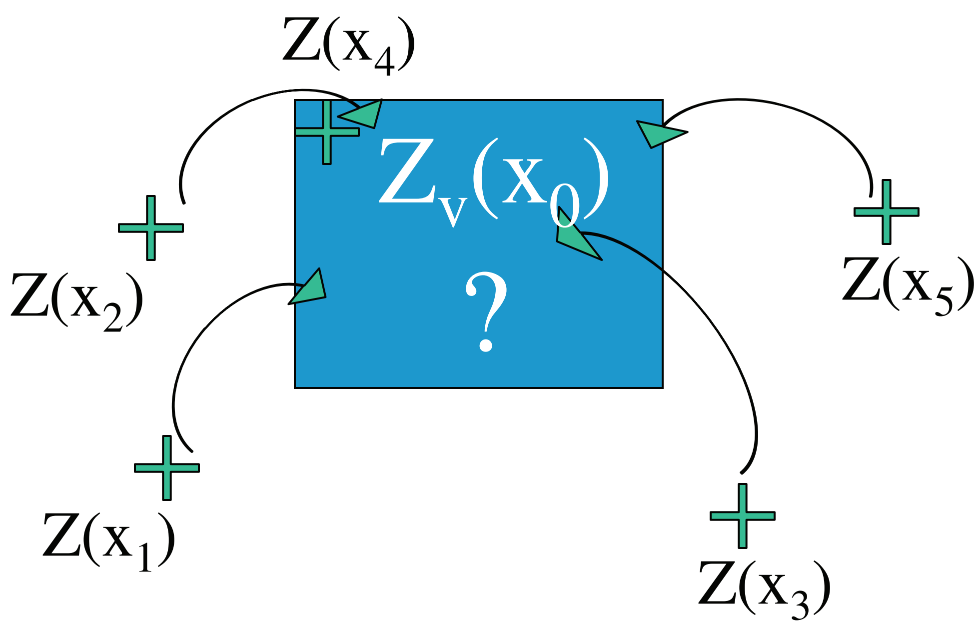
Variance d’estimation et Krigeage

Hiver 2006

Variance d'estimation



$$Z_v^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; Z_i$$

$$e = Z_v - Z_v^*$$

Var. d'estimation = Var(e)

$$Var(e) = Var(Z_v) + Var(Z_v^*) - 2Cov(Z_v, Z_v^*)$$

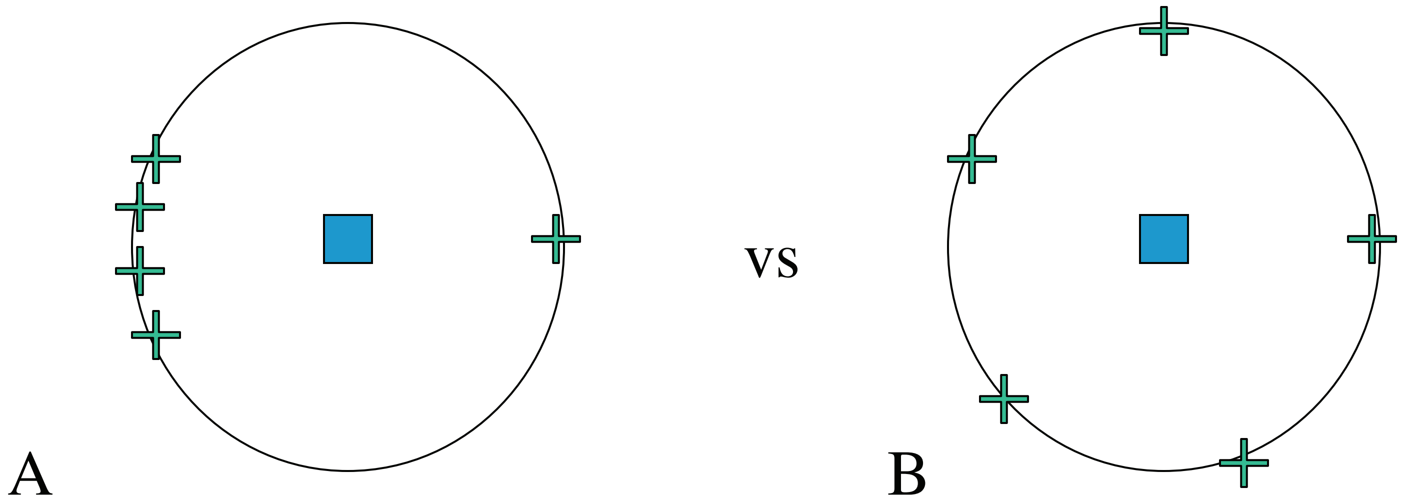
$$\sigma_e^2 = \underbrace{Var(Z_v)}_{a} + \underbrace{\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j)}_{b} - \underbrace{2 \sum_i \lambda_i Cov(Z_i, Z_v)}_{c}$$

a) Ce que l’on cherche à estimer est-il foncièrement variable ou non ?

b) Quel est le degré de redondance entre les observations ?

c) Les observations sont-elles bien placées par rapport à ce que l’on veut estimer ?

