MTH2302C

Exercices sur le krigeage

1- Dans un problème 1D, on estime le point x_0 à l'aide des points x_1 et x_2. Le tableau suivant donne les coordonnées de ces points :

Point	Coordonnée x
x_0	0
x_1	-6
x_2	4

Le modèle de covariance est gaussien :

$$C(h)=5\,\delta(h) + 10\exp(-h^2/10^2) \qquad (\delta(h) \text{ est 1 si } h=0,\ 0 \text{ sinon})$$

a) Construisez le système de krigeage simple correspondant

b) On solutionne le système et on trouve les poids : $\lambda_1 = 0.347$, $\lambda_2 = 0.483$

Que vaut la valeur estimée et la variance de krigeage si la moyenne connue est m=3, et Z_1=4 et Z_2=5 ?

c) Construisez le système de krigeage ordinaire.

d) On trouve comme solution : $\lambda_1 = 0.494$, $\lambda_2 = 0.506$ et $\mu = -8.925$
Que vaut la valeur estimée et la variance de krigeage si Z_1=4 et Z_2=5 ?

2- a) Si l'on multiplie toutes les valeurs de covariances par « t » dans la question 1, que deviennent les valeurs estimées et les variances de krigeage pour le krigeage simple et le krigeage ordinaire ?

b) Vous effectuez une validation croisée et trouvez que la variance des erreurs normalisées vaut 1.1. Supposons que vous multipliez C_0 et C de votre modèle de covariance par 1.1 et vous refaites la validation croisée. Quelle sera alors la variance des erreurs normalisées ?

3- Démontrez que le krigeage (simple ou ordinaire) est un interpolateur exact, i.e. si l'on estime la valeur en un point x_0 coïncidant avec x_i la valeur estimée $Z^*(x_0)=Z(x_i)$.

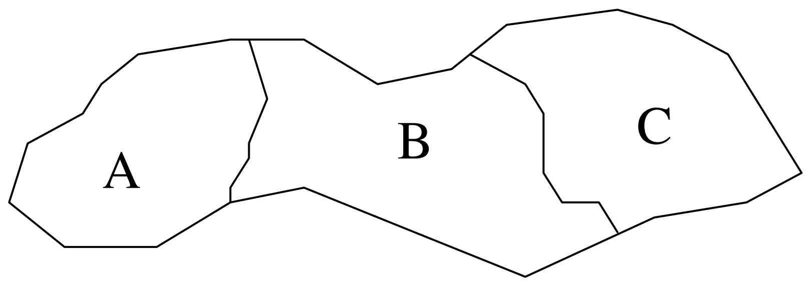
4- Construisez le système de krigeage ordinaire pour l'estimation de la moyenne « m », i.e. on forme $m^*=\sum_i \lambda_i Z_i$.

Quel système doit-on résoudre pour obtenir les λ_i optimum ? (Aide : quelle est la variance d'estimation dans ce cas ? Quel est le système permettant de minimiser cette variance d'estimation? Rappelez-vous que « m » est un paramètre dans le modèle i.e. ce n'est pas une variable aléatoire; « m » possède donc une variance=0, et une covariance avec toute autre v.a. =0).

5- Vous faites le krigeage d'une variable échantillonnée en quelques points avec un modèle de variogramme A. Le krigeage porte sur une grille très fine couvrant un large domaine. Vous calculez ensuite le variogramme expérimental des valeurs krigées.
a) Doit-on s'attendre à ce que le variogramme expérimental soit nécessairement près du modèle A ? Justifiez en vous aidant des propriétés du krigeage.
b) Est-on réellement justifié de calculer un variogramme sur des données krigées? Pourquoi?

6- Supposons une configuration de « n » données utilisées pour l'estimation par krigeage ordinaire d'un point x_0 ne coïncidant pas avec une donnée. Le variogramme est sphérique de palier $(C_0+C)=1$.
a) Quelle proportion $C_0/(C_0+C)$ fournit la variance d'estimation théorique la plus élevée?
b) En utilisant la proportion trouvée en a) quelle est la variance de krigeage ordinaire ?
c) En utilisant la proportion trouvée en a) quelle est la variance de krigeage simple ?
d) Si le palier $(C_0+C)=50$, comment sont modifiées vos réponses en b) et c) ?

