MTH2302C- CP1-H09

QUESTION 1 (20 points)

Une petite usine de traitement d'eau potable possède une pompe principale et une pompe d'urgence de moindre capacité. La pompe d'urgence entre en fonction seulement lorsque la pompe principale tombe en panne. La pompe principale est en panne 2% du temps. Lorsqu'il y a panne, la pompe d'urgence fonctionne correctement 99% du temps. On estime avoir des probabilités de 97% et 80% que la pompe principale et la pompe d'urgence, respectivement, fournissent le débit correspondant à la demande du moment lorsqu'elles fonctionnent.

On choisit un moment au hasard. Quelle est la probabilité qu'à ce moment:

a) La pompe principale fonctionne?
b) La pompe d'urgence fonctionne?
c) Les deux pompes ne fonctionnent pas?
d) L'usine ne fournit pas le débit correspondant à la demande?

QUESTION 2 (6 points)

Un réseau routier permet un lien direct entre chaque ville d'un groupe de 10 villes. De combien de façons différentes peut-on visiter chacune des villes une seule fois en partant d'une des dix villes, la ville de départ étant considérée visitée ?

QUESTION 3 (14 points)

On doit vérifier si un remblai urbain contient ou non des contaminants. On estime à priori que la probabilité qu'il y ait des contaminants dans tout remblai urbain est de 0.3. Lorsque le remblai est contaminé, on estime à 0.6 la probabilité que l'échantillon montre cette contamination. Lorsque le remblai n'est pas contaminé, la probabilité que l'échantillon montre de la contamination est 0.

a) Un premier échantillon prélevé ne montre pas de contamination. Quelle est la probabilité que le remblai soit exempt de contamination?
b) Un second échantillon (indépendant du premier) ne montre pas de contamination. Que devient la probabilité précédente?

QUESTION 4 (10 points)

Sur une certaine propriété où l'on retrouve des kimberlites diamantifères, on estime la probabilité de trouver des diamants dans une tonne de roches égale à 0.4. Combien de tonnes de roches doit-on examiner pour avoir une probabilité d'au moins 0.95 de trouver des diamants ?

QUESTION 5 (12 points)

Un organisme de transport public prend livraison de 100 autobus. Pour contrôler la qualité du lot reçu, un échantillon de 4 autobus est prélevé au hasard pour subir un examen minutieux et une batterie de tests. Supposons que le lot de 100 autobus a 3 ou 10 autobus défectueux, que ce sont les deux seules possibilités et qu'elles sont à priori équiprobables.

On a observé un seul autobus défectueux parmi les 4 testés. Étant donnée cette information, quelle est la probabilité qu'il y ait réellement 3 autobus défectueux dans le lot?

QUESTION 6 (16 points)

Vous planifiez tester au laboratoire de structure un système de freinage d'urgence pour un monte-charge. Selon les dires du manufacturier, la fiabilité du système de freinage est de 99.5%.

a) Quelle est la probabilité que le système ne s'engage pas trois fois ou plus en 500 essais lorsque la fiabilité est de 99.5% ?

b) On découvre que la fiabilité du système est en réalité 98%. Pour améliorer la fiabilité du système d'urgence, vous suggérez au manufacturier ajouter un dispositif supplémentaire monté en parallèle, i.e. agissant indépendamment du système d'urgence actuel, et ayant isolément une fiabilité de 90%. Que deviendrait la fiabilité du système dans son ensemble avec cette composante additionnelle?

QUESTION 7 (10 points)

Un bâtiment requiert 50 pieux pour sa fondation. La probabilité qu'au point d'insertion des pieux le roc se situe à moins de 20m est 0.7. La probabilité qu'il se situe entre 20 et 30m est 0.3. On considère que les probabilités d'un point à l'autre sont indépendantes. Le coût d'un pieux de 20m est 1000$, le pieux de 30m coûte quant à lui 2000$. Si l'on doit rallonger par soudure un pieu de 20 m pour pouvoir rejoindre le roc, il faut dépenser 3000$.

Compte tenu uniquement du coût, quelle serait votre recommandation, acheter des pieux de 20m ou de 30m?

QUESTION 8 (12 points)

Le nombre de tremblements de terre de magnitude supérieure à 7 (échelle de Richter) sur l'ensemble de la planète est réputé suivent une loi de Poisson d'intensité 2/année (on considère que toutes les années ont 365 jours).

a) Quelle est la probabilité que dans une année donnée on observe au moins 2 tremblements de terre de magnitude supérieure à 7 ?
b) On a observé un tremblement de terre de magnitude supérieure à 7 le 50^{e} jour de l'année. Que devient la probabilité d'observer au moins deux tremblements de terre (au total) au cours de cette même année ?
c) On considère que chaque tremblement de terre de magnitude supérieure à 7 a une « chance » sur quatre d'occasionner des dommages matériels dépassant 1 G$. Quelle est la probabilité que sur 10 ans, on ait au moins 2 tremblements de terre de magnitude supérieure à 7 occasionnant des dégâts excédant 1G$?