Exemple



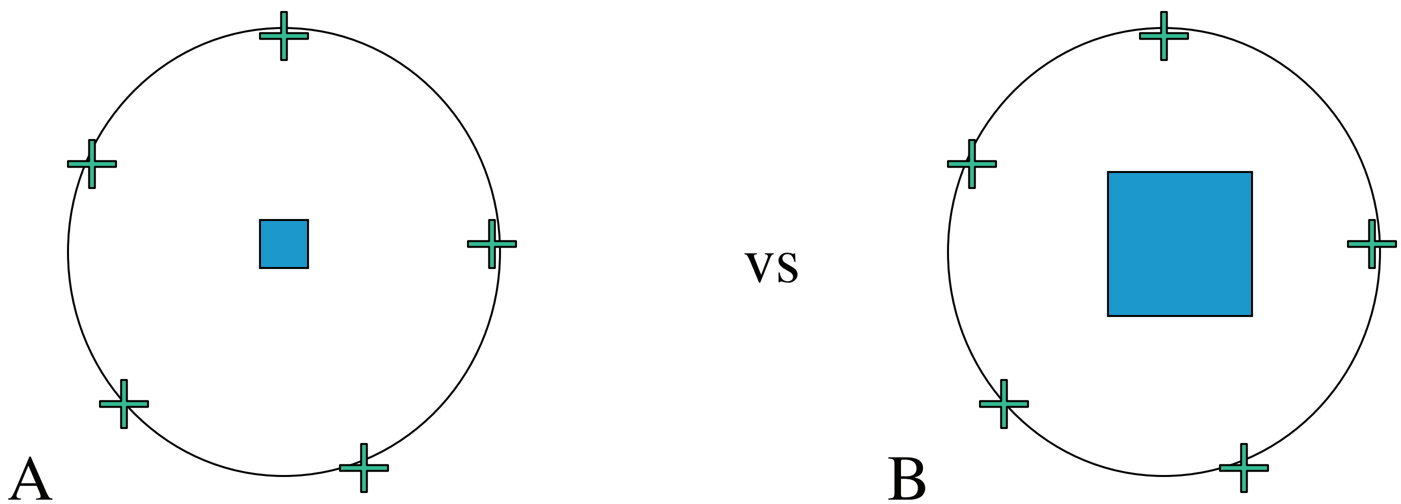
a) Le bloc à estimer est le même

b) La redondance est beaucoup plus forte en A

c) La position par rapport au bloc est la même

} Var(e) + grande en A

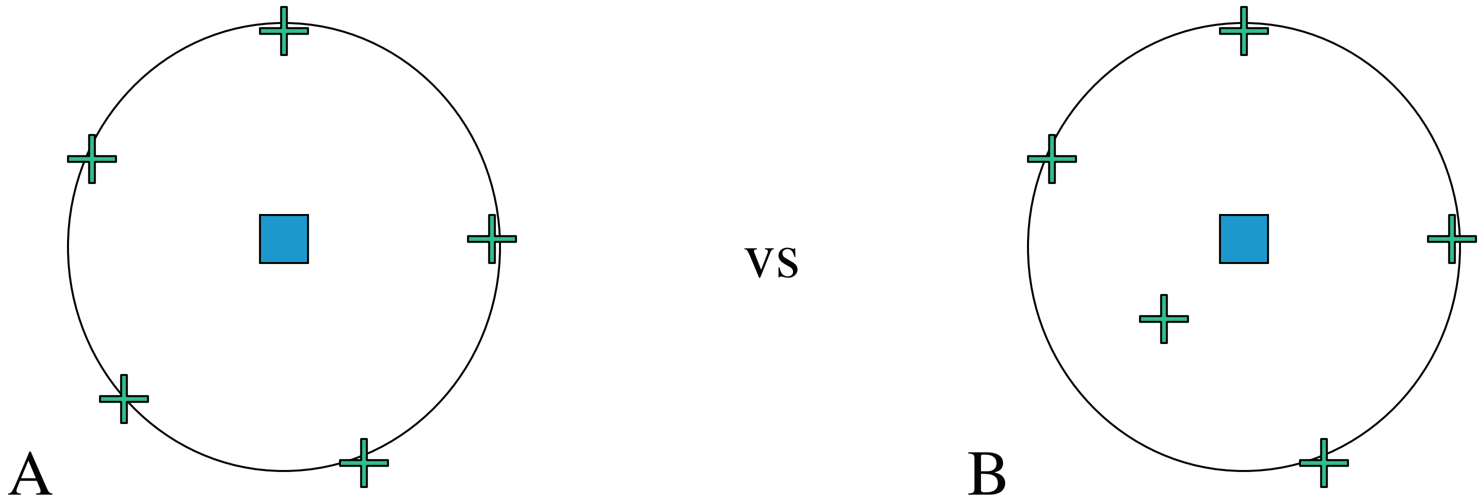
Exemple



a) **Le bloc à estimer en B est moins variable**
b) La redondance est la même
c) La position par rapport au bloc est légèrement + favorable en B

Var(e) + grande en A

Exemple



a) Le bloc à estimer est le même

b) La redondance est un peu plus forte en B

c) La position par rapport au bloc est plus favorable en B

Var(e) + grande en A

En terme du variogramme

$$\sigma_e^2 = Var(Z_v) + \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) - 2\sum_i \lambda_i Cov(Z_i, Z_v)$$

Si $\sum \lambda_i = 1$ (comme c'est le cas pour la plupart des estimateurs)

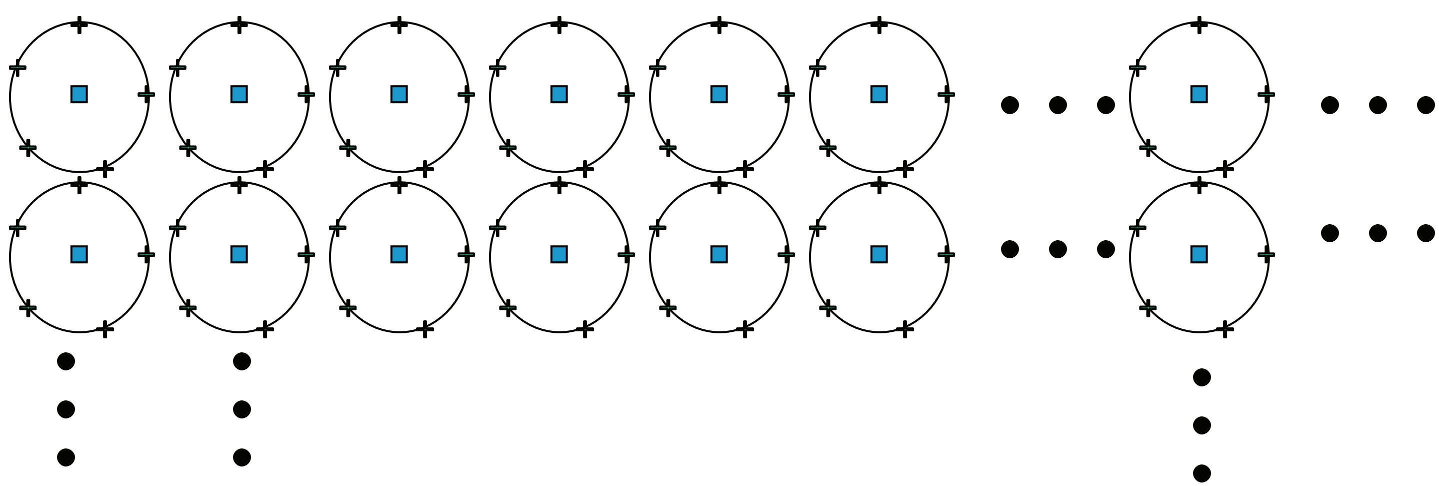
$$\sigma_e^2 = -\bar{\gamma}(v,v) - \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + 2\sum_i \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, v)$$

⇒ On peut calculer Var(e) dès que l'on connaît le variogramme
Il n'est pas nécessaire que le variogramme montre un palier

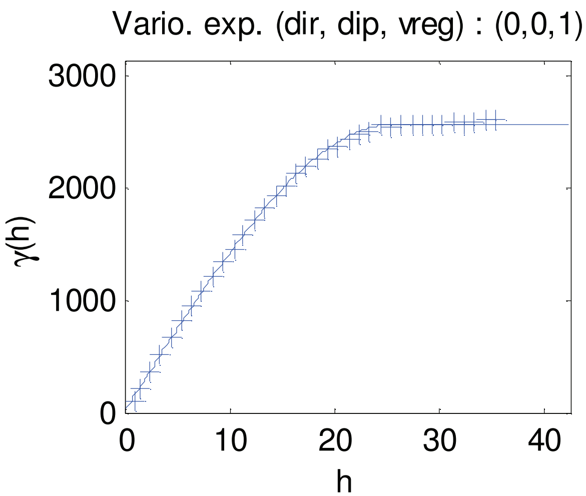
⇒ Var(e) ne dépend pas des valeurs observées, il ne dépend que de la géométrie du problème et du variogramme

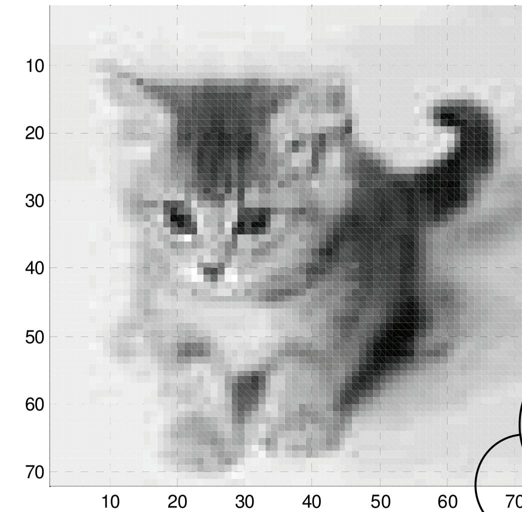
Interprétation de Var(e)

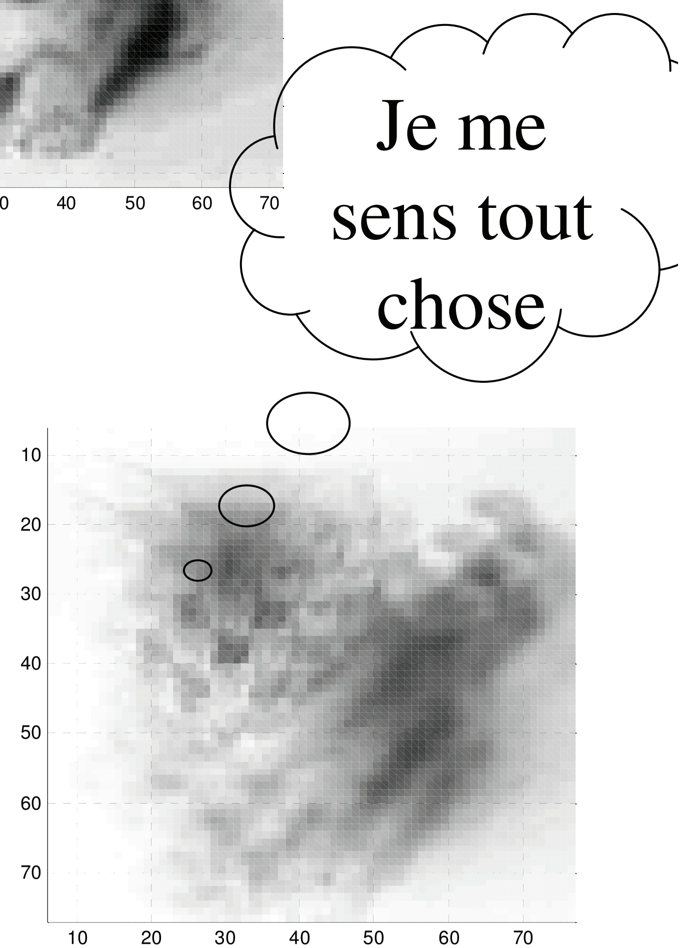
- Ne dépend pas des valeurs => mesure non-conditionnelle
- Représente la variance des erreurs que l'on obtiendrait si l'on faisait glisser le bloc et la configuration de données sur un domaine très grand



