Exercices supplémentaires pour le 2e contrôle périodique

A- Questions portant sur les lois continues

A1- Soit X~N(0,1), Y~N(1,2) et Z~N(3,4), X,Y et Z indépendantes.
Quelle est la distribution de W=X-Y+2Z?

A2- X~Poisson(λ =100). Calculez approximativement P(X $\leq$ 100).

A3- Un assemblage comprend 100 sections de longueurs indépendantes. La longueur de chaque section est une v.a. N(10 cm, 0.9 cm^2). Quelle est la probabilité que la longueur totale soit comprise entre 970 et 1030 cm?

A4- On a deux pompes. La 1ère pompe a une durée de vie X suivant une loi exponentielle avec $\lambda = 1/2$. La 2e pompe a une durée de vie Y suivant une loi Weibull avec $\gamma = 0, \quad \delta = 1/2$ et $\beta = 2$. Quelle est la probabilité que les deux pompes cessent de fonctionner avant un an?

A5- On génère 100 nombres au hasard uniformément sur [0,1]. Probabilité que la somme S <55 ?

A6- Un certain type de pneu présente une durée de vie X ~ N(25000km,$5000^2$$km^2$). Soit 2 pneus pris au hasard. Quelle est la probabilité que l'un des deux pneus dure 10000 km de plus que l'autre?

A7- Le temps T (en années) entre 2 pannes majeures d'électricité dans une région présente une distribution exponentielle de moyenne 1,5. La durée X des pannes (en heures) est une N(4, 4).
a) Étant donné qu'il n'y a pas eu de panne majeure depuis 1 an, quelle est la probabilité qu'il ne s'en produise aucune durant les 9 prochains mois?
b) Combien de temps, au plus, durent 95% des pannes majeures?
c) Calculer la probabilité que la panne majeure la plus longue parmi les 3 suivantes dure moins de 5 heures?

A8- a) On prend 100 nombres aléatoires au hasard dans l'intervalle [0,1] (loi uniforme). Si on veut calculer la probabilité que la somme des carrés des 100 nombres soit >30, doit-on utiliser la loi normale ou la loi χ^2 ? Justifiez.
b) Calculez la probabilité précédente.

A9- Soit X_1, X_2 X_3 trois v.a. indépendantes N(0,1). On définit $U=(X_2^2+X_3^2)^{0.5}$. Trouver le nombre c tel que $P(X_1>cU)=0,10$

A10- Soit X ~N(0,1) et Y~N(3,5). X et Y indépendantes
a) Calculez P(2X<Y)
b) Trouvez le 50e centile de W=X+Y

A11- Soit X_1, X_2 et X_3, des v.a. suivant conjointement une distribution multinormale dont le vecteur moyenne est : $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ et la matrice de variances-covariances est $\Sigma = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.
a) Quelle est la distribution de $W=X_1+2X_2-X_3$?
b) On a observé $X_3=5$. Quelle est la distribution conditionnelle du couple aléatoire (X_1,X_2) ?

A12- La contrainte limite S (en kN/cm^2) que peuvent supporter des tiges d'acier de renforcement suit une distribution lognormale avec paramètres logarithmiques $m_{\ln(S)}$= 5.6 et $\sigma_{\ln(S)}$ = 0.7, alors que l'aire A de ces tiges (mesurée en cm^2) suit une distribution lognormale avec paramètres logarithmiques m_A = 2 et σ_A = 0.05.

a) Trouvez la distribution de la force que peut supporter une tige F = SA, en supposant l'indépendance de S et de A

b) Trouvez P[F $\leq$ 300 kN]

A13- Le coût d'une opération est proportionnel au carré du temps requis pour l'accomplir. Les temps d'accomplissement sont X et Y pour la première et la seconde phase respectivement. X et Y sont des variables aléatoires distribuées suivant une loi binormale de paramètres m_X, m_Y, σ_X, σ_Y et $\rho_{X,Y}$.
Trouvez $E[C] = E[a(X+Y)^2]$ (exprimez la réponse en fonction de m_X, m_Y, σ_X, σ_Y et $\rho_{X,Y}$).

