

MTH2302C

Exercices sur les variogrammes

1- On a un variogramme sphérique avec $C_0=1$ et $C=10$, $a=20$.

Soit les points $x_1=(0,0)$ et $x_2=(10,0)$

- Quelle est la variance de $Z(x_1)$? de $Z(x_2)$?
- Quelle est la covariance entre $Z(x_1)$ et $Z(x_2)$?
- On forme $Z_3=0.8*Z(x_1)+0.2*Z(x_2)$. Quelle est la variance de Z_3 ? Quelle est la covariance de Z_3 avec $Z(x_1)$?
- On forme $Z_4=0.4*Z(x_1)+0.6*Z(x_2)$. Quelle est la covariance entre Z_3 et Z_4 ?

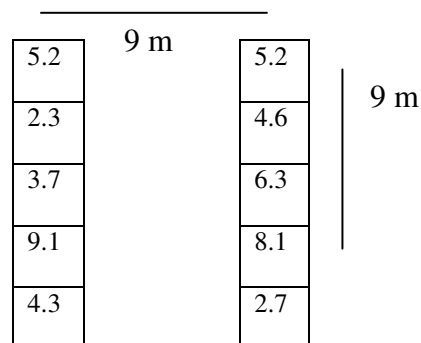
2- Un site contaminé au Pb montre un modèle de variogramme comprenant 3 composantes différentes :

Composante	C (ppm ²)	a_g (m), θ_g (azimut)	a_p (m), θ_p (azimut)
Effet pépité	120	-	-
Sphérique 1	580	1000, 87°	300, 177°
Sphérique 2	1200	400, 42°	200, 132°

où θ_g est la direction de meilleure continuité et θ_p est la direction de moindre continuité.

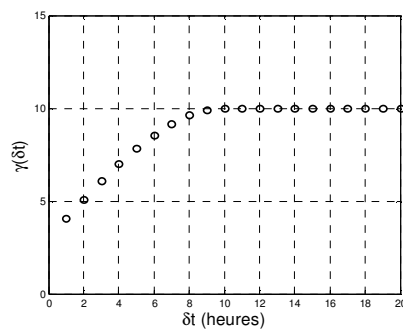
Selon l'azimut 30°, à quelle distance séparant deux points peut-on considérer les teneurs en Pb non-corrélées ?

3- On vous donne 2 portions de forage sur lesquelles sont indiquées les teneurs en Au (ppm) pour des carottes de 3m. les 2 forages sont espacés de 9m de centre à centre (le dessin n'est pas à l'échelle).



Calculez le variogramme expérimental omnidirectionnel à la distance $h=9m$ exactement en prenant soin d'indiquer toutes les paires utilisées.