7- Un gisement tabulaire de Cu, d'épaisseur quasi-constante, comporte 3 zones ayant des variogrammes différents et ayant été krigées séparément.



On a obtenu :

Zone	Nombre de forages utilisés pour le krigeage de la zone	Surface	Variance de krigeage pour l'estimation de toute la zone
A	23	20700 m^2	0.09 $\%^2$
B	37	33300 m^2	0.11 $\%^2$
C	34	29700 m^2	0.24 $\%^2$

Quelle est la variance d'estimation de la teneur de Cu moyenne pour l'ensemble du gisement?

8- Un gisement d'or 2D montre un variogramme sphérique avec anisotropie géométrique. La direction (azimut) de meilleure continuité spatiale est 30^0. Les paramètres du modèle sont $C_0=10$ ppm^2, $C=20$ ppm^2, $a_{30}=50$ m, $a_{120}=25$m.

On désire effectuer le krigeage de la teneur au point de coordonnée (100,100). On retrouve dans le voisinage immédiat de ce point les données fournies au tableau suivant :

Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (ppm)
1	80	90	10
2	95	105	4
3	103	104	7
4	107	92	3

Le système de krigeage ordinaire est construit en plaçant dans l'ordre les observations 1 à 4 :

$$\begin{bmatrix} 30 & A & 2.43 & 0.09 & 1 \\ B & C & 11.17 & 2.68 & 1 \\ 2.43 & 11.17 & 30 & 8.29 & 1 \\ 0.09 & 2.68 & 8.29 & 30 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.82 \\ 11.94 \\ 16.95 \\ 8.43 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) *Que valent les entrées A à E ?*

b) Quels liens existeraient entre l'estimé et la variance de krigeage obtenus avec le modèle précédent et ceux obtenus avec le modèle suivant : sphérique avec C_0=12 ppm^2, C=24 ppm^2, a_{30}=50 m, a_{120}=25m ?

c) On vous informe que la 2^e donnée (et seulement celle-ci) a été obtenue suivant une procédure d'analyse moins précise qui ajoute une erreur indépendante de variance 3 ppm^2 au résultat de l'analyse. Comment modifieriez-vous le système de krigeage en a) pour tenir compte de cette information?

9- Une erreur d'entrée dans une base de données fait que deux données différentes se retrouvent avoir exactement les mêmes coordonnées.

a) Que se passera-t-il lors des krigeages dont le voisinage de recherche inclura ces deux données? (Aide : ce n'est pas dans les notes de cours)

b) Est-il possible qu'un krigeage retourne une teneur estimée négative même si toutes les teneurs mesurées sont (évidemment) positives ? Justifiez.

c) Est-il possible que le krigeage retourne une teneur estimée supérieure à la plus grande teneur observée dans les données? Justifiez.

d) Est-il possible d'avoir une variance de krigeage ordinaire supérieure à la variance de la variable aléatoire que l'on cherche à estimer? Justifiez.

e) Commentez : on ne peut calculer la variance d'estimation que si l'estimation a été obtenue par krigeage (ordinaire ou simple).

f) Commentez : le choix du voisinage utilisé pour le krigeage peut être davantage important que le choix du modèle de variogramme pour assurer la qualité des estimations du krigeage.

10- Un gisement d'or 2D montre un variogramme sphérique avec anisotropie géométrique. La direction (azimut) de meilleure continuité spatiale est 40^0. Les paramètres du modèle sont C_0=2 ppm^2, C=30 ppm^2, a_{40}=60 m, a_{130}=40 m.

On désire effectuer le krigeage de la teneur au point de coordonnée (100,100). On retrouve dans le voisinage immédiat de ce point les données fournies au tableau suivant :

Observation #	Coordonnée x (m)	Coordonnée y (m)	Teneur (ppm)
1	100	90	10
2	91	104	4
3	110	110	7
4	107	93	3

Le système de krigeage ordinaire est construit en plaçant dans l'ordre les observations 1 à 4 :

$$\begin{bmatrix} C & A & 13.53 & 23.65 & 1 \\ B & C & 13.44 & 9.91 & 1 \\ 13.53 & 13.44 & C & 8.29 & 1 \\ F & 9.91 & 8.29 & C & 1 \\ 1 & 1 & 1 & D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.89 \\ 19.37 \\ 19.54 \\ 19.11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Que valent les entrées A à F ?

