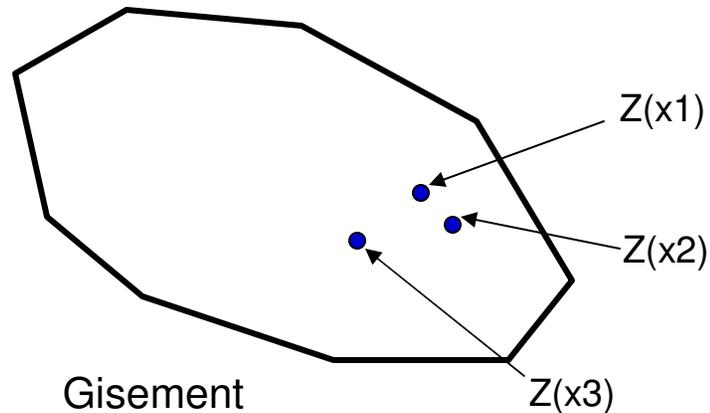

Introduction à la géostatistique

Avril 2006

Point de vue de la géostat



Gisement => infinité de points ou très grand nombre de « quasi-points »
x : emplacement géographique
chaque point -> teneur -> $Z(x)$
chaque teneur -> v. a. (ensemble forme une fonction aléatoire (de x))

Historique de la géostatistique

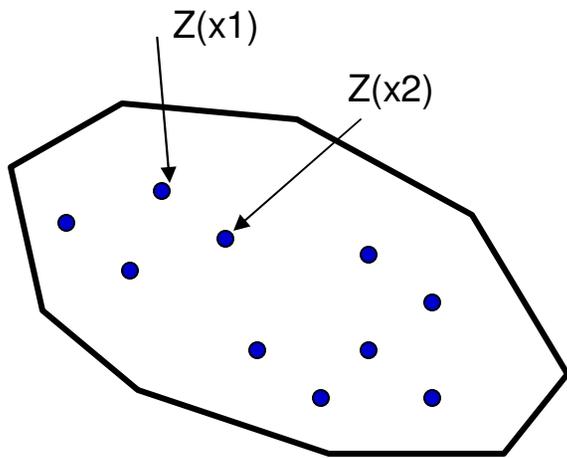
- 1930-1950 Théorie des fonctions aléatoires (Kolmogorov, Wiener)
- 1955 Daniel Krige : approche empirique (régression) pour corriger problèmes de biais conditionnel observé dans les mines
 - Pourquoi moins que prévu ?
 - Comment prévoir et tenir compte de l'effet support ?
- 1960-1970 Matheron (mines), Matern (foresterie), Gandin (météorologie) développent ensemble d'outils => naissance de la géostat linéaire stationnaire. Réponse aux questions de Krige. Matheron donne le nom de « krigeage » à la méthode d'estimation qu'il développe.
- 1970 Polytechnique est la 1ère Université en A. du N. à enseigner la géostat (M. David)

Historique (suite)

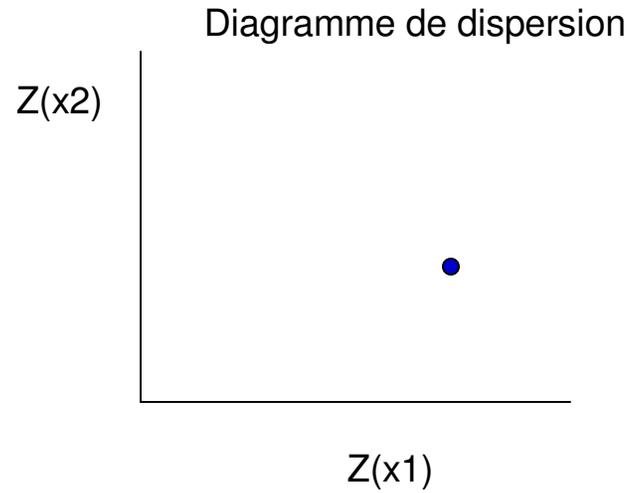
- 1973 géostat linéaire non-stationnaire *
- 1975 géostat non-linéaire
- 1977 1er livre en anglais de géostat (M. David)
- 1980 géostat linéaire multivariable *
- 1985 simulations *

* *Domaines encore actifs de recherche*

- Aujourd'hui, la géostat est appliquée dans une foule de domaines (mines, pétrole, foresterie, agriculture, environnement, hydrogéologie, géotechnique, pêches, biologie, biomédical,...)

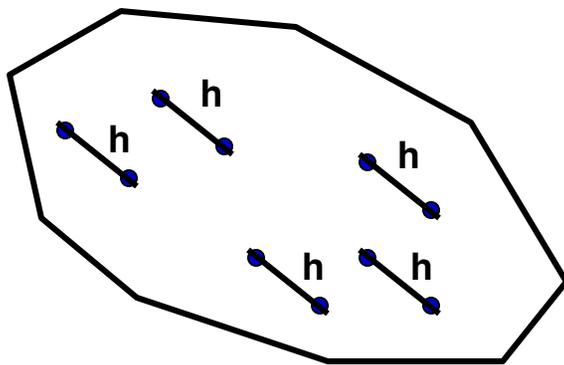


Gisement

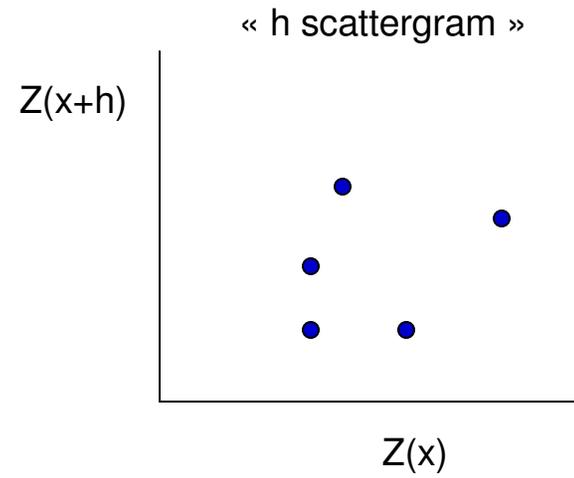


Moyenne ? Variance ? Covariance ?

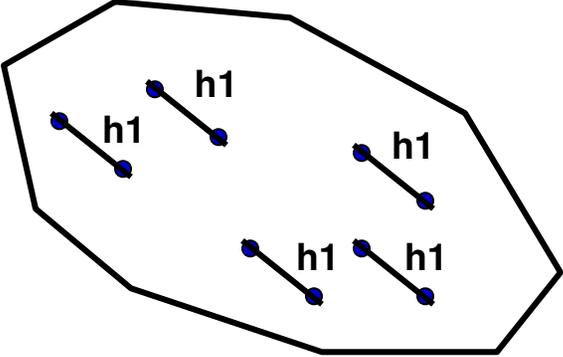
+ hypothèse stationnarité



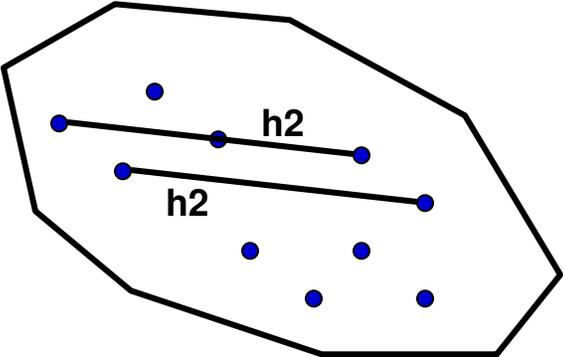
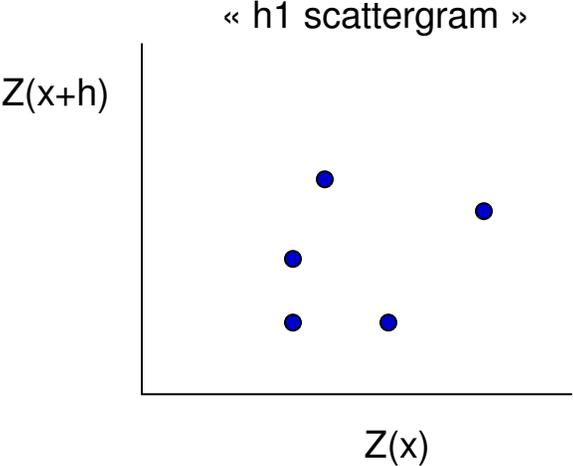
Gisement



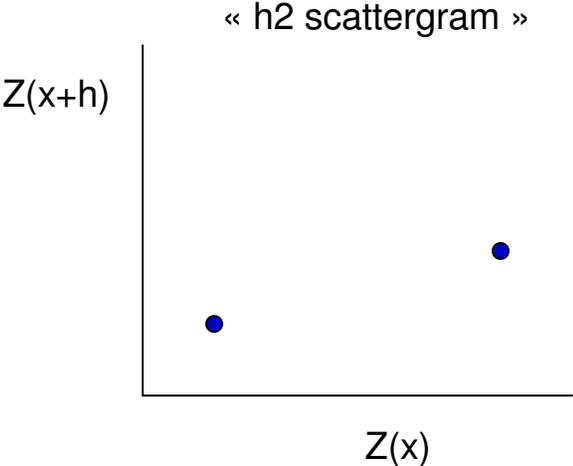
Faire varier « h »



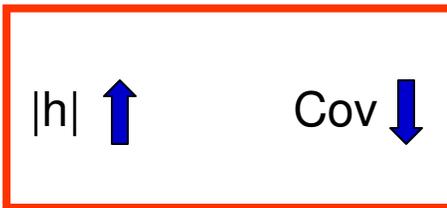
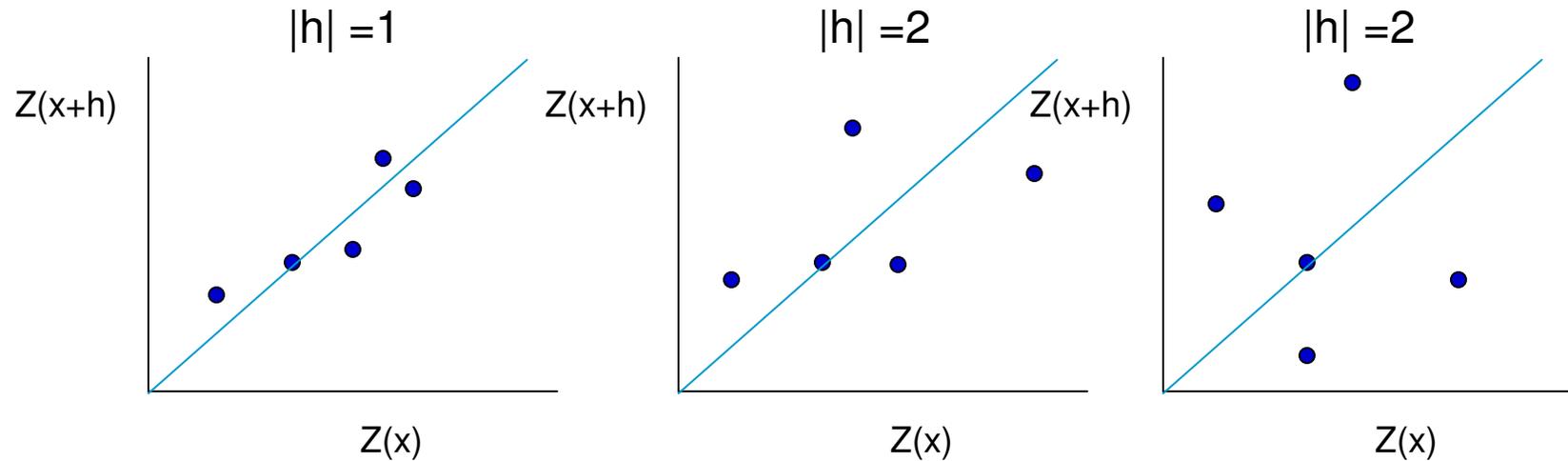
Gisement



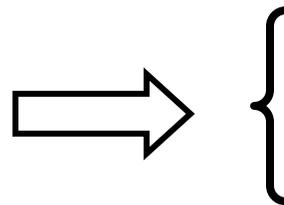
Gisement



« **h** » peut varier en direction et en module.

