MTH2302C Exercices supplémentaires

1- Un système comprend 3 composants indépendants. Le système fonctionne si au moins deux des trois composants fonctionnent. La fiabilité de chaque composant est 0,95. Quelle est la fiabilité du système?

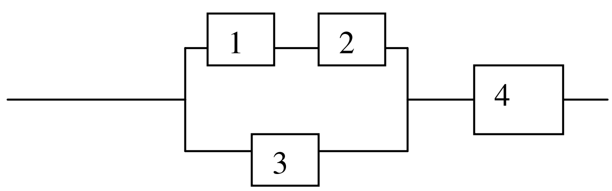
2- Sur un chantier, vous attendez la livraison de matériaux en provenance de 3 fournisseurs *(a,b,c).* La séquence *bac* signifie que *b* livre en premier, *a* en second et *c* en dernier.

   a. Soit l'expérience aléatoire consistant à observer l'ordre de livraison des 3 fournisseurs. Décrivez l'espace échantillonnal S.
   b. Soit les événements D : *a* précède *b* et E : *a* précède *c*. Les événements D et E forment-ils une partition de S?
   c. On a P[{*abc*}]=P[{*acb*}]=1/18 et la probabilité pour les 4 autres résultats élémentaires est 2/9. Les événements D et E de la question b) sont-ils indépendants?

3- Une compagnie teste des recettes de béton avec 3 tests différents. Un béton est accepté seulement s'il réussit les 3 tests. Les tests sont réalisés en séquence (1 puis 2 puis 3) et un béton est rejeté dès qu'il échoue un test (alors il ne subit pas les autres tests). On définit les résultats : E_i: le béton a échoué le test « i », i=1, 2, 3 et S_i le béton a réussi le test i. L'expérience a montré : $P[E_1]=0{,}2$, $P[E_2 | S_1]=0{,}1$ et $P[E_3|S_1,S_2]=0{,}05$.

   a. Quel est l'espace échantillonnal décrivant les résultats possibles pour un béton soumis à cette batterie de tests?
   b. Quelle est la probabilité qu'un béton soit rejeté?
   c. Quelle est la probabilité qu'un béton rejeté l'ait été à cause du 2^e test?
   d. Le 3^e test est le plus coûteux et on considère le retirer. Quelle proportion des bétons actuellement rejetés serait toujours rejetés si l'on supprimait ce test?

4- Calculez la fiabilité du système suivant si chaque composant a une fiabilité de 0,9 et que les composants sont indépendants.



5- Le temps d'attente à un guichet est une v.a X continue dont la fonction de densité est :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1/2 & si\ 0 \le x < 1 \\ \dfrac{3}{2x^4} & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

   a. Vérifiez qu'il s'agit bien d'une fonction de densité.
   b. Quelle est la fonction de répartition de X?
   c. Quelle est la probabilité conditionnelle P[X>2|X>1]?

6- Dans un aéroport, 5 radars sont utilisés et fonctionnent indépendamment. Chacun a la probabilité 0,9 de détecter un avion donné.
   a. Quelle est la probabilité qu'un avion soit détecté par au moins 4 radars?
   b. Sachant que 3 radars ont détecté un avion, quelle est la probabilité que les 5 radars aient détecté l'avion?

7- Un ingénieur téléphone à des entrepreneurs pour obtenir des soumissions sur un projet donné. La probabilité qu'un entrepreneur soumissionne sur le projet est de 0,8. Quelle est la probabilité qu'exactement 4 entrepreneurs doivent être appelés pour obtenir deux soumissions ?

8- 8- Vous recevez pour une compagnie de transport 25 autobus. Pour contrôler la qualité, vous faites procéder à l'examen minutieux de 5 des 25 autobus. Si un seul autobus ne répondant pas aux spécifications est détecté, le lot est considéré non-conforme et le fabricant doit payer la pénalité prévue au contrat.

   a. Si le lot de 25 autobus contient 4 autobus non-conformes, quelle est la probabilité d'en rencontrer au moins 1 parmi les 5 examinés.
   b. Quel serait le nombre d'autobus à examiner le plus rentable pour la compagnie de transport si la pénalité est de 10 000$ et le coût d'inspection d'un autobus est de 1000$ (les « n » autobus sont inspectés) ?

9- Des freins sont supposés durer au moins 100 000 km pour 90% des véhicules. Soit X, le nombre de véhicules parmi un lot de 100 où l'on doit remplacer les freins prématurément.
a. Quelle loi de distribution suit X?
b. Quelle est la moyenne et l'écart-type du nombre de véhicules dont il faudra remplacer les freins prématurément?