b) Quels liens existeraient entre l'estimé et la variance de krigeage obtenus avec le modèle précédent et ceux obtenus avec le modèle suivant : sphérique avec C_0=4 ppm^2, C=60 ppm^2, , a_{40}=60 m, a_{130}=40 m*?*

c) On vous informe que la 2^e donnée (et seulement celle-ci) a été obtenue suivant une procédure d'analyse moins précise qui ajoute une erreur indépendante de variance 3 ppm^2 au résultat de l'analyse. Comment modifieriez-vous le système de krigeage en a) pour tenir compte de cette information?

11- Un gisement de Zn présente un variogramme sphérique (2D) avec effet de pépite de 4 $\%^2$, C=20$\%^2$ et des portées suivant les différentes directions décrites par un modèle d'anisotropie géométrique avec les axes principaux en « x » et « y » et a_x=10m et a_y=20m. On désire estimer la teneur au point x_0 (situé en (0,0)) en se servant des teneurs mesurées aux points x_1 à x_3. Les coordonnées des points x_1 à x_3 sont respectivement (-10,0), (0,20) et (5,22). On a observé à ces points les teneurs respectivement Z_1=2%, Z_2=3.3% et Z_3=3%.

a) *Fournissez, sous forme matricielle, les équations permettant d'obtenir les poids pour les points x_1 à x_3 garantissant une variance d'estimation (théorique) minimale. Ne solutionnez pas ce système d'équations.*

b) Toujours avec le même objectif qu'à la question a), si l'on avait observé 10% Zn au point x_3 au lieu de 3% Zn, de quelle façon ceci affecterait-il les poids obtenus en a) ?

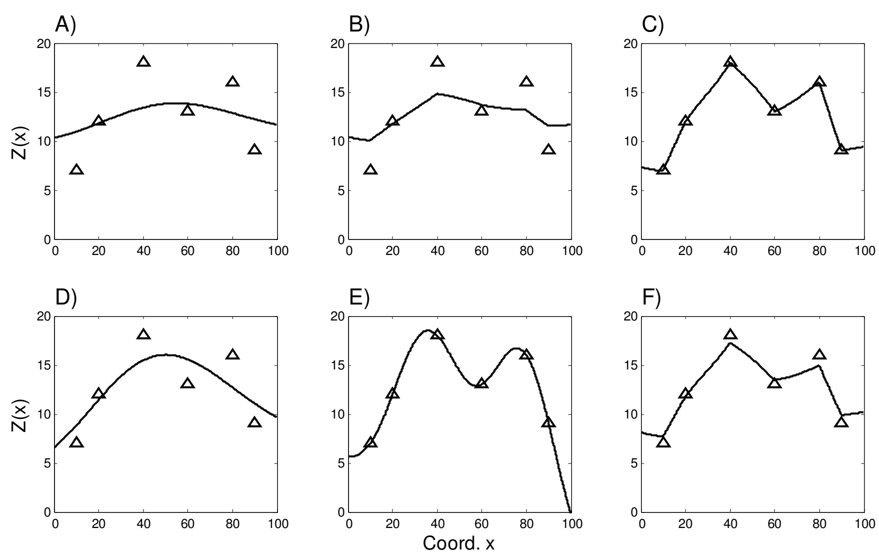
c) Si au lieu d'avoir C_0=4$\%^2$ et C=20$\%^2$, on avait plutôt C_0=8$\%^2$ et C=40$\%^2$, comment ceci affecterait-il les poids de krigeage et la variance de krigeage?

12- Dans un krigeage ponctuel,

a) Est-il possible d'avoir les poids λ_i, i=1...n, de krigeage simple tous égaux à zéro? Si oui, indiquez dans quelle situation. Si non, dites pourquoi.

b) Est-il possible d'avoir les poids λ_i, i=1...n, de krigeage ordinaire tous égaux à zéro? Si oui, indiquez dans quelle situation. Si non, dites pourquoi.

13- On vous présente les six profils suivants obtenus par krigeage ordinaire avec des modèles différents et en utilisant les observations indiquées par des Δ.