A14- La vitesse annuelle maximale du vent X_i en l'année i à un certain endroit a une fonction de répartition de la forme suivante :

$$F_{X_i}(x) = e^{-\left(x/u\right)^{-k}} \qquad x > 0, k > 0$$

Les vitesses annuelles maximales du vent d'une année à l'autre sont indépendantes. La force subie par un objet soumis au vent est proportionnelle au carré de la vitesse du vent : force = c(vitesse)^2. Trouvez la fonction de répartition de Y, la force maximale subie par un objet pendant n années.

A15- a) Par hypothèse, la magnitude d'un tremblement de terre sur l'échelle de Richter suit une distribution exponentielle de paramètre λ =2.35. Quelle est la probabilité que la magnitude d'un tremblement de terre excède 6.3?

b) Dans le monde, il y a en moyenne un tremblement de terre par an ayant une magnitude supérieure à 6.1. Quelle est la probabilité qu'au cours d'une année il y ait au moins un tremblement de terre de magnitude supérieure à 7.7 ?

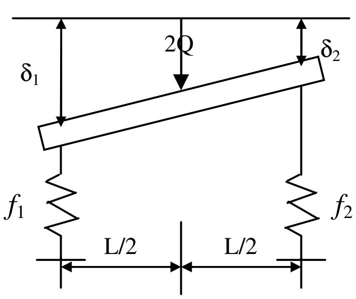
A16- Le ruissellement annuel observé X dans un certain bassin suit soit une distribution normale avec m_X=256.7 m^3/min et σ_X = 191 m^3/min, soit une distribution lognormale avec moyenne logarithmique m_Y= 5.228 et écart-type logarithmique σ_Y = 0.84. Trouvez la probabilité que $X \geq 400$ m^3/min avec ces deux distributions.

A17- Le ruissellement annuel maximal observé, X, dans un certain bassin suit une distribution lognormale translatée où Y = X-13 m^3/min suit une distribution lognormale avec les paramètres logarithmiques m_Y = 5.0 et σ_Y = 0.9. Trouvez la probabilité que $X \geq 400$ m^3/min.

A18- La force F à laquelle un type de tige d'acier se plie suit une distribution lognormale avec les paramètres logarithmiques m_F et σ_F. L'aire A de la section de ces tiges suit aussi une distribution lognormale avec les paramètres logarithmiques m_A et σ_A. Quelle est la distribution de Y, la contrainte F/A à laquelle la tige d'acier se pliera, si F et A sont indépendants?

A19- Considérez ce modèle simple d'une structure flexible reposant sur deux fondations. L'ingénieur se préoccupe de la déflexion relative aux extrémités de la structure.

$$\Delta = \delta_1 - \delta_2 = Qf_1 - Qf_2$$



Les flexibilités f_1 et f_2 (en cm/kN) des deux fondations sont des variables aléatoires avec la même moyenne « m » et la même variance σ^2 et avec une covariance $\rho\sigma^2$, où ρ est le coefficient de corrélation (lié à l'homogénéité latérale du sol). Trouvez:

a) L'espérance de Δ.

b) La variance et l'écart-type de Δ.

c) Si Q = 5000 kN, f_1 et f_2 suivent une distribution normale à deux variables, avec σ = 0.001, et ρ = 0.9, trouvez

P[|Δ| ≥ 5 cm]

d) Recalculez (c) avec $\rho = 0.1$, représentant un sol très peu homogène.

e) Calculez E[|Δ|] pour les deux cas.

B- Questions portant sur l'estimation ponctuelle et les intervalles de confiance

B1- Parmi 100 personnes atteintes d'un cancer du poumon, 67 sont mortes moins de 5 ans après la détection de la maladie.

a) Quel est l'intervalle de confiance à 95% sur la probabilité qu'une personne (dont on vient de découvrir le cancer du poumon) meure d'ici 5 ans?

b) Quel est le nombre minimal d'observations requis pour qu'une erreur maximale de 0.02 soit commise en estimant p à partir d'un échantillon (avec $\hat{p}$) et ce avec un niveau de confiance de 95% ?

B2- Soit $X_1,...X_{21}$ un échantillon aléatoire provenant d'une population normale. On a $\bar{x}$ =1 et s=0.2. Construire l'intervalle de confiance à 95% pour μ et σ^2

B3- Dans un sondage touchant 1000 personnes, 645 ont dit préférer l'option A aux autres options. Calculer un intervalle de confiance de niveau 95% pour la popularité de l'option A.