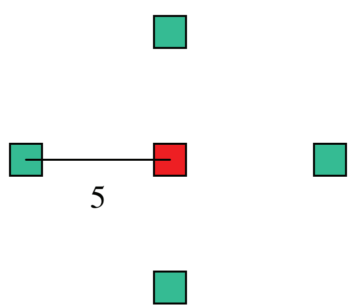
Exemple







Sphérique isotrope, C0=0, C=2568 a=25.95

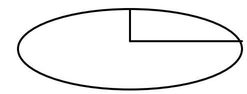


Pixel estimé

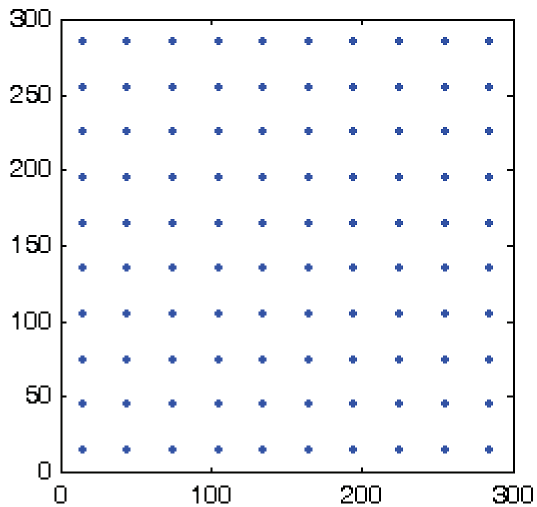
Var(e) théorique = 601

Var(e) expérimentale = 639

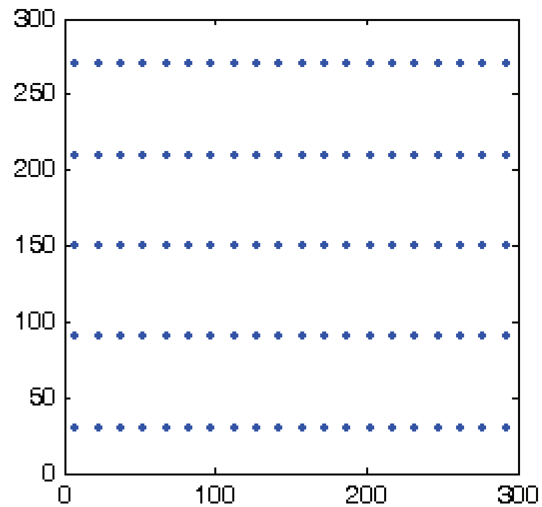
Variogramme sphérique, C0=10, C=40, ax=100 ay=25; zone 300 x 300



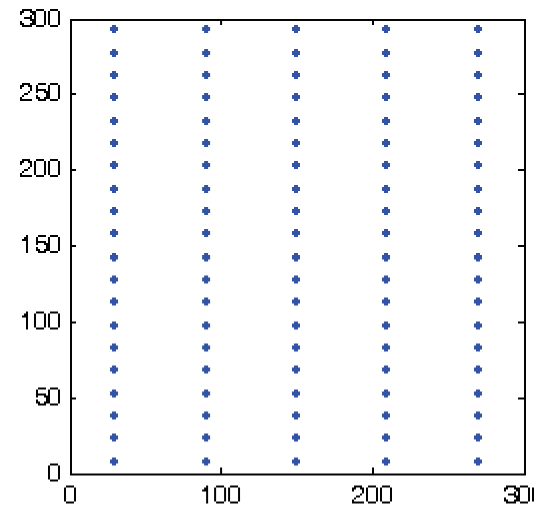
100 observations, 3 patrons, lequel procure la plus grande précision pour l'estimation globale ?



$\sigma^2 = 0.24$



$\sigma^2 = 0.36$



$\sigma^2 = 0.19$

Krigeage ordinaire

Dans le krigeage ordinaire l'estimateur prend alors la forme :

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_i$$

Pour que l'estimateur soit sans biais, il faut imposer la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

On a un problème de minimisation sous contrainte => méthode de Lagrange, i.e. on forme le lagrangien.

$$L(\lambda,\mu) = \sigma_e^2 + 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - 1\right)$$

$$= \mathrm{Var}[Z_V] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j \mathrm{Cov}[Z_i, Z_j] - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathrm{Cov}[Z_v, Z_i] + 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - 1\right)$$

Poser les dérivées partielles par rapport à λ et μ égales à zéro => système linéaire de n+1 équations à n+1 inconnues

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{Cov}[Z_i, Z_j] + \mu = \operatorname{Cov}[Z_v, Z_i] \qquad \forall\, i = 1 \ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

À l’optimum, la variance d’estimation est :

$$\sigma_{ko}^2 = \operatorname{Var}[Z_v] - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{Cov}[Z_v, Z_i] - \mu$$

Sous forme matricielle :

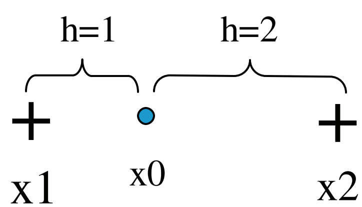
$$K_o \lambda_o = k_o$$

$$\sigma_{ko}^2 = \sigma_v^2 - \lambda'_o\, k_o$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 & \mathrm{Cov}(Z_1,Z_2) & \bullet & \mathrm{Cov}(Z_1,Z_n) & 1 \\ \mathrm{Cov}(Z_2,Z_1) & \sigma^2 & \bullet & \mathrm{Cov}(Z_2,Z_n) & 1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathrm{Cov}(Z_n,Z_1) & \mathrm{Cov}(Z_n,Z_2) & \bullet & \sigma^2 & 1 \\ 1 & 1 & \bullet & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{K_o} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \bullet \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix}}_{\lambda_o} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(Z_1,Z_v) \\ \mathrm{Cov}(Z_2,Z_v) \\ \bullet \\ \mathrm{Cov}(Z_n,Z_v) \\ 1 \end{bmatrix}}_{k_o}$$