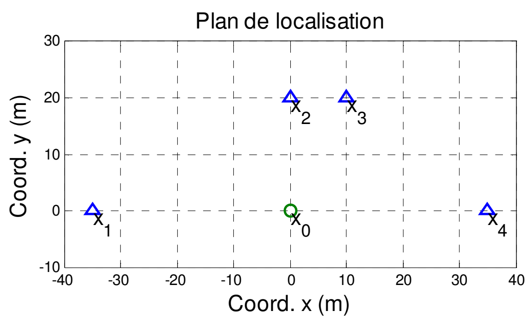


a) Associez à chaque modèle de variogramme le profil de krigeage correspondant (A à F).

Modèle	*Figure*
Sphérique $C_0/C = 0$, a=50	
Sphérique $C_0/C = 0.1$, a=50	
Sphérique $C_0/C = 1.0$, a=50	
Gaussien $C_0/C = 0$, $a_{effectif} = 50$	
Gaussien $C_0/C = 0.1$, $a_{effectif}=50$	
Gaussien $C_0/C = 1.0$, $a_{effectif}=50$	

b) À la question précédente, seul le ratio C_0/C est fourni au lieu des valeurs séparées de C_0 et C. Qu'est-ce qui change dans le krigeage si le ratio $C_0/C=1$ est obtenu avec $C_0=10, C=10$ plutôt que $C_0=5$ et $C=5$?

14- Soit le diagramme suivant montrant l'emplacement de quatre données (x_1 à x_4) où l'on a mesuré la teneur en Fe. On désire effectuer un krigeage ordinaire au point x0 situé en (0,0). Le variogramme est sphérique et isotrope. La portée est de 30m. L'effet de pépite est de $5\%^2$, le « C » du sphérique est de $50\%^2$ (palier total $55\%^2$).



a) *Fournissez, sous forme matricielle, les équations du krigeage ordinaire du point x_0 avec les points x_1 à x_4. <u>Ne solutionnez pas ce système d'équations.</u>*

b) Quelle serait la covariance entre les teneurs aux points x_3 et x_0 si l'on avait plutôt un modèle sphérique anisotrope avec $a_x=30m$ et $a_y=50m$ (C_0 et C inchangés) ?

c) Si l'on effectuait l'estimation uniquement avec le point x_4, quelle serait la variance de krigeage obtenue?

Corrigé

1- a) $\begin{bmatrix} 15 & 3.68 \\ 3.68 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.98 \\ 8.52 \end{bmatrix}$

b) Z*=0.347*4+0.483*5+(1-0.347-0.483)*3=4.3

σ^2_{ks} =15-0.347*6.98-0.483*8.52=8.46

c) $\begin{bmatrix} 15 & 3.68 & 1 \\ 3.68 & 15 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.98 \\ 8.52 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Z*=0.494*4+0.506*5=4.506

σ^2_{ko} =15-0.494*6.98-0.506*8.52+8.925=16.166

2- a) Pour le krigeage simple : tous les termes de covariance sont multipliés par « t » de part et d'autre de chaque équation. Par conséquent « t » s'annule et il n'y a aucun effet sur la solution, i.e. les poids de krigeage. L'estimé demeure donc inchangé. Pour la variance de krigeage, Var(Z) et le vecteur de droite sont tous deux multipliés par « t ». Donc la variance de krigeage est aussi multipliée par « t ».

Pour le krigeage ordinaire, il suffit d'écrire u'=t/t*u' (u' est le multiplicateur de Lagrange correspondant aux covariances multipliées par le facteur « t »). On peut alors écrire le système KO comme :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, t\mathrm{Cov}[Z_i, Z_j] + \frac{t}{t}\mu' = t\mathrm{Cov}[Z_v, Z_i] \quad \forall\, i = 1 \ldots n$$

Divisant par t de part et d'autre, on trouve que les λ sont les mêmes que précédemment et u'=t*u. L'estimé n'est donc pas modifié, par contre la variance de krigeage ordinaire est multipliée par « t » tout comme pour le krigeage simple.

b) Par définition, la variance expérimentale des erreurs normalisées est :

