérique** ... **GAFAM (Google Amazon Facebook Amazon Microsoft)**

## Machine Learning (ML)

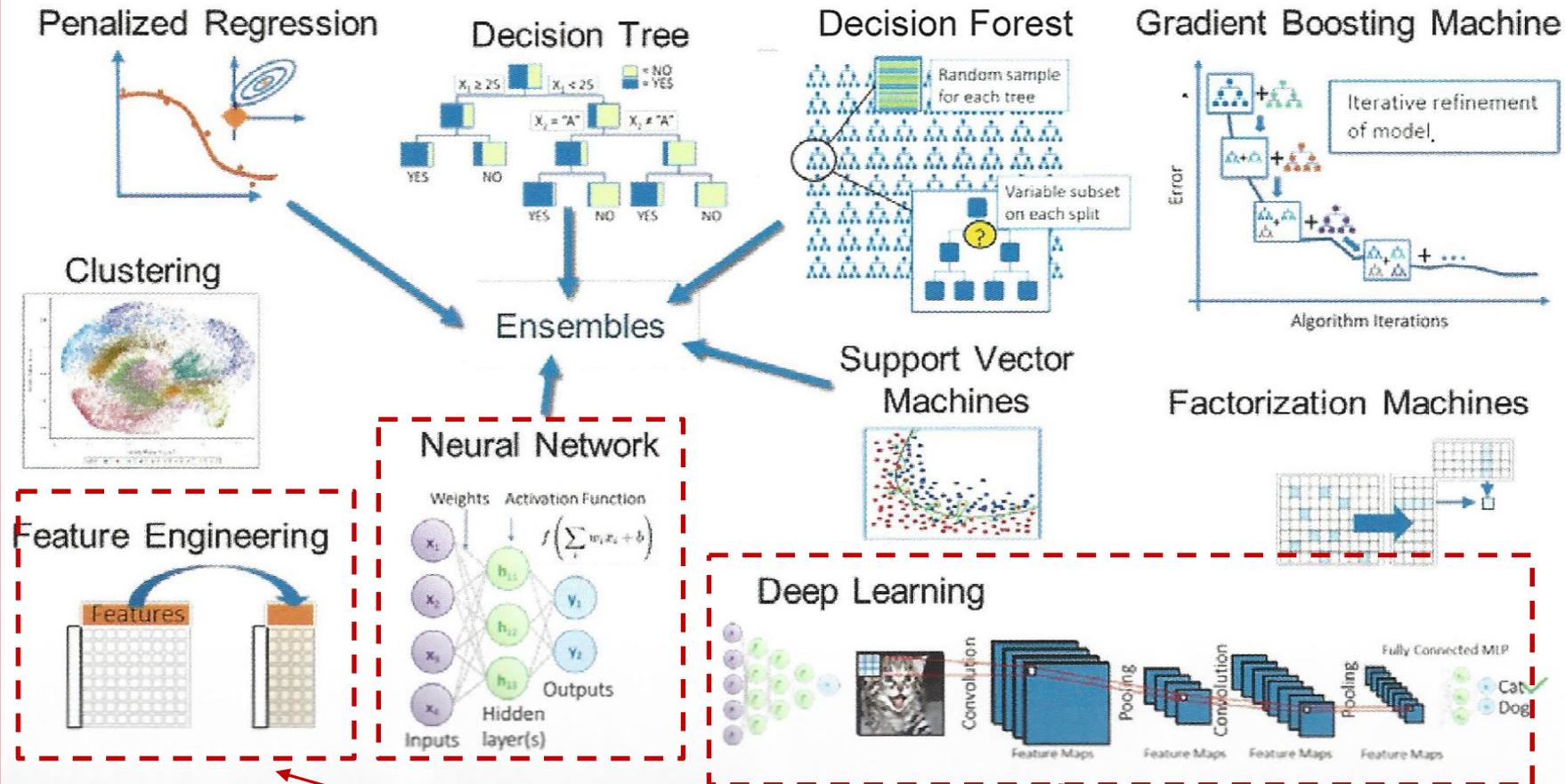
### Apprentissage statistique

**Data Mining**

<b>Supervisée</b>	<b>Non supervisée</b>	<b>Semi-supervisée</b>
<b>Régression</b> <b>Arbres de décision (CRT)</b> <b>Réseau Neurones</b> <b>Random Forest</b>	<b>classification hier.</b> <b>Composantes principales (PCA)</b> <b>Factorisation</b> <b>Support Vector Machine (SVM)</b> <b>Bayes Network</b> <b>Processus Gaussien</b>	<b>classification &amp; prédiction</b> <b>EM</b> <b>Feature engineering</b> <b>Auto encoder</b>

# Algorithmes du ML

## Machine Learning Algorithms



Alt+B



IA : Intelligence Artificielle

# ML Avec Statistica

The screenshot shows the 'Data Miner Recipes' menu in Statistica. On the left, several terms are listed with red dashed arrows pointing to specific menu items:

- ARBRES CLASSIFICATION** points to a group of items including 'General Classification/Regression Tree Models', 'General CHAID Models', 'Interactive Trees (C&RT, CHAID)', and 'Boosted Tree Classifiers and Regression'.
- Random Forests** points to 'Random Forests for Regression and Classification'.
- GAM** points to 'Generalized Additive Models'.
- MARS** points to 'MARSplines (Multivariate Adaptive Regression Splines)'.
- ANN : Réseaux Neurones** points to 'Automated Neural Networks'.
- SVM : Support Vector Machines** points to 'Machine Learning (Bayesian, Support Vectors, K-Nearest)'.

The menu items themselves are:

- Data Miner Recipes
- General Classification/Regression Tree Models
- General CHAID Models
- Interactive Trees (C&RT, CHAID)
- Boosted Tree Classifiers and Regression
- Random Forests for Regression and Classification
- Generalized Additive Models
- MARSplines (Multivariate Adaptive Regression Splines)
- Cluster Analysis (Generalized EM, k-Means & Tree)
- Automated Neural Networks
- Machine Learning (Bayesian, Support Vectors, K-Nearest)
- Independent Components Analysis
- Text & Document Mining
- Web Crawling, Document Retrieval
- Association Rules
- Sequence, Association, and Link Analysis
- Rapid Deployment of Predictive Models (PMML)
- Model Converter
- Goodness of Fit, Classification, Prediction
- Feature Selection
- Optimal Binning for Predictive Data Mining
- Weight of Evidence
- Stepwise Model Builder
- Interactive Drill Down
- Process Optimization

réseau neurones  
 Fondement de IA = Intelligence Artificielle = Intelligence Numérique = IN