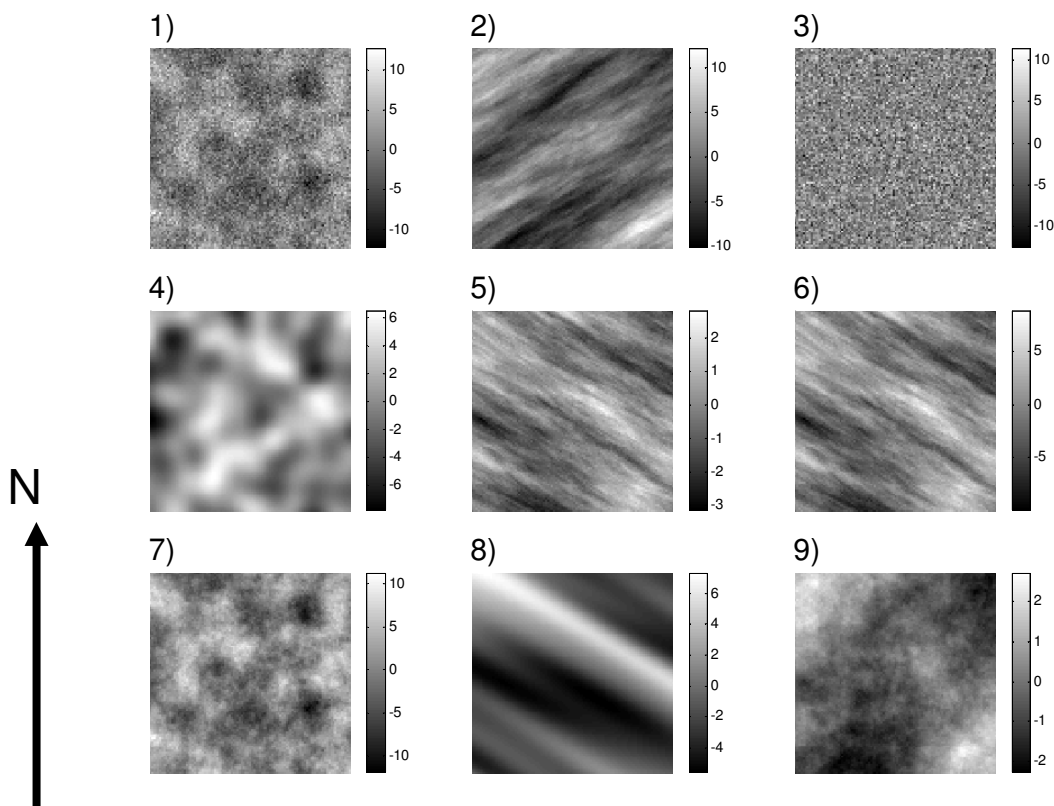
4- Soit le variogramme suivant représentant la variation de la teneur du ciment en C3S (C3S mesuré en %) dans le temps à la sortie d'une cimenterie.



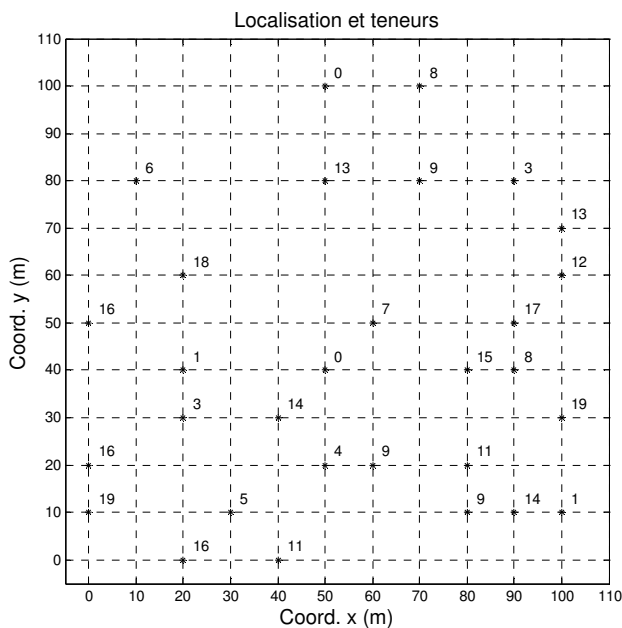
Quel est le modèle de variogramme (type et paramètres) qui permet un ajustement adéquat au variogramme expérimental? Indiquez clairement les unités des paramètres fournis.

5- Associez à chacun des modèles de variogrammes suivants une image correspondante (chaque image fait 100 x 100). Répondez en indiquant d'abord la lettre identifiant le variogramme puis le chiffre identifiant l'image (ex. A-1).

Modèle	Description
A	Pépite pur $C_0=10$
B	Pépite+sphérique isotrope $C_0=5, C=5, a=20$
C	Sphérique isotrope $a=20, C=10$
D	Sphérique isotrope $a=100, C=10$
E	Sphérique anisotrope , $a_{120}=100, a_{30}=20, C=1$
F	Sphérique anisotrope , $a_{60}=100, a_{150}=20, C=10$
G	Sphérique anisotrope , $a_{120}=100, a_{30}=20, C=10$
H	Gaussien isotrope , $a_{\text{effectif}}=20, C=10$
I	Gaussien anisotrope , $a_{120}=100, a_{30}=20, C=10$ (portées effectives)



6- Calculez le variogramme expérimental des données suivantes dans la direction (azimut) 90° pour les distances 10 m et 20 m (tolérance angulaire 0.1°).