$\hat{\sigma}^2_{\text{normalisé}} = \frac{1}{n}\sum_i \frac{(Z_i - Z_i^*)^2}{\sigma^2_{k,i}}$. Initialement, cette valeur vaut 1.1. En multipliant C_0 et C du modèle par 1.1, on ne change pas les estimés (voir a) donc le numérateur demeure inchangé. Par contre chaque variance de krigeage sera multipliée par ce facteur 1.1. On peut donc écrire :

$$\text{nouveau } \hat{\sigma}^2_{\text{normalisé}} = \frac{1}{1.1} \text{ancien } \hat{\sigma}^2_{\text{normalisé}} = 1$$

3- Si $x_0=x_i$, alors dans le système de krigeage, la i ème colonne de la matrice de krigeage est identique au vecteur de droite du système d'équations. Si l'on pose λ_i=1 et $\lambda_j = 0 \quad j \neq i$, alors les équations sont satisfaites. Comme il y a n équations et n inconnues (K. simple) et que la matrice K est inversible, on est assuré qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution. On conclut que $Z(x_0)^*=Z(x_i)$.

4- La variance d'estimation est Var(e)=Var(m-m*)=Var(m*). En exprimant cette variance en fonction des poids λ_i, en complétant le lagrangien et en posant les dérivées partielles par rapport à chacun des λ_i et par rapport à μ nulles, on trouve le système suivant :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \operatorname{Cov}[Z_i, Z_j] + \mu = 0 \quad \forall\, i = 1 \ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

5- a) La carte krigée est normalement plus lisse que ne le sont les vraies valeurs. Comme Var(Z*)<Var(Z) et que le palier du variogramme correspond à la variance Var(Z), il est certain que l'on ne pourra pas retrouver le modèle de variogramme A. En particulier, les valeurs krigées montrent normalement très peu ou pas du tout d'effet de pépite même si les données en montrent un très fort (le variogramme expérimental des valeurs krigées a même un comportement parabolique à l'origine même si les données avaient un variogramme avec comportement linéaire à l'origine). Finalement, la portée avec les données krigées aura tendance à être supérieure dû aux corrélations de proche en proche entre les points.

b) Il faut noter que théoriquement, Var(Z(x)*) varie en fonction de la localisation puisque la variance dépend de la position du point à estimer par rapport aux données disponibles. Par conséquent, l'idée même de calculer un variogramme sur les données krigées est en soi une hérésie.

6- a) 100%
b) toutes les covariances avec x_0 sont nulles puisqu'il s'agit d'un effet de pépite pur. En construisant le système de krigeage ordinaire, on voit facilement que tous les poids valent 1/n, donc $\mu=-\sigma^2/n$, ce qui implique que la variance de krigeage ordinaire maximale est alors $\sigma^2(1+1/n)$.
c) dans le krigeage simple, tous les poids seront 0, la variance de krigeage simple est alors simplement σ^2, soit ici 1.

d) Elles sont simplement multipliées par 50.

7- On pondère les variances par le carré des surfaces
$\sigma^2_{global} = (20700^2*0.09+33300^2*0.11+29700^2*0.24)/(20700+33300+29700)^2=0.053\%^2$

8- a) L'azimut entre x_1 et x_2 est $\tan^{-1}((95-80)/(105-90))=45^o$. L'angle avec la direction de meilleure continuité est $45-30=15^o$. La portée dans la direction 45^0 est donc :
$a_{45}=(50*25)/(25^2\cos(15)^2+50^2\sin(15)^2)^{0.5}=45.62$m
La distance entre les 2 points est $(15^2+15^2)^{0.5}=21.2$m
La covariance est donc : $20*(1-1.5*(21.2/45.62)+0.5*(21.2/45.62)^3)=7.06$

Donc : A=B=7.06, C=30, D=1, E=0

b) On aurait exactement le même estimé car le 2^e^ variogramme est proportionnel au 1^er^ avec un ratio de 1.2 pour C_0 et C. La variance de krigeage du 2^e^ modèle serait 1.2 fois celle du 1^er^ modèle.

c) Dans le système de krigeage, tout ce qui change c'est C qui vaut maintenant 30+3=33 ppm^2 plutôt que 30 ppm^2.