10- Les appels téléphoniques à un centre de service entrent au rythme moyen de 2 appels par heure et sont réputés être distribués suivant une loi de Poisson.
a. Quelle est la probabilité qu'au moins 3 appels soient reçus pendant les 5 premières heures d'une journée donnée?
b. Quelle est la probabilité qu'au moins 3 appels soient reçus à chacune des 5 premières heures d'une journée donnée?

11- Une v.a discrète a pour fonction de masse : $p_X(x)=1/3$, x=1, 2 ou 3. Calculez l'écart-type de X.

12- La fonction de densité d'une v.a. est $f_X(x)= 2x$ si $0<x<1$. Calculez $E[X^{1/2}]$. (pas matière pour CP #1)

13- Calculez le 25^e centile de la distribution de X si $F_X(x)=x^2/4$ $0<x<2$ et $F_X(x)=1$ si $x>2$.

14- Une machine fabrique 10% d'objets défectueux. Si l'on prend au hasard 10 objets fabriqués par cette machine, quelle est la probabilité qu'au moins 2 objets soient défectueux?

15- Calculez $P[X \geq 1 \mid X \leq 1]$ et X est distribué suivant une Poisson(5)

16- Les autobus de la ville passent à un certain coin de rue selon une loi de Poisson à la cadence moyenne de 4 autobus à l'heure. Quelle est la probabilité qu'au moins 30 minutes s'écoulent entre le passage du 1er et du 3^e autobus?

17- Le nombre de raisins dans un biscuit suit une loi de Poisson avec paramètre λ. Quelle valeur de λ choisir pour que la probabilité qu'il y ait aucun biscuit sans raisin dans un emballage de 20 biscuits soit supérieure à 0,99?

18- Une autoroute reçoit des automobiles par 3 voies d'accès, A,B et C. Soit X_A, X_B et X_C le nombre d'automobiles à l'heure sur chaque voie d'accès. Les moyennes et écarts-types sont données dans le tableau suivant :

	X_A	X_B	X_C
Moyenne	800	1000	600
Écart-type	40	50	30

Calculez la moyenne et l'écart-type du nombre total de véhicules s'engageant sur la voie rapide en une heure si :

a. les variables aléatoires X_A, X_B et X_C sont indépendantes 2 à 2.
b. les variables aléatoires X_A, X_B et X_C montrent une corrélation de 0.5 entre elles. (pas matière pour CP #1)

19- Une digue a une hauteur de crête lui permettant de recevoir la crue de récurrence 50 ans (crue annuelle maximale atteinte ou dépassée une fois en moyenne sur 50 ans). Quelle est la probabilité que la crête soit submergée deux années ou plus sur une période de 30 ans?

20- Un ministère dispose de 20 digues, chacune construite pour résister à une crue de récurrence 100 ans. Les digues sont suffisamment espacées pour être considérées indépendantes. Quelle est la probabilité qu'au moins une des digues soit débordée au moins une année au cours des 10 prochaines années?

Corrigé :

1- Par construction graphique :
$P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(A\cap C)-2P(A\cap B\cap C)=3*0,95^2-2*0,95^3=0,99275$
ou
$3*P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B\cap C)$
Note : C' est l'événement complémentaire de C

Par la loi binomiale Soit X : nombre de composants fonctionnant :
$P(X=2)+P(X=3)= 3*0.95^2*.05+.95^3=0,99275$

2- a) S={abc,acb,bac,bca,cab,cba}
b) Non les éléments {bca} et {cba} ne sont inclus ni dans D ni dans E. Aussi $D\cap E$ n'est pas vide.
c) On a D={abc,acb,cab} et E={abc,acb,bac} P(D)=P(E)=1/18+1/18+2/9=3/9.
$P(D\cap E)$=P({abc,acb})=1/18+1/18=1/9
On a bien $P(D)*P(E)=P(D\cap E)$ donc les événements D et E sont indépendants.

3- a) $S=\{E_1, S_1E_2, S_1S_2E_3, S_1S_2S_3\}$
b) $P(E_1)+P(S1\cap E2)+P(S1\cap S2\cap E3)=0,2+0,8*0,1+0,8*0,9*0,05=0,316$
c) 0,8*0,1/0,316=0,25
d) (0,2+0,8*0,1)/0,316=0,886

4- Soit C_i la composante i fonctionne. Il faut avoir $((C_1\cap C_2)$ ou $C_3)$ et C_4.
On calcule $P(C_1\cap C_2)=0.9^2=0.81$.
$P((C_1\cap C_2)\cup C_3))=1-(0.19*0.1)=0.981$ (on utilise le fait que $P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$)
et finalement $P(((C_1\cap C_2)\cup C_3)\cap C_4)=0.981*0.9=0.883$