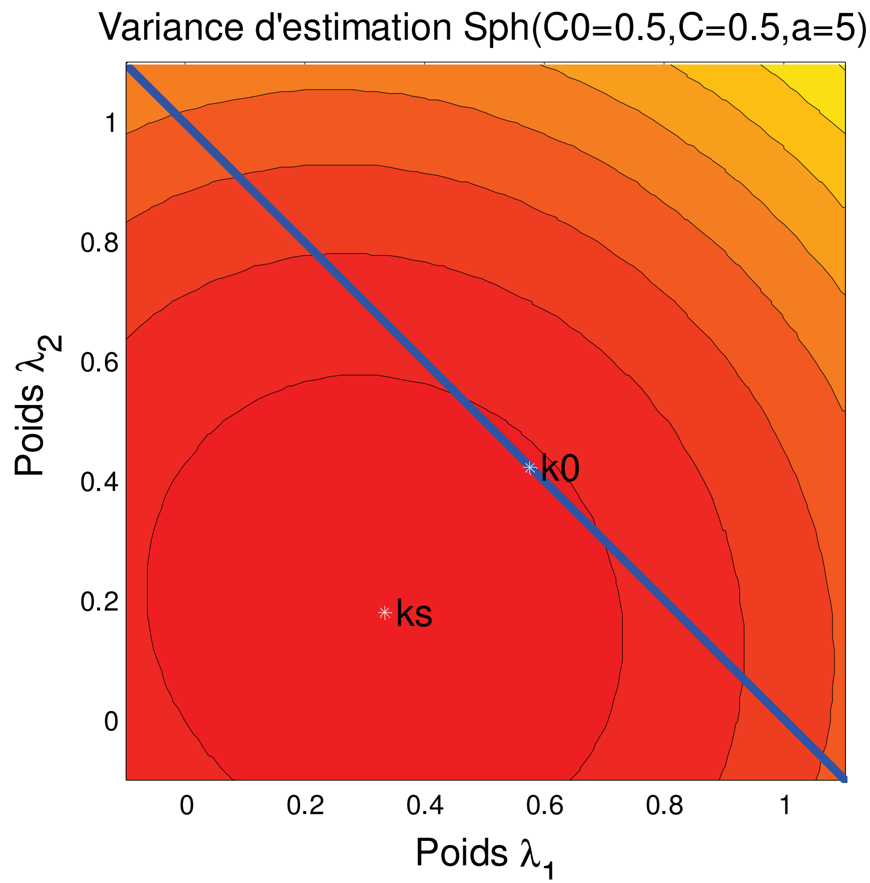
Le krigeage permet d'estimer directement un bloc (Z_v) ou un point (Z_0)
Tout ce qui change c'est le membre de droite k_0.

Le krigeage d'un bloc est égal à la moyenne des krigeages ponctuels dans le bloc.

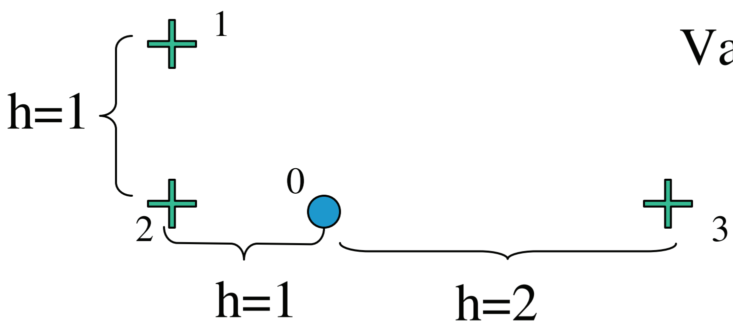


On a toujours :

$$\sigma^2_{ko} \geq \sigma^2_{ks}$$



Exemple numérique détaillé



Variogramme sphérique, $C_0=1$, $C=10$, $a=3$

$Z_1=9$, $Z_2=3$, $Z_3=4$

	X0	X1	X2	X3
x0	0	1.4	1	2
x1	1.4	0	1	3.2
x2	1	1	0	3
x3	2	3.2	3	0

	X0	X1	X2	X3
x0	0	7.55	5.81	9.52
x1	7.55	0	5.81	11
x2	5.81	5.81	0	11
x3	9.52	11	11	0

$h \longrightarrow \gamma(h)$

	X0	X1	X2	X3
X0	11	3.45	5.19	1.48
X1	3.45	11	5.19	0
X2	5.19	5.19	11	0
x3	1.48	0	0	11

C(h)

$$\begin{bmatrix} 11 & 5.19 & 0 & 1 \\ 5.19 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.45 \\ 5.19 \\ 1.48 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .21 \\ .51 \\ .28 \\ -1.55 \end{bmatrix}$$

$$Z_0^* = \Sigma \lambda_i Z_i = (.21)*9 + (.51)*3 + (.28)*4 = 4.54$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ko}^2 &= \sigma^2 - \lambda' k_0 \\ &= 11 - 0.21*3.45 - 0.51*5.19 - 0.28*1.48 - (-1.55)*1 \\ &= 8.76 \end{aligned}$$

Propriétés du krigeage

i. Linéaire, sans biais, à variance minimale, par construction.

ii. Interpolateur exact

iii. Effet d'écran

iv. Tient compte de la taille du champ a estimer et de la position des points entre eux.

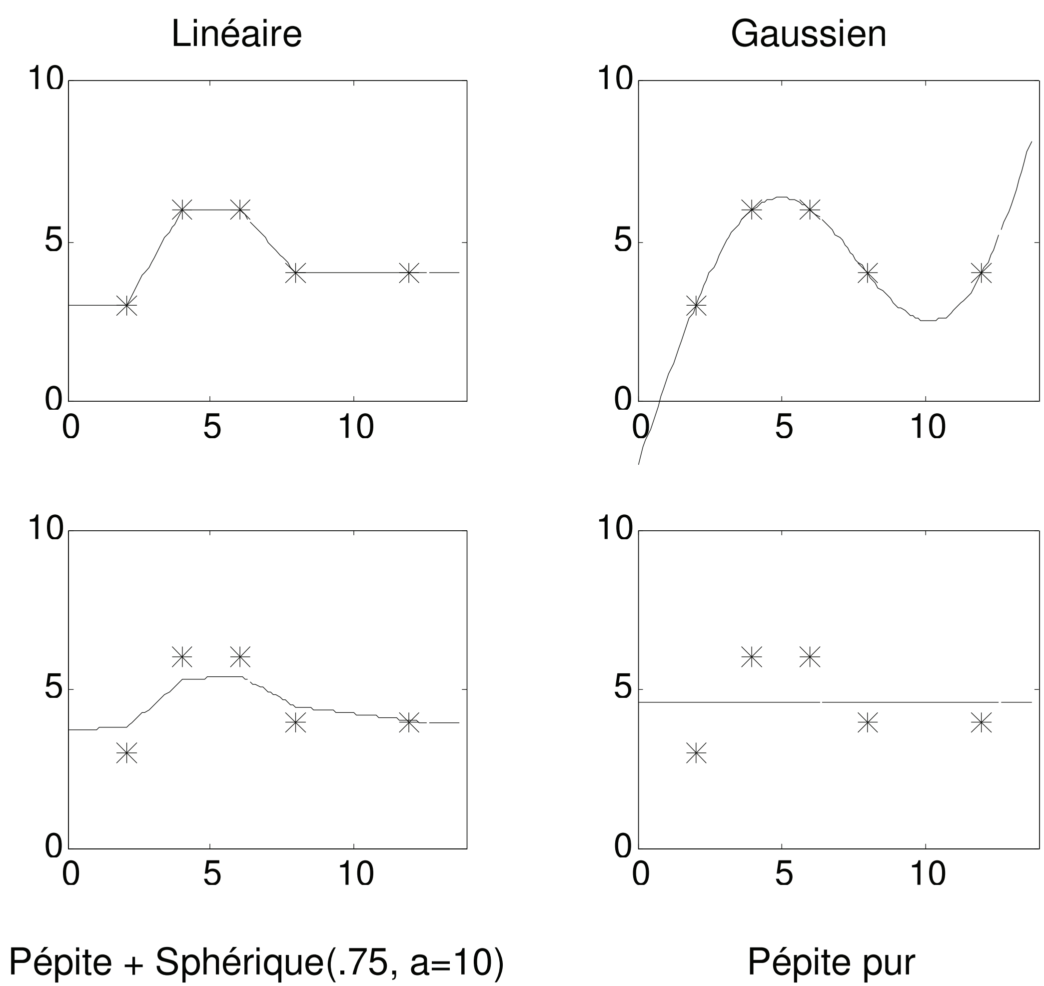
v. Tient compte de la continuité spatiale du phénomène étudié

vi. Effet de lissage

vii. Presque sans biais conditionnel.