9-
a) On aura deux lignes et deux colonnes identiques dans la matrice de krigeage, celle-ci sera donc singulière et il ne sera pas possible de résoudre le système d'équations.

b) Oui, comme le krigeage peut présenter des poids négatifs, ceci est possible. Ainsi si un poids négatif est associé à une valeur positive et que tous les autres poids sont associés à des valeurs nulles, le résultat sera négatif.
c) Oui, pour la même raison. Par exemple, si on a 2 poids dont un vaut –0.02 et l'autre 1.02, si le poids -.02 est associé à une donnée de valeur 0, la valeur estimée sera supérieure à celle de l'autre donnée.
d) Oui, la limite théorique pour le krigeage ordinaire est 2*(C0+C)
e) Faux, dès que l'on connaît le variogramm, on peut calculer la variance d'estimation de tout estimateur linéaire.
f) Oui, les résultats du krigeage sont relativement robustes au choix du modèle de variogramme. Un mauvais choix de voisinage peut mener à des valeurs estimées irréalistes et à des cartes de krigeage comprenant des artéfacts. Il est donc important de choisir avec soin le voisinage du krigeage.

10- A :L'azimut entre les observations 1 et 2 est atan(-9/14)= -32.73^o. L'angle avec la direction de plus grande portée est donc : 40+32.73=72.73
La portée dans cette direction sera donc $(60*40)/(40^2*\cos(72.73)^2+60^2\sin(72.73)^2)^{0.5}=41$
La distance entre les 2 points est $(9^2+14^2)^{0.5}=16.64$
La valeur de la covariance est donc : $30* (1-(1.5*16.64/41-0.5*(16.64/41)^3))=12.74$
B=A par symmétrie
C=32 (le palier)
D=1
E=0 ;
F=23.65 par symétrie

11- a) $Cov(Z_1Z_2)=0$ car $h_x=a_x$
$Cov(Z_1,Z_3)=0$ car $h_y>a_y$
$Cov(Z_2,Z_3)$ -> direction : azimut=atan((5-0)/(22-20))=68.2^0
portée dans cette direction : $20*10/((20\sin68.2)^2+(10*\cos(68.2))^2)^{0.5}=10.56$
h entre les deux points : $(5^2+2^2)^{0.5}=5.385$
$C(h)=20*(1-(1.5*5.385/10.56-0.5*(5.385/10.56)^3))=6.0287$
$Cov(Z_1,Z_0)=0$ car $h_x=a_x$
$Cov(Z_2,Z_0)=0$ car $h_y=a_y$
$Cov(Z_3,Z_0)=0$ car $h_y>a_y$

Le système de KO est donc :

$$\begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 24 & 6.029 & 1 \\ 0 & 6.029 & 24 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Rien ne change, les poids du KO ne dépendent pas des teneurs.

c) Les poids du KO demeurent inchangés car on a les mêmes portées et le même ratio C_0/C. La variance de krigeage (et le multiplicateur de Lagrange) est multipliée par 2.

12- a) Oui, si tous les points disponibles sont à une distance supérieure à la portée du point à estimer. (indépendamment de la distance des points entre eux).

b) non. La contrainte somme des poids =1 l'empêche.

13- 2- a)

Modèle	*Figure*
Sphérique $C_0/C = 0$, a=50	*C)*
Sphérique $C_0/C = 0.1$, a=50	*F)*
Sphérique $C_0/C = 1.0$, a=50	*B)*
Gaussien $C_0/C = 0$, $a_{effectif}$ =50	*E)*
Gaussien $C_0/C = 0.1$, $a_{effectif}$=50	*D)*
Gaussien $C_0/C = 1.0$, $a_{effectif}$=50	*A)*

b) Les estimés demeurent inchangés. La variance de krigeage serait 2 fois plus grande avec C_0=10 et C=10 qu'avec C_0=5 et C=5.

14- K=

55	0	0	0	1
0	55	25.9259	0	1
0	25.9259	55	0	1
0	0	0	55	1
1	1	1	1	0

k_0=

0
7.4074
4.4505
0
1

b) la distance est $(100+400)^{0.5}=22.36$
l'angle avec l'axe des y : atan(10/20)=26.6°
La portée dans cette direction= $50*30/(50^2\sin^2(26.6)+30^2\cos^2(26.6))^{0.5}=42.9$m

$C(h)=50*(1-1.5*22.36/42.9+0.5*(22.36/42.9)^3)=14.5$

c) 2*55=110 (la covariance entre x_4 et x_0 est nulle)