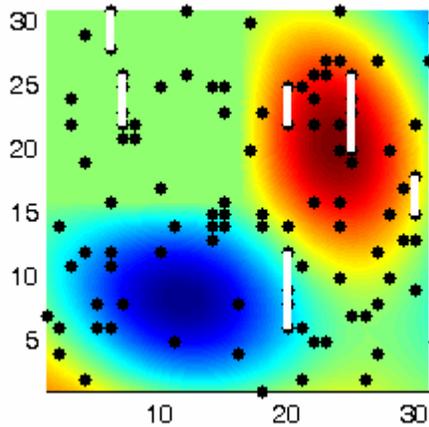


On cherche si possible avoir au moins 30 points sur chaque diagramme

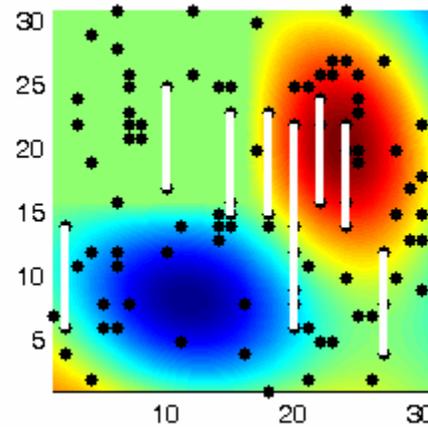
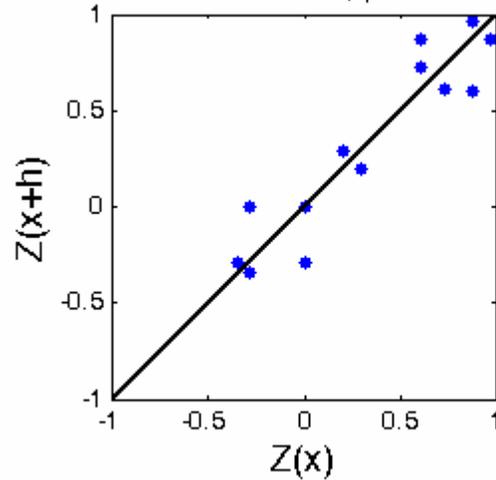


- Tolérance sur la direction
- Tolérance sur le module

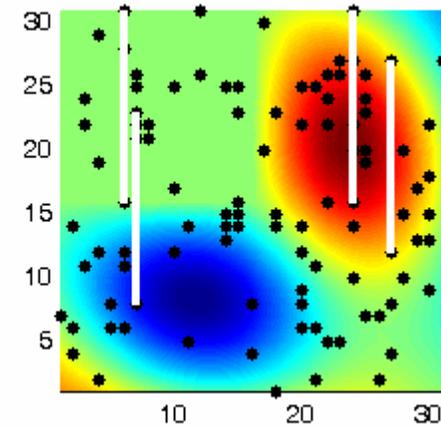
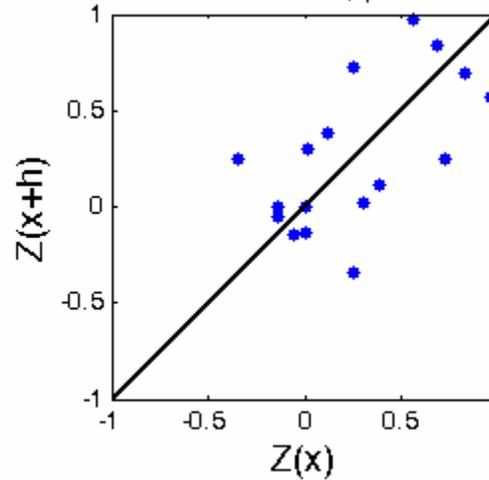
Exemple



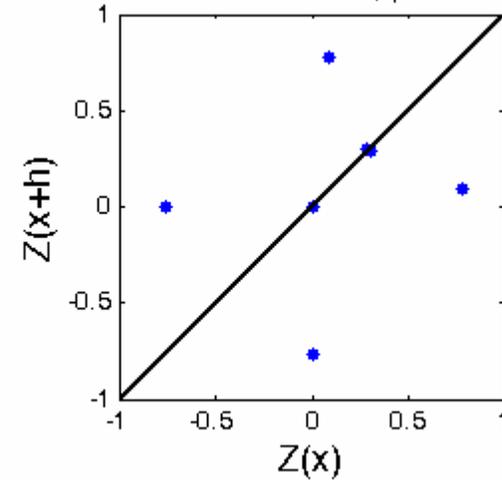
$h=3$ dir=0-180, $\rho= 0.94$



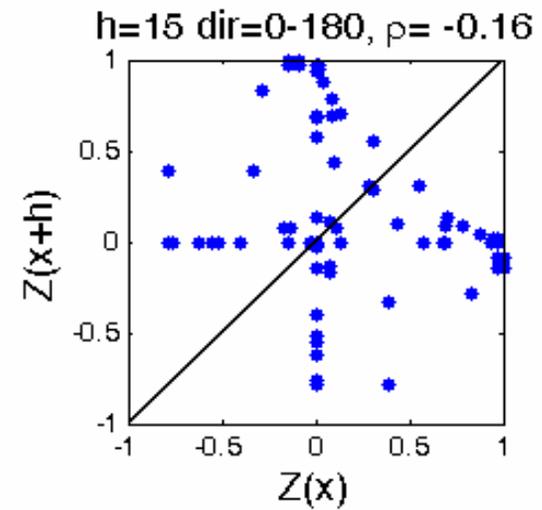
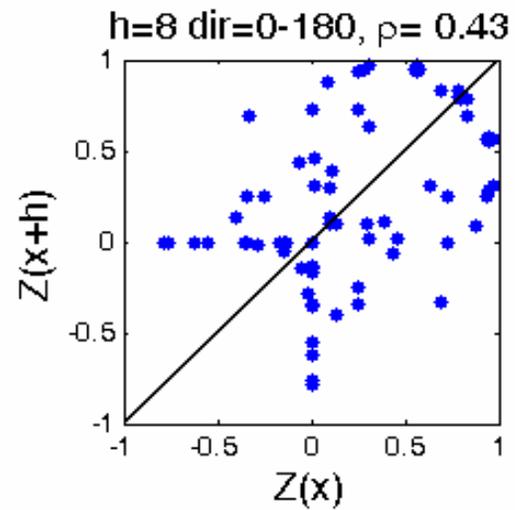
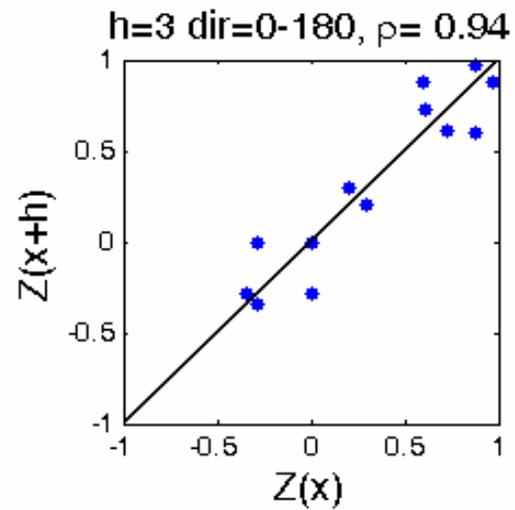
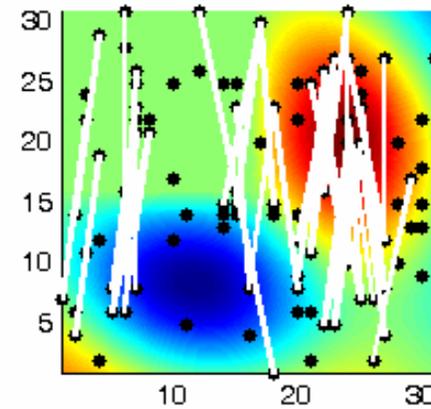
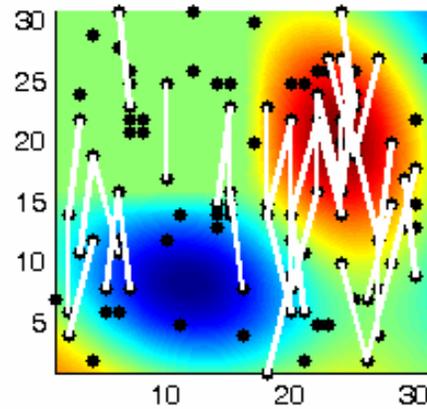
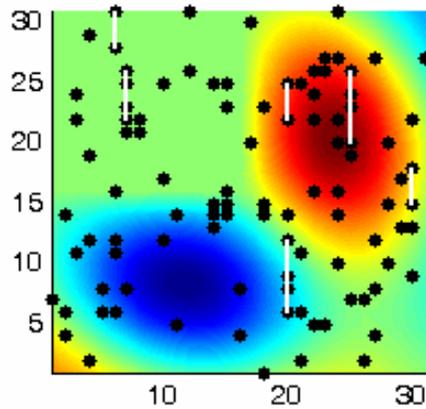
$h=8$ dir=0-180, $\rho= 0.61$