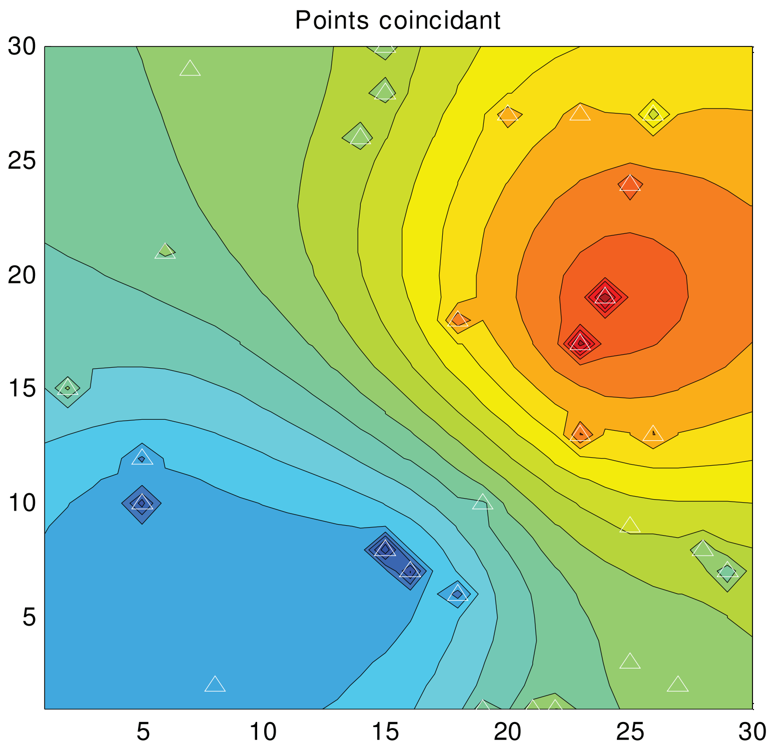
viii. Transitif (cohérence des estimés)

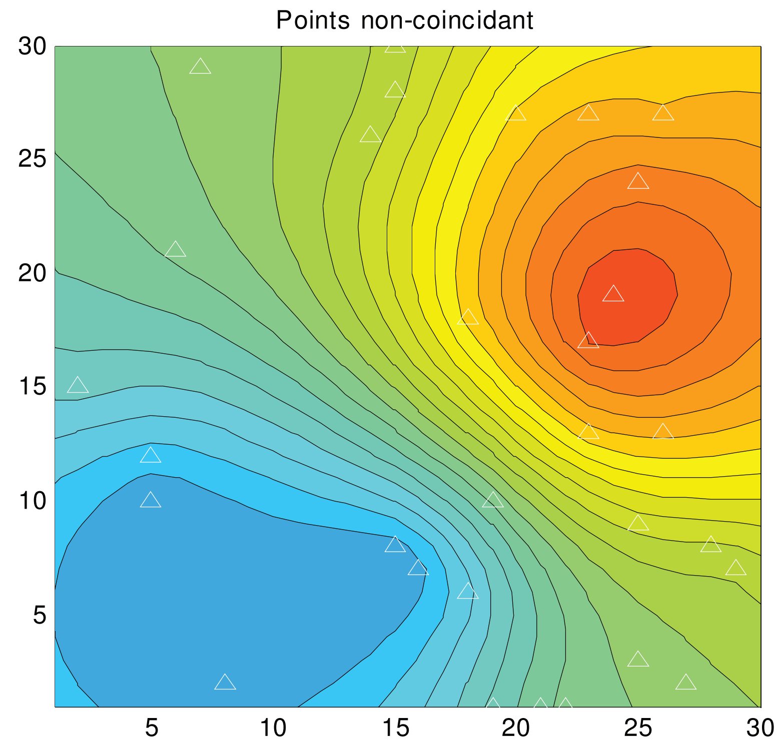
Interpolateur exact



En présence d'effet de pépite, les valeurs interpolées sont discontinues => éviter d'estimer un point observé

Exemple

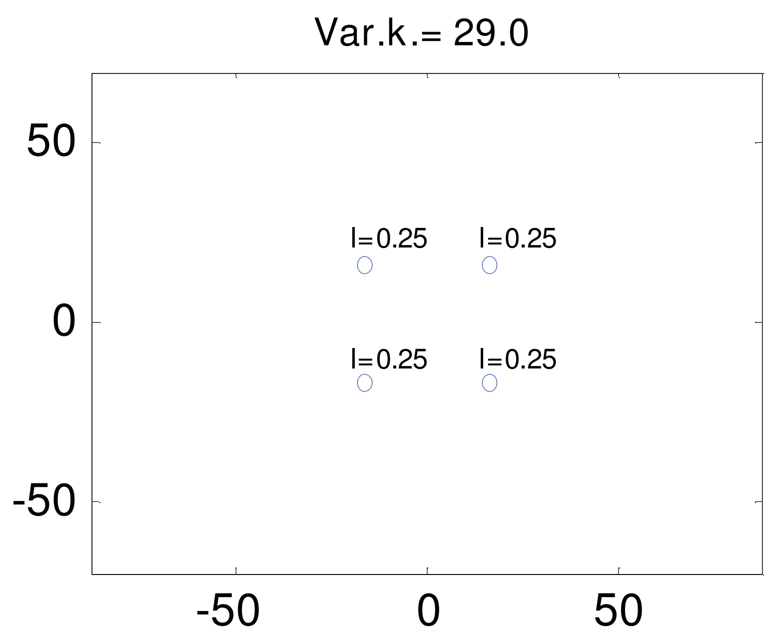


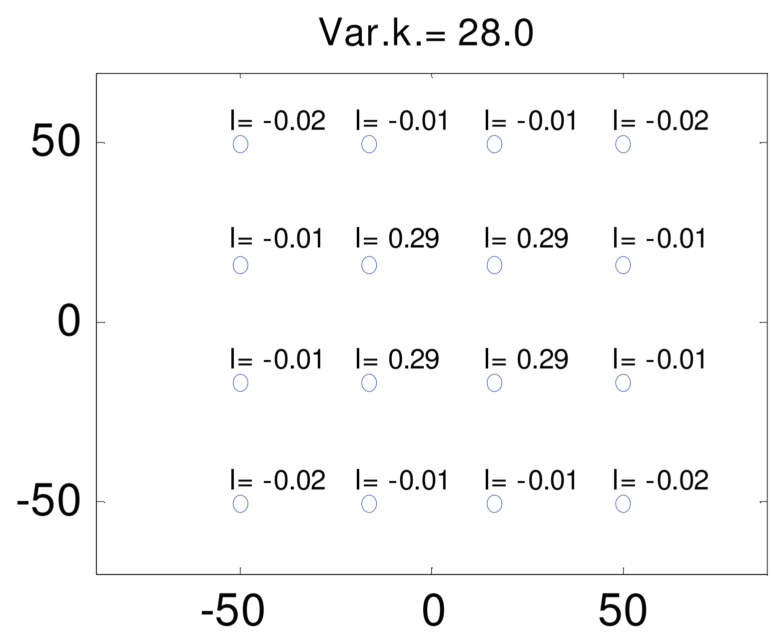


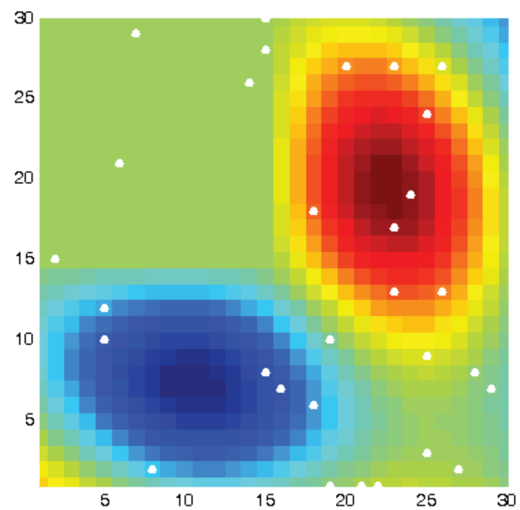
En décalant d’un epsilon la grille d’interpolation, on évite les discontinuités sur la carte interpolée