5- a) On intègre de 0 à 1 et de 1 à l'infini. On obtient :
$$\tfrac{1}{2}x\Big|_0^1-\tfrac{1}{2}x^{-3}\Big|_1^{\infty}=1/2+1/2=1$$
b)$F_X(x)=$ 0 x<0
x/2 pour $0\leq x<1$
$1-\tfrac{1}{2}x^{-3}\quad x\geq 1$

c) P(X>2|X>1)=P(X>2 et X>1)/P(X>1)=P(X>2)/P(X>1)=$\dfrac{1/16}{1/2}=1/8$

6- Soit X : nombre de radars détectant l'avion. X est binomiale(5,0.9)
a) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=5*0.9^4*0.1+0.9^5=0.9185$
b) $P(X\geq 3)=0.9185+10*0.9^3*0.1^2=0.99144$. On a donc : $P(X=5|X\geq 3)=0.9^5/0.99144=0.5956$

7- X : nombre d'appels requis pour avoir 2 succès. X est Pascal (2,0.8)
$$P(X=4)=\binom{3}{1}0.8^2 0.2^2=0.0768$$

8- Soit X le nombre d'autobus examinés qui sont défectueux. X est hypergéométrique avec N=25, D=4 et n=5.
$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-C_0^4C_5^{21}/C_5^{25}=0.617$
b) On cherche « n » maximisant E[R] où $E[R]=10000*P(X\geq 1)-1000*n$

On construit le tableau suivant :

n	$P(X\geq 1)= 1-C_0^4C_n^{21}/C_n^{25}$	$E[R]=10000*P(X\geq 1)-1000*n$

1	0.16	600
2	0.30	1000
3	0.42	1200
4	0.53	1300
5	0.62	1200
6	0.69	900
7	0.76	600

Le nombre recherché est 4.

9 a) loi binomiale(100, 0.1)
b) E[X]=10; Var(X)=10*0,9=9, écart-type=3.

10-a) On calcule $\lambda = 5*2 = 10$. $P(X>2)=1-e^{-10}(1+10+50)=0.997$
b) On calcule P(X>2) sur une heure : $1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)= 1- e^{-2}(1+2+2)=0.323$
Que cet événement se répète pendant 5 heures d'affilée : $0.323^5=0.0035$

11- E[X]=1/3*(1+2+3)=2
$Var(X)=E[X^2]-2^2= 1/3*(1+4+9) – 4=2/3$. L'écart-type est $(2/3)^{0.5}$

12- On calcule $\int_0^1 x^{1/2}\, 2x\, dx = \frac{4}{5} x^{5/2} |_0^1 = 4/5$

13- On veut $x^2/4=0.25 \Rightarrow x=1$.

14- X : nombre d'objets défectueux. X est binomiale(10,0.1)
$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-0.9^{10}-10*0.9^9 0.1=0.264$

15- $P(X=1)/P(X\leq 1)=5e^{-5}/(e^{-5}+5e^{-5})=5/6$

16- S'il s'écoule au moins trente minutes entre le premier et le troisième autobus, c'est que durant le 30 minutes suivant le 1er autobus, 0 ou 1 seul autobus s'est présenté. La probabilité que ceci arrive est donné par une Poisson avec λ =4/2=2.
$P(X=0)+P(X=1)=e^{-2}+2*e^{-2}=0.406$

17- X, le nombre de biscuits ayant aucun raisin parmi 20 suit une binomiale(20,p). Soit Y le nombre de raisins dans un biscuit, on a p=P(Y=0), Y est Poisson(λ). On cherche « p » tel que $P(X=0)=0.99=p^0(1-p)^{20}$.
On calcule 1-p=0.99498 => $p=5.02 \times 10^{-4}$
Or $p=P(Y=0)= e^{-\lambda}$. Donc : $\lambda=-\ln(5.02 \times 10^{-4})= 7.6$ raisins par biscuit.

18- a) moyenne : 2400
écart-type : $(40^2+50^2+30^2)^{0.5}=70.7$
b) moyenne ne change pas
variance : On calcule les covariances : $Cov(X_A,X_B)=0.5*40*50=1000$
$Cov(X_A,X_C)=0.5*40*30=600$
$Cov(X_B,X_C)=0.5*50*30=750$

La variance est donc 1600+2500+900+2*1000+2*600+2*750=9700.
L'écart-type est donc : 98.5

19-X nombre de fois que la crête est submergée. X est Binomiale(30,.02).
On cherche $P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1) = 1-.98^{30}-30*.98^{29}.02=0.12$

20- Soit X nombre de fois qu'une digue est débordée. X est Binomiale(10,.01). La probabilité pour une digue d'être débordée au moins 1 année est : $1-P(X=0)=1-0.99^{10}=0.0956$.
Soit Y le nombre de digues débordées. Y est binomiale(20,0.0956).
On cherche $P(Y>0)=1-P(Y=0)=1-0.9044^{20}=0.866$.