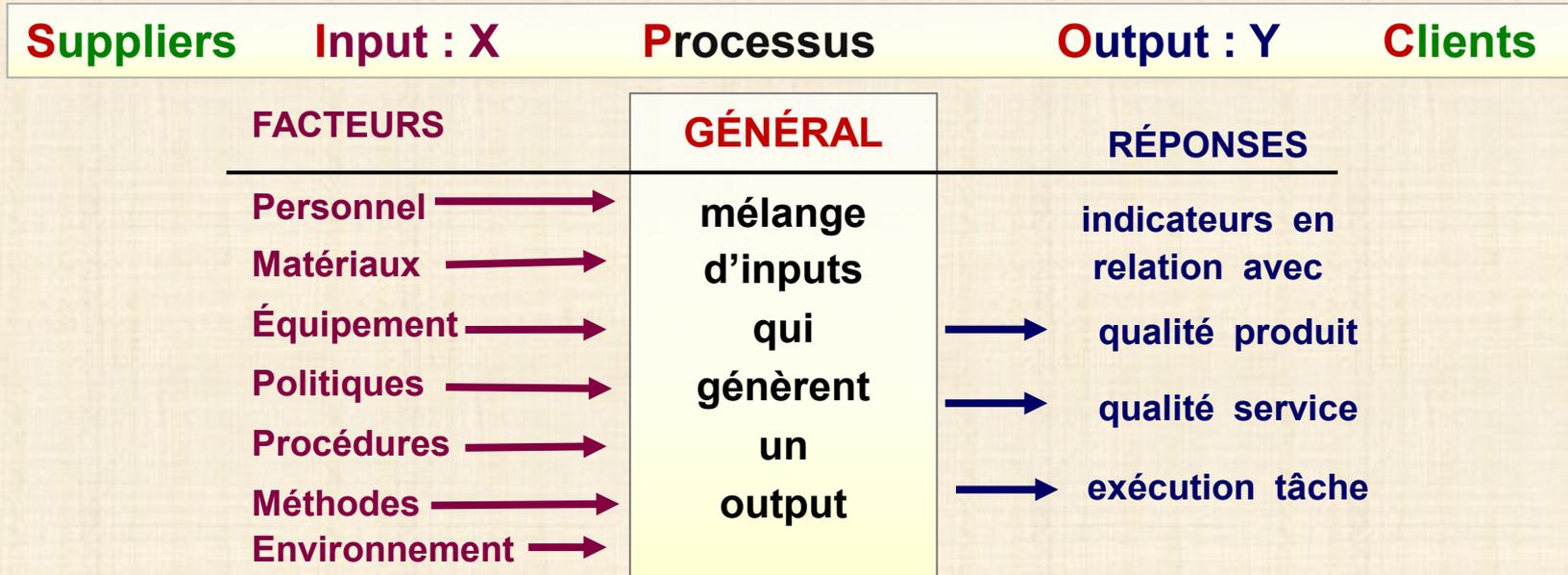
## DIFFÉRENCES de TERMINOLOGIE

### STATISTIQUE

### INGÉNIERIE / INFORMATIQUE

stat / math .....	informatique / computer science
<b>analyse statistique .....</b>	<b>machine learning (ML)</b>
régression / classification .....	apprentissage supervisé
<b>clustering / estimation densité ...</b>	<b>apprentissage non supervisé</b>
modèles .....	réseaux, graphiques
<b>tests / résidus .....</b>	<b>généralisation</b>
paramètres .....	poids
<b>variable input .....</b>	<b>features , classe</b>
variable output / réponse .....	target, label, features
<b>observation .....</b>	<b>instance, cas, exemple</b>
méthodes .....	algorithmes
<b>inférence = oui .....</b>	<b>inférence = non</b>
subvention = 20 000 \$ .....	subvention = 1 000 000 \$

# PROCESSUS / SYSTÈME) : S I P O C



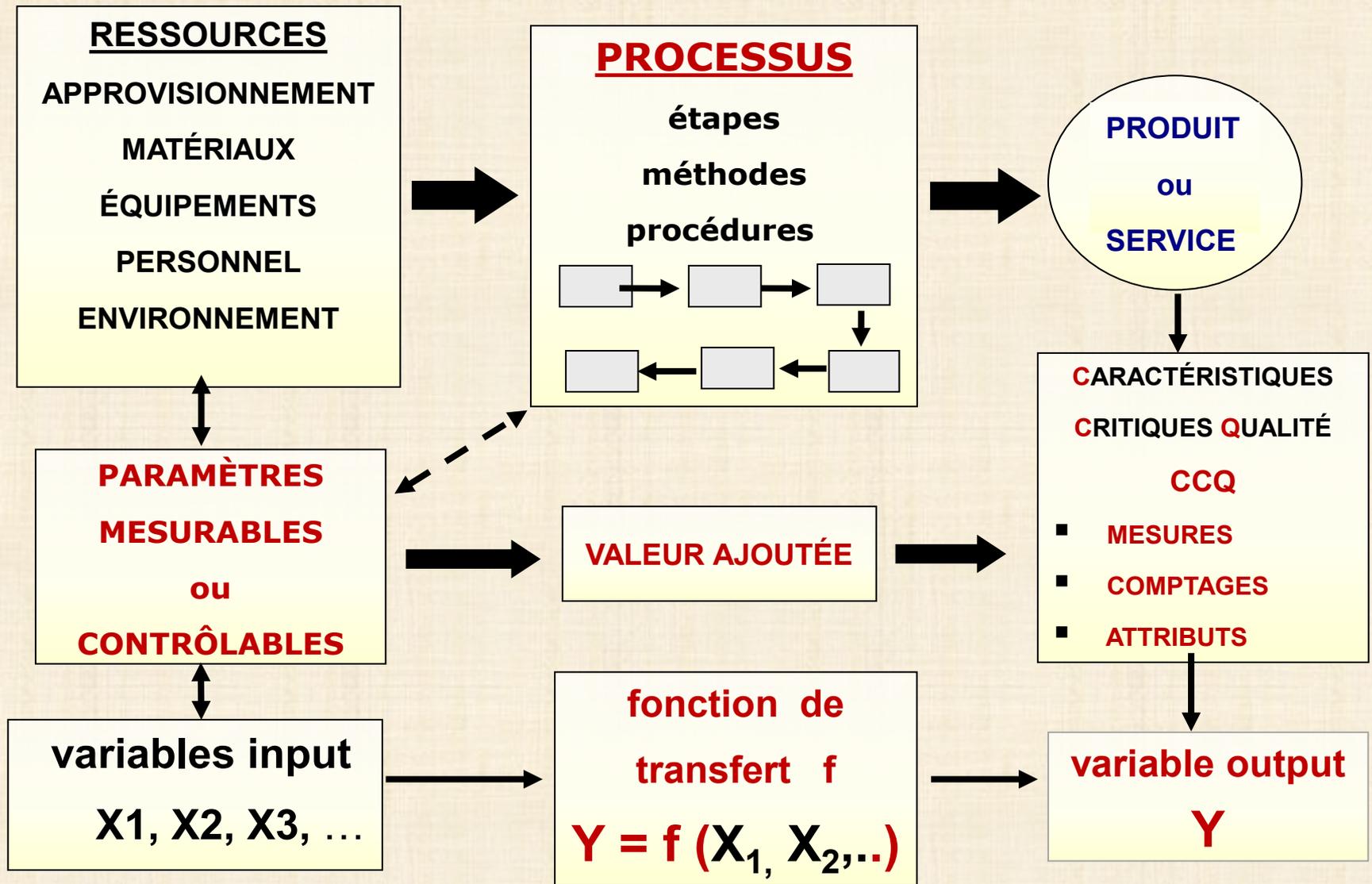
## exemples en intelligence artificielle (IA)

### PROCESSUS / SYSTÈME

- DESIGN (CONCEPTION)
- FABRICATION
- MESURAGE
- TRANSACTIONNEL
- ADMINISTRATIF

INPUT A	RESPONSE B	APPLICATION
Picture	Are there human faces? (0 or 1)	Photo tagging
Loan application	Will they repay the loan? (0 or 1)	Loan approvals
Ad plus user information	Will user click on ad? (0 or 1)	Targeted online ads
Audio clip	Transcript of audio clip	Speech recognition
English sentence	French sentence	Language translation
Sensors from hard disk, plane engine, etc.	Is it about to fail?	Preventive maintenance
Car camera and other sensors	Position of other cars	Self-driving cars

# PROCESSUS / SYSTÈME



# Type d'études statistiques

**actif**

rôle  
statisticien  
ingénieur

**passif**

MTH8301

Expériences planifiées  
traitements appliqués aux  
**unités expérimentales**  
selon un protocole (design)

structure traitements

design expérimental :  
**randomisation, blocage,**  
**répétitions**

biostatistique,  
pharmaceutique,  
sciences physiques,  
sciences exactes,  
expériences avec  
sujets humains /  
animaux .....  
(small data)

Sondages, enquêtes,  
recensements

=

**études énumératives**  
plan d'échantillonnage  
des **unités statistiques**  
pas de traitements  
appliqués aux unités