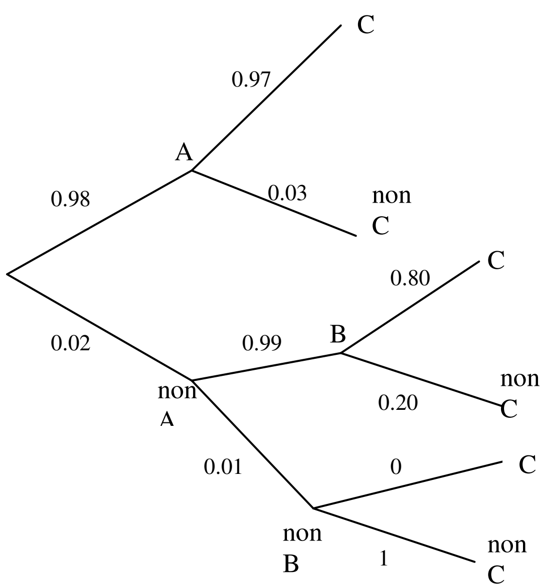
Corrigé

Question 1 :

Soit les événements :
A : la pompe principale fonctionne
B : la pompe d'urgence fonctionne
C : le débit fourni par l'usine correspond à la demande

L'énoncé nous indique que :
P(nonA)=0.02
P(B|nonA)=0.99
P(C|A)=0.97
P(C|B)=0.80

On peut représenter ces données sous la forme d'un arbre de probabilité :



a) P(A)=1-P(nonA)=$\boxed{0.98}$

b) P(B)=P(B et nonA)+P(B et A)=P(B|nonA)P(A) = 0.99*0.02=$\boxed{0.0198}$

c) P(nonA et nonB)=P(nonA)*P(nonB| non A)=0.02*0.01=$\boxed{0.0002}$

d)P(non C)=
P(A)P(non C|A)+P(non A)*P(B|non A)*P(non C | B et non A)+P(non A)*P(non B|nonA)=
0.98*0.03+0.02*0.99*0.2+0.02*0.01*1=$\boxed{0.0336}$

autre façon :

P(non C)=1-P(C)= P(C et A)+P(C et B) =1-[P(C|A)*P(A)+P(C|B)*P(B)] =
1- [0.97*0.98+0.8*0.0198] =1-0.9664=0.0336

Question 2 :

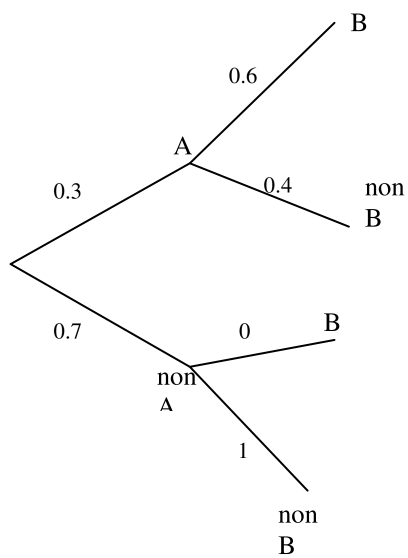
À partir de la 1ere ville, on a 9 destinations possibles. De la seconde, il reste 8 destinations possibles et ainsi de suite...
Le nombre de trajets possibles est donc :
$9*8*7*6*5*4*3*2*1=P_9^9=\boxed{362880}$

Si la ville de départ peut être n'importe laquelle (pas clair dans l'énoncé), alors c'est 10!. Les deux réponses sont acceptables.

Question 3 :

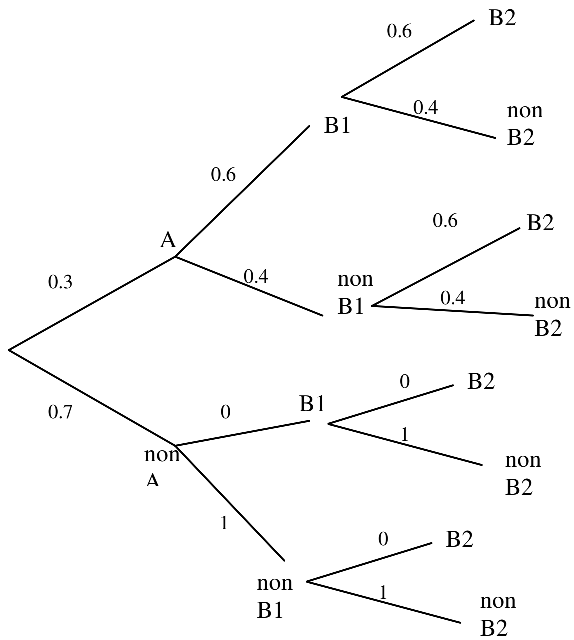
Application de la loi de Bayes
A : il y a des contaminants dans le remblai
B : il y a des contaminants dans l'échantillon
On a de l'énoncé:
P(A)=0.3
P(B|A)=0.6
P(B|non A)=0
P(non B|non A)=1
P(non B|A)=0.4