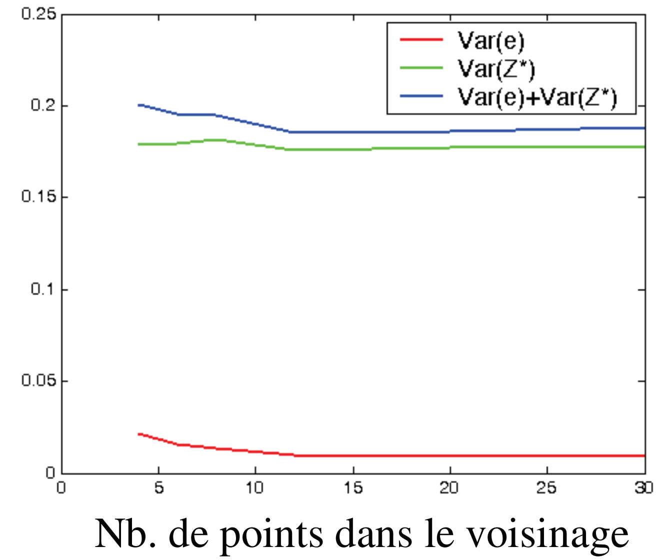
Effet d’écran

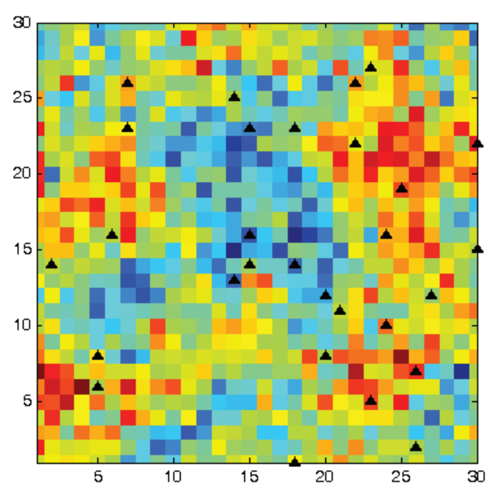
Variogramme sphérique; C=100, a=100, C0=0

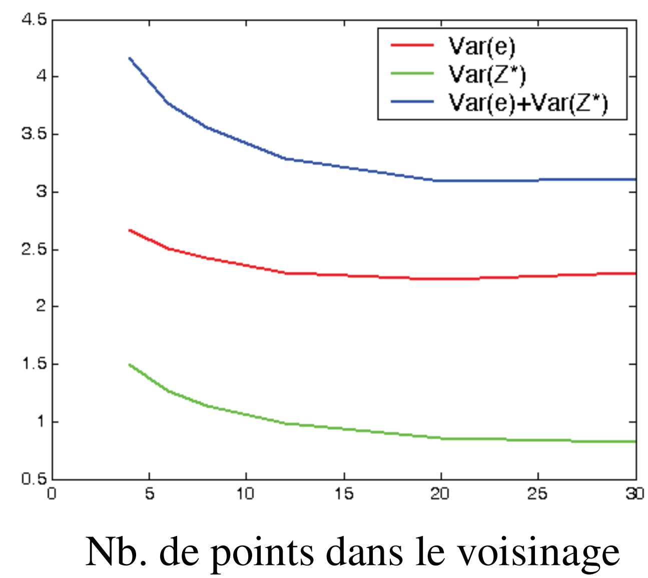




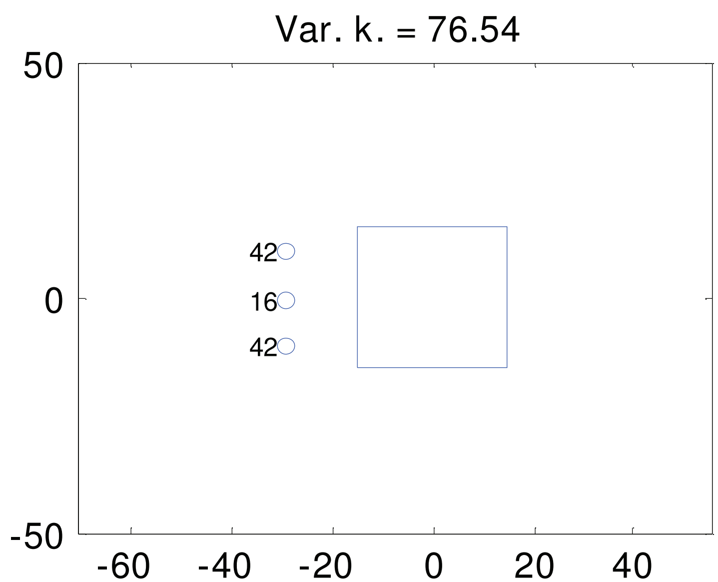


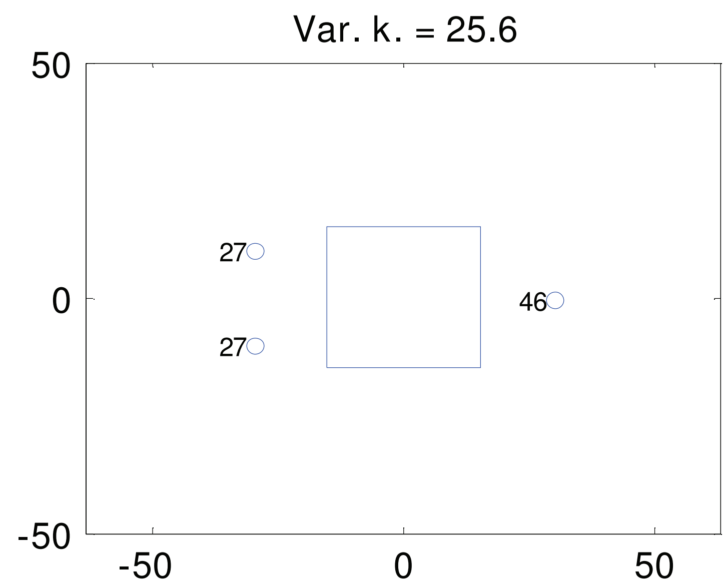

Var(e)
Var(Z*)
Var(e)+Var(Z*)
Nb. de points dans le voisinage




Var(e)
Var(Z*)
Var(e)+Var(Z*)
Nb. de points dans le voisinage

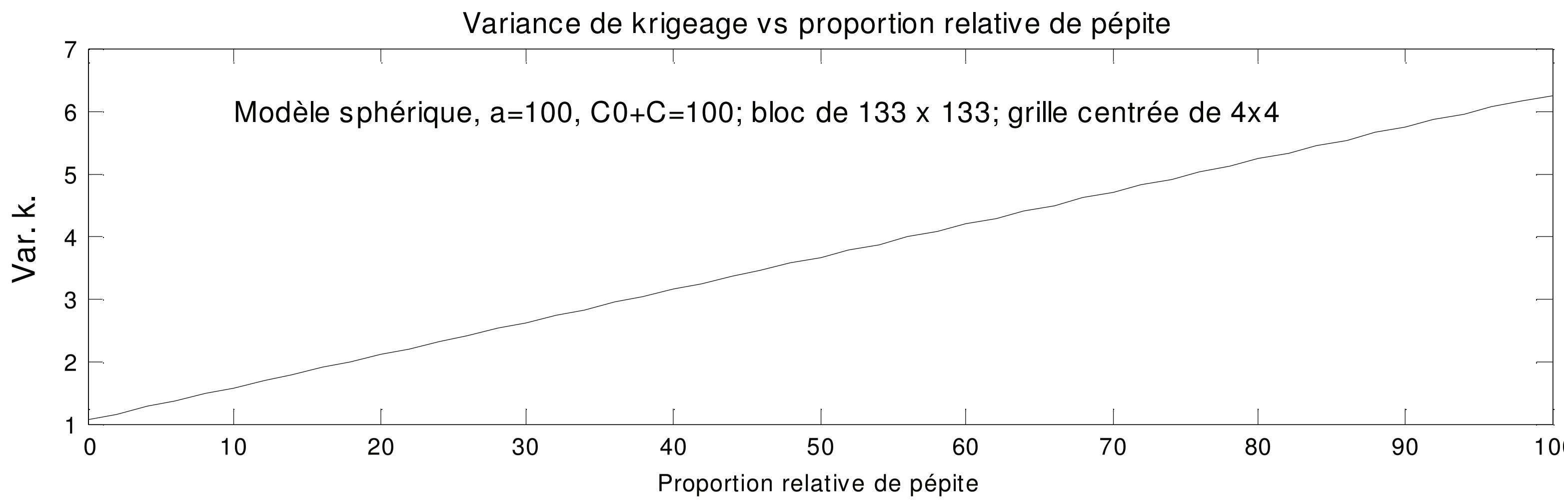
Tient compte de la redondance des données