**sciences humaines,**  
**sciences sociales,**  
.....

MTH8302

Études observationnelles  
données collectées au  
fil du temps / temps réel  
unités statistiques

=

**instants d'observations**  
peu / pas de  
planification statistique

**banques de données,**  
**mégadonnées**  
(big data)

# Type d'étude Statistique

CARACTÉRISTIQUE	OBSERVATIONNELLE (mode passif)	EXPÉRIMENTALE (mode actif)
provenance des données	- historiques - suivi de processus dans des conditions normales d'opération; -le processus n'est pas manipulé (volontairement perturbé);	on fait varier le processus sous différentes conditions (variables) dans le but d'obtenir des données
quantité de données	-généralement abondantes; -on peut obtenir des observations additionnelles	fixe et limitée
qualité de données	peut présenter des difficultés : changements non documentés, données manquantes etc.	excellente
coût	généralement faible	généralement élevé
but	modélisation et exploration	détecter des changements
hypothèse sous-jacente	homogénéité des données (*)	hétérogénéité causée par les perturbations induites
méthodes d'analyse	- carte données individuelles et étendues mobiles XmR; - carte Xbar&R ou Xbar&S afin de vérifier l'homogénéité des données  - méthodes de Data Mining	- analyse de la variance - analyse de régression - autres méthodes  - cartes XmR, Xbar&R,...

## Concepts

Facteurs  
primaires  
secondaires  
blocs

Design plan

Protocole  
expérimental

Unités statistiques

Randomisation

Répétition

.....

- \* L'homogénéité des données est fondamentale lors de leur l'analyse.  
Cette question est clarifiée dans l'article suivant :  
Wheeler, Donald J. (2009) *The four Questions of Data Analysis*

<http://www.qualitydigest.com/inside/quality-insider-column/four-questions-data-analysis.html>

# Planification étude statistique

## Identification des VARIABLES

**Nature:** continue - catégorique

**Rôle:** explicatives (X = input) - à expliquer (Y = output = réponse)

Liste des X complète? p = nombre OK?

Mesure de Y - processus de mesure / erreur? justesse?

## STRUCTURE et le PLAN de collecte des données

expérience planifiée - quel plan statistique ?

- combien de données ? n ?

données observées sans plan expérimental – qualité ?

## Terme d'erreur expérimentale - distribution normale? Importance ?

*préoccupation obsessionnelle !*

Forme de f - connue – linéaire / non linéaire (cas plutôt rare)

- inconnue - quelle approximation ? – polynomiale ?

- techniques de sélection des variables pour modéliser

- qualité du modèle ajusté ? Critères ?

Ajustement du modèle - analyse de sensibilité des X

Évaluation de qualité du modèle - analyse des résidus

## ÉTAPES ÉTUDE STATISTIQUE CLASSIQUE

- |                   |   |
|-------------------|---|
| 1. Identification | processus / problème / variables                        |
| 2. Observation    | plan collecte des données                               |
| 3. Spécification  | modèle pour analyse                                     |
| 4. Estimation     | paramètres du modèle                                    |
| 5. Décomposition  | variabilité (ANOVA), test F                             |
| 6. Validation     | tests, ratio-F, analyse résidus                         |
| 7. Exploitation   | optimisation / résolution problème<br>décision / action |

## ÉTAPES

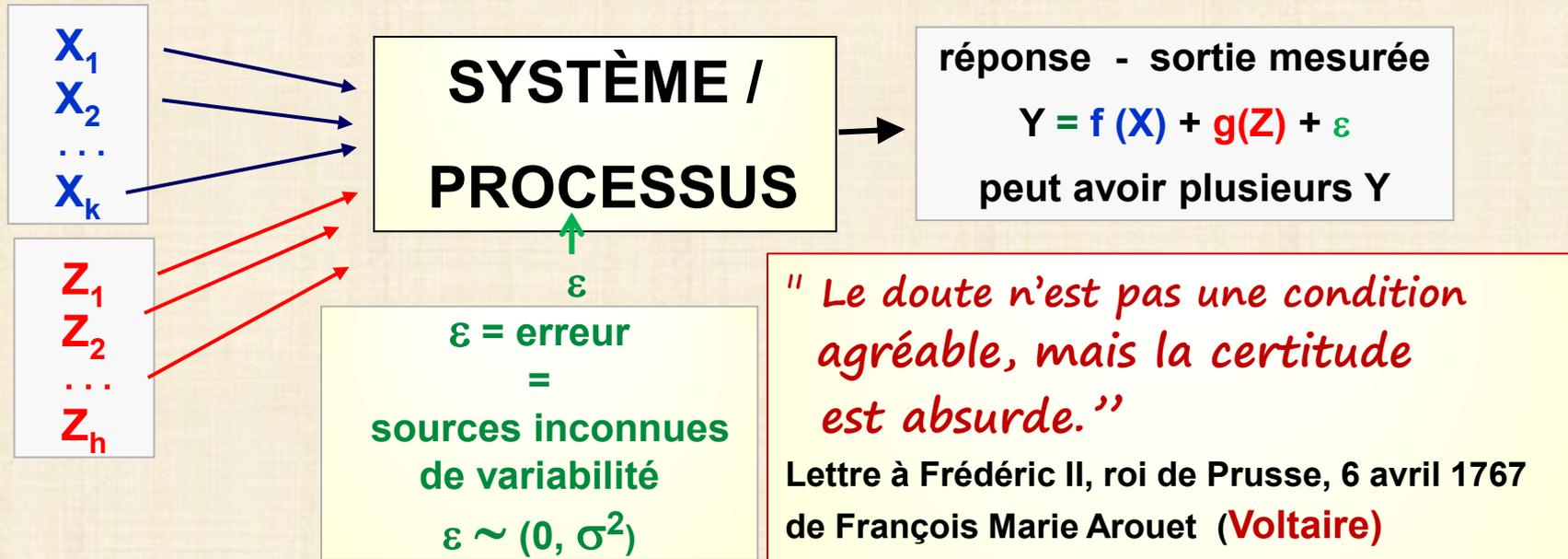
## ANALYSE

## STATISTIQUE

## CLASSIQUE

1. Spécification d'un modèle statistique
2. Estimation des paramètres du modèle
3. Décomposition de la variabilité : ANOVA
4. Tests d'hypothèses sur les paramètres
5. Analyse diagnostique des résidus
  - vérification des hypothèses de base
  - identification d'observations influentes
  - transformation Box-Cox de réponse Y
6. Si nécessaire : itération des étapes 1 à 5
7. Optimisation de la réponse (s'il y a lieu)
8. Graphiques de la réponse

# ANALYSE STATISTIQUE CLASSIQUE : comprendre / prédire / optimiser



**Aucune restriction concernant la nature des X et Y**

**X: catégorique, entière, continue, contrôlées, aléatoires**

**Y: binaire(0, 1), multinomiale, entière, continue**

**Algorithmes du Machine Learning**

**linéaire, linéaire généralisé, arbres, réseaux neurones, PLS, etc. ..**

**p = nombre de variables    n = nombre d'observations**

**on peut avoir plus de variables que d'observations !**

# Étude des relations entrées-sorties : Analyse supervisée



COMPARAISON	Modèle de régression	Modèle d'analyse de variance
<i>But</i>	développement d'un modèle prédictif de la réponse	identification des effets significatifs sur la réponse
<i>Source des données</i>	historiques / observationnelles	résultat d'un plan d'expérimentation
<i>Nombre d'observations</i>	grand: centaines, milliers...	petit : dizaines
<i>Variables d'entrée</i>	continues / quantitatives	catégoriques / qualitatives
<i>Nombre de valeurs distinctes des variables d'entrée</i>	autant qu'il y a d'observations	nombre restreint généralement moins de 10
<i>Utilisation des variables indicatrices (0-1)</i>	occasionnelle	employées systématiquement pour représenter les modalités
<i>Emphase et difficulté</i>	forme et la qualité du modèle	spécification du modèle reflétant la complexité du plan expérimental
<i>Structure des données</i>	simple	complexe

# approche processus

X : entrées → **PROCESSUS** → Y : sorties / réponse

Quelles sont les variables **CRITIQUES X** affectant les variables de réponse Y ?