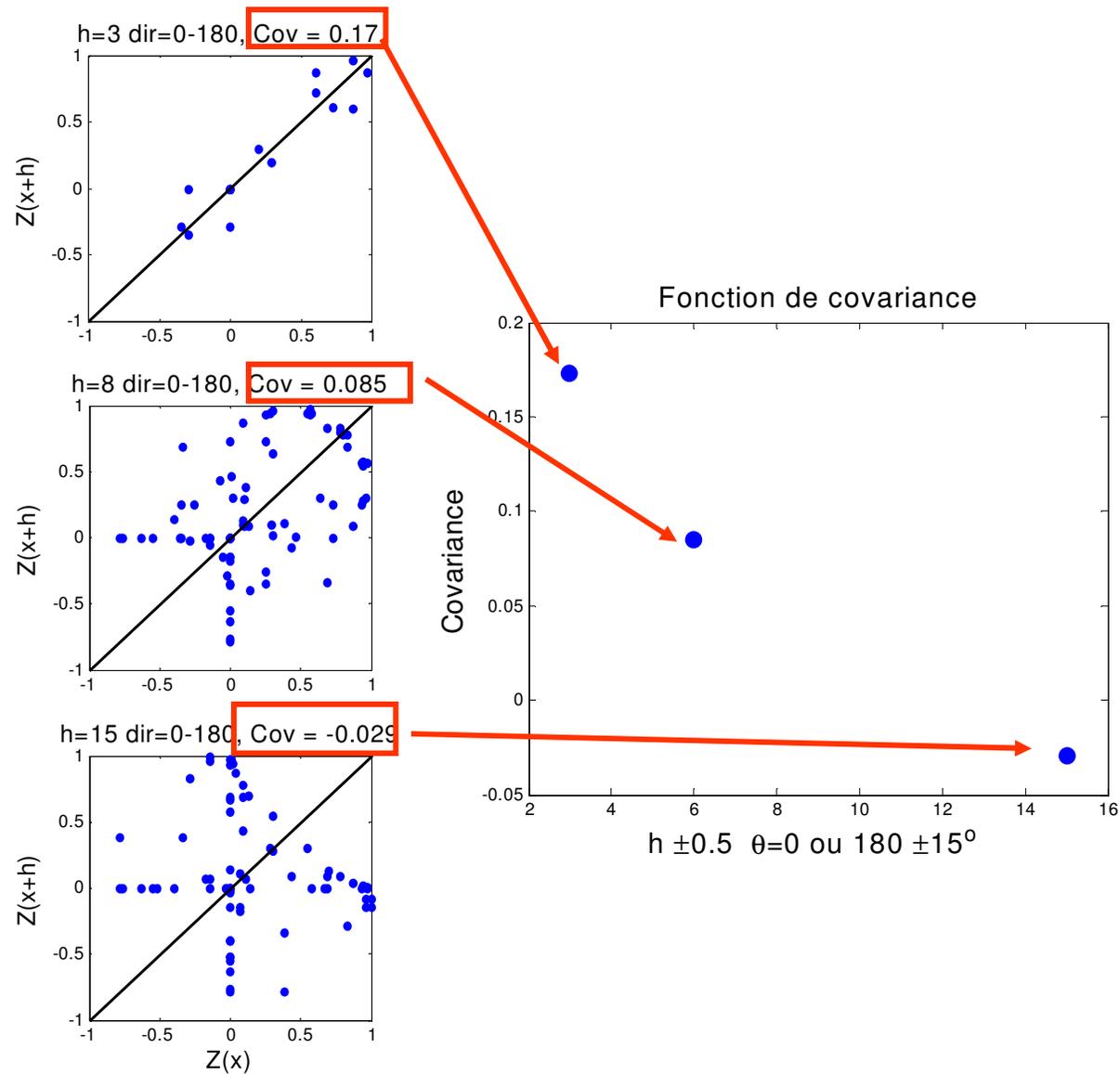
$h=15$ dir=0-180, $\rho= 0.2$



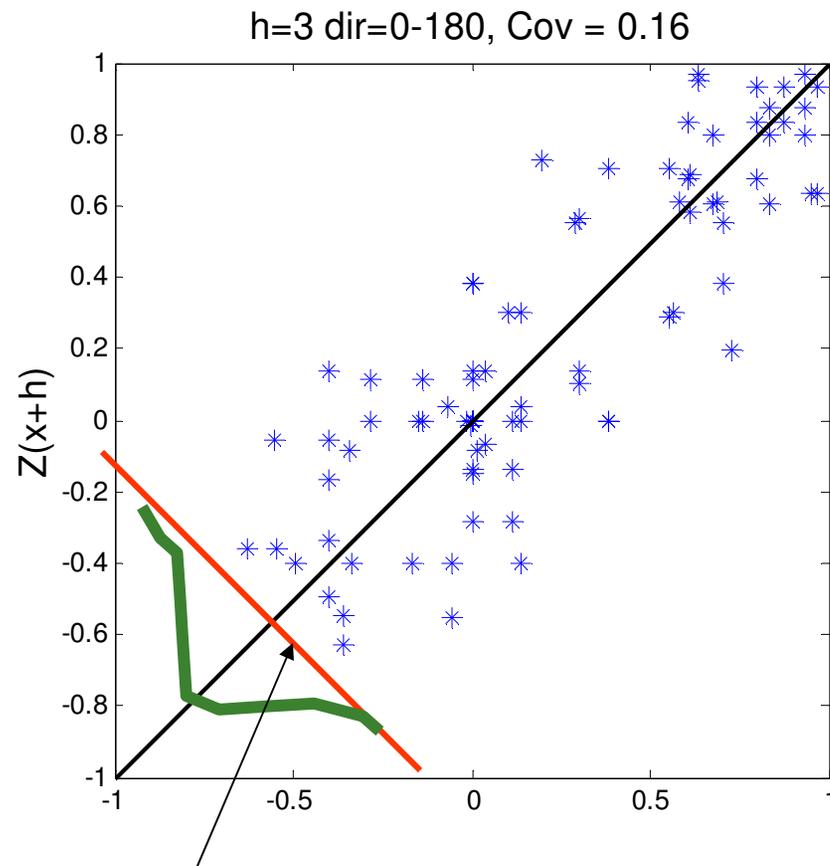
Avec tolérance de 0.5 sur $|h|$ et 15° sur direction



En pratique, on ne s'intéresse qu'à la covariance (corrélation)



Le variogramme



Mesure la dispersion sur cette droite

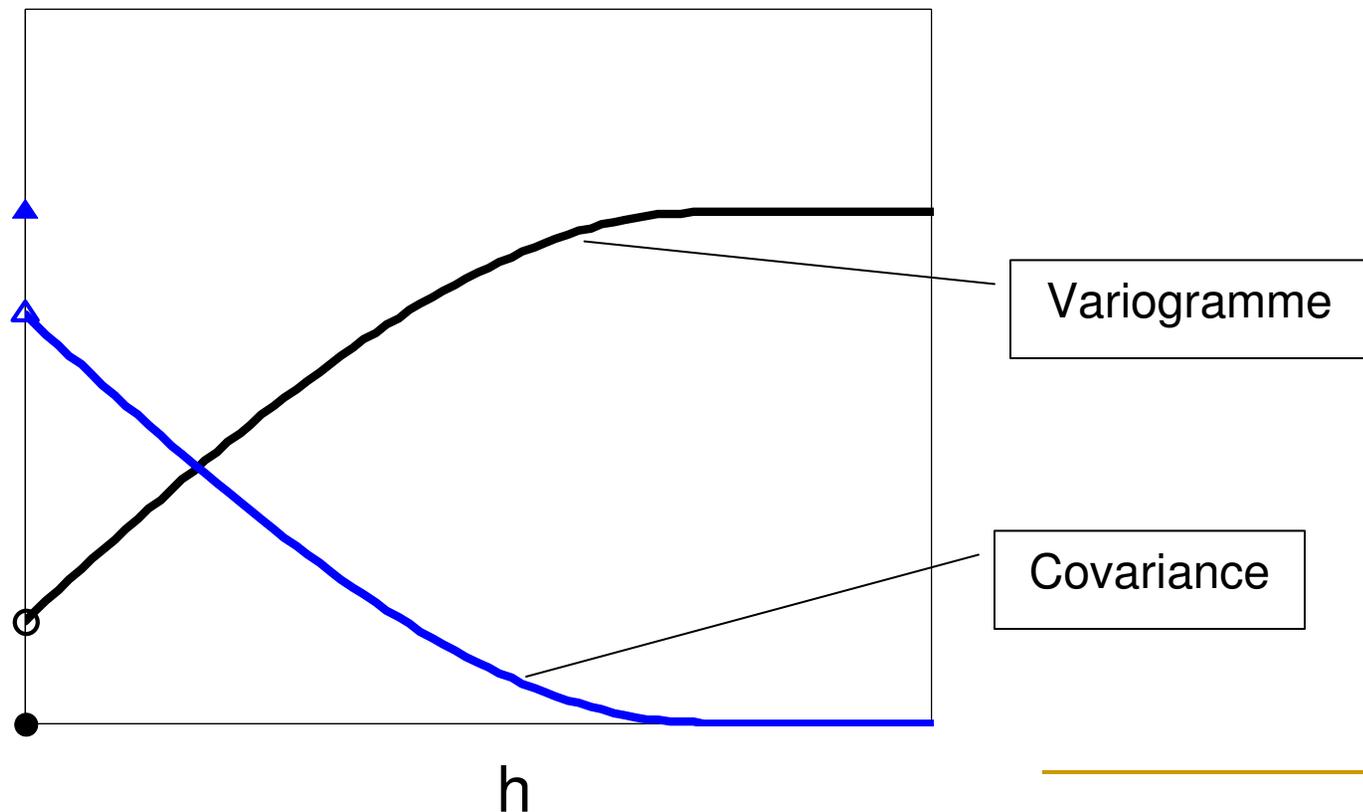
Variogramme : définition

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \text{Var}[Z(x) - Z(x+h)] = \frac{1}{2} E[(Z(x) - Z(x+h))^2]$$

	Variogramme	Covariance
m	Constante	Constante connue
Var	Si existe = palier	Doit exister = Cov(h=0)
h	Croît	Décroît

Lien entre variogramme et covariance

$$\gamma(h) = \sigma^2 - \text{Cov}(h)$$



Variogramme expérimental

Choisir une direction + tolérance angulaire

Discrétiser $|h|$ en classes distinctes

Répartir les paires dans les classes

$$\gamma_e(h) = \frac{1}{2 N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2$$

$N(h)$: nombre de paires dans la direction considéré et dans la classe de distance h

Exemple

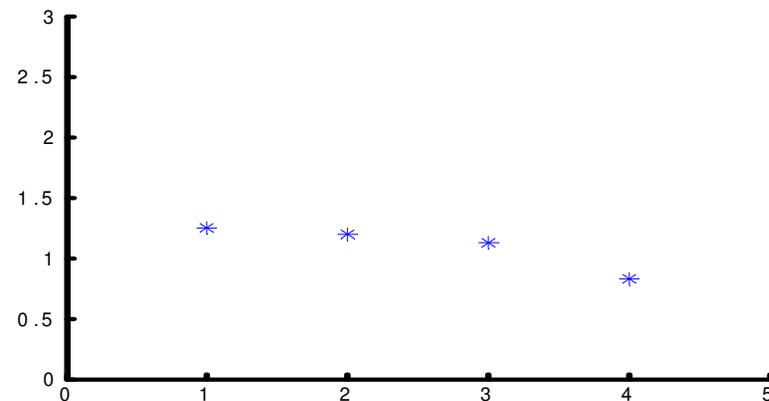
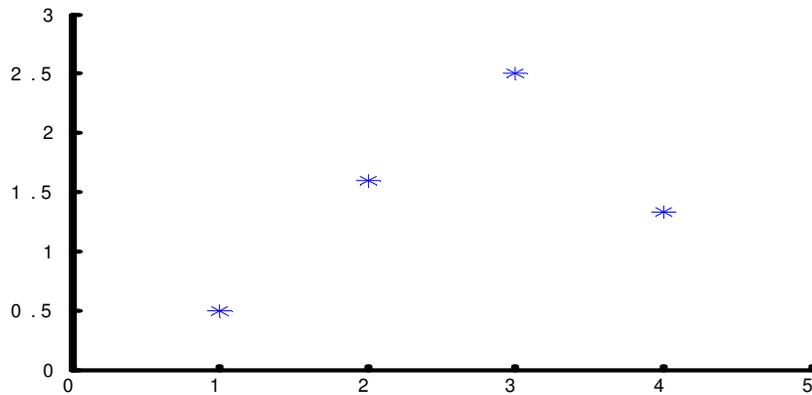
$h=1$

1	2	3	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---

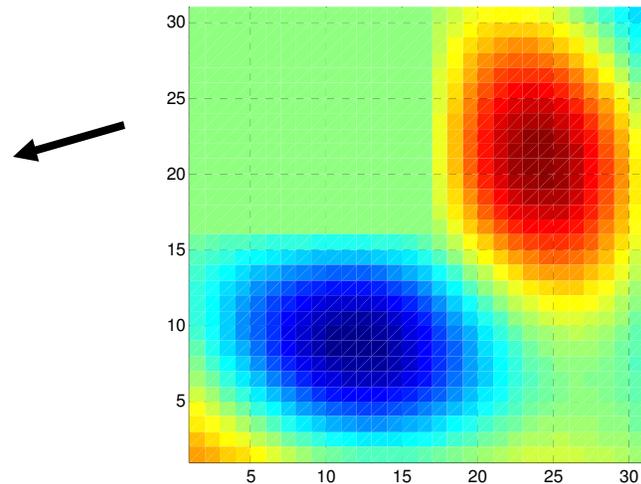
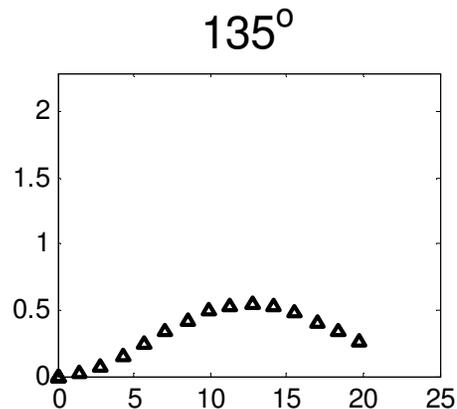
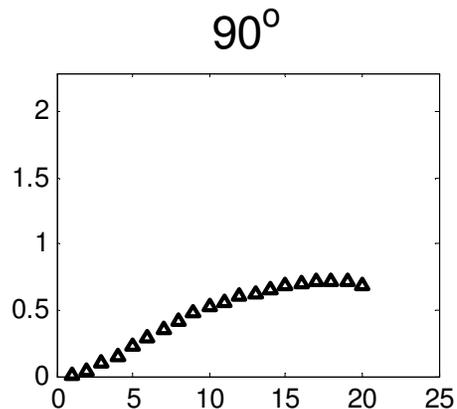
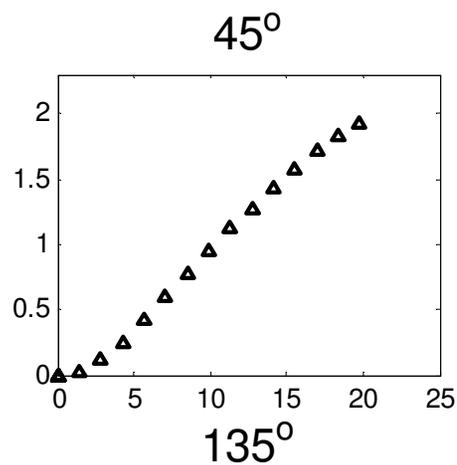
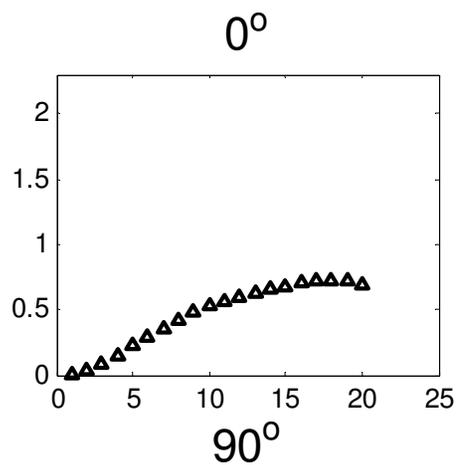
1	3	2	3	1	2	4
---	---	---	---	---	---	---