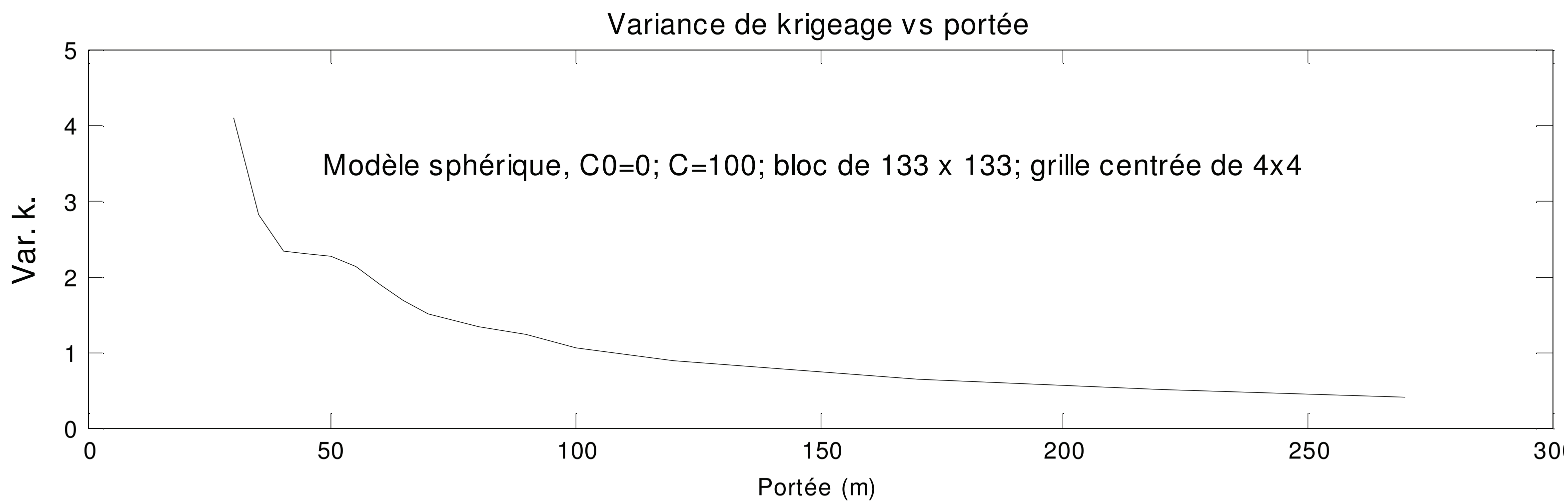


Tient compte de la continuité spatiale

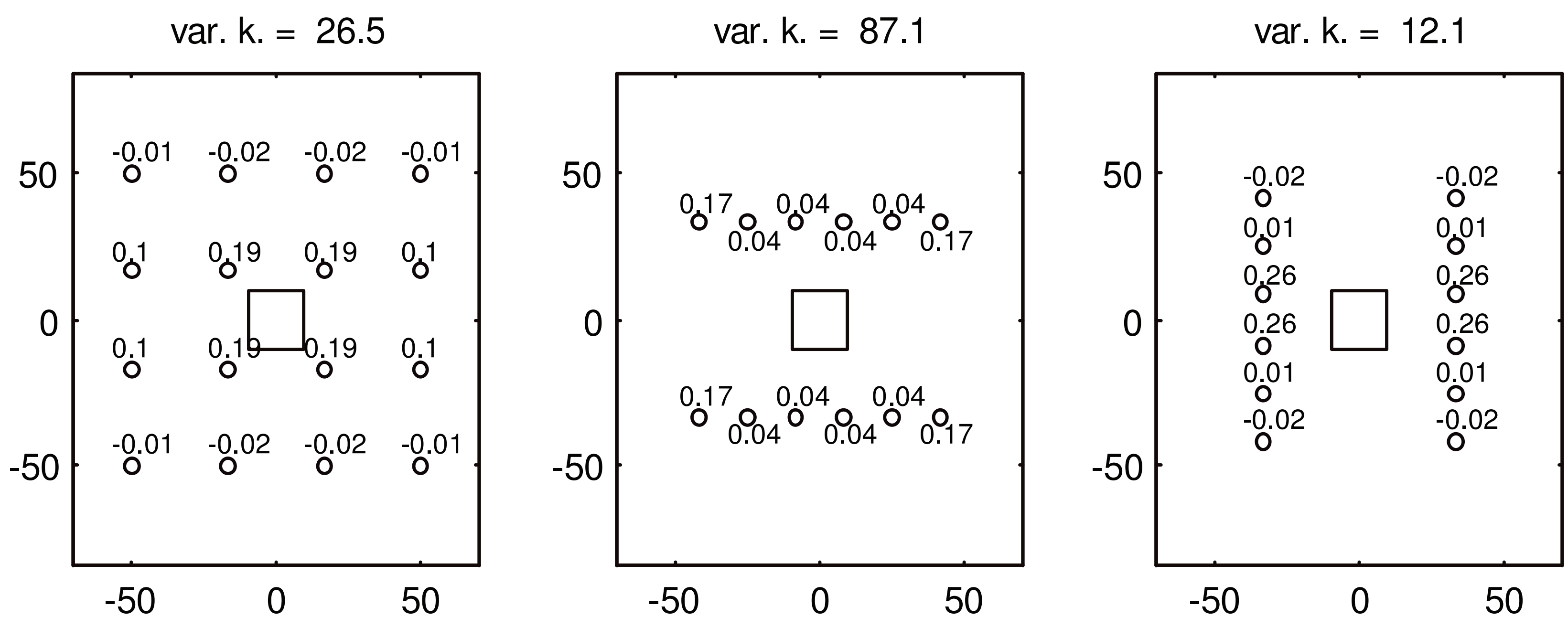
Effet de pépite



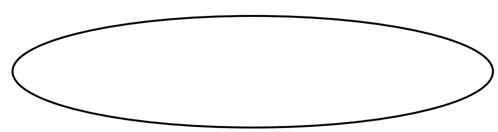
Portée



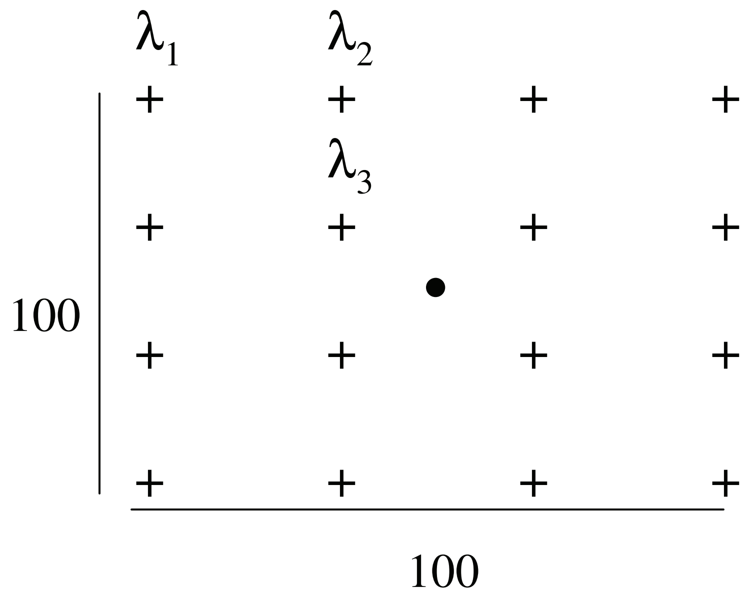
Influence d'anisotropies

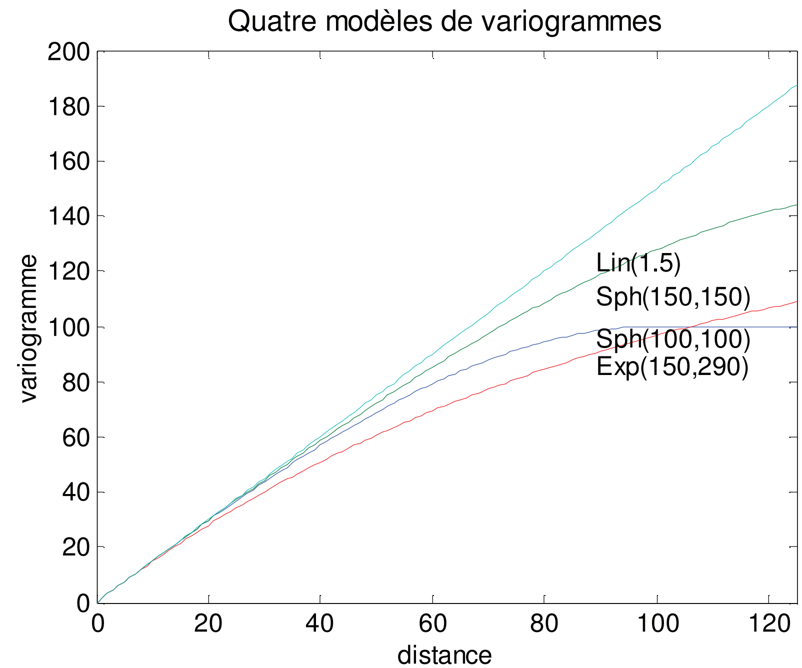


Var. anisotrope



Influence du modèle





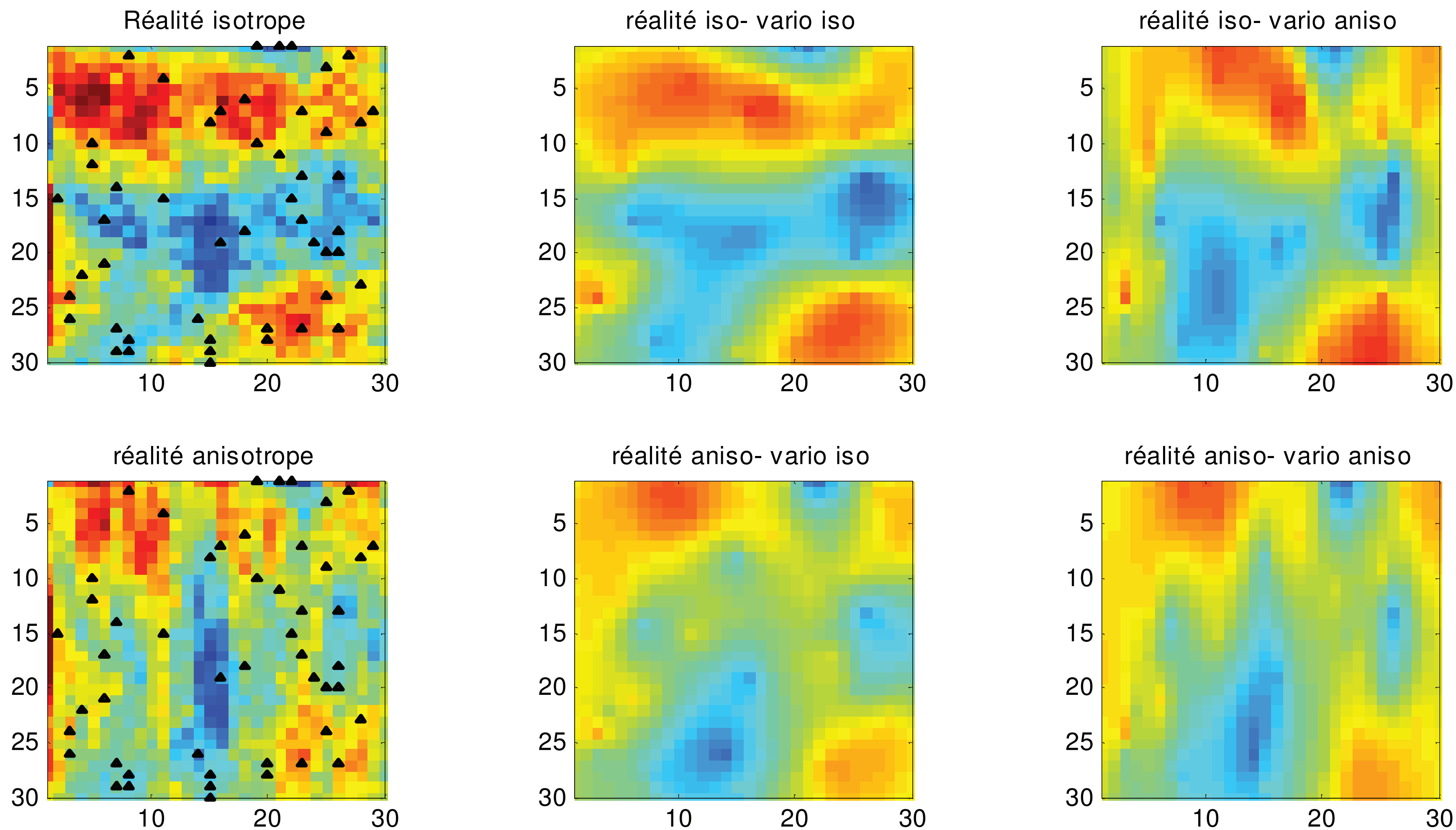
	λ_1	λ_2	λ_3	σ_k^2
Sphérique, C=100, a=100	-.02	-.01	.29	28.0
Sphérique, C=150, a=150	-.01	-.01	.29	27.8
Exp. C=150, a_{eff}=290	-.01	-.01	.28	28.2
