Voici un certain nombre de questions provenant des premiers contrôles périodiques de 2007 et 2008. Les examens ont été préparés par Pierre Montès.

Examen 2007

QUESTION 1

On estime à 5% la proportion de rivets défectueux fabriqués par une usine donnée. Un lot de ces rivets doit subir un test d'acceptation. On prélève du lot, au hasard et sans remise, un échantillon de 10 rivets pour vérification. Si plus d'un rivet défectueux sont trouvés dans l'échantillon choisi, on refuse le lot.

Déterminer **la probabilité d'accepter** le lot.

QUESTION 2

Un ingénieur en charge d'un laboratoire reçoit un lot d'appareils identiques de très haute précision ($N=50$). Il veut s'assurer de refuser le lot avec une probabilité de 95 % s'il renferme au moins 8 unités défectueuses. Il décide que la présence d'au moins une unité défectueuse dans un échantillon d'unités choisies du lot, au hasard et sans remise, est suffisante pour justifier le refus du lot.

Déterminer **la taille de l'échantillon**

QUESTION 3

On sait que la probabilité que l'eau déversée dans une rivière par une usine certaine contienne un polluant nocif pour les poissons est de 0,001. Un instrument de mesure est utilisé pour détecter la présence de ce polluant dans l'eau provenant de cette usine.

L'instrument est conçu de telle manière qu'il **indiquera la présence** du polluant a) avec une probabilité de 0,995 si le polluant est **réellement présent**, et, b) avec une probabilité de 0,01 si le polluant est n'est **pas présent**.

1. Une mesure sur un spécimen d'eau est effectuée. L'instrument **indique la présence du polluant** dans l'eau. Quelle est alors la **probabilité que le polluant soit réellement présent** dans l'eau ?

2. Que devient cette probabilité si, par une mesure sur un second spécimen (différent du premier), l'instrument **indique encore une fois la présence du polluant** dans l'eau ?

QUESTION 4

Dix (10) éprouvettes de béton (cylindres standards de 150 mm de diamètre et de 300 mm de hauteur) sont prélevées au cours d'une coulée de béton en vue d'en vérifier la résistance en compression en fonction de l'âge. (On sait que la résistance du béton augmente avec l'âge). Chaque cylindre est identifié par une lettre : *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J*. On prévoit rompre les cylindres de la façon suivante : 3 cylindres à 7 jours, 2 à 14 jours, 3 à 28 jours et 2 à 90 jours.

De combien de manières différentes peut-on arranger les cylindres pour les tester aux dates spécifiées et selon les nombres spécifiés ?

N.B. L'ordre dans lequel les cylindres d'un même âge (k jours) sont rompus le jour k est sans importance (k = 7, 14, 28, 90 jours).

QUESTION 5

On considère la variable aléatoire continue X, de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}25, & 0 \le x \le a \\ 0, & ailleurs \end{cases}$$

1. Quelle doit être la valeur de a ?
2. Quelle est la valeur de $P[X > a/2]$?
3. Quelle est la valeur de $P[X > a/2 \mid X > a/4]$?
4. Quelle est la valeur de $P[X > a/2 \mid X < a/4]$?

QUESTION 6

Soit un vecteur aléatoire $[X, Y]$ dont la fonction de masse conjointe est donnée au tableau suivant :

Y X	-1	0	1
-1	1/9	2/9	0
0	0	1/9	2/9
1	2/9	0	1/9

$$p(x, y) = P[X = x, Y = y]$$

Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.

Examen 2008

QUESTION 1

La fonction de masse conjointe des précipitations, X (mm), et du ruissellement, Y (m^3/s), causés par les pluies dans une région donnée, est fournie au tableau ci-après:

X (mm) Y(m^3/s)	25	50	75	
0,300	0,05	0,15	0	
0,600	0,10	0,25	0,25	
0,900	0	0,10	0,10	

$$p(x, y) = P[X = x, Y = y]$$

a) Quelle est la **probabilité** que la prochaine pluie apportera une **précipitation de 50 mm ou plus** et **un ruissellement supérieur à 0,6 m^3/s** ?

b) Après une pluie, le pluviomètre mesure une **précipitation de 50 mm**. Quelle est la **probabilité** que le **ruissellement à cette pluie** soit **de 0,6 m^3/s ou plus** ?