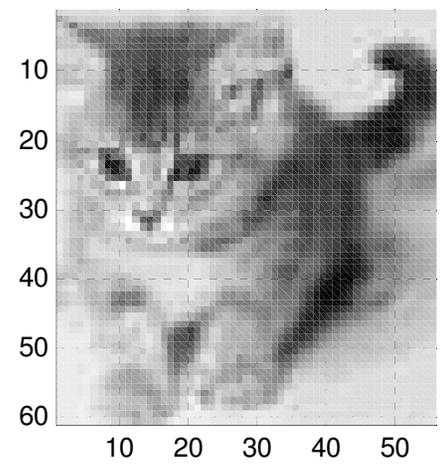
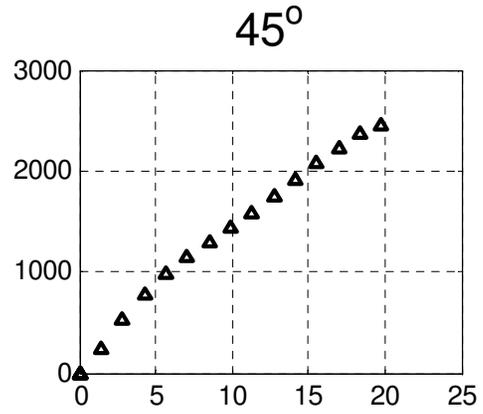
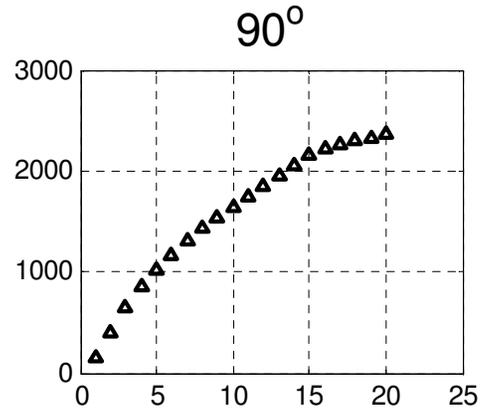
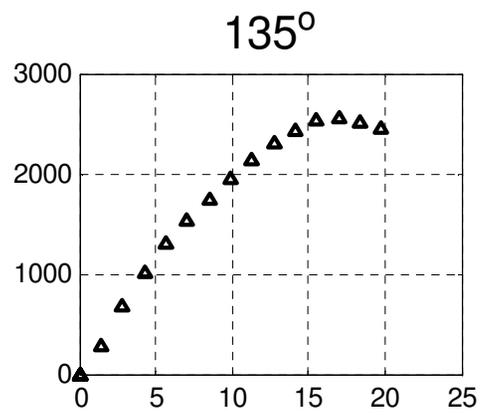
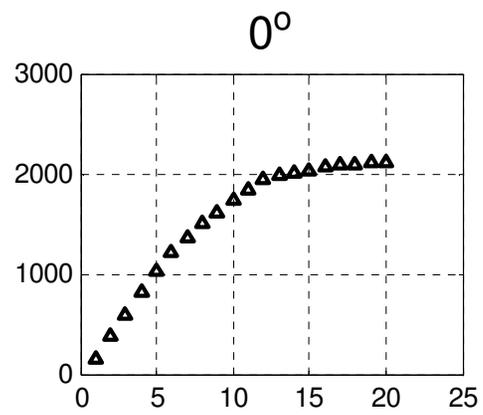
h	$N(h)$	$\gamma(h)$
1	6	0.5
2	5	1.6
3	4	2.5
4	3	1.33

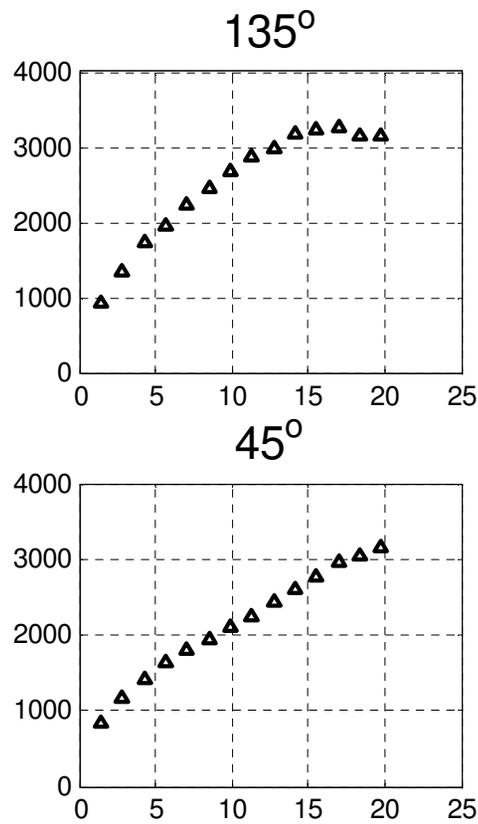
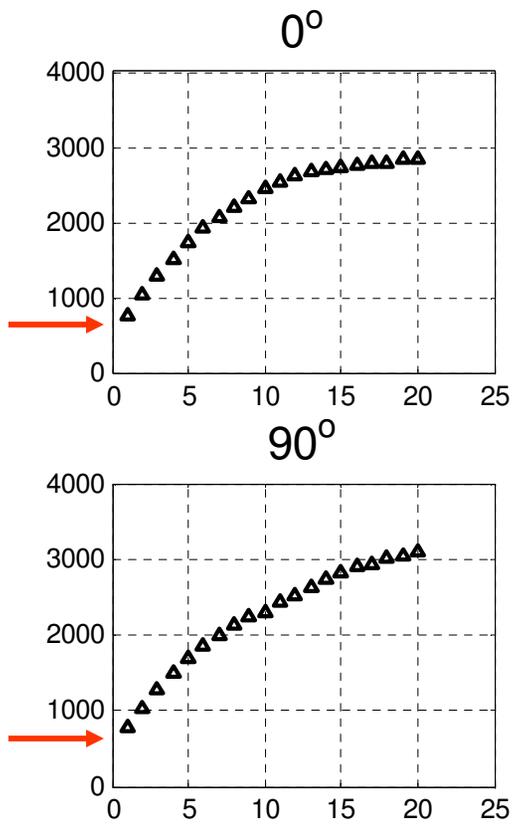
h	$N(h)$	$\gamma(h)$
1	6	1.25
2	5	1.2
3	4	1.125
4	3	0.83



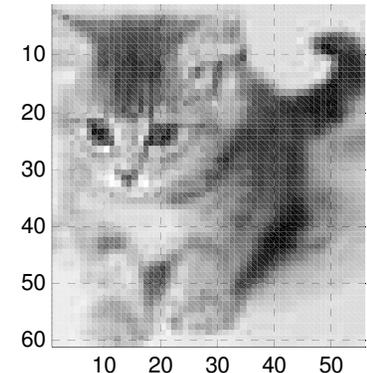
Le variogramme décrit la continuité spatiale du phénomène



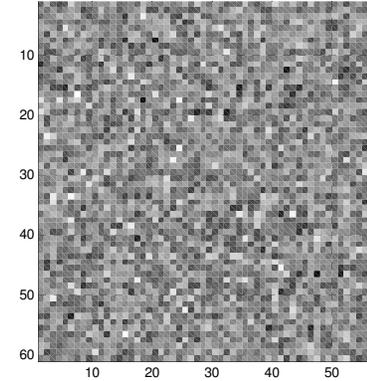




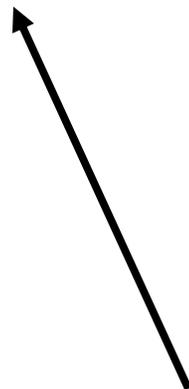
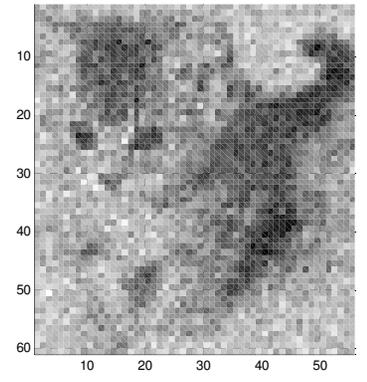
Effet pépite causé par le bruit ajouté
 Notez comme la structure sous-jacente
 demeure très visible



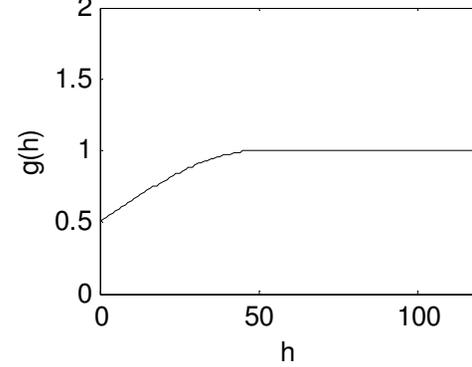
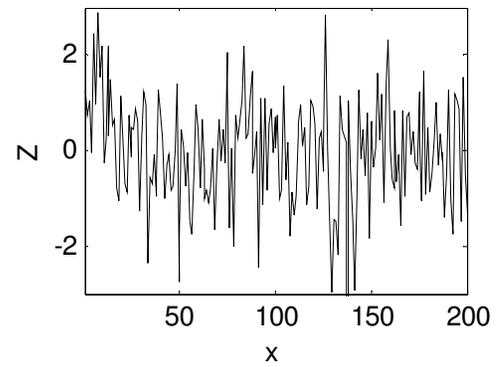
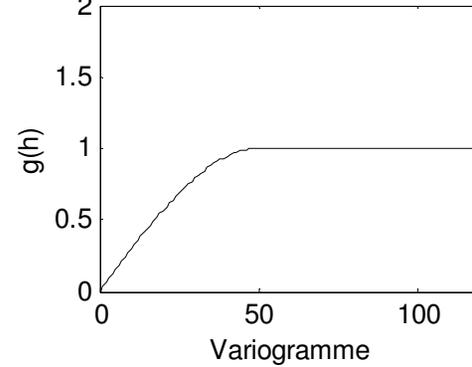
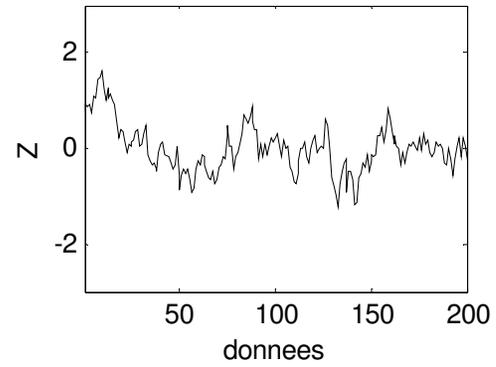
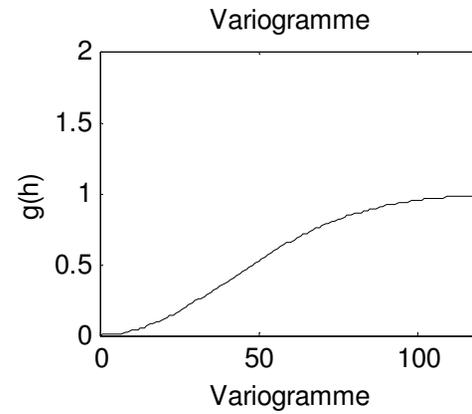
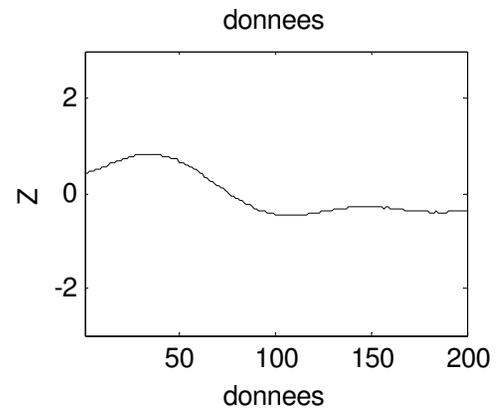
+