7- Dans une mine 2D de Cu, un géologue vous dit qu'il a observé les faits suivants :

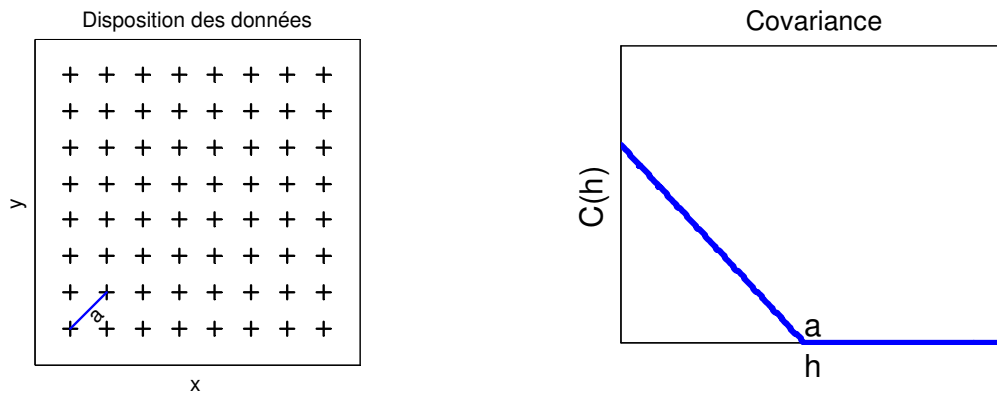
- Il a prélevé plusieurs échantillons de même taille côte à côte et il a obtenu, pour ces échantillons voisins, une différence carré des teneurs égale, en moyenne, à $2\%^2$.
- Selon son expérience, la zone d'influence d'un échantillon est de l'ordre de 70m dans la direction est-ouest. Il affirme que cette zone d'influence est approximativement deux fois plus courte dans la direction nord-sud. La direction est-ouest correspond à l'orientation générale des fractures dans le gisement.
- Il a calculé une variance de $10\%^2$ pour la teneur en Cu avec l'ensemble des échantillons couvrant une très grande surface par rapport à la zone d'influence d'un échantillon.

Suggérez un modèle de variogramme (type et paramètres) pouvant tenir compte de ces informations.

8- Un gisement de Zn présente un variogramme sphérique (2D) avec effet de pépité de $4\%^2$, $C=20\%^2$ et des portées suivant les différentes directions décrites par un modèle d'anisotropie géométrique avec les axes principaux en « x » et « y » et $a_x=10\text{m}$ et $a_y=20\text{m}$. On désire estimer la teneur au point x_0 (situé en $(0,0)$) en se servant des teneurs mesurées aux points x_1 à x_3 . Les coordonnées des points x_1 à x_3 sont respectivement $(-10,0)$, $(0,20)$ et $(5,22)$. On a observé à ces points les teneurs respectivement $Z_1=2\%$, $Z_2=3.3\%$ et $Z_3=3\%$.

Quelle est la covariance entre les teneurs aux points x_2 et x_3 ?

9- Soit la disposition de points Z_i et le modèle de covariance présenté à la figure suivante (deux points consécutifs sur une même ligne sont espacés de $a/2^{0.5}$) :

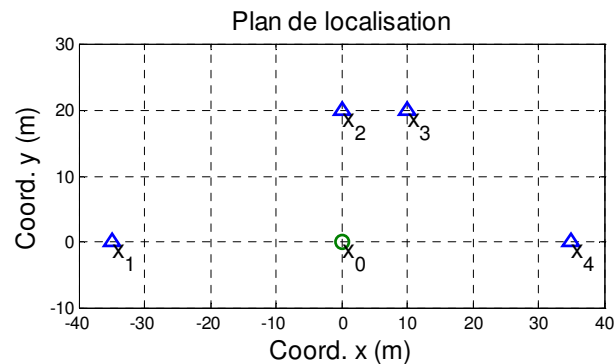


On forme une nouvelle variable aléatoire W avec l'expression suivante : $W = \sum_{i=1}^{64} (-1)^{i_l+i_c} Z_i$ où « il » et « ic » sont respectivement les indices de ligne et de colonne décrivant la position de la $i^{\text{ème}}$ donnée sur la figure précédente. On calcule la variance théorique de W avec ce modèle :

$$\text{Var}(W) = 64 - 2 * 2 * 56 * 0.292 = -1.6074$$

Considérant ce dernier résultat, que peut-on dire du modèle de covariance?

