QUESTION 1 **(15 points)**

Une variable aléatoire discrète X présente la fonction de répartition suivante.

$F_X(x)$	x
0	$x<0$
0.1	$0 \le x < 1$
0.4	$1 \le x < 2$
0.7	$2 \le x < 3$
0.8	$3 \le x < 4$
1.0	$4 \le x$

a) Calculez l'espérance et la variance de X.
b) Quelle est la probabilité que $1 \le X < 3$?

QUESTION 2 **(18 points)**

Considérant l'âge des réservoirs d'une station-service d'essence, on estime à 0.6 la probabilité que les réservoirs fuient. Un relevé géophysique a une probabilité 0.7 de détecter la fuite lorsqu'il y a une fuite et une probabilité de 0.2 d'indiquer une fuite lorsqu'il n'y en a pas. Un sondage a une probabilité 0.8 d'indiquer la fuite lorsque celle-ci est présente et une probabilité de 0.1 lorsqu'il n'y en a pas. Soit les événements A : il y a fuite des réservoirs, B : la géophysique indique une fuite et C : le sondage indique une fuite. Les deux tests (géophysique et sondage) sont considérés indépendants l'un de l'autre (qu'il y ait fuite ou non), i.e. on a :

$$P(C \cap B \mid A) = P(C \mid A)\, P(B \mid A) \Leftrightarrow P(C \mid B \cap A)=P(C \mid A) \text{ et aussi}$$

$$P(C \cap B \mid \text{non } A) = P(C \mid \text{non } A)\, P(B \mid \text{non } A) \Leftrightarrow P(C \mid B \cap \text{non } A)=P(C \mid \text{non } A)$$

a) On effectue les deux tests (géophysique et sondage). Quelle est la probabilité d'avoir au moins un test qui montre une fuite?

b) Le relevé géophysique indique une fuite. Quelle est la probabilité qu'un sondage révèle une fuite <u>sachant cette information</u>?

c) Le relevé géophysique et le sondage indiquent la fuite. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement fuite des réservoirs compte tenu de cette information ?

(Suggestion : construisez l'arbre de probabilité correspondant à l'énoncé)

QUESTION 3 **(15 points)**

Un citoyen peut se rendre à son travail par les trajets A ou B. La probabilité que le trajet A soit congestionné est 0.8. La probabilité que le trajet B soit congestionné est 0.7. La probabilité que les deux trajets ne soient pas congestionnés est 0.1

a) Quelle est la probabilité que les deux trajets soient congestionnés (simultanément) ?

b) Au moins 1 des 2 trajets est congestionné. Quelle est la probabilité que le trajet A soit congestionné?

QUESTION 4 (10 points)

Une classe de 15 étudiants compte 6 filles et 9 gars. On forme 3 équipes de 5 étudiant(e)s (gars ou filles) par tirage aléatoire. Les 5 premiers étudiants tirés forment la première équipe, les 5 suivants la deuxième, et ainsi de suite.

a) Combien de tirages différents peut-on avoir pour la $1^{\text{ère}}$ équipe ?

b) Quelle est la probabilité que chacune des 3 équipes soit constituée de 2 filles et 3 gars?

QUESTION 5 (12 points)

Le tableau suivant montre la probabilité, pour une certaine région, d'observer simultanément une roche d'un certain type et un intervalle donné de densité (d) de la roche.

densité	granite	basalte	péridotite	Total
$d \leq 2.8$	0.25	0.05	0	0.30
$2.8 < d \leq 3.0$	0.05	0.4	0	0.45
$3.0 < d \leq 3.2$	0	0.05	0.05	0.1
$3.2 < d$	0	0	0.15	0.15
Total	0.3	0.5	0.2	1

a) Les caractéristiques « type de roche » et « densité » sont-elles indépendantes ? Justifiez.

b) La densité d'une roche est supérieure à 2.8. Quelle est la probabilité que la roche en question soit une péridotite?

QUESTION 6 (18 points)

Les bris majeurs au réseau de conduites d'eau potable d'une municipalité sont réputés suivre un processus de Poisson dans le temps et l'espace (selon la longueur des conduites), au taux de 0.003 bris / (an km). La municipalité dispose de 100 km de conduites.

a) Quelle est la probabilité que se produise plus de 4 bris majeurs sur l'ensemble du réseau au cours des 10 prochaines années ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un bris majeur sur l'ensemble du réseau lors de 2 années ou plus parmi les 10 prochaines années ?

c) Quelle est la probabilité que le premier bris majeur survienne après la 10^{e} année ?

QUESTION 7 (12 points)

Vous prenez livraison de 20 pneus de rechange pour des camions d'une compagnie de construction. Vous testez 5 pneus et refusez le lot si un pneu est défectueux. Supposons que 3 pneus parmi les 20 du lot sont défectueux.

a) Quelle est la probabilité de refuser le lot par votre test ?
b) Quelle est la probabilité que l'échantillon de 5 contienne exactement 4 pneus défectueux ?
c) Combien de pneus devrait-on tester pour avoir une probabilité supérieure à 0.9 de refuser le lot ?