=



3 exmples en 1D

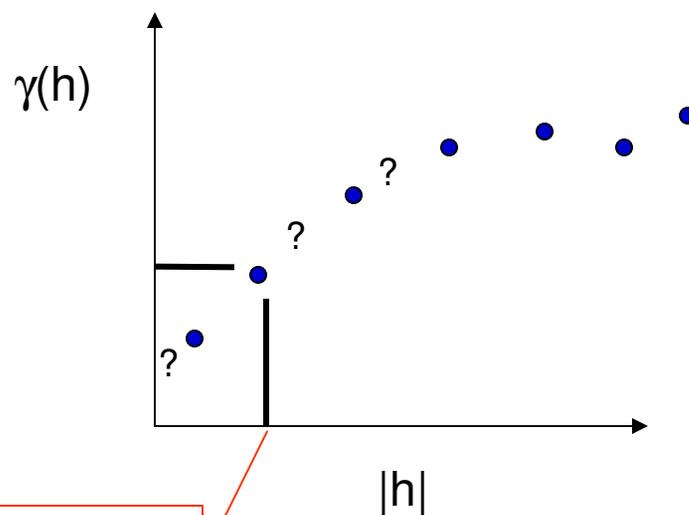


Le variogramme est une statistique d'ordre 2

Ce n'est pas suffisant pour caractériser tous les aspects d'une image ou d'un processus

e.g. on peut créer plusieurs images ayant même « m », même variogramme et présentant pourtant des textures très différentes

Variogramme expérimental

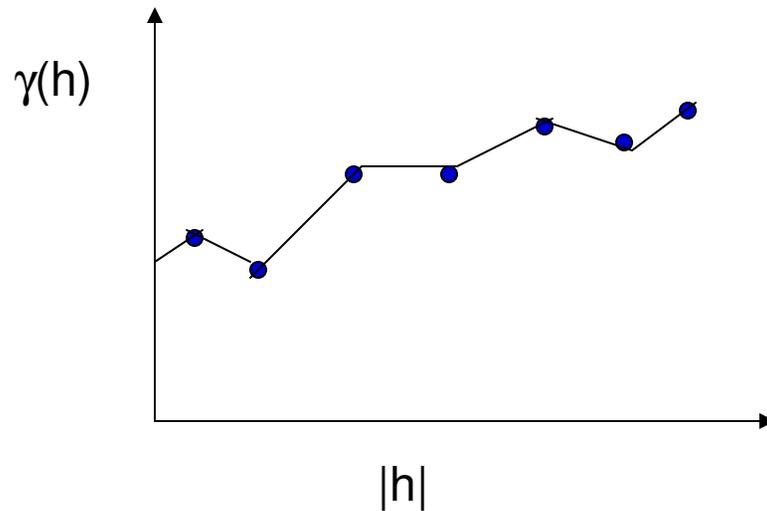


h moyen dans
la classe

Dans les calculs géostat, on doit connaître Cov ou γ pour **tout** « h »

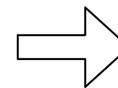


Modèle



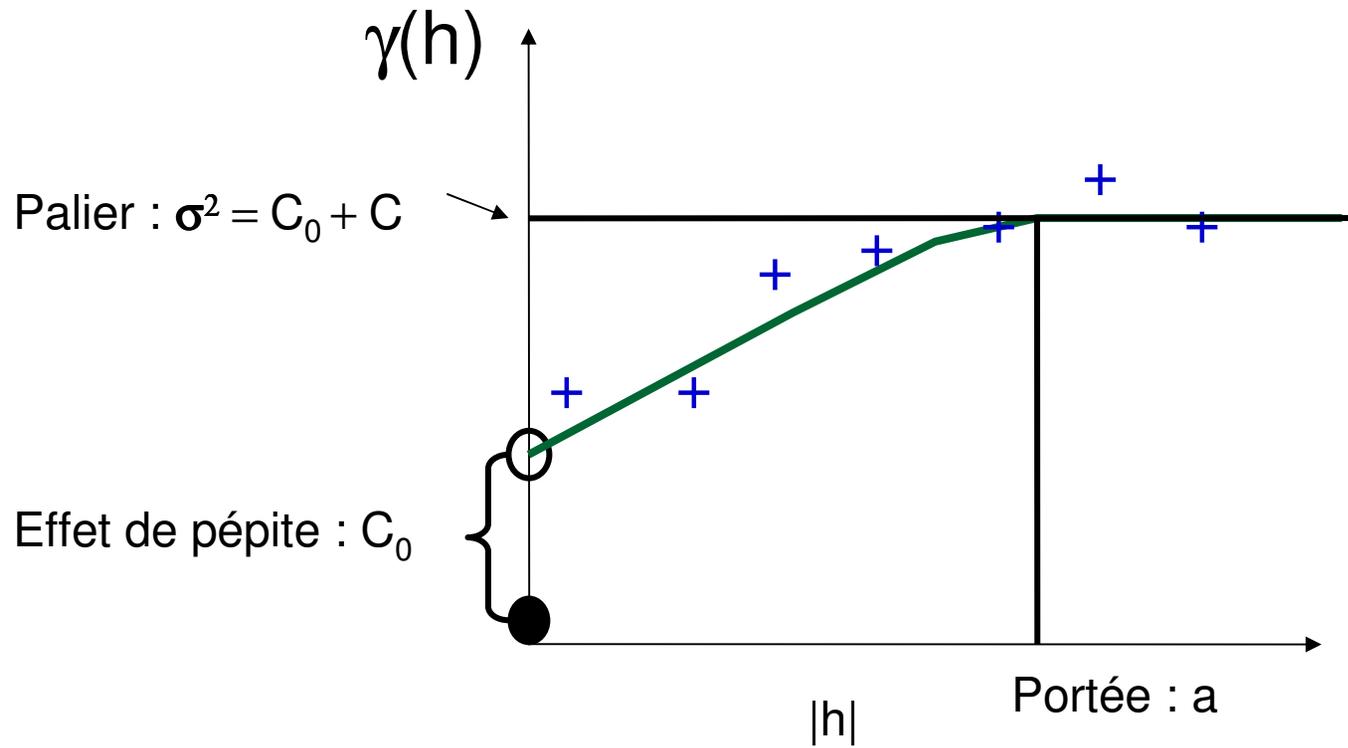
Non, le modèle doit être admissible

Modèle admissible : modèle assurant que toute variance calculée à partir de celui-ci est positive