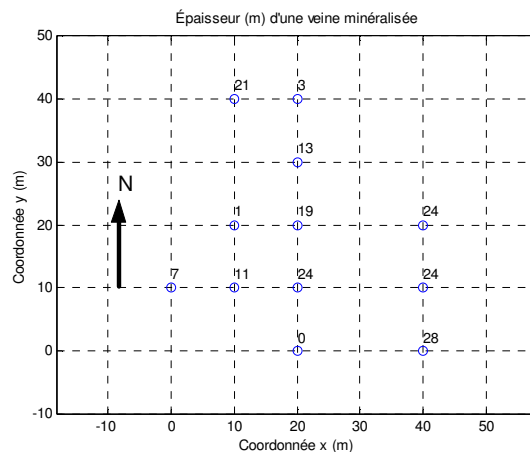
10- Soit le plan de localisation suivant :



Le variogramme est sphérique anisotrope avec $a_x=30\text{m}$ et $a_y=50\text{m}$ et effet de pépite de $5\%^2$. Le « C » du sphérique est de $50\%^2$ (palier total $55\%^2$).

Quelle est la covariance entre les teneurs aux points x_0 et x_3 ?

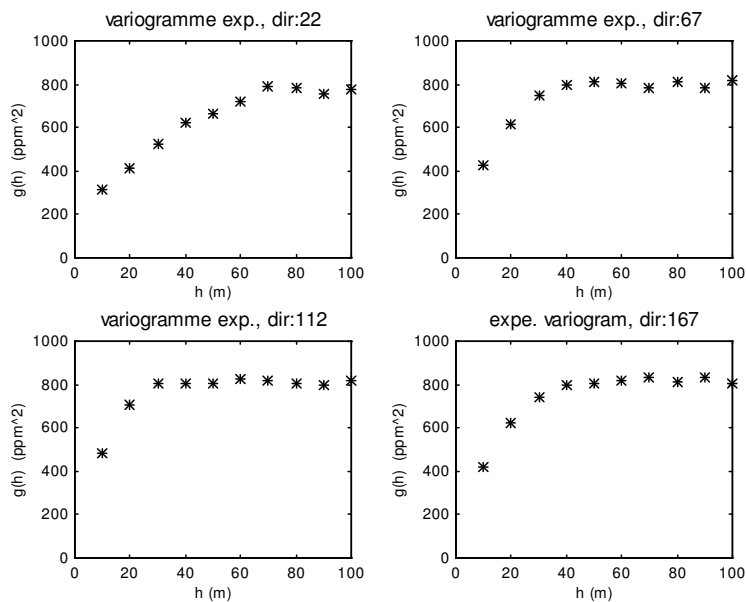
11- La figure suivante montre l'épaisseur d'une veine mesurée en certains points.