Ces informations se synthétisent bien sous forme d'un arbre de probabilité:



Par la probabilité totale : P(non B)=P(non B|nonA)P(non A)+P(non B|A)*P(A)=1*0.7+0.4*0.3
a) P(non A|non B)=P(non B|non A)*P(non A)/P(non B)=1*0.7/(1*0.7+0.4*0.3)=$\boxed{0.854}$

b) On ajoute un niveau à l'arbre précédent :



P(non A|non B1 et non B2)= P(non A et non B1 et non B2)/P(non B1 et non B2)=
$1^2*0.7/(1^2*0.7+0.4^2*0.3)=\boxed{0.936}$

Question 4 :

Chaque tonne de roche a une probabilité 0.4 de « succès » (i.e. contenir des diamants. On a donc une expérience de Bernouilli avec p=0.4.
X : v.a. donnant le nombre d'essais pour avoir une probabilité >0.95 de trouver des diamants

Loi de Pascal avec r=1 ou loi géométrique

	Probabilité	Fonction de répartition
P(X=1)	0.4	0.4
P(X=2)	0.6*0.4=0.24	0.64
P(X=3)	$0.6^2*0.4=0.144$	0.784
P(X=4)	$0.6^3*0.4=0.0864$	0.8704
P(X=5)	0.0518	0.9222
P(X=6)	0.0311	0.9533

On peut aussi utiliser directement la fonction de répartition de la loi géométrique :
$F_X(x)=1-(1-0.4)^x>0.95 \Rightarrow (1-0.4)^x<0.05 \Rightarrow x>\ln(0.05)/\ln(0.6)=5.86$ donc x=6.

On peut aussi raisonner à partir de la loi binomiale directement en cherchant « n » tel que P(X=0)<0.05.

Il faut examiner 6 tonnes de roches pour avoir une probabilité >0.95 de trouver des diamants

---

Question 5 :

Soit X le nombre d'autobus défectueux dans l'échantillon. L'échantillonnage d'une population finie est fait sans remise =>
Loi hypergéométrique, N=100, n=4, D=3 ou 10

$P(D=3| X=1)=P(X=1|D=3)P(D=3) / P(X=1)$
$P(X=1)= P(X=1|D=3)P(D=3)+ P(X=1|D=10)P(D=10)=1/2*(C_1^3C_3^{97}/C_4^{100}+ C_1^{10}C_3^{90}/C_4^{100})$

Après quelques simplifications :

$P(D=3| X=1)= (C_1^3C_3^{97})/[C_1^3C_3^{97}+ C_1^{10}C_3^{90}]=\boxed{0.274}$

Question 6 :

a) Soit X : nombre de fois où le système d'urgence ne s'engage pas.
X est binomiale avec p=0.005 et n=500
On cherche $P(X>2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$
$1-0.995^{500}-C_1^{500}*0.995^{499}*0.005-C_2^{500}*0.995^{498}0.005^2=\boxed{0.4565}$

b) Le système fonctionne si un ou l'autre des deux composantes fonctionne.
A : système d'urgence actuel fonctionne (P(A)=0.98)
B : la nouvelle composante fonctionne (P(B)=0.90)
$P(A \text{ ou } B)=P(A)+P(B)-P(A \text{ et } B)=0.98+0.9-0.9*0.98=\boxed{0.998}$

Question 7 :

Soit X la v.a. donnant le coût de l'implantation des pieux lorsqu'on choisit 20m et Y le coût lorsqu'on choisit 30m. On calcule l'espérance de chaque coût eton prend la solution offrant le coût minimum.
$E[X]=50*1000+0.3*50*3000=95\ 000$
$E[Y]=50*2000=100\ 000$ $
Comme E[X]<E[Y], on choisit des $\boxed{\text{pieux de 20m}}$

Question 8

Loi de Poisson avec paramètre d'intensité $\lambda=2/\text{an}$

a) c=2/an*1 an=2
$P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-e^{-2}(1+2)=\boxed{0.594}$

b)On utilise le fait que les événements arrivent indépendamment dans un processus de Poisson. Donc, P(X>1|tremblement de terre à 50 jours)=
P(1 tremblement de terre ou plus dans les 315 jours restants)

c=2/an*315/365=1.726
$P(X>0)=1-P(X=0)=1-e^{-1.726}(1)=\boxed{0.822}$

c) Si une v.a. suit une loi de Poisson, un sous-ensemble de celle-ci suit aussi une loi de Poisson.
c=2/an*10 ans*0.25=5 => $P(X>1)=1-e^{-5}(1+5)=\boxed{0.9596}$