**IDENTIFICATION**

Quelle est la **FONCTION de TRANSFERT f** entre les variables critiques X et la variable de réponse variable Y ?

**MODÉLISATION**

**f**  
X → Y = f (X)

Comment **CONTRÔLER** la réponse Y à un niveau désiré  
**nominal - maximum - minimum**  
en fixant les variables X à des niveaux spécifiques ?

**CONTRÔLE**  
et  
**OPTIMISATION**

## VARIABLES

## RÔLE

**Y** : réponse , output, à expliquer  
peut être: **binaire (0, 1), multinomiale, continue, multidimensionnelle**

**X, Z** : explicatives, régresseurs, input  
inter / intra relativement aux unités expérimentales

## NATURE

**X (fixées)** : continues, **catégoriques (facteurs)**

**Z (aléatoires)** : continues, catégoriques

## INFLUENCE

**X** : affecte la centralité (moyenne) de Y : **effets fixes**

**Z** : affecte la dispersion (variance) de Y : **effets aléatoires**

## M O D È L E S

**effets fixes | effets aléatoires | mixte = effets fixes + effets aléatoires**

**général**  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots) + g(Z_1, Z_2, \dots, Z_h; \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots) + \varepsilon (0, \sigma^2)$

**modèle mixte**  $Y = X\beta + Zu + \varepsilon$   $u \sim N(0, G)$   $\varepsilon \sim N(0, R)$   $Cov[u, \varepsilon] = 0$

Y vector of responses

X known design matrix of the fixed effects

$\beta$  unknown vector of fixed effects parameters to be estimated

Z known design matrix of the random effects

if  $Z = 0$  **modèle effets fixes**

u unknown vector of random effects

$\varepsilon$  unobserved vector of random errors

**valeurs individuelles**  $Y_i = X_i\beta + Z_i u_i + \varepsilon_i$   $i = 1, \dots, N$

$Y_i$   $n_i \times 1$  vector of responses subject i

$X_i$   $n_i \times p$  design matrix of fixed effects subject i (p is the number of columns in X)

$\beta$   $p \times 1$  vector of regression parameters

$Z_i$   $n_i \times q$  design matrix of the random effects subject i

$u_i$   $q \times 1$  vector of random effects for subject i which has means of zero and covariance matrix  $G_{sub}$

$\varepsilon_i$   $n_i \times 1$  vector of errors subject i with zero mean and covariance  $R_i$

$n_i$  number of repeated measurements subject i

N number subjects

$e_i$  vector of residuals for subject i ( $e_i = y_i - X_i\beta$ )

# VARIABLES et MODÈLE

## VARIABLES

**Nature:** continue - catégorique

**Rôle:** explicatives (X = input) - à expliquer (Y = output = réponse)

Liste des X complète? k = nombre OK?

Mesure de Y - processus de mesure / erreur? justesse?

## STRUCTURE et le PLAN de collecte des données

expérience planifiée - quel plan statistique?

- combien de données? n?

données observées sans plan expérimental – qualité?

## Terme d'erreur expérimentale - distribution normale? importance?

importance obsessive sur la normalité

Forme de f - connue – linéaire / non linéaire (cas plutôt rare)

- inconnue - quelle approximation? – polynomiale?

- techniques de sélection des variables pour modéliser

- qualité du modèle ajusté? critères?

Ajustement du modèle - analyse de sensibilité des X

Évaluation de qualité du modèle - analyse des résidus

- validation croisée

# Classification des modèles statistiques

**Modèle général**  $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_k; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) + \varepsilon \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (1)$

**Modèle LINÉAIRE dans les  $\beta$  si**

$$\varphi(X_1, X_2, \dots, X_k; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) = \sum \beta_j f_j(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad (2)$$

$$f_j(X_1, X_2, \dots, X_k) = U_j \text{ ne dépend pas de } \underline{\text{paramètre inconnu}} \quad (3)$$

$$\text{alors} \quad Y = \sum \beta_j U_j + \varepsilon \quad (4)$$

**Modèle sans variable explicative:**  $Y = \beta_0 + \varepsilon$

**Modèle de régression par l'origine:**  $Y = \beta_1 X + \varepsilon$

**Modèle de régression linéaire simple:**  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$

**Modèle de régression linéaire multiple:**  $k \geq 2$  ou plus variables explicatives

**Modèles intrinsèquement linéaires:** linéaires après transformations sur  $X$  et ou  $Y$

exemple:  $Y = \beta_0 \exp(\beta_1 X + \varepsilon) \longrightarrow Y^* = \ln(Y) = \beta_0' + \beta_1 X + \varepsilon$

**Modèles intrinsèquement non linéaires:** équations (2) et (3) non satisfaites et aucune transformation sur  $X$  ou  $Y$  ne permet de se ramener à ce cas  
exemple:  $Y = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 X) + \varepsilon$

**Modèles linéaires généralisés (GLZ)**  $g(Y) = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_k; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p) + \varepsilon$

**Modèles d'analyse de la variance** présence de variables catégoriques

# ALGORITHMES (méthodes) (Machine Learning)



## SUPERVISÉES : X et Y

- Régression multiple ordinaire
- **Régression non linéaire**
- Régression linéaire généralisée
- **Régression avec contraintes:**  
**Ridge, Lasso**
- Régression splines (MARS)
- **Régression généralisée additive**
- Régression réseaux neuronaux
- **Flux Tenseur**
- Arbres de classification (CRT)
- **Forêts Aléatoires**
- Méthodes gradient non-convexe
- **Algorithmes génétiques**
- Méthodes ensemblistes
- **Régression boosted**
- XGBoost
- ...

## NON SUPERVISÉES : X

- Réduction dimension (PCA)
- **Clustering**
- K-Means
- **K-Neighbour**
- Classification hiérarchique
- **Réseaux Baysiens**
- Modèle de Markov
- ....

## SÉRIES CHRONOLOGIQUES

### Deep Learning

- = Apprentissage profond
- = réseaux neurones multicouches
- = intelligence artificielle (AI)

# modèles statistiques classiques

## logiciel Statistica

### GLM : General Linear Model

General Linear Models (GLM): Étudiants MTH2302D-hiver 200

Quick | OK | Cancel | Options | Open Data | SELECT CASES | W |

Type of analysis:

- One-way ANOVA
- Main effects ANOVA
- Factorial ANOVA
- Nested design ANOVA
- Huge balanced ANOVA
- Repeated measures ANOVA
- Simple regression
- Multiple regression
- Factorial regression
- Polynomial regression
- Response surface regression
- Mixture surface regression
- Analysis of covariance
- Separate-slopes model
- Homogeneity-of-slopes model
- General linear models

Specification method:

- Quick specs dialog
- Analysis Wizard
- Analysis syntax editor

Use General linear models to analyze designs with any combination of independent factors and predicted covariables. Multiple models can be specified for any type of analysis. Both univariate and multivariate results are available when multiple dependent variables are specified.

For related ANOVA and regression methods, also refer to the Experimental Design and the Variance Components and Mixed-Model ANOVA/ANCOVA modules.