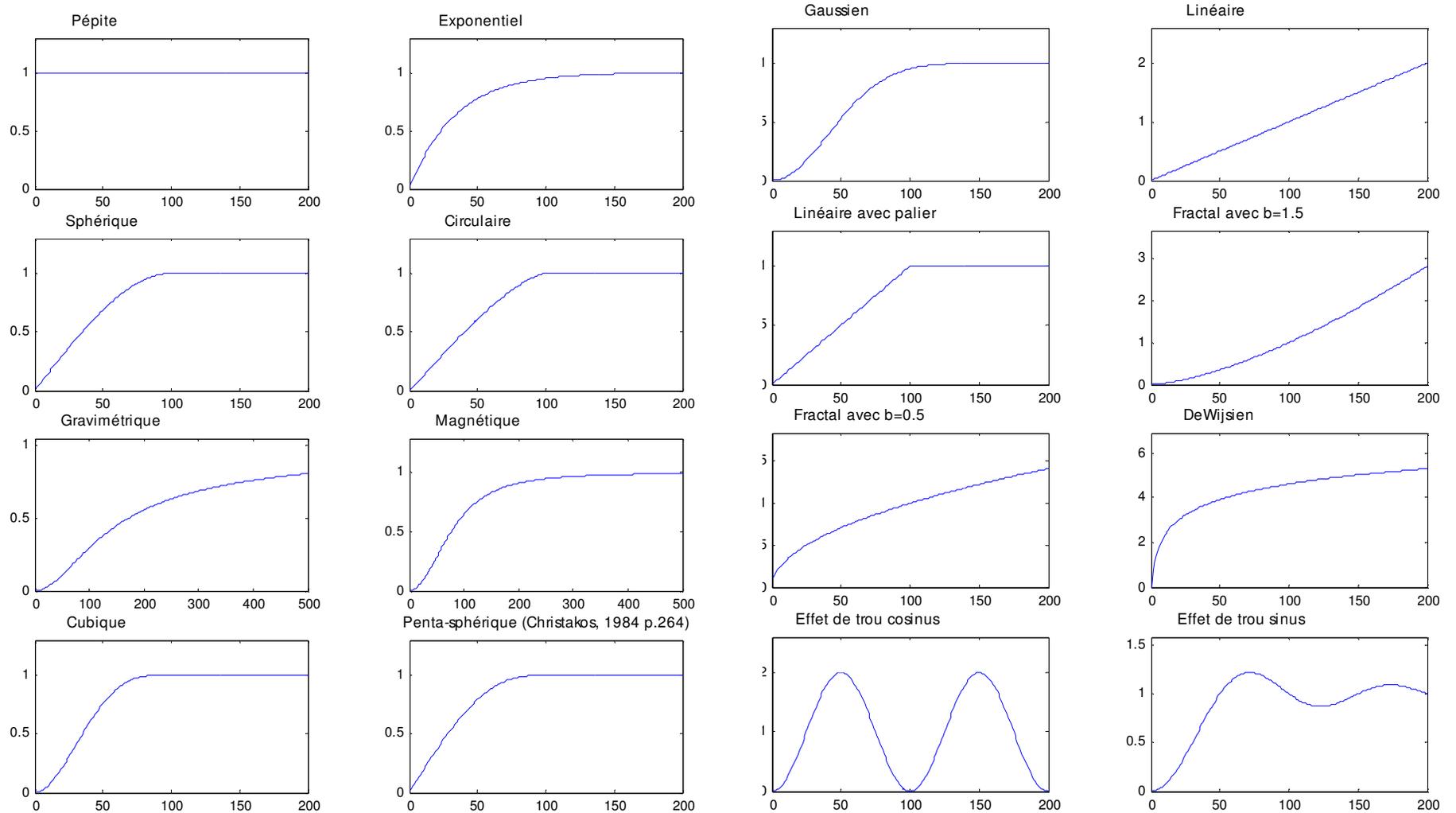


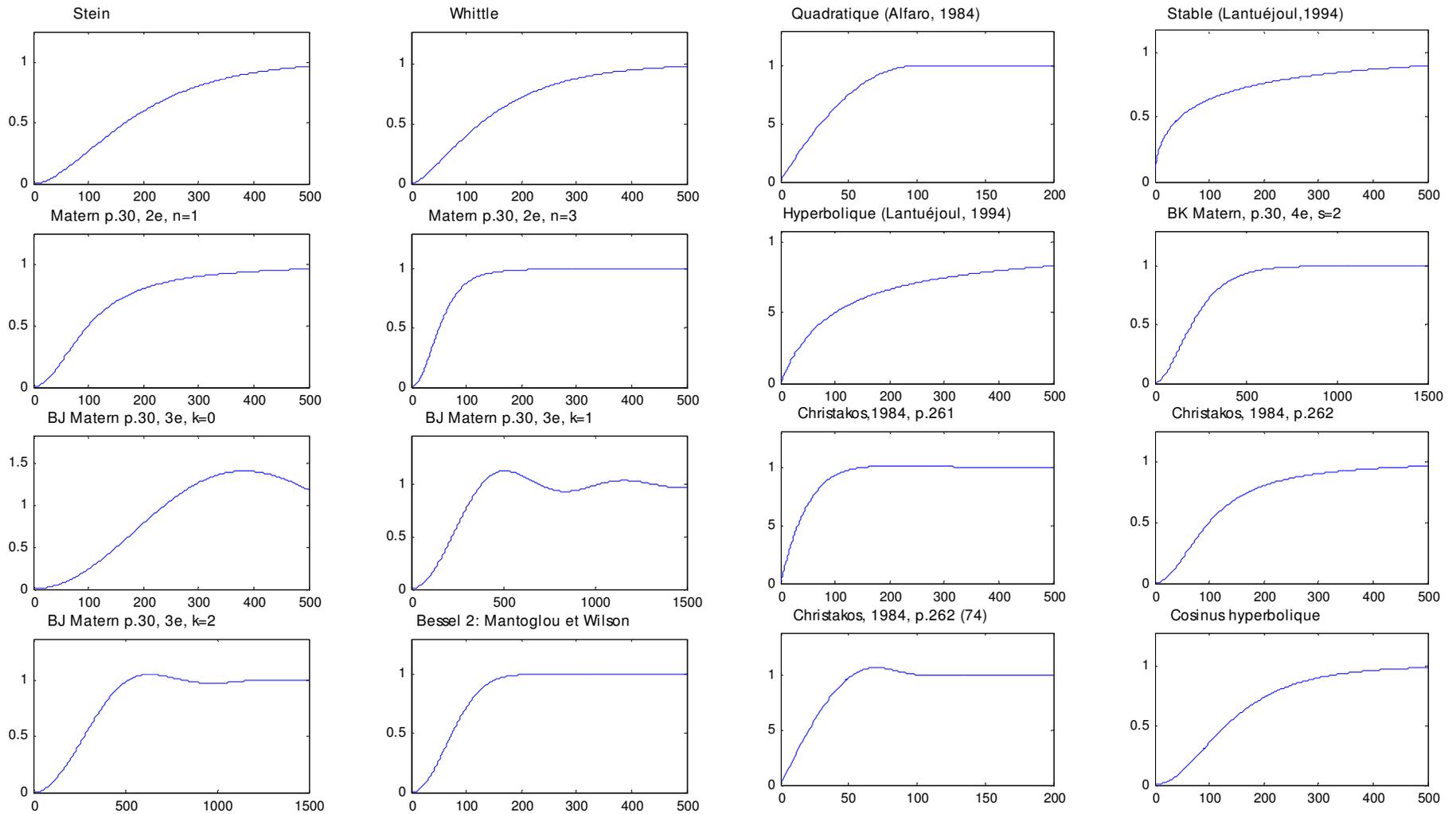
Modèles démontrés admissibles

Généralement,



Exemples de modèle





Toute somme (coefficients positifs) de modèles de variogramme est admissible

Toute somme (coefficients positifs) de modèles de covariance est admissible

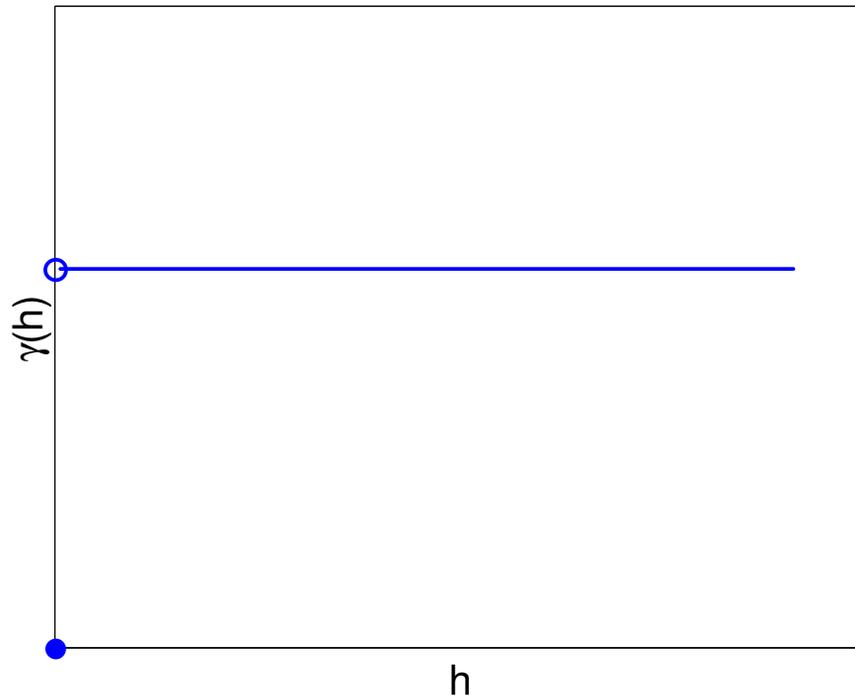
Tout produit (coefficients positifs) de modèles de covariance est admissible

Chaque modèle peut être isotrope ou anisotrope, les directions d'anisotropie peuvent varier d'un modèle à l'autre

Un modèle peut être admissible en 1D et non-admissible en en 2D, 3D,.....

Modèles de base en mine

Effet de pépité

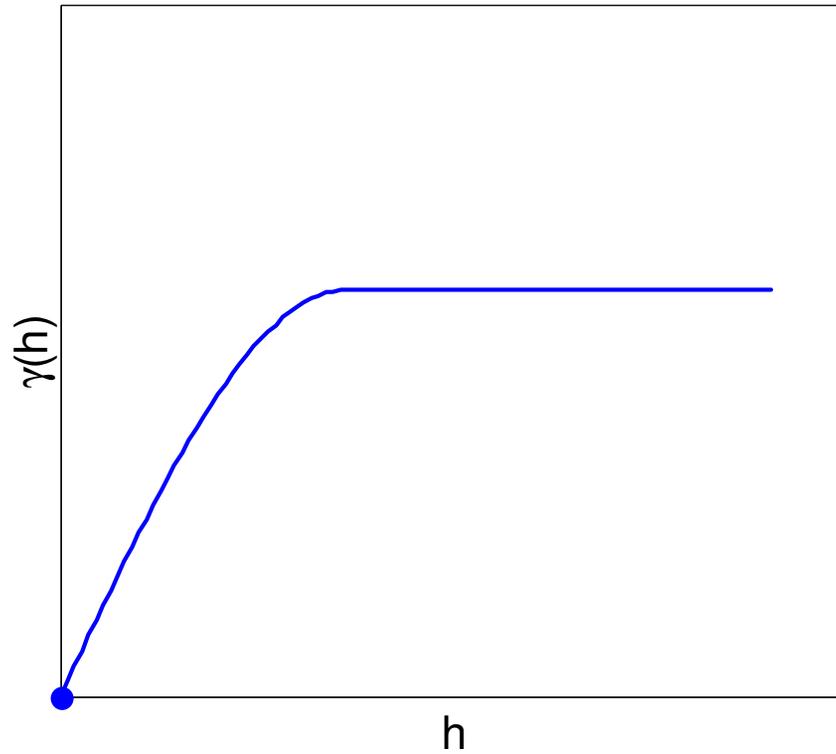


$$\gamma(h) = 0 \quad \text{si } h = 0$$
$$C_0 \quad \text{si } h > 0$$

- Erreurs de mesure
- Erreurs de localisation
- Erreurs d'analyse (Gy)
- Microstructure non-identifiable dû au manque de données

Presque toujours présent mais
rarement seul
Effet de pépité pur =>
estimation impossible

Sphérique



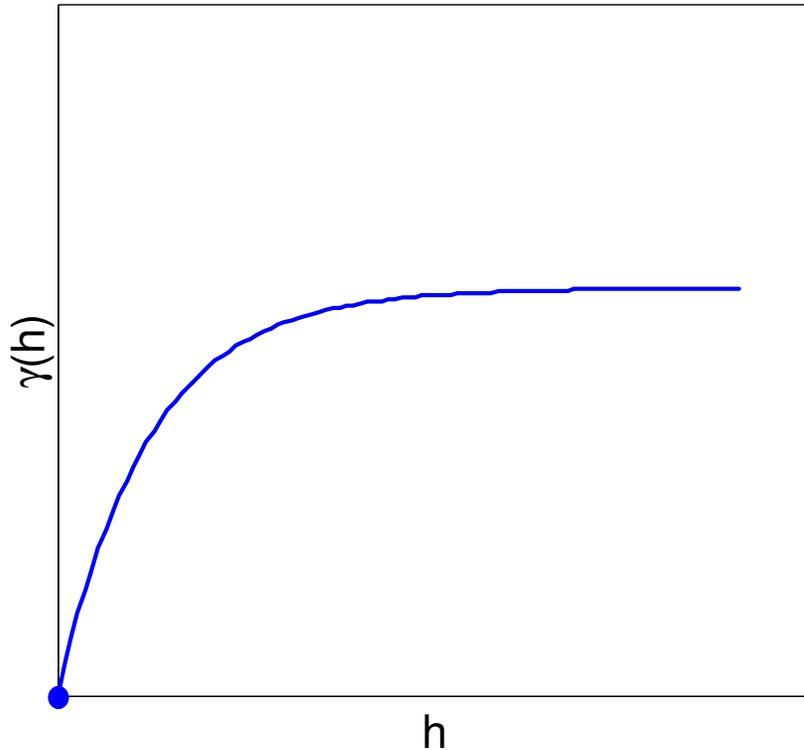
Modèle le + fréquent

e.g. teneur, épaisseur, ...

Combiné avec effet pépite

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ C \left(1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right) & \text{si } 0 < h < a \\ C & \text{si } h \geq a \end{cases}$$

Exponentiel

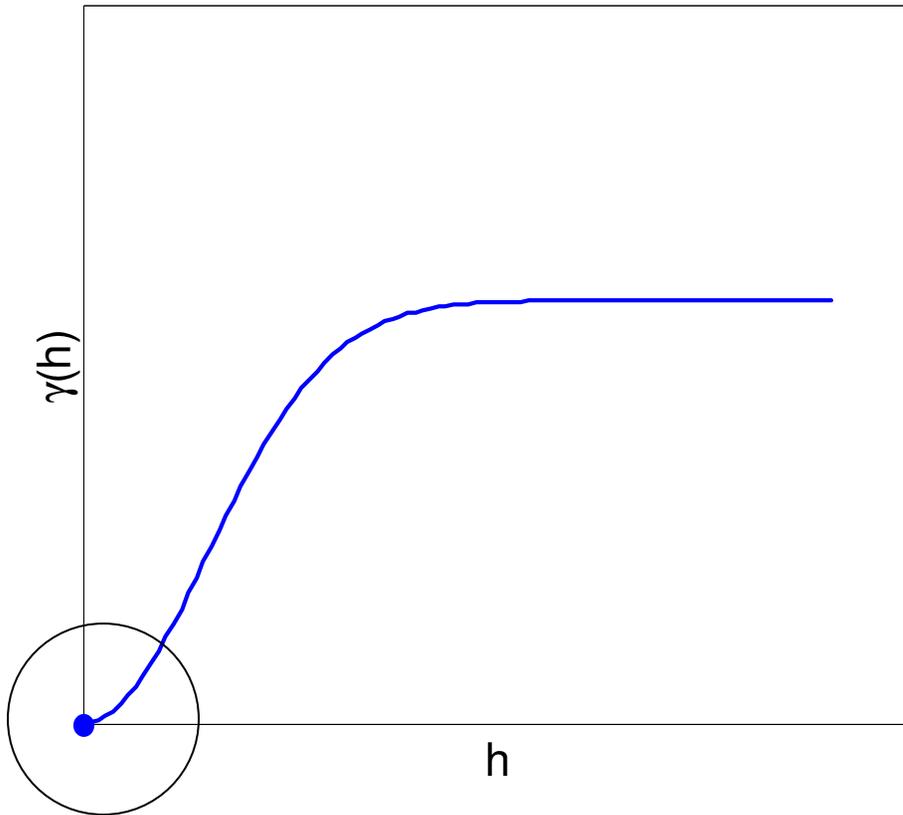


Assez commun

Semblable au sphérique

$$\gamma(h) = C \left(1 - \exp\left(\frac{-|h|}{a'}\right) \right) \text{ ou } C \left(1 - \exp\left(\frac{-3|h|}{a}\right) \right) \left. \begin{array}{l} a: \text{ portée effective } \gamma(h)=0.95 \cdot C \\ a'=a/3 \end{array} \right\}$$