Linéaire, pente=1	-.01	-.01	.28	27.6

4 ajustements équivalents h<30

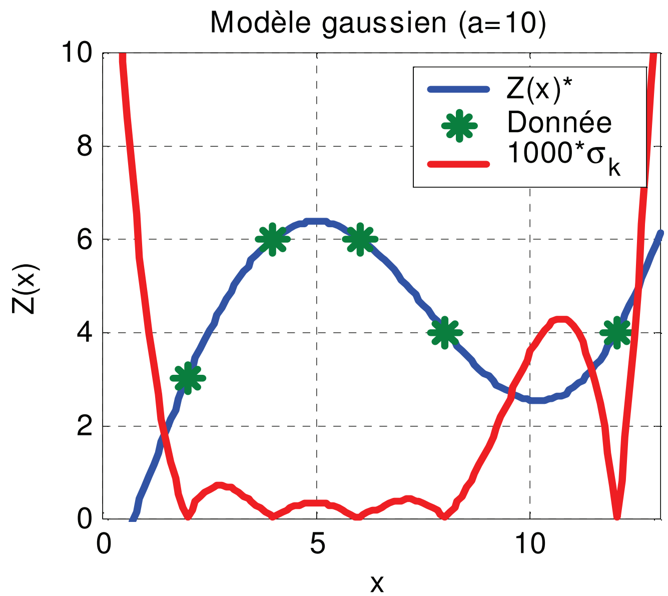
=> mêmes poids λ

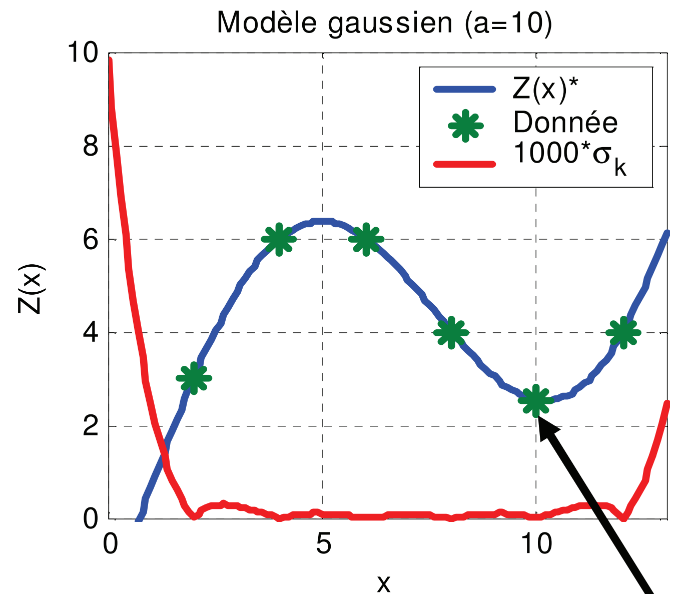
=> même σ_k^2

Exemples


Réalité isotrope
réalité iso- vario iso
réalité iso- vario aniso
réalité anisotrope
réalité aniso- vario iso
réalité aniso- vario aniso
5
10
15
20
25
30
10
20
30

Le krigeage est transitif





À droite, à x=10, on observe une donnée égale à la valeur krigée à gauche. Toutes les valeurs krigées demeurent inchangées. Seules les variances de krigeage sont réduites.