**modèles linéaires**

### GLZ : Generalized Linear/Nonlinear Model

Generalized Linear/Nonlinear Models: Étudiants MTH2302D-

Quick | Advanced | OK | Cancel | Options | Open Data | SELECT CASES | W |

Type of analysis:

- One-way ANOVA
- Main effects ANOVA
- Factorial ANOVA
- Nested design ANOVA
- Simple regression
- Multiple regression
- Homogeneity-of-slopes model
- General custom designs

Specification method:

- Quick specs dialog
- Analysis Wizard
- Analysis syntax editor

Distribution:

- Normal
- Poisson
- Gamma
- Binomial
- Multinomial
- Ordinal multinomial
- Inverse normal

Link functions:

- Log
- Power
- Identity

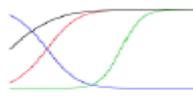
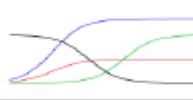
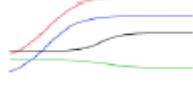
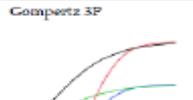
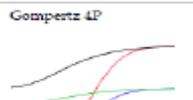
DF =  W-1  N-1

Power parameter: Param: 1

**modèles linéaires généralisés**

# Exemples de modèles de régression non-linéaires

MODÈLE	FORMULE Y =	
Polynômes	$\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x^i$	
Logistique 2P	$\frac{1}{1 + \text{Exp}(-a(x-b))}$	a taux croissance b point d'inflexion
Logistique 3P	$\frac{c}{1 + \text{Exp}(-a(x-b))}$	a taux croissance b point d'inflexion c asymptote
Logistique 4P	$c + \frac{d-c}{1 + \text{Exp}(-a(x-b))}$	a taux croissance b point d'inflexion c asymptote inférieure d asymptote supérieure
Logistique 5P	$c + \frac{d-c}{(1 + \text{Exp}(-a(x-b)))^f}$	a taux croissance b point d'inflexion c asymptote inférieure d asymptote supérieure f puissance
Gompertz 3P	$a \text{Exp}(-\text{Exp}(-b(x-c)))$	a asymptote b taux croissance c point d'inflexion
Gompertz 4P	$a + (b-a) \text{Exp}(-\text{Exp}(-c(x-d)))$	a asymptote inférieure b asymptote supérieure c taux croissance d point d'inflexion
Exponentielle 2P	$a \text{Exp}(bx)$	a échelle b taux croissance
Exponentielle 3P	$a + b \text{Exp}(cx)$	a asymptote b échelle c taux croissance
Bi-Exponentielle 4P	$a \text{Exp}(-bx) + c \text{Exp}(-dx)$	a échelle 1 b taux décroissance 1 c échelle 2 d taux décroissance 2
Bi-Exponentielle 5P	$a + b \text{Exp}(-cx) + d \text{Exp}(-fx)$	a asymptote b échelle 1 c taux décroissance 1 d échelle 2 f taux décroissance 2
Croissance mécanique	$a(1 - b \text{Exp}(-cx))$	a asymptote b échelle c taux croissance
Sommet Gauss	$a \text{Exp}\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-b}{c}\right)^2\right)$	a sommet b point critique c taux croissance
Sommet Lorentz (Cauchy)	$\frac{ab^2}{(x-c)^2 + b^2}$	a sommet b taux croissance c point critique
dose orale 1 compartiment	$\frac{abc}{c-b} (\text{Exp}(-bx) - \text{Exp}(-cx))$	a aire courbe b taux élimination c taux absorption
dose Bolus 2 compartiments	$\frac{e}{\alpha - \beta} ((\alpha - b) \text{Exp}(-\alpha x) - (\beta - b) \text{Exp}(-\beta x))$ $\alpha = \frac{1}{2}(b+c+d + \sqrt{(b+c+d)^2 - 4bd})$ $\beta = \frac{1}{2}(b+c+d - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4bd})$	a concentration initiale b taux transfert in c taux transfert out d taux élimination
Michaelis-Menten	$\frac{ax}{b+x}$	a taux max réaction b infinie adverse

	<p>Polynomials</p> $\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x^i$ <p>where <math>k</math> is the order of the <math>p</math>, can also be fit using the Fit 2 platforms.</p>
	<p>Logistic 2P</p> $\frac{1}{1 + \text{Exp}(-a(x-b))}$ <p>a = Growth Rate b = Inflection Point</p>
	<p>Logistic 3P</p> $\frac{c}{1 + \text{Exp}(-a(x-b))}$ <p>a = Growth Rate b = Inflection Point c = Asymptote</p>
	<p>Logistic 4P</p> $c + \frac{d-c}{1 + \text{Exp}(-a(x-b))}$ <p>a = Growth Rate b = Inflection Point c = Lower Asymptote d = Upper Asymptote</p>
	<p>Logistic 5P</p> $c + \frac{d-c}{(1 + \text{Exp}(-a(x-b)))^f}$ <p>a = Growth Rate b = Inflection Point c = Asymptote 1 d = Asymptote 2 f = Power</p>
	<p>Gompertz 3P</p> $a \text{Exp}(-\text{Exp}(-b(x-c)))$ <p>a = Asymptote b = Growth Rate c = Inflection Point</p>
	<p>Gompertz 4P</p> $a + (b-a) \text{Exp}(-\text{Exp}(-c(x-d)))$ <p>a = Lower Asymptote b = Upper Asymptote c = Growth Rate d = Inflection Point</p>
	<p>Exponential 2P</p> $a \text{Exp}(bx)$ <p>a = Scale b = Growth Rate</p>

# mesures répétées

# ÉTUDES EXPÉRIMENTALES

7	8	9	10	11	12	13	14	15
CHOLESTEROL	patient	treatment	Y_AprilAM	Y_AprilPM	Y_MayAM	Y_MayPM	Y_JuneAM	Y_JunePM
Cholesterol	p1	A	278,0	280,0	204,0	208,0	171,3	175,0
Cholesterol	p2	A	278,0	281,0	195,2	199,0	185,0	189,0
Cholesterol	p3	A	276,0	280,0	213,4	219,0	179,0	181,0
Cholesterol	p4	A	276,0	281,0	201,3	211,0	183,0	187,9
Cholesterol	p5	A	279,0	285,0	188,0	192,0	170,3	174,0
Cholesterol	p6	B	266,0	270,0	220,0	224,0	180,0	184,0
Cholesterol	p7	B	280,0	284,0	228,0	232,0	200,0	204,0
Cholesterol	p8	B	284,0	288,0	233,0	237,0		
Cholesterol	p9	B	273,0	277,0	215,0	219,0		
Cholesterol	p10	B	281,0	285,0	237,0	241,0		
Cholesterol	p11	Control	278,0	282,0	273,0	277,0		
Cholesterol	p12	Control	273,0	277,0	274,0	278,0		
Cholesterol	p13	Control	282,0	285,0	276,0	281,0		
Cholesterol	p14	Control	274,0	277,3	284,5	289,0		
Cholesterol	p15	Control	277,0	280,6	279,1	283,0		
Cholesterol	p16	Placebo	279,0	283,0	278,0	284,0		
Cholesterol	p17	Placebo	277,0	279,0	291,0	291,0		

## plan central-composite 3 facteurs X - 4 réponses Y

43	44	45	46	47	48	49	50	51
TIRETREAD	tire	X_Silica	X_Silane	X_Sulfur	Y_abrasion	Y_modulus	Y_elong	Y_hardness
tiretread	t1	0,70	40,00	2,80	102	900	470	67,5
tiretread	t2	1,70	40,00	1,80	120	860	410	65,0
tiretread	t3	0,70	60,00	1,80	117	800	570	77,5
tiretread	t4	1,70	60,00	2,80	198	2294	240	74,5
tiretread	t5	0,70	40,00	1,80	103	490	640	62,5
tiretread	t6	1,70	40,00	2,80	132	1289	270	67,0
tiretread	t7	0,70	60,00	2,80	132	1270	410	78,0
tiretread	t8	1,70	60,00	1,80	139	1090	380	70,0
	t9	0,38	50,00	2,30	102	770	590	76,0
	t10	2,02	50,00	2,30	154	1690	260	70,0
	t11	1,20	33,67	2,30	96	700	520	63,0
	t12	1,20	66,33	2,30	163	1540	380	75,0
	t13	1,20	50,00	1,48	116	2184	520	65,0
	t14	1,20	50,00	3,12	153	1784	290	71,0
	t15	1,20	50,00	2,30	133	1300	380	70,0
	t16	1,20	50,00	2,30	133	1300	380	68,5
	t17	1,20	50,00	2,30	133	1300	380	68,5
	t18	1,20	50,00	2,30	142	1090	430	68,0
	t19	1,20	50,00	2,30	145	1260	390	69,0
	t20	1,20	50,00	2,30	142	1344	390	70,0