B4- La v.a. X présente une distribution exponentielle. L'estimateur à vraisemblance maximale du paramètre de cette loi est $\lambda_{VM} = 1/\bar{X}$. Construisez un intervalle de confiance approximatif de niveau 99% pour le paramètre λ si n=36.

B5- Des échantillons de béton provenant de 1500 canalisations ont été testés pour évaluer leur porosité in situ. En moyenne 4% des canalisations étaient non-conformes.
a) Calculez la variance théorique de cet estimateur en substituant l'estimation $\hat{p}$ à la valeur vraie « p ».
b) Calculez un intervalle de confiance de 95% pour « p » en utilisant la variance calculée.

B6- Les 31 valeurs du ruissellement maximal annuel suivantes (en m^3/sec) ont été observées dans un certain bassin : 108.0 , 53.6 , 585.0 , 98.1 , 40.6 , 472.0 , 96.5 , 217.0 , 42.7 , 208.0 , 143.0 , 93.7 , 398.0 , 298.0 , 248.0 , 441.0 , 386.0 , 567.0 , 122.0 , 151.0 , 244.0 , 400.0 , 245.0 , 114.0 , 659.0 , 132.0 , 44.0 , 72.5 , 135.0 , 635.0 , 508.0.

On calcule : $\sum x_i = 7970 m^3/\sec$ *et* $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1\,120\,000$

a) Quel est l'intervalle de confiance à 95% pour μ_X si l'on suppose que $\sigma = 180$ m^3/sec ?
b) Même question en supposant σ inconnu ?

C- Questions portant sur les tests (chap. 6 et 7)

C1- Le tableau suivant présente les fréquences observées d'un échantillon et les fréquences théoriques d'une certaine loi de distribution entièrement spécifiée (i.e. aucun paramètre n'a eu à être estimé). Faites le test χ^2 permettant de vérifier si la distribution proposée est adéquate (niveau 5%).

Intervalle	[0, 1[	[1, 2[	[2, 3[	[3, ∞ [	Total
f observé	10	55	30	5	100
f théorique	9	50,4	34,5	6,1	100

C2- Dans un sondage touchant 1000 personnes, 645 ont dit préférer l'option A aux autres options.
a) Peut-on conclure que la proportion "p" est significativement supérieure à 0.6?

b) Quelle est la plus petite valeur de α qui permettrait de rejeter H_0 ?

C3- Un échantillon aléatoire de 9 cigarettes d'un paquet montre un taux moyen de nicotine de 4.2g par cigarette. Le paquet mentionne un taux moyen de 3.5.
a) Peut-on mettre en doute l'indication sur le paquet sachant que le taux de nicotine est $N(\mu, 1.96)$?
b) Quelle est la probabilité de conclure que le fabricant a tort (i.e. rejeter l'affirmation sur le paquet) si la vraie moyenne de nicotine est 3,8?
c) Combien de cigarettes devrait on examiner pour assurer une probabilité de 0,9 en b) ?

C4- Le tableau suivant montre les résistances en compression de deux bétons. Peut-on considérer que le second béton est plus résistant que le premier. Les unités sont des MPa/10.

Béton 1	295	319	304	302
Béton 2	318	316	312	318

a) Faites le test pour vérifier si les variances sont égales (niveau 5%)
b) Faites le test approprié pour vérifier si la moyenne du 2^{e} béton est effectivement supérieure à celle du 1er (niveau 5%)

C5- Soit X distribué suivant une loi uniforme sur [0,c]. On veut tester H_0 : c=1 vs H_1 c>1. On recueille une seule observation et on rejette H_0 si x_1>0,9.
a) Quel est le risque α de ce test?
b) Quelle est la puissance du test si en réalité c=1,5?

C6- On s'intéresse à la durée de vie des pneus de marque A (en dizaine de milliers de kilomètres). On désire tester H_0 : μ =50 vs H_1 μ <50 au niveau 5% . On suppose X~N(μ , 25)
a) Quelle est la puissance du test si n=9 et μ =45?
b) Quelle valeur de « n » assure une puissance >0,9?

C7- Le tableau suivant montre la répartition du succès scolaire de 150 enfants en fonction du revenu de leurs parents. Ces deux variables sont-elles indépendantes (niveau 5%)?