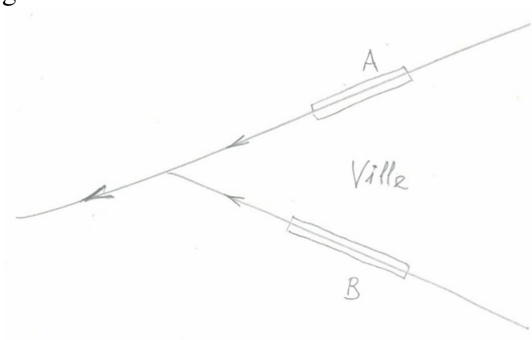
c) Est-ce que **X et Y** sont statistiquement **indépendantes** ? On justifiera la réponse.

d) Déterminer et tracer la **fonction de masse marginale du ruissellement**.

e) Déterminer et tracer la **fonction de masse du ruissellement** pour une **précipitation de 50 mm**.

QUESTION 2 (30 points)

Une ville est située entre deux rivières comme le montre le croquis. Des digues de protection A et B ont été construites pour protéger la ville contre la montée des eaux dans les deux rivières.



Les digues A et B ont été conçues pour contenir des crues ayant des périodes de retour de 5 ans et de 10 ans respectivement : cela implique que les probabilités d'inondation annuelle de la ville par-dessus A et B sont de 1/5 et 1/10 respectivement. (La période de retour d'une crue est le temps moyen en années séparant deux crues successives; et la probabilité de crue annuelle est l'inverse de la période de retour). On suppose que les crues provenant des deux rivières soient des événements statistiquement indépendants.

a) Déterminer la **probabilité que la ville soit inondée au cours d'une année donnée par une crue de l'une ou l'autre rivière** (ou des deux).

b) Quelle est la **probabilité que la ville soit inondée au cours d'au moins deux (2) des cinq (5) prochaines années** ?

QUESTION 3

On sait que 8% des barres d'acier d'armatures disponibles chez un fournisseur ne rencontrent pas les exigences de qualité. Un lot de 150 de barres est livré par le fournisseur sur un chantier de construction d'un ouvrage en béton armé.
Pour s'assurer de la qualité des barres reçues, l'ingénieur chargé de la construction choisit au hasard un échantillon de 20 barres du lot reçu et les soumet à un test de vérification de qualité.
Sur la base des 8% de barres défectueuses, on demande :

a) Quelle est la **probabilité que toutes les barres** de l'échantillon choisi **passent le test** (rencontrent les exigences de qualité).

b) Quelle est la **probabilité qu'au moins deux barres testées ne passent pas le test** ?

QUESTION 4

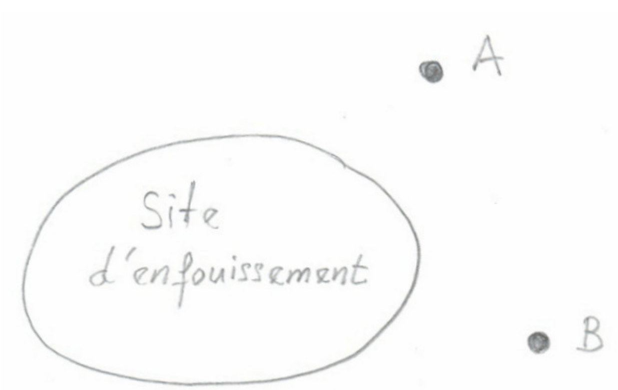
L'occurrence des accidents de circulation automobile à une intersection donnée peut être modélisée comme un processus de Poisson, et, sur la base des statistiques compilées, le nombre moyen d'accidents à cette intersection est de 1 tous les 3 ans.

a) Quelle est la probabilité qu'il n'y aura pas d'accident à cette intersection durant une période de 5 ans ?

b) On sait que dans chaque accident à cette intersection, il y a une probabilité de mortalité de 5%. En se basant sur le modèle de Poisson ci-dessus, quelle est la probabilité d'accidents mortels à cette intersection durant une période de 3 ans ?

QUESTION 5 (50 points)

On soupçonne une fuite de polluants à partir d'un site d'enfouissement vers les terrains environnants. Des puits d'observation au voisinage du site sont proposés pour vérifier si la fuite a lieu. La position de deux puits A et B est montrée sur la figure.



Si une fuite a lieu, elle sera détectée par le puits A avec une probabilité de 0,80 et par le puits B avec une probabilité de 0,90. On admet qu'aucun polluant ne sera enregistré par les puits s'il n'y a pas de fuite à partir du site contaminé.