S. Bisgaard - J. Q. Tech. vol 32 (2000) no 1 p. 39-56  
 Box, Bisgaard, Quality Engineering, vol 8 (1996) no 4, p. 705-708  
 Les facteurs A B C D définissent les WholePlot - E est le facteur SplitPlot

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	StdOrder	RunOrder	bloc	WholePlot	A_Pressure	B_Power	C_GasFlow	D_GasType	E_PaperType	Y_WetAngle
1	5	1	1	1	-1	-1	1	Oxygen	E1	37,6
2	21	2	1	1	-1	-1	1	Oxygen	E2	43,5
3	2	3	1	2	1	-1	-1	Oxygen	E1	41,2
4	18	4	1	2	1	-1	-1	Oxygen	E2	38,2
5	10	5	1	3	1	-1	-1	SiCl4	E1	56,8
6	26	6	1	3	1	-1	-1	SiCl4	E2	56,2
7	14	7	1	4	1	-1	1	SiCl4	E1	47,5
8	30	8	1	4	1	-1	1	SiCl4	E2	43,2
9	11	9	1	5	-1	1	-1	SiCl4	E1	25,6
10	27	10	1	5	-1	1	-1	SiCl4	E2	33,0
11	3	11	1	6	-1	1	-1	Oxygen	E1	55,8
12	19	12	1	6	-1	1	-1	Oxygen	E2	62,9
13	13	13	1	7	-1	-1	1	SiCl4	E1	13,3
14	29	14	1	7	-1	-1	1	SiCl4	E2	23,7
15	6	15	1	8	1	-1	1	Oxygen	E1	47,2
16	22	16	1	8	1	-1	1	Oxygen	E2	44,8
17	16	17	1	9	1	1	1			
18	32	18	1	9	1	1	1			
19	9	19	1	10	-1	-1	-1			
20	25	20	1	10	-1	-1	-1			
21	15	21	1	11	-1	1	1			
22	31	22	1	11	-1	1	1			
23	1	23	1	12	-1	-1	-1	Oxygen	E1	48,6
24	17	24	1	12	-1	-1	-1	Oxygen	E2	57,0
25	8	25	1	13	1	1	1	Oxygen	E1	48,7
26	24	26	1	13	1	1	1	Oxygen	E2	44,4
27	7	27	1	14	-1	1	1	Oxygen	E1	47,2
28	23	28	1	14	-1	1	1	Oxygen	E2	54,6
29	4	29	1	15	1	1	-1	Oxygen	E1	53,5
30	20	30	1	15	1	1	-1	Oxygen	E2	51,3
31	12	31	1	16	1	1	-1	SiCl4	E1	41,8
32	28	32	1	16	1	1	-1	SiCl4	E2	37,8

## Expérience en parcelles divisées (SplitPlot) 32 essais

The dataset is related to red and white variants of the Portuguese "Vinho Verde" wine.

1599 red wine 4898 white wine

<http://www.vinhoverde.pt/en/>

Due to privacy and logistic issues, only physicochemical (inputs) and sensory (the output) variables are available.

(e.g. there is no data about grape types, wine brand, wine selling price, etc.).

The inputs include objective tests (e.g. pH values) and the output is based on sensory data (median of at least 4 experts).

Each expert graded the wine quality between 0 (very bad) and 10 (excellent).

Data mining methods were applied to model the dataset under a regression approach.

#### Variables

input variables X (based on physicochemical tests)

1 - fixed acidity 2 - volatile acidity 3 - citric acid 4 residual sugar

5 - chlorides 6 - free sulfur dioxide 7 - total sulfur dioxide

8 - density 9 - pH 10 - sulphates 11 - alcohol

Output variable Y (based on sensory data) Y = QUALITY : score between 0 (=very bad) and 10 (=excellent)

## ÉTUDE OBSERVATIONNELLE

### Vins du Portugal

**n=6496 p=13**

	1 ID6497	2 QUALITY	3 color	4 fixed acidity	5 volatile acidity	6 citric acid	7 residual sugar	8 chlorides	9 free sulfur dioxide	10 total sulfur dioxide	11 density	12 pH	13 sulphates	14 alcohol
1	1	5	red	7,4	0,70	0,00	1,90	0,076	11	34	0,9978	3,51	0,56	9,4
2	2	5	red	7,8	0,88	0,00	2,60	0,098	25	67	0,9968	3,20	0,68	9,8
3	3	5	red	7,8	0,76	0,04	2,30	0,092	15	54	0,9970	3,26	0,65	9,8
4	4	6	red	11,2	0,28	0,56	1,90	0,075	17	60	0,9980	3,16	0,58	9,8
5	5	5	red	7,4	0,70	0,00	1,90	0,076	11	34	0,9978	3,51	0,56	9,4
6	6	5	red	7,4	0,66	0,00	1,80	0,075	13	40	0,9978	3,51	0,56	9,4
7	7	5	red	7,9	0,60	0,06	1,60	0,069	15	59	0,9964	3,30	0,46	9,4
8	8	7	red	7,3	0,65	0,00	1,20	0,065	15	21	0,9946	3,39	0,47	10,0
9	9	7	red	7,8	0,58	0,02	2,00	0,073	9	18	0,9968	3,36	0,57	9,5

	1 ID2	2 ID	3 couleur	4 fixed_acidity	5 volatiele_acidity	6 citric_acid	7 residual_sugar	8 chlorides	9 free_sulfur_dioxide	10 total_sulfur_dioxide	11 density	12 pH	13 sulphates	14 alcohol
6475	6475	5684	blanc	6,5	0,33	0,24	14,50	0,048	20,0	96	0,99456	3,06	0,30	11,50
6476	6476	5718	blanc	6,5	0,43	0,31	3,60	0,046	19,0	143	0,99022	3,15	0,34	12,00
6477	6477	5767	blanc	6,3	0,17	0,32	1,00	0,040	39,0	118	0,98886	3,31	0,40	13,10
6478	6478	5795	blanc	7,1	0,45	0,24	2,70	0,040	24,0	87	0,98862	2,94	0,38	13,40
6479	6479	5932	blanc	7,3	0,19	0,27	13,90	0,057	45,0	155	0,99807	2,94	0,41	8,80
6480	6480	5933	blanc	7,3	0,19	0,27	13,90	0,057	45,0	155	0,99807	2,94	0,41	8,80
6481	6481	5934	blanc	7,3	0,19	0,27	13,90	0,057	45,0	155	0,99807	2,94	0,41	8,80
6482	6482	5935	blanc	7,3	0,19	0,27	13,90	0,057	45,0	155	0,99807	2,94	0,41	8,80
6483	6483	5936	blanc	7,3	0,19	0,27	13,90	0,057	45,0	155	0,99807	2,94	0,41	8,80
6484	6484	5937	blanc	7,3	0,19	0,27	13,90	0,057	45,0	155	0,99807	2,94	0,41	8,80
6485	6485	5938	blanc	7,3	0,19	0,27	13,90	0,057	45,0	155	0,99807	2,94	0,41	8,80
6486	6486	5939	blanc	6,8	0,24	0,29	2,00	0,044	15,0	96	0,99232	3,23	0,64	10,40
6487	6487	5940	blanc	7,3	0,19	0,27	13,90	0,057	45,0	155	0,99807	2,94	0,41	8,80
6488	6488	6365	blanc	5,2	0,30	0,34	1,50	0,038	18,0	96	0,98942	3,56	0,48	13,00
6489	6489	6366	blanc	6,4	0,32	0,25	5,00	0,055	28,0	138	0,99171	3,27	0,50	12,40
6490	6490	6386	blanc	4,4	0,32	0,39	4,30	0,030	31,0	127	0,98904	3,46	0,36	12,80
6491	6491	6387	blanc	3,9	0,23	0,40	4,20	0,030	29,0	118	0,98900	3,57	0,36	12,80
6492	6492	6402	blanc	5,8	0,28	0,34	2,20	0,037	24,0	125	0,98986	3,36	0,33	12,80
6493	6493	2374	blanc	9,1	0,27	0,45	10,60	0,035	28,0	124	0,99700	3,20	0,46	10,40
6494	6494	2420	blanc	6,6	0,36	0,29	1,60	0,021	24,0	85	0,98965	3,41	0,61	12,40
6495	6495	2427	blanc	7,4	0,24	0,36	2,00	0,031	27,0	139	0,99055	3,28	0,48	12,50
6496	6496	2476	blanc	6,9	0,36	0,34	4,20	0,018	57,0	119	0,98980	3,28	0,36	12,70