	Revenu			
Succès	Faible	Moyen	Élevé	Total
Faible	10	20	10	40
Moyen	10	40	10	60
Élevé	10	30	10	50
Total	30	90	30	150

C8- On veut tester si une distribution binomiale Bin(3,1/2) s'ajuste aux données suivantes (niveau 5%) :

x	0	1	2	3
Observé	7	12	18	3
Bin(3,1/2)	5	15	15	5

C9- Un manufacturier de caoutchouc synthétique affirme que son produit présente une dureté Shore de 64,3. L'écart-type est de 2.
a) Combien prendre d'échantillons pour assure un test de niveau 5% et de puissance 90% lorsque la vraie dureté est 65.3.
b) Si $\overline{x}$ =65 et n=43, quelle est la conclusion du test H_0 μ =64.3 vs H_1 $\mu \neq 64.3$?
c) Quelle est l'erreur de seconde espèce (β) si n=43 et la vraie dureté Shore est 65?
d) Combien d'observations prélever si l'on veut rejeter H_0 avec un risque de 5% lorsque $\overline{x}$ =65 (avec un test bilatéral)?

C10- Deux lignes de fabrication de ciment ont fourni les concentrations suivantes en C_3S (les valeurs sont multipliées par 2 pour simplifier les calculs).

Ligne 1	140	135	140	138	135	138	140
Ligne 2	135	138	136	140	138	135	139

Les deux lignes ont-elles même variance (niveau 10% bilatéral)?

C11- Des tiges métalliques sont achetées de deux entreprises différentes. On soumet 10 tiges de chaque entreprise à un test de tension. Les moyennes et variances obtenues pour la résistance en tension sont :
$\overline{x}_1$=50,29 et $\overline{x}_2$=55,72 ; s_1^2=22,72 et s_2^2=14,91.
Peut-on conclure que les entreprises fournissent des tiges de même résistance? (Faites le test d'égalité des variances (bilatéral 10%) avant celui des moyennes (bilatéral 5%)).

Corrigé :

A- Lois continues

A1- W~N(0-1+6, 1+2+4*4)=N(5,19)

A2- On utilise l'approximation normale X $\approx$ N(100,100)
On cherche P(Z<(100.5-100)/10)=P(Z<0,05)=0,5199

A3- La longueur totale est N(1000,90). P(970<X<1030) = P(-3.16<Z<3.16)=0.9992-(1-0.9992) = 0.9984.

A4- P(X<1 $\cap$ Y<1)=P(X<1)*P(Y<1)= $(1-e^{-1/2})$ $(1-e^{-4})$ = 0,386

A5- S ~ N(50,100/12) P(S<55)=P((S-50)*$12^{1/2}$/10 < 1.73)=0,958

A6- Soit X_1 et X_2 les deux durées de vie. On cherche 2P(X_1-X_2 >10000). X_1-X_2 est N(0,2*5000^2). On cherche donc 2P(Z>10000/($2^{1/2}$5000))=2P(Z>$2^{1/2}$)=0,1573.

A7a) Moyenne=1,5=1/λ => λ =2/3. La loi exponentielle est sans mémoire, c'est donc simplement :
P(T>9/12)=1-(1-$e^{-2/3(9/12)}$)=0,6065
b) On cherche « c » tel que P(X<c)=0,95 => P(Z<(c-4)/2)=0,95 -> 1.645=(c-4)/2 =>c=7,29
c) On cherche $P(X<5)^3$ =>$P(Z<0,5)^3$=0,3306

A8- a) La loi normale. Ce serait la χ^2_{100} si l'on faisait la somme des carrés de 100 N(0,1), ici ce sont des U(0,1). Par contre le théorème central limite permet d'approximer la distribution de cette somme par la loi normale.
b) Soit U le nombre uniforme. E[U^2]=V(U)+$E[U]^2$ =1/12+1/4=1/3
V(U^2)=E[U^4]-$E[U^2]^2$=1/5-1/9=4/45.
Soit S la somme de 100 nombres au carré, S est N(100/3,400/45).
P(S>30)=P(Z>(30-100/3)/$(400/45)^{0.5}$=P(Z>-1.18)=0.868.