Avant l'installation des puits, l'ingénieur responsable du contrôle du site estime qu'il y a 70% de chance que la fuite a eu lieu.

a) Supposons que le puits A soit d'abord installé et qu'aucuns polluants n'y soient observés. Dans ces conditions, que devient **la probabilité avec laquelle l'ingénieur croit que la fuite a eu lieu** ?

b) Supposons que les deux puits A et B soient deux installés. Lorsqu'il y a fuite, on admet que les détections aux deux puits sont des événements statistiquement indépendants.

   1. Quelle est **la probabilité que les polluants soient observés dans au moins l'un des deux puits** ?

   2. Si aucuns polluants ne sont observés par les deux puits, **avec quel degré de confiance** (probabilité) **l'ingénieur pourra-t-il conclure qu'aucune fuite de polluants n'a eu lieu** ?

Corrigé

Contrôle #1, 2007

Question 1

Échantillon sans remise -> loi hypergéométrique. Cependant N n'est pas spécifié. On peut présumer N grand -> loi binomiale (n=10,p=0.05)
X : nb de rivets défectueux
On accepte si X=0 ou X=1
On cherche P(X=0)+P(X=1)
Rép : $\boxed{0.914}$

Question 2

On reconnaît la loi hypergéométrique avec N=50, D=8, n à déterminer.
Soit X v.a. donnant le nombre d'unités défectueuses dans l'échantillon de taille « n »
On cherche « n » tel que P(X>0)>0.95
$P(X>0)=1-P(X=0)=1-[C_0^D C_{n-0}^{(N-D)} / C_n^N] = 1-[C_n^{42}/C_n^{50}]>0.95$ ou $C_n^{42}/C_n^{50}<0.05$
Après simplification, on peut écrire :
$\frac{C_n^{42}}{C_n^{50}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{42+1-i}{50+1-i}$. On augmente n jusqu'à ce que l'on obtienne une valeur plus petite que 0.05. On trouve n=15.

Question 3
Soit A : Eau déversée par l'usine contient le polluant
B : l'instrument indique la présence du polluant
On a :
P(A)=0.001
P(B|A)=0.995
P(B|non A)=0.01
Pour cette question, un arbre de probabilité s'avère être très utile.

1- On a observé B. Que vaut P(A|B)?
Théorème de Bayes :
P(A|B)=P(B|A)*P(A)/P(B)
P(B) (prob. totale) : P(B|A)*P(A)+P(B| non A)*P(non A)

P(B)=0.995*0.001+0.01*0.999=0.011
P(A|B)= .995*0.001/0.011=$\boxed{0.091}$

2- On applique le théorème de Bayes à l'événement B_1 et B_2

$P(A|B_1 \text{ et } B_2)=P(B_1 \text{ et } B_2 \mid A)P(A) / P(B_1 \text{ et } B_2)$
$P(B_1 \text{ et } B_2) = [P(B_1 \text{ et } B_2 \mid A)P(A)+ P(B_1 \text{ et } B_2 \mid \text{non } A)P(\text{non } A)$
$= 0.995^2*0.001+0.01^2*0.999=0.00109$

$P(A|B_1 \text{ et } B_2)= 0.995^2*0.001/0.00109=\boxed{0.908}$

Autre approche :
On pose $P(A|B_1)$=> P(A) dans la formule de Bayes et on « oublie » B_1.

$P(A|B_2)=P(B_2|A)*P(A)/P(B_2)$

$P(B_2)= P(B_2|A)*P(A)+ P(B_2|\text{non } A)*P(\text{non } A)=0.995*0.0908+0.01*(1-0.0908)=0.099438$

$P(A|B_2)= 0.995*0.0908/0.099438=\boxed{0.908}$

Question 4

$C_3^{10}C_2^{7}C_3^{5}C_2^{2}=\boxed{25200}$

Question 5

1. $F_X(x)=0.25x$, $0\leq x\leq 4$, $F_X(x)=0$ si $x<0$ et $F_X(x)=1$ si $x>a$; $F_X(a)=0.25\,a = 1 \Rightarrow \boxed{a=4}$
2. $1-F_X(a/2)=1-0.25*2=\boxed{1/2}$
3. $(1-F_X(a/2)) / (1-F_X(a/4)) = (1/2) / (3/4) = \boxed{2/3}$
4. Événements disjoints donc $\boxed{P=0}$

Question 6

$\boxed{\text{Non}}$. $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$
ex. $P(X=1 \text{ et } Y=-1)=2/9$ différent de $P(X=1)P(Y=-1)=3/9*3/9=1/9$