**Financial data of 40 UK companies 1983**

J. Jobson *Applied Multivariate Data Analysis*, vol 1, Regression and Experimental Design 1991, Springer-Verlag

- Y\_RET CAP Return on capital employed
- X1\_WCFTCL Ratio of working capital flow to total current liabilities
- X2\_WCFTDT Ratio of working capital flow to total debt
- X3\_GEARRAT Gearing ratio (debt-equity ratio)
- X4\_LOGSALE Log to base 10 of total sales
- X5\_LOGASST Log to base 10 of total assets
- X6\_NFATAST Ratio of net fixed assets to total assets
- X7\_CAPINT Capital intensity (ratio of total sales to total assets)
- X8\_FATTOT Gross fixed assets to total assets
- X9\_INV TAST Ratio of total inventories to total assets
- X10\_PAYOUT Payout ratio
- X11\_QUIKRAT Quick ratio
- X12\_CURRAT Current ratio

**ÉTUDE OBSERVATIONNELLE:  
données financières  
40 entreprises bourse de  
Londres**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	ordin	Y_RET CAP	WCFTCL	WCFTDT	GEARRAT	LOGSALE	LOGASST	NFATAST	CAPINT	FATTOT	INV TAST	PAYOUT	QUIKRAT	CURRAT
1	1	0,26	0,25	0,25	0,46	4,11	4,30	0,10	0,64	0,12	0,74	0,07	0,18	1,53
2	2	0,57	0,33	0,33	0,00	4,25	4,00	0,12	1,79	0,15	0,27	0,30	1,26	1,73
3	3	0,09	0,50	0,20	0,24	4,44	4,88	0,94	0,36	0,97	0,01	0,57	0,39	0,44
4	4	0,32	0,23	0,21	0,45	4,71	4,44	0,29	1,86	0,52	0,29	0,00	0,69	1,23
5	5	0,17	0,21	0,12	0,91	4,85	4,75	0,26	1,26	0,54	0,33	0,31	0,90	1,76
6	6	0,24	0,37	0,25	0,26	5,61	5,42	0,42	1,54	0,57	6,00	0,15	1,23	1,44
7	7	0,53	0,59	0,40	0,52	4,83	4,30	0,14	3,34	0,21	0,00	0,21	0,83	0,83
8	8	0,26	0,44	0,37	0,24	4,49	4,35	0,40	1,38	1,04	0,36	0,16	0,58	1,45
9	9	0,13	0,21	0,21	0,19	4,13	4,17	0,06	0,91	0,11	0,29	0,39	1,95	2,89
10	10	0,16	0,21	0,18	0,29	4,40	4,17	0,21	1,70	0,40	0,58	0,46	0,56	2,13
11	11	0,06	0,01	0,01	0,85	4,30	4,09	0,23	1,60	0,38	0,34	0,00	0,73	1,31
12	12	0,07	0,70	0,70	0,02	3,62	4,45	0,54	0,15	0,63	0,00	0,00	4,51	4,57
13	13	-0,18	-0,58	-0,32	0,76	4,13	4,35	0,54	0,60	0,84	0,00	0,00	0,47	0,47
14	14	0,12	0,11	0,11	0,39	4,11	3,74	0,41	2,34	0,97	0,49	0,00	0,14	0,85

39	39	0,14	0,39	0,39	0,02	3,99	3,85	0,52	1,38	0,82	0,24	0,78	0,66	1,37
40	40	0,13	0,30	0,20	0,23	4,54	4,37	0,32	1,49	0,46	0,28	0,58	1,47	2,49

## exemple : données observationnelles prix résidences vs caractéristiques

Harrison, D, Rubenfeld, D. (1978) Hedonic Prices and the Demand For Clean Air  
 J. of Environmental Economic and Management, v.5, 81-102  
 Combined information from 10 separate governmental and education sources  
 506 census tracts (CT) in city of Boston of the year 1970  
 But: modéliser la relation entre 12 indicateurs de la qualité de vie (X) et la valeur d'une propriété Y = MV  
 Le fichier de 506 observations est divisé en 2 groupes  
 GROUP = M pour le développement des Modèles (405 observations: 80% des observations)  
 les données M sont surlignées (vert) et constituent un filtre;  
 la modélisation analyse statistique est basée sur ces données (405 obs.)  
 voir *Tools...selections conditions...edit*  
 GROUP = T pour Tester le modèle (101 observations: 20% des observations)  
 pour inclure ce groupe dans une prédiction, éditer le filtre

### INDICATEURS

X1 CRIM = CRIME Rate Per Capita by town  
 X2 NOX = Nitric OXide concentration (parts per 10 million)  
 X3 AGE = Proportion of owner occupied units built prior to 1940  
 X4 DIS = Weighted DIStances to five Boston employment centers  
 X5 RM = Average number of RoOmS per dwelling  
 X6 LSTAT = % of the Lower STATus of the population  
 X7 RAD = Index of accessibility to RADical highways  
 X8 CHAS = CHASrles river dummy variable (1 if census tract bounds the river; 0 otherwise)  
 X9 INDUS = Proportion of non-retail INDUStrial business acres per town  
 X10 TAX = Full value property TAX rate per \$10,000  
 X11 PT = Pupil-Teacher ratio by town  
 RLZ = Proportion of Residential Land Zoned for lots over 25,000 sq.ft.