A9- P(X>cU)=0.10 => P(X/U>c)=0.10 =>P(X/$(U/2)^{0.5}$>c*$2^{0.5}$) =>P(t_2>c*$2^{0.5}$)=0.10 (car on a le ratio d'une N(0,1) et d'une chi^2 à 2 degrés de liberté et indépendante de la normale => c*$2^{0.5}$=1.8856 => c=1.333

A10- a)P(2X<Y)=P(2X-Y<0) 2X-Y~N(-3,4+5) P(Z<3/3)=0,8413
b) X+Y ~N(3,6) => q_{50}=3

A11- a) E[W]=1+2*5-2=9; V(W)=(10+4*12+8+2*(2*3-1*5-2*7))=40. Donc W est N(9,40).
b) X_1, X_2, étant donné X_3=5, est binormal avec vecteur moyenne :

$\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5/8\\7/8\end{bmatrix}(5-2)=\begin{bmatrix}23/8\\61/8\end{bmatrix}$ et matrice de variance-covariance : $\Sigma_{12.3}=\begin{bmatrix}10 & 3\\3 & 12\end{bmatrix}-1/8\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 7\end{bmatrix}=1/8\begin{bmatrix}55 & -11\\-11 & 47\end{bmatrix}$

A12- a) ln(F) est N(5.6+2 , 0.7^2+0.05^2).
b) P(F<300)=P(ln(F)<ln(300))=P(Z<(ln(300)-7.6)/0.702)=P(Z<-2.70)=0.0035

A13- On note d'abord que : E[X^2]= $\sigma_x^2+m_x^2$, E[Y^2]= $\sigma_y^2+m_y^2$, E[XY]= $\sigma_{xy}+m_x m_y=\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}+m_x m_y$
Donc : E[C]=a{E[X^2]+E[Y^2]+2E[XY]}
Substituant:E[C]=a{ $\sigma_x^2+m_x^2+\sigma_y^2+m_y^2+2\,\sigma_x\sigma_y\rho_{xy}+2m_x m_y$ }

A14- X_i = «vitesse annuelle maximale du vent en l'année i»

$$F_{X_i}(x)=e^{-\left(x/u\right)^{-k}} \qquad x>0$$

Y = «force maximale subie par un objet pendant n années»
Y = c max$(X_i)^2$ où c est une constante

On trouve d'abord la distribution du maximum de vent au cours de 2 années soit W ce maximum,
P(W<w)=P(X1<w et X2<w)=P(X1<w)P(X2<w)= $e^{-2(w/u)^{-k}}$
Pour n années, ce sera : P(W<w)= $e^{-n(w/u)^{-k}}$
Soit Y=cW^2, on aura :
P(Y<y)=P(cW^2<y)=P(W<$(y/c)^{0.5}$)= $e^{-n\left((y/c)^{1/2}/u\right)^{-k}}$

A15- a) P(X>6.3)=1-(1-exp(-2.35*6.3))=3,72x10^{-7}
b) P(X>6.1)= 1-(1-exp(-2.35*6.1))= 5.948x10^{-7}. Puisqu'il y a en moyenne 1 tremblement de terre de cette magnitude par année c'est donc qu'il y a 1/5.948x10^{-7} tremblements de terre chaque année (toute magnitude confondue)
=>n=1.68x10^6
P(X>7.7)=1.385x10^{-8}
P(un tremblement de terre ou plus parmi les n >7.7)=1-$(1-p)^n$=1-$(1-1.385\text{x}10^{-8})^{1.68\text{x}10\text{^}6}$= 0.023 (sous hypothèse d'indépendance entre les tremblements de terre).

A16- Si normale : X~N(256.7,191^2) => P(X>400)=0.2265
Si lognormale : ln(X)~N(5.228,0.84^2)=> P(ln(X)>ln(400))=0,1817

A17- P(X>400)=P(Y>387); ln(Y)~N(5,0.9^2) => P(ln(Y)>ln(387))=1-0,856=0,144

A18- Y=F/A; ln(Y)~N(m_F-m_A, $\sigma_F^2+\sigma_A^2$)