Gaussien

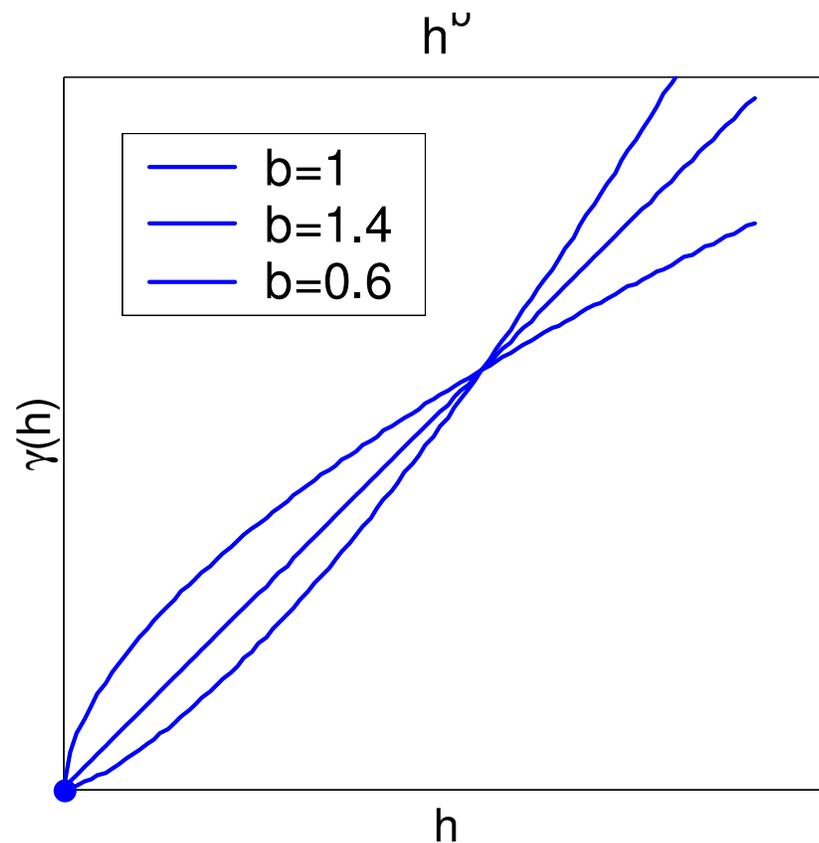


- Peu fréquent en mine
- Variables très continues : e.g. topographie, gravimétrie, magnétisme, épaisseur, ...
- Problèmes numériques si absence d'effet de pépite

a: portée effective $\gamma(h)=0.95*C$

$$a' = a/3^{0.5}$$

$$\gamma(h) = C \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{|h|}{a'} \right)^2 \right) \right) \text{ ou } C \left(1 - \exp \left(- 3 \left(\frac{|h|}{a} \right)^2 \right) \right)$$

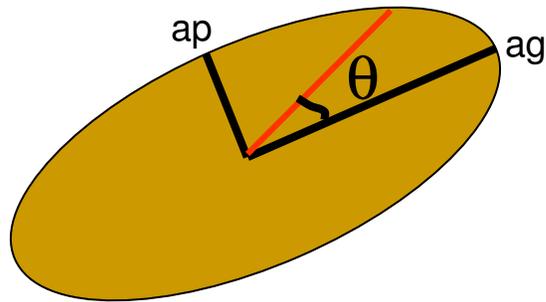


-Modèles sans palier
 -Moyenne, variance et covariance non définies

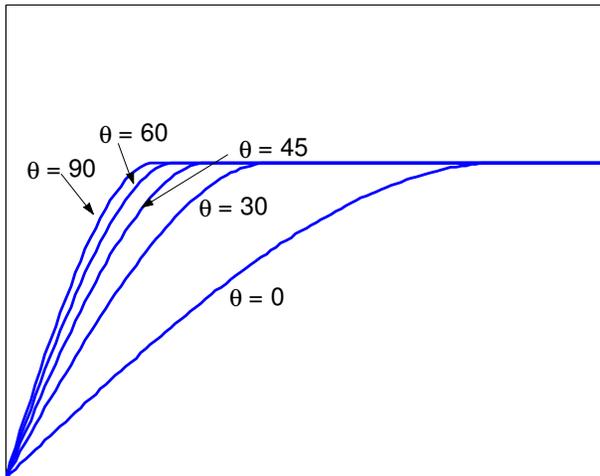
$$\gamma(h) = C \left(\frac{|h|}{a} \right)^b \quad |h| > 0, \quad 0 \leq b < 2$$

Anisotropies

1- Géométrie : les portées décrivent une ellipse

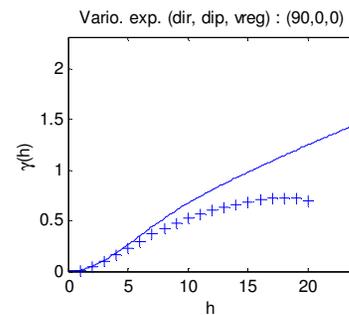
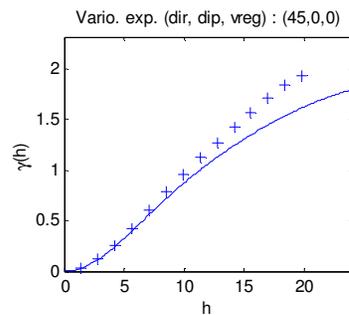
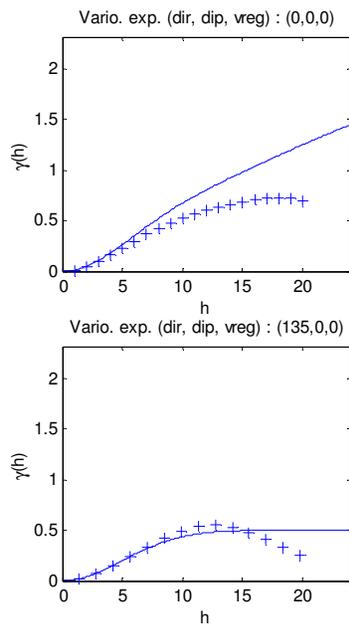


$$a_{\theta} = \frac{a_g a_p}{\left\{ a_p^2 \cos^2 \theta + a_g^2 \sin^2 \theta \right\}^{1/2}}$$

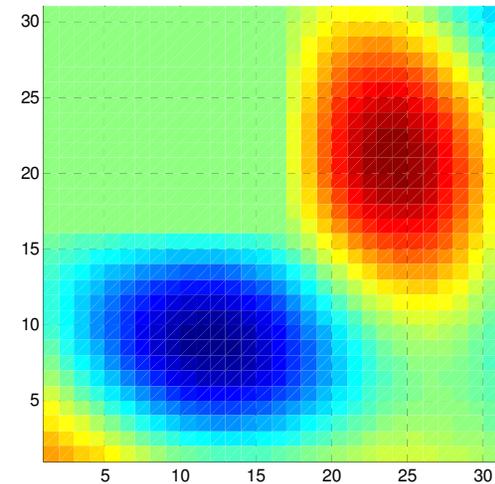


2- zonale : toute anisotropie qui n'est pas géométrique

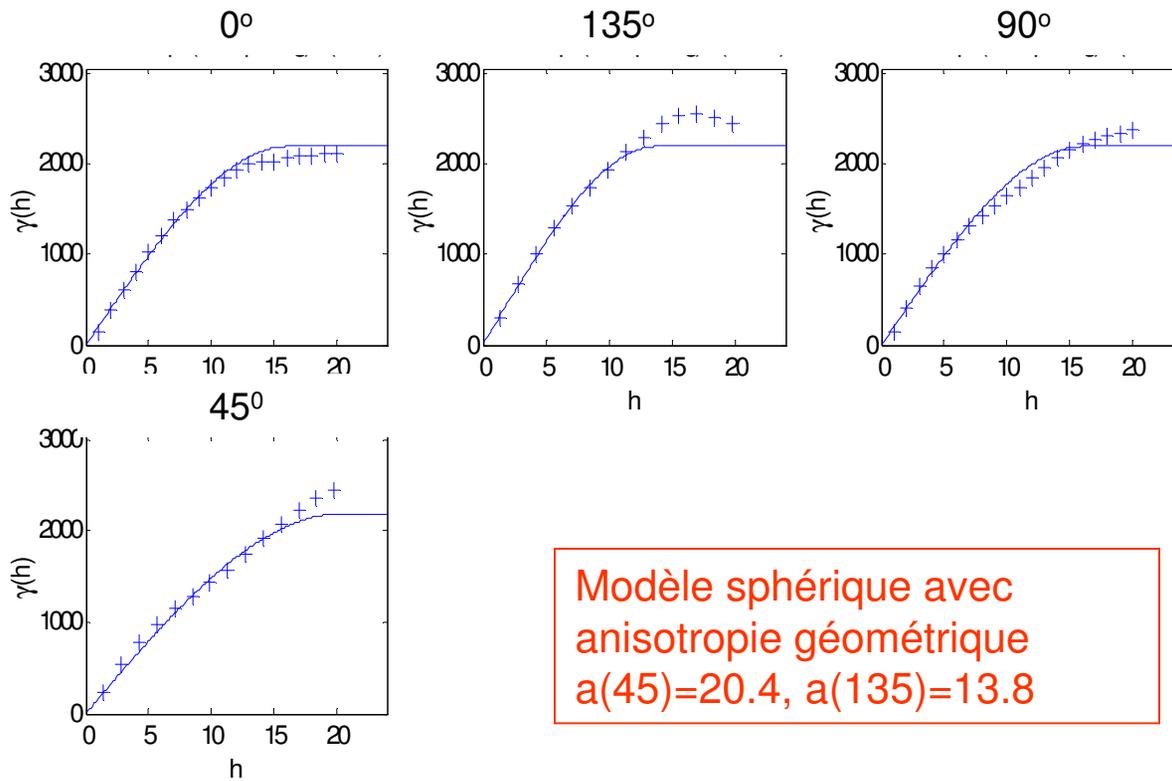
=> somme de composantes isotropes et avec anisotropies géométriques



Gaussien isotrope $a=7$, $C=0.5$
+
Gaussien aniso géom.
 $a_{45}=17$
 $a_{135}=\infty$

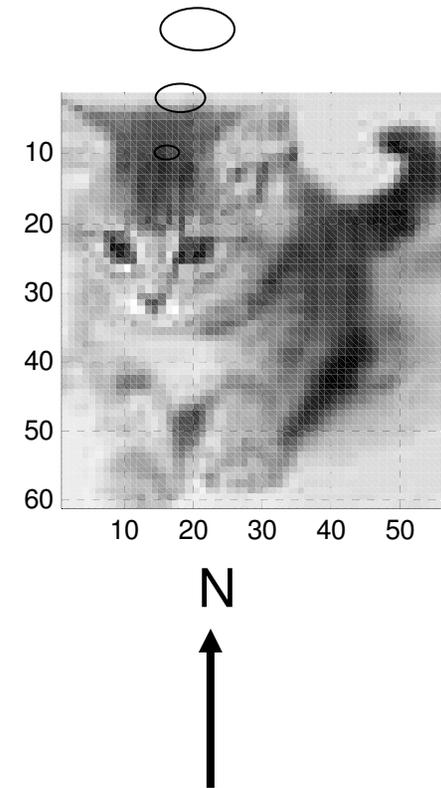


Ajustement assez bon pour 0-5 pixels dans toutes les directions



Modèle sphérique avec anisotropie géométrique
 $a(45)=20.4$, $a(135)=13.8$

Oh non, je ne vais pas encore me faire variographe!



Stratégie de modélisation

- Définition minutieuse du domaine
- Examen des données, données extrêmes ?
- Au besoin sous-échantillonnage des données pour éviter de sur-représenter des zones particulières
- Variogramme omnidirectionnel => modèle isotrope candidat
- Déterminer directions géologiques principales
- Calculer variogrammes directionnels (au moins 4 directions) *attention aux paramètres de calculs (classes de distance et tolérance)*
- Comparer variogrammes directionnels au modèle isotrope candidat
 - acceptable => terminé
 - Inacceptable => ajuster un modèle anisotrope (géométrique)
 - anisotrope (géométrique) acceptable => terminé
 - Inacceptable => anisotropie zonale ?