<u>Contrôle # 1, 2008</u>

Question 1

a) $0.1+0.1=\boxed{0.2}$ $P(Y=0.9,X=50)+P(Y=0.9,X=75)$
b) $(0.25+0.1)/0.5=\boxed{0.70}$ $P(Y=0.6,X=50)+P(Y=0.9,X=50)/P(X=50)$
c) Non , $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$. Par exemple $P(X=25,Y=0.9)=0$ différent de $P(X=25)*P(Y=0.9)$
d) $P(Y=0.3)=0.05+015=0.2$; $P(Y=0.6)=0.1+0.25+0.25=0.6$; $P(Y=0.9)=0.1+0.1=0.2$; 0 ailleurs
e) $P(Y|X=50)=P(Y \text{ et } X=50)/P(X=50) \Rightarrow 0.15/0.5=0.3$; $0.25/0.5=0.5$; $0.10/0.5=0.2$; 0 ailleurs

Question 2

Soit l'événement A_i : la digue A déborde l'année « i », B_i idem pour la digue B.

a) $P(A \text{ ou } B)=P(A)+P(B)-P(A \text{ et } B)=1/5+1/10-1/50= \boxed{7/25}$

b) La ville est inondée avec $p=7/25$. Soit X, le nombre d'années avec inondation parmi n. X est binomiale avec $p=7/25$.

On cherche $P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-(18/25)^5-5(7/25)(18/25)^4=\boxed{0.4303}$

Question 3

a) Échantillonnage d'un lot sans remise => loi hypergéométrique

$N=150$, $D=150*0.08=12$, $n=20$
Soit X nombre de barres défectueuses dans l'échantillon
On cherche $P(X=0)=C_0^{12}C_{20}^{138}/C_{20}^{150}=\boxed{0.16715}$ (calcul long)

b) $P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)$
$P(X=1)= C_1^{12}C_{19}^{138}/C_{20}^{150}=0.33711$ (calcul long)
$P(X>1)=1-0.16715-0.33711=\boxed{0.49575}$

Question 4

a) X : v.a. nombre d'accidents sur 5 ans

lambda=1/3 ans; c=1/3 ans*5 ans=5/3
$P(X=0)=e^{-c}c^{o}/0!=e^{-5/3}=\boxed{0.1889}$

b) X : v.a. nombre d'accidents mortels sur 3 ans
lambda (mortel)=1/3 ans *1/20=1/60 ans
c=1/60 ans *3 ans=1/20

$P(X>0)=1-P(X+0)=1-e^{-1/20}=\boxed{0.049}$

Question 5

Fait appel au théorème de Bayes. Pour cette question, un arbre de probabilité s'avère être très utile.

Soit F : le site fuit
A : le puits A détecte au moins un polluant
B : le puits B détecte au moins un polluant

On a P(A|F)=0.8
P(B|F)=0.9
P(A|non F)=0
P(B|non F)=0
P(F)=0.7

a) On observe non A, on veut P(F|non A)

P(F|non A)=P(non A|F)P(F)/P(non A)
P(A)=0.8*0.7+0*0.3=0.56
P(non A)= 1-P(A)=0.44
P(B)=0.9*0.7+0*0.3=0.63

P(F|A)=0.2*0.7/0.44=$\boxed{0.318}$

b) 1. On cherche P(A ou B)=P(A ou B|F)P(F)+P(A ou B | non F)P(non F)=P(A ou B |F)P(F)
(car P(A|non F)=P(B| non F)=0;

P(A ou B|F)=P(A|F)+P(B|F)-P(A et B|F)=0.8+0.9-0.8*0.9= 0.98
P(A ou B)=0.98*0.7=$\boxed{0.686}$

Remarque : Les détections de fuite sont statistiquement *<u>indépendantes lorsqu'il y a fuite</u>*,
i.e. P(A et B|F)=P(A|F)P(B|F), mais ceci n'implique pas :
P(A et B)=P(A) P(B) car A, B et F ne sont pas conjointement indépendants (par exemple
P(A et B|F) différent de P(A et B| non F). On vérifie que : P(A et B)=P(A)+P(B)-P(A ou B)=0.56+0.63-0.686=0.504 différent de P(A)P(B)=0.56*0.63=0.3528

2- on applique Bayes à l'événement (non A et non B)

P(non F|non A et non B)=P(non A et non B| non F)P(non F)/P(non A et non B)

P(non A et non B)=P(non (A ou B))=1-0.686=0.314
P(non F)=1-0.7=0.3
P(non A et non B|non F)=1
donc, P(non F|non A et non B)=0.3/0.314=$\boxed{0.955}$