A19- a) E[Δ]=0;
b) Var(Δ)=Q^2($\sigma^2+\sigma^2-2\rho\,\sigma^2$) = 2Q^2 σ^2 (1- ρ)
c) P(| Δ | > 5 cm)=2P(Δ >5 cm); Δ ~N(0,2 5000^2 0.001^2 (1-0.9))=N(0, 5); 2P(Δ >5 cm)=0.025
d) P(| Δ | > 5 cm)=2P(Δ >5 cm); Δ ~N(0,2 5000^2 0.001^2 (1-0.1))=N(0,45); 2P(Δ >5 cm)=0.456
Comme on le voit, l'homogénéité plus grande du sol est un facteur très favorable à la stabilité.

e) E[|Δ|] =2 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad e^{-0.5(x^2/\sigma^2)}dx=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=0.798\sigma$

cas avec ρ = 0.9=> 1.78 cm

cas avec ρ = 0.1=> 5.35 cm

B- estimation et intervalles de confiance

B1- a) $\hat{p} \approx N(p, p(1-p)/n)$; Intervalle : $\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}/\sqrt{100}$ =[0.578, 0.762]

b) $1.96\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}/\sqrt{n}$ = 0,02 => n=2401 (maximum atteint quand p=0.5)

B2- Pour μ

$1 \pm t_{20} 0.2/\sqrt{21} = 1 \pm 2{,}086 * 0.2/\sqrt{21} = 1 \pm 0{,}091$

Pour σ^2 , [20*0.04/ $\chi^2_{20;.025}$, 20*0.04/ $\chi^2_{20;975}$] = [20*0.04/34.17, 20*0.04/9.59] =[0.023, 0.0834]

B3- $\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}/\sqrt{1000}$ => 0.645 $\pm$ 1.96(0.645*0.355/1000)$^{0.5}$= 0.645 $\pm$ 0.030

B4- On construit l'intervalle pour E[X]= $\mu = 1/\lambda$ autour de $\overline{X}$. Par le théorème central limite,

$\overline{X}$ ~N(1/ λ , 1/(n λ^2))=> $\frac{(\overline{X}-1/\lambda)\sqrt{n}}{1/\lambda} \sim N(0,1)$ => $(\lambda\overline{X}-1)\sqrt{n} \sim N(0,1)$. L'intervalle pour λ est donc : $\frac{1}{\overline{X}} \pm \frac{2.5758}{6\overline{X}}$

B5- a) $\hat{p}$ =0.04 ; V($\hat{p}$)=(1-p)p/n $V(\hat{p}) \approx .04 * .96/1500 = 2.56 \times 10^{-5}$

b) $p \in$ [0.4-1.96 x 0.005, 0.4 +1.96 x 0.005]=[.039, .041]

B6- a) $\bar{x}$ = 7970/31 =257.1=> 257.1 ± 1.96 x 180/(31)$^{0.5}$ => [193.7, 320.5] m^3/s

b) s^2=1/30(1 120 000)=37333 => s=193.2 => intervalle : 257.1 ± 2.04 x 193.2/(31)$^{0.5}$=>[186.3, 327.9] m^3/s

(note 2.04 est $t_{30,\alpha/2=0.025}$)

C- **Questions sur les tests**

C1- On calcule Q=(10-9)^2/9+(55-50,4)^2/50,4+...=1,32. On compare à une $\chi^2_{4-0-1,0.05}$ = 7,815 . On ne peut pas rejeter H_0, donc la distribution proposée semble plausible.

C2- a) H_0 p=0.6 vs H_1 p>0.6.

On rejette H_0 si $\frac{(\hat{p}-0.6)\sqrt{1000}}{(0.4*0.6)^{1/2}} > 1.645$. On calcule $\frac{(\hat{p}-0.6)\sqrt{1000}}{(0.4*0.6)^{1/2}}$ = 2,9 , donc on rejette H_0.

b) D'une table N(0,1) on tire que le niveau α correspondant à 2.9 est 0.0019.