Dans tous les cas, il importe surtout d'ajuster les premiers points du variogramme
Éviter de « surajuster » les données

Remarques concernant le calcul des variogrammes

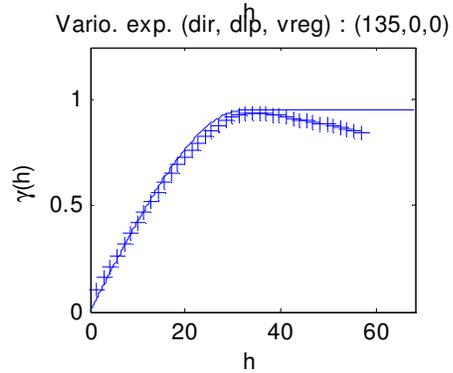
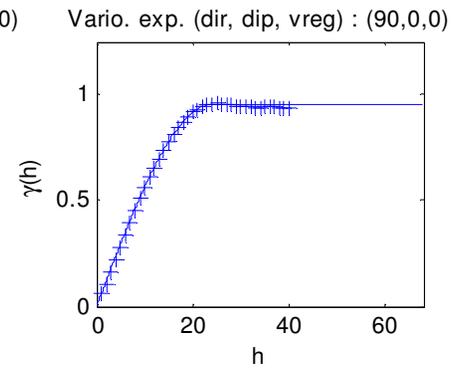
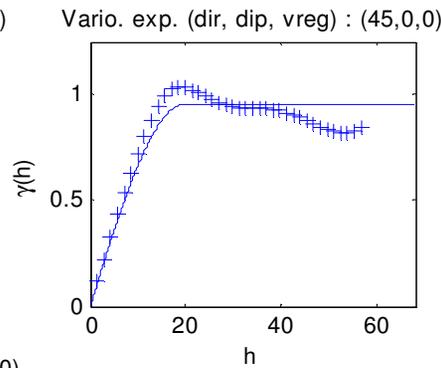
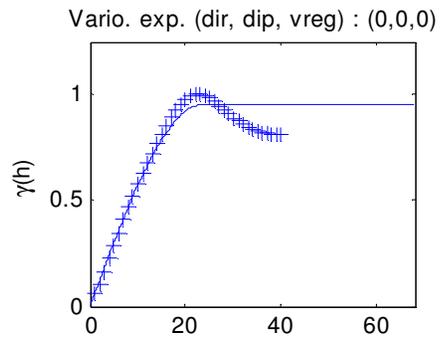
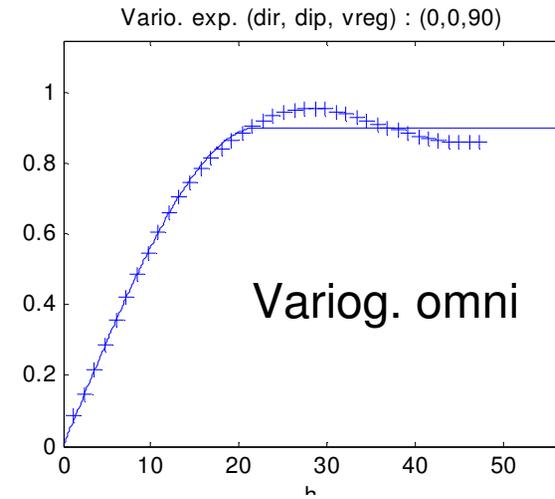
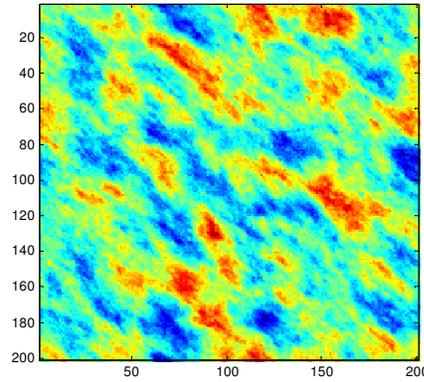
Objectifs:

- au moins 30 paires pour la plupart des points du variogramme
- 4-6 points avant le palier pour pouvoir ajuster modèle
- $h < h_{\max}/2$



- Doit avoir un minimum de données
 - >30 pour variogramme omnidirectionnel
 - >60 pour variogrammes directionnels
- Influence le choix de largeur des classes

Exemple



Variog. directionnels

N=30

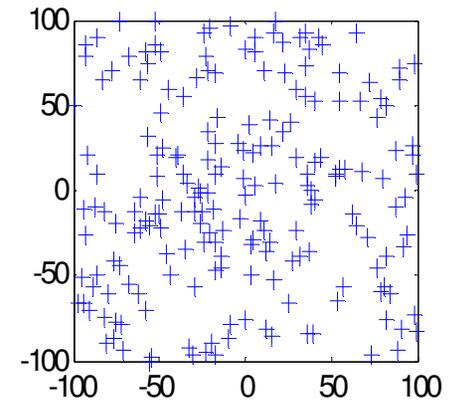
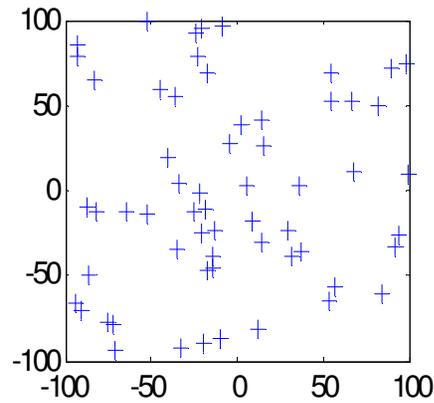
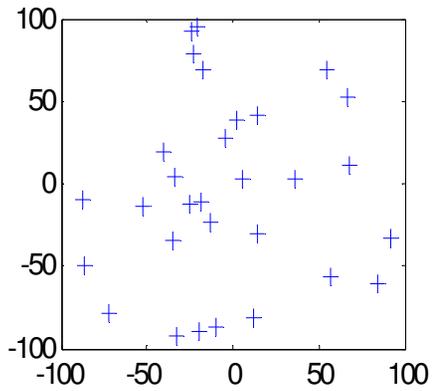
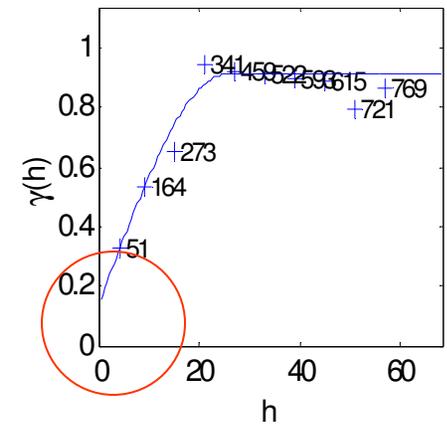
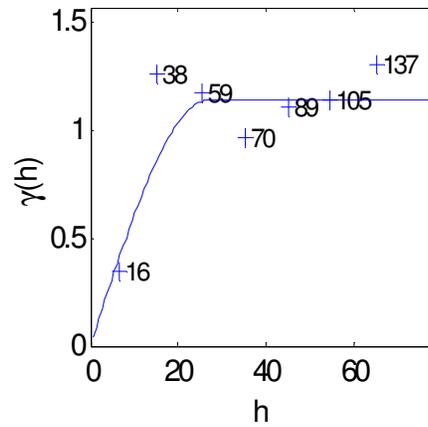
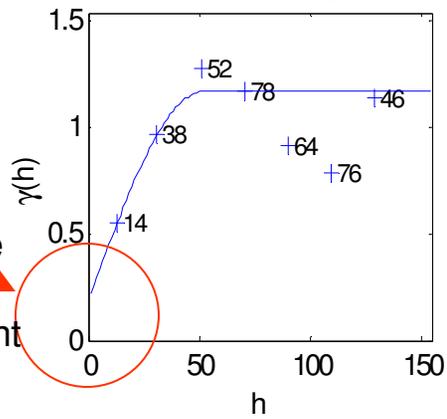
N=60

N=200

Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (0,0,90)

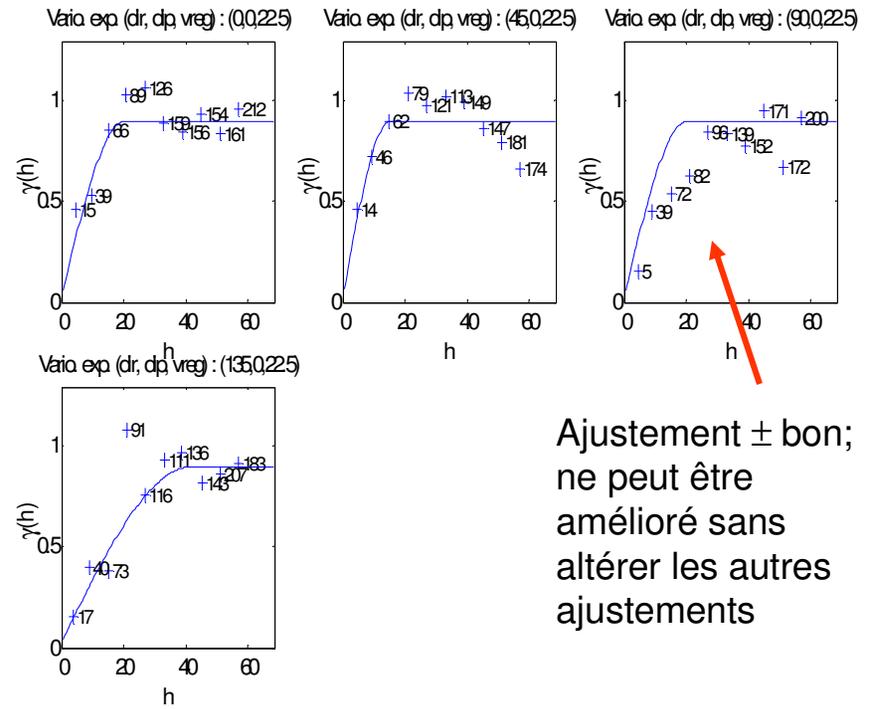
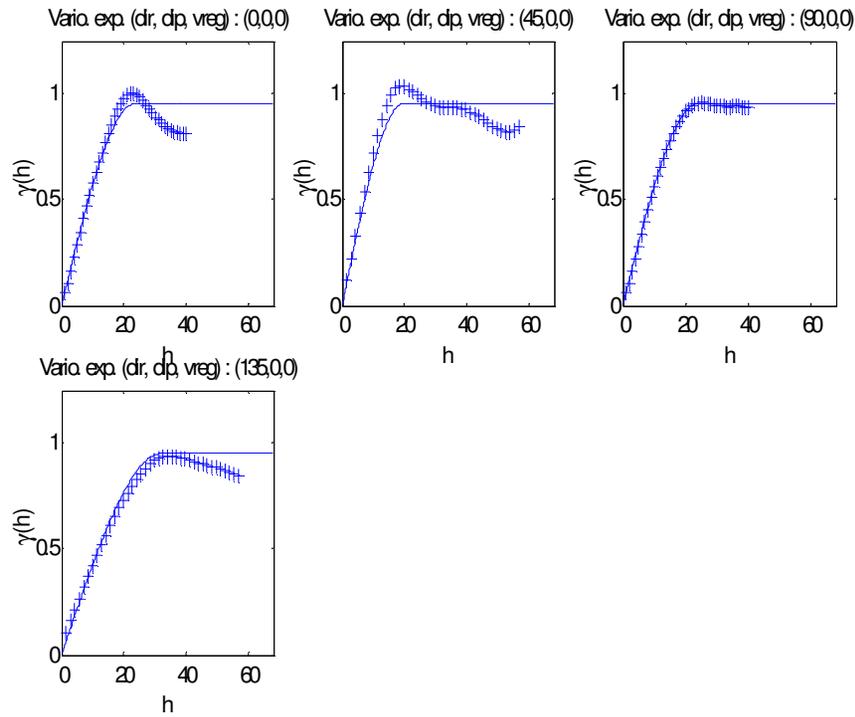
Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (0,0,90)

Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (0,0,90)



N=40000

N=200



Ajustement \pm bon;
ne peut être
amélioré sans
altérer les autres
ajustements

Autres outils utiles

- Validation croisée de modèles candidats (krigeage); eg. Tester un modèle isotrope vs anisotrope; tester un effet de pépite de 10% vs 30%;...
- Modèle permet de prédire les variances des composites de tailles différentes ?
- Modèle permet de prédire les variances des valeurs krigées ?
- Variogramme des $\log(\text{teneurs})$ pour identifier les anisotropies possibles, la (les) portée, l'importance approximative de l'effet de pépite
- Variogramme d'une transformation des teneurs (eg. rang), même chose que les log