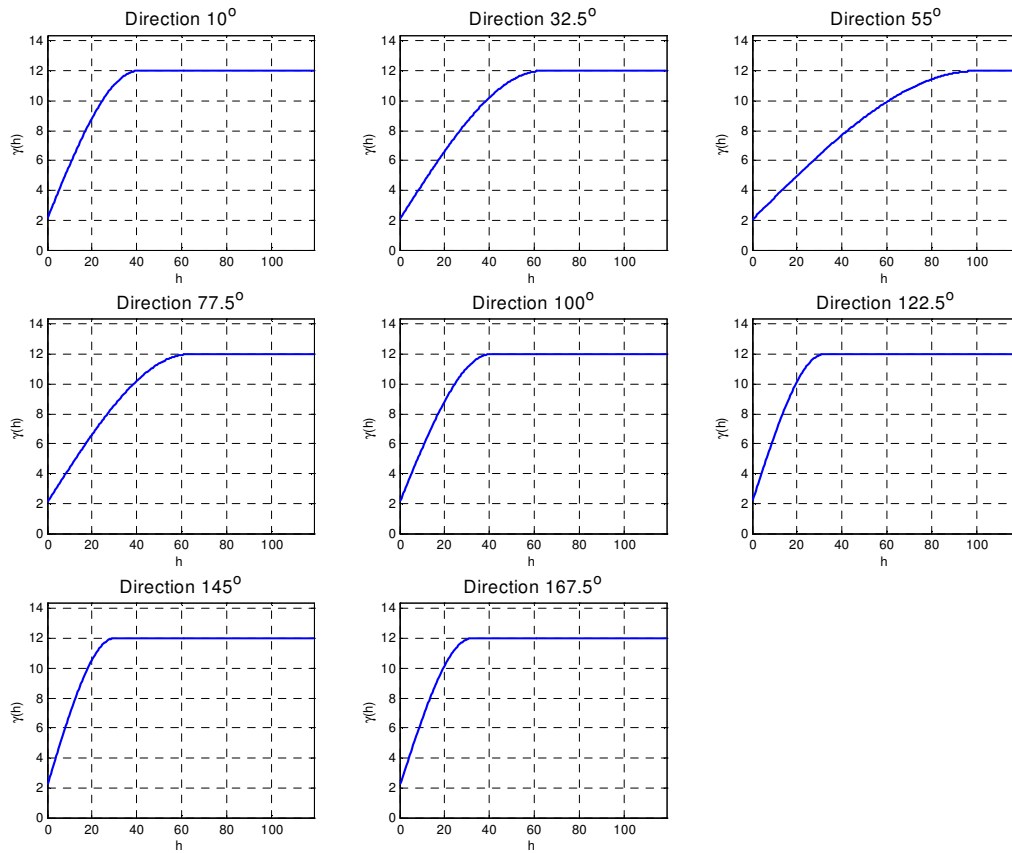
Quelle est la valeur du variogramme expérimental dans la direction 90° (azimut) pour la distance $h=20\text{m}$ (tolérance angulaire de 0 et tolérance sur la distance de 0)? Indiquez clairement toutes les paires considérées dans votre calcul ainsi que les unités du résultat.

12- On a un gisement 2D dont la direction préférentielle de la minéralisation est 22° (azimut). Soit les 4 variogrammes expérimentaux suivants.

Décrivez le modèle de variogramme (en spécifiant tous les paramètres du modèle), permettant un ajustement adéquat de ces variogrammes expérimentaux.



13- - Dans un gisement 2D, on a obtenu le modèle de variogramme suivant illustré dans différentes directions.



a) Décrivez le modèle de variogramme illustré sur ces figures.