### RÉPONSE

Y MV = Median Value of owner occupied-homes in \$1000's

15 var X 506 obs

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	CT	CRIM	NOX	AGE	DIS	RM	LSTAT	RAD	CHAS	INDUS	TAX	PT	MV	GROUP	RLZ
1	1	0,00632	0,538	65,2	4,0900	6,575	4,98	1	0	2,31	296	15,3	24,0	M	18,0
2	2	0,02731	0,469	78,9	4,9671	6,421	9,14	2	0	7,07	242	17,8	21,6	T	0,0
3	3	0,02729	0,469	61,1	4,9671	7,185	4,03	2	0	7,07	242	17,8	34,7	M	0,0
4	4	0,03237	0,458	45,8	6,0622	6,998	2,94	3	0	2,18	222	18,7	33,4	M	0,0
5	5	0,06905	0,458	54,2	6,0622	7,147	5,33	3	0	2,18	222	18,7	36,2	M	0,0
6	6	0,02985	0,458	58,7	6,0622	6,430	5,21	3	0	2,18	222	18,7	28,7	M	0,0
7	7	0,08829	0,524	66,6	5,5605	6,012	12,43	5	0	7,87	311	15,2	22,9	T	12,5
8	8	0,14455	0,524	96,1	5,9505	6,172	19,15	5	0	7,87	311	15,2	27,1	M	12,5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	CT	CRIM	NOX	AGE	DIS	RM	LSTAT	RAD	CHAS	INDUS	TAX	PT	MV	GROUP	RLZ
499	499	0,23912	0,585	65,3	2,4091	6,019	12,92	6	0	9,69	391	19,2	21,2	T	0,0
500	500	0,17783	0,585	73,5	2,3999	5,569	15,10	6	0	9,69	391	19,2	17,5	M	0,0
501	501	0,22438	0,585	79,7	2,4982	6,027	14,33	6	0	9,69	391	19,2	16,8	T	0,0
502	502	0,06263	0,573	69,1	2,4786	6,593	9,67	1	0	11,93	273	21,0	22,4	T	0,0
503	503	0,04527	0,573	76,7	2,2875	6,120	9,08	1	0	11,93	273	21,0	20,6	T	0,0
504	504	0,06076	0,573	91,0	2,1675	6,976	5,64	1	0	11,93	273	21,0	23,9	T	0,0
505	505	0,10959	0,573	89,3	2,3889	6,794	6,48	1	0	11,93	273	21,0	22,0	T	0,0
506	506	0,04741	0,573	80,8	2,5050	6,030	7,88	1	0	11,93	273	21,0	11,9	T	0,0

## exemple : données expérimentales suivi de personnes diètes

sujet	Xgroupe	Xsemaine	YpertePoids	YestimeSoi
s1	control	1	4	14
s2	control	1	4	13
s3	control	1	4	17
s4	control	1	3	11
s5	control	1	5	16
s6	control	1	6	17
s7	control	1	6	17
s8	control	1	5	13
s9	control	1	3	14
s10	control	1	3	14
s11	control	1	4	16
s12	control	1	5	15
s13	diet	1	6	12
s14	diet	1	5	13
s15	diet	1	7	17
s16	diet	1	6	16
s17	diet	1	3	16
s18	diet	1	5	13
s19	diet	1	4	12
s20	diet	1	4	12
s21	diet	1	6	17
s22	diet	1	7	19
s23	diet	1	4	15
s24	diet	1	7	16
s25	diet+exer	1	8	16
s26	diet+exer	1	3	19
s27	diet+exer	1	7	15
s28	diet+exer	1	4	16
s29	diet+exer	1	9	13
s30	diet+exer	1	2	16

5 var X 108 obs

s30	diet+exer	3	1	17
s31	diet+exer	3	1	16
s32	diet+exer	3	2	18
s33	diet+exer	3	3	18
s34	diet+exer	3	2	17
s35	diet+exer	3	4	19
s36	diet+exer	3	1	17

## Design classification simple : 1 facteur catégorique A

(1)  $Y_{ik} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, I \text{ (= nombre groupes)} \quad k = 1, 2, \dots, n_i$   
 $Y_{ik}$ : valeur de la variable de réponse Y j-ème essai modalité i du facteur A  
 $\mu$ : effet général - comme  $\beta_0$  dans les modèles de régression  
 $\alpha_i$ : effet différentiel de la modalité i du facteur  $\sum_i \alpha_i = 0$   
 $\varepsilon_{ik}$ : erreur aléatoire distribuée  $N(0, \sigma^2)$

## Design classification double avec 2 facteurs A et B croisés

(2)  $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, \dots, I / j = 1, 2, \dots, J / k = 1, 2, \dots, n_{ij}$   
 $\alpha_i$ : effet principal de A  $\sum \alpha_i = 0$   
 $\beta_j$ : effet principal de B  $\sum \beta_j = 0$   
 $(\alpha\beta)_{ij}$ : effet d'interaction entre A et B  $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$

## Design classification double avec facteur B emboîté dans facteur A

(3)  $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, \dots, I / j = 1, 2, \dots, J / k = 1, 2, \dots, n_{ij}$   
 $\alpha_i$ : effet facteur A et  $\sum \alpha_i = 0$   
 $\beta_{j(i)}$ : effet facteur B et  $\sum \beta_{j(i)} = 0$  pour tout i  
 effet d'interaction A entre A et B n'existe pas

remarque: termes d'erreur  $\varepsilon_{ik} \quad \varepsilon_{ijk} \dots$  sont emboîtés dans la structure la plus fine (cellules) des données  
 on devrait écrire  $\varepsilon_{k(i)}$  eq. (1)  $\varepsilon_{k(ij)}$  eq. (3)

Design d'analyse de covariance : facteur catégorique A + facteur continu X  
pente  $\beta$  égale chaque sous-groupes de A = pas d'interaction entre A et X

$$(4) \quad Y_{ik} = \mu + \alpha_i + \beta (X_{ik} - \bar{X}_{..}) + \varepsilon_{ik} \quad X_{..} = \sum \sum X_{ik}$$
$$i = 1, 2, \dots, l \quad k = 1, 2, \dots, n_i$$

Design d'analyse de covariance : pentes distinctes

pentes  $\beta_i$  distinctes chaque sous-groupes de A = interaction entre A et X

$$(5) \quad Y_{ik} = \mu + \alpha_i + \beta_i (X_{ik} - \bar{X}_{..}) + \varepsilon_{ik}$$

si  $\beta_i = \beta$  modèle (5) devient modèle (4)

Design mesures répétées par tous les sujets sur toutes modalités facteur A

$$(6) \quad Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, s \text{ (nb sujets)} / j = 1, 2, \dots, n_i$$

$\mu$  : effet général  
 $\alpha_i$  : effet aléatoire du sujet  $i$  - indépendantes  $N(0, \sigma_p^2)$   
 $\beta_j$  : effet de la modalité  $j$  du facteur fixe A et  $\sum \tau_j = 0$   
 $\varepsilon_{ij}$  : erreur aléatoire  $N(0, \sigma^2)$   
 $\alpha_i, \varepsilon_{ij}$  indépendantes

remarque : exemple d'un **modèle mixte** - nature différentes des facteurs  
facteur 1 = sujet = nature aléatoire  
facteur 2 = A = nature fixe (modalités contrôlées)

# MODÈLES d'analyse de variance – facteurs catégoriques A, B

## Design Split-Plot (parcelles divisées) : 2 tailles d'unités exp. - 2 termes d'erreur

$$(7) \quad Y_{ijk} = \mu + \underbrace{\alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}}_{\text{plot (parcelle)}} + \underbrace{\gamma_k + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\gamma\beta)_{ijk}}_{\text{subplot (sous parcelle)}} + \varepsilon_{ijk}$$

plot (parcelle) + subplot (sous parcelle) + erreur exp.

$i = 1, 2, \dots, r$  (facteur bloc - répétition)    $j = 1, 2, \dots, I$  (facteur A)    $k = 1, 2, \dots, J$  (facteur B)

$\alpha_i$ : effet facteur bloc - facteur aléatoire distribué  $N(0, \sigma_\alpha^2)$

$\beta_j$ : effet principal facteur A = facteur plot

$(\alpha\beta)_{ij}$ : erreur plot = interaction = bloc x A

$\gamma_k$ : effet principal facteur B = facteur subplot

$(\alpha\gamma)_{ik}$ : interaction = bloc x B

$(\beta\gamma)_{jk}$ : interaction A x B

$(\alpha\gamma\beta)_{ijk}$ : erreur subplot = interaction = bloc x AB

$\varepsilon_{ijk}$ : erreur expérimentale distribution  $N(0, \sigma^2)$

version simplifiée de (7)  $(\alpha\gamma)_{ik}$  et  $(\alpha\gamma\beta)_{ijk}$  négligeables et incorporées avec  $\varepsilon_{ijk}$

$$(8) \quad Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \varepsilon_{ijk}$$