C3-

a) Sous H_0, $\mu = 3.5$ on calcule (4.2-3.5)/(1.96/9)$^{0.5}$=1.5 <1.645=$Z_{.05}$ Donc on ne peut pas rejeter H_0. On ne peut pas invalider l'affirmation du fabricant.

b) Sous H_1, $\mu = 3.8$, On cherche P($\overline{X} > 1.645(1.96/9)^{0.5} + 3.5$) = P($\frac{\overline{X}-3.8}{(1.96/9)^{0.5}} > 1.645 + \frac{3.5-3.8}{(1.96/9)^{0.5}}$)= P(Z>1.0)=0.1587

c) n $\geq$ $(z_{0,05}+z_{0,10})^2$1,96/(3.8-3.5)^2 =186,6 =>187 cigarettes

C4- a) H_0 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs H_1 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. On calcule $\bar{x}_1$ =305, $\bar{x}_2$ =316, s_1^2=102, s_2^2=8

s_1^2/s_2^2=102/8=12,75<$F_{3,3,;0,025}$=15,4. On ne peut rejeter l'hypothèse que les bétons aient la même variance. (Note : ici on utilise un test bilatéral car on n'a pas d'a priori sur les relations entre les variances).

b) On fait le test en supposant $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. On test H_0 $\mu_1 = \mu_2$ vs H_1 $\mu_1 < \mu_2$

On calcule $s_p^2=(3s_1^2+3s_2^2)/(4+4-2)=55$

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = -2{,}10$$ à comparer à $t_{4+4-2;\,0{,}05}= -1{,}942$

Comme –2,10<-1,942, on rejette H_0, donc le 2[e] béton est significativement plus résistant que le premier.

C5- a) P(Rejeter H_0 |H_0 est vraie) = P(X_1>0,9 | X~U(0,1))= 0,1

b) P(Rejeter H_0 | H_1 vraie) = P(X_1>0,9 | X~U(0,1.5)=0,6/1,5=0,4

C6- a) On rejette H_0 si $\bar{X}$ < -1,645*5/3+50=47,25

P(rejeter(H_0|X~N(45,25)=P(X<47,25)=P(Z<(47,25-45)*3/5)=P(Z<1.35)=0.91

b) $n \geq (z_{0{,}05}+z_{0{,}10})^2 25/(45-50)^2=(1{,}645+1{,}28)^2=8{,}6$ =>9

C7- Sous hypothèse d'indépendance, les fréquences théoriques sont :

	Revenu			
Succès	Faible	Moyen	Élevé	Total
Faible	8	24	8	40
Moyen	12	36	12	60
Élevé	10	30	10	50
Total	30	90	30	150

On calcule Q=2,8< $\chi^2_{4,0,05}$ =9,49. On ne peut pas rejeter H_0.

C8- On calcule Q=2,8< $\chi^2_{4-0-1;0,05}$ =7,81. On ne peut pas rejeter H_0.

C9- a) $n=(z_{0{,}025}+z_{0{,}10})^2 \frac{\sigma^2}{(u_0-u_1)^2}=(1{,}96+1{,}28)^2 4/1^2=42{,}04$ =>43

b) $z_{calculé}=(65-64{,}3)*43^{1/2}/2=2{,}29 > z_{table,0{,}025}=1{,}96$, donc on rejette H_0.

c) le seuil critique de rejet est 64,3+1,96*2/sqrt(43)=64,9. On cherche P($\bar{X} < 64.9 \mid \mu = 65)$ =P(Z<(64.9-65)*sqrt(43)/2)= P(Z<-0,3279)=0,3715

d)On veut P($\bar{X} > 65 \mid \mu = 64{,}3)$ =0,025. P(Z>(65-64.3)*sqrt(n)/2)=0,025 => >(65-64.3)*sqrt(n)/2=1,96 =>n=31,36=>32

C10- On calcule $s_1^2=5{,}0$, $s_2^2=3{,}9048$. Le ratio $s_1^2/s_2^2=1{,}28<F_{6,6;0{,}05}=4{,}28$. On accepte H_0.

C11- On a : 22,72/14,91=1,52<$F_{9,9;0{,}05}$=3,18. On accepte H_0.

On calcule s_p^2=(9*22,72+9*14,91)/18=(22,72+14,91)/2=18,82 et s_p=4,34.

H_0: $\mu_2 = u_1$ vs H_1 $\mu_2 \neq u_1$

$z_{calculé}=\frac{55{,}72-50{,}29}{4{,}34\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)^{0.5}} = 2{,}80$ $\quad t_{18;0{,}025}=2{,}10$

Comme 2,8>2,1, on rejette H_0 et l'on conclut que l'entreprise 2 fournit des tiges plus résistantes que l'entreprise 1.