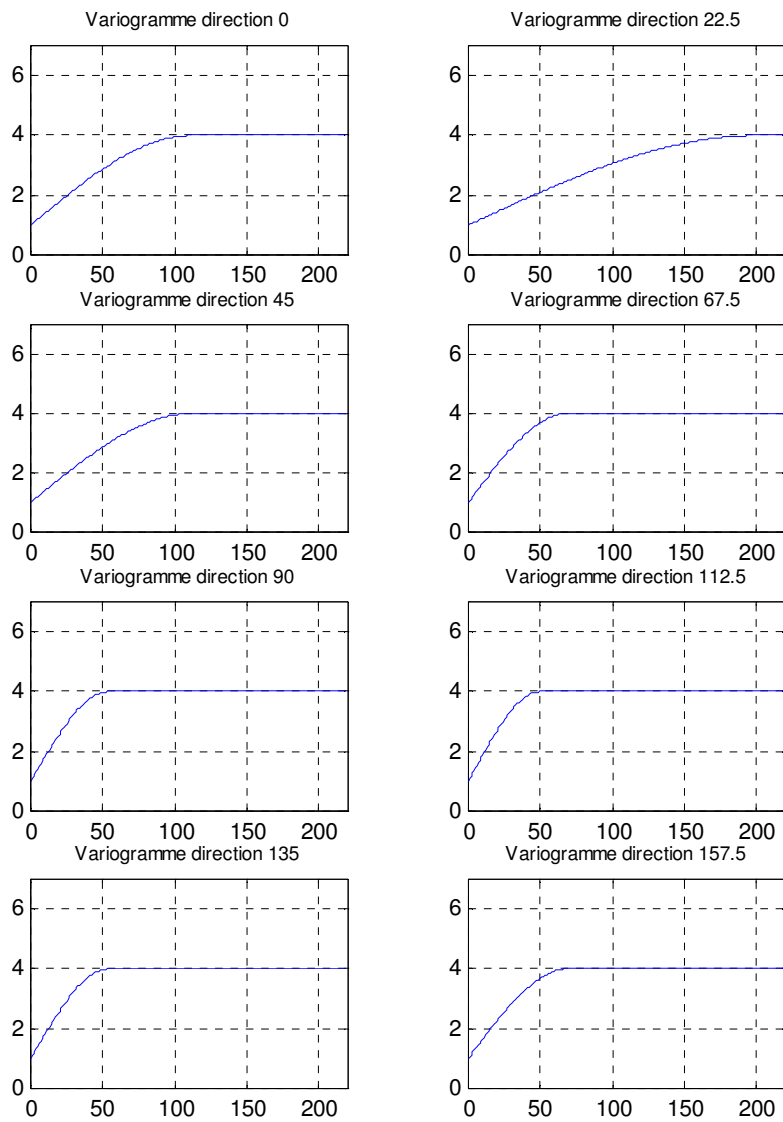
b) Soit 2 points espacés de 20m et définissant un azimut de 43° . Quelle est la covariance entre ces 2 points?

c) Les données ayant servi au calcul des variogrammes ont été obtenues à partir d'une procédure analytique assurant une bonne précision. Quelle serait la conséquence sur le variogramme d'utiliser une procédure d'analyse moins précise ?

14- 2- La figure suivante montre un modèle de variogramme selon différentes directions (azimuts).

a) Décrivez le modèle et indiquez les paramètres.

b) Selon ce modèle, quelle est la corrélation entre les variables aléatoires correspondant aux points $x_1=[0,0]$, $x_2=(30,20)$. La 1^{ère} coordonnée correspond à la direction « Est » (azimut 90), la 2^e coordonnée correspond au « Nord ».



Corrigé :

1- 1 a) $\text{Var}(Z(x_1))=\text{Var}(Z(x_2))=C_0+C=11$

b) $\gamma(h)=1+10*(1.5(10/20)-0.5*(10/20)^3)=7.875$

$\text{Cov}(Z(x_1),Z(x_2))=11-7.875=3.125$

c) $\text{Var}(Z_3)=0.8^2\text{Var}(Z(x_1))+0.2^2\text{Var}(Z(x_2))+2*0.8*0.2*\text{Cov}(Z(x_1),Z(x_2))$
 $=0.64*11+0.04*11+2*0.8*0.2*3.125=8.48$

$\text{Cov}(Z_3,Z(x_1))=0.8*\text{Var}(Z(x_1))+0.2*\text{Cov}(Z(x_1),Z(x_2))$
 $=0.8*11+0.2*3.125=9.425$

d) $\text{Cov}(Z_3,Z_4)=\text{Cov}(0.8*Z(x_1)+0.2*Z(x_2),0.4*Z(x_1)+0.6*Z(x_2))=$
 $0.8*0.4*\text{Var}(Z(x_1))+0.8*0.6*\text{Cov}(Z(x_1),Z(x_2))+0.2*0.4*\text{Cov}(Z(x_1),Z(x_2))+0.2*0.6*\text{Var}(Z(x_2))$
 $=11*(0.8*0.4+0.2*0.6)+3.125*(0.8*0.6+0.2*0.4)=6.59$

2- On cherche la portée selon la direction 30° . On calcule la portée pour chacune des 2 composantes sphériques et on retient la valeur maximale.

Sphérique 1 : angle avec a_g : 57° , portée à 30°
 $=1000*300/[1000^2*\sin(57)^2+300^2*\cos(57)^2]^{0.5}=351.1$

Sphérique 2 : angle avec a_g : 12° , portée à 30°
 $=400*200/[400^2*\sin(12)^2+200^2*\cos(12)^2]^{0.5}=376.3$

La portée dans la direction 30° est donc 376.3 m

3- à 9m paires : (5.2, 9.1), (2.3,4.3) (5.2, 6.3) (4.6, 2.7) (5.2,5.2) (2.3,4.6) (3.7,6.3) (9.1,8.1), (4.3,2.7)

$N(h)=9$ paires

Somme des $\text{diff}^2=46.84$

$\gamma(h)=0.5*46.84/9=2.60$

4- Modèle sphérique avec $a=10$ heures, $C_0=3\% ^2$ et $C=7\% ^2$

5- A-3, B-1, C-7, D-9, E-5, F-2, G-6, H-4, I-8.

6- On calcule

h	N(h)	g(h)
10	4	33.5
20	7	23.571

7- Variogramme sphérique ou exponentiel avec anisotropie géométrique, portée principale selon est-ouest de 70m, portée la plus petite de 35m selon nord-sud, $C_0=0.5*2\% ^2=1\% ^2$, $C=10-1=9\% ^2$

8- $\text{Cov}(Z_2,Z_3) \rightarrow$ direction : $\text{azimut}=\text{atan}((5-0)/(22-20))=68.2^\circ$
portée dans cette direction : $20*10/((20\sin 68.2)^2+(10*\cos(68.2))^2)^{0.5}=10.56$
h entre les deux points : $(5^2+2^2)^{0.5}=5.385$
 $C(h)=20*(1-(1.5*5.385/10.56-0.5*(5.385/10.56)^3))=6.0287$

9- Comme on vient de trouver une combinaison linéaire avec une variance théorique négative, on doit conclure que le modèle de covariance utilisé n'est pas un modèle admissible en 2D (cependant il l'est en 1D)

10- la distance est $(100+400)^{0.5}=22.36$
 l'angle avec l'axe des y : $\text{atan}(10/20)=26.6^\circ$
 La portée dans cette direction = $50*30/(50^2\sin^2(26.6)+30^2\cos^2(26.6))^{0.5}=42.9\text{m}$

$C(h)=50*(1-1.5*22.36/42.9+0.5*(22.36/42.9)^3)=14.5$

11- $1/(2*4)[(0-28)^2+(24-24)^2+(19-24)^2+(7-24)^2]=137.25 \text{ m}^2$

12- Modèle sphérique $C_0=200$; $C=600$; anisotropie géométrique, ellipse orientée à 22° , $a_g=80$; $a_p=30$

13- a) Modèle sphérique avec $C_0=2$, $C=10$ et portées décrivant une anisotropie géométrique, avec $a_g=100$ dans la direction 55° et $a_p=30$ dans la direction 145° .

b) L'angle entre la direction 43° et la direction 55° est de 12° . La portée dans cette direction est $100*30/(100^2*\sin(12^\circ)^2+30^2*\cos(12^\circ)^2)^{0.5}=83.4\text{m}$
 La valeur de la covariance est : $10*(1-(1.5*20/83.4-0.5*(20/83.4)^3))=6.48$.

c) Le modèle va présenter un effet de pépite plus important.

14- a) Modèle sphérique avec anisotropie géométrique. La direction de plus grande continuité est 22.5° les portées principales sont 200m et 50m. $C_0=1$ $C=3$.

b) l'azimut du vecteur est $\text{atan}(30/20)=56.31^\circ$. Cette paire marque un angle de $56.31-22.5=33.81^\circ$ avec la direction principale. la distance entre les points est 36.1).La portée dans cette direction est 84.18m. La valeur de la covariance est

$$3*(1-(1.5*36.1/84.18-0.5*(36.1/84.18)^3))=1.189$$

La valeur de la corrélation est $1.189/4=0.30$