Corrigé

1- On calcule $p_X(x)$:

x	0	1	2	3	4
p(x)	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

a) $E[X]= 0.1*0 + 0.3*1 + 0.3*2 + 0.1*3 + 0.2*4 = 2.0$
$E[X^2]= 0.1*0 + 0.3*1 +0.3*2^2 + 0.1*3^2 + 0.2*4^2 = 5.6$

$Var(X)= E[X^2] – E[X]^2 = 5.6-2^2 = 1.6$

b) $P(1 \le X < 3) = P(X=1) + P(X=2) = 0.3 + 0.3 = 0.6$

barème : a) 9 pts (3 pour $p_X(x)$, 3 pts pour E[X] et 3 pts pour Var(X)), b) 6 pts

---

2- Un arbre de probabilité est utile.

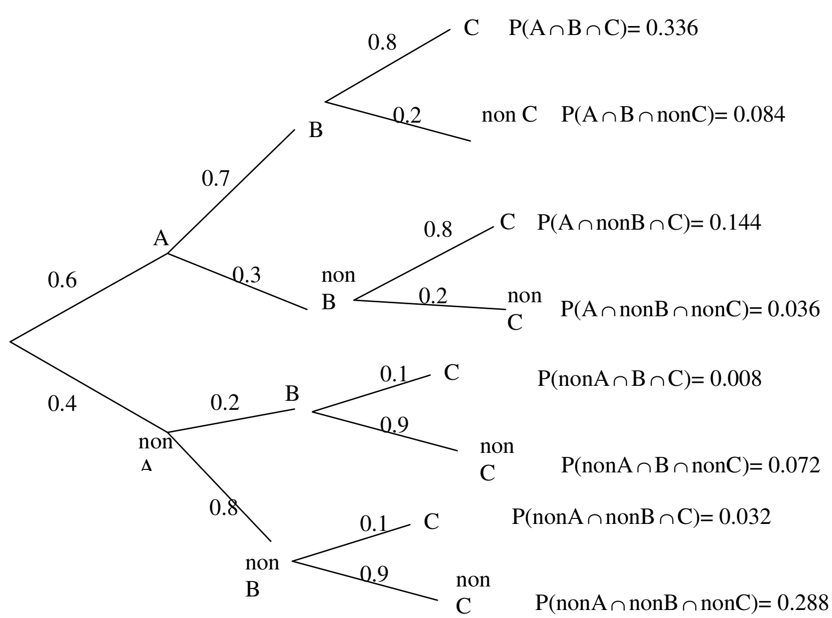
Soit les événements
A, les réservoirs fuient,
B, la géophysique indique une fuite,
C, le sondage indique une fuite

a) $P(B \cup C) = 1- P(\text{non } B \cap \text{non } C)= 1- 0.036 - 0.288 = 0.676$

b) $P(C|B) = P(C \cap B) / P(B) = (0.336+0.008) / (0.336+0.008+.084+.072) = 0.688$

c) $P(A | B \cap C) = P(A \cap B \cap C) /P(B \cap C) = 0.336 / (0.336 + 0.008) = 0.9767$

Barème: 6 pts chacun pour a), b) et c)



3- a) P(A et B) = P(A) + P(B) – P(A ou B)

P(A)=0.8
P(B)=0.7
P(non A et non B) = 0.1 = P(non (A ou B)) => P(A ou B) =1-0.1 =0.9

a) P(A et B) = 0.8+0.7-0.9 = 0.6

b) P(A | A ou B) = P(A et (A ou B)) / P(A ou B) = P((A et A) ou (A et B)) / P(A ou B) = P(A)/P(A ou B) = 0.8/0.9 = 0.889

barème : 8 pts pour a) 7 pour b)

4- a) C_5^{15} = 3003

b) nombre de tirages différents au total : $C_5^{15}C_5^{10}C_5^{5}$ = 756 756

nombre de tirages avec 2 gars et 3 filles dans chaque équipe : $C_2^{6}C_3^{9}C_2^{4}C_3^{6}C_2^{2}C_3^{3}$= 151 200

La probabilité est : 151 200 / 756 756 = 0.1998 => 0.2

barème : 4 pts pour a), 6 points pour b) 3 pts pour le dénominateur et 3 points pour le numérateur
en a) on accepte aussi la réponse P_5^{15} (360 360) en raison d'une légère ambigüité dans l'énoncé.

5- a) Elles sont dépendantes. Par exemple, on a P(granite et d>3.2)= 0 différent de P(granite)*P(d>3.2) = 0.3*0.15

b) P(péridotite | d>2.8) = P(péridotite et d>2.8) / P(d>2.8) = 0.2 / (0.45 + .1+ .15) = 0.286

barème : 6 pts pour a) et 6 pts pour b)

6- a) X nb bris sur 100 km pendant 10 ans : X ~ Poi(0.003*10*100) X~Poi(3)

$P(X>4)= 1- e^{-3}(1+3+3^2/2+3^3/6+3^4/24) = 0.18$

b) X : nb bris par an sur le réseau, X~Poi(0.003*100) = Poi (0.3)

$P(X \geq 1) = 1-e^{-0.3} = 0.259$

Y : Nb années où il y a un bris majeur
Y~Bin(10,0.259)
$P(Y \geq 2) = 1-P(Y=0) – P(Y=1) = 1- (1-0.259)^{10} – C_1^{10} (1-0.259)^9*0.259 = 0.776$

c) Z : Nb années pour obtenir le 1er bris majeur Y est Géom(0.259)
$P(Z>10) = (1-0.259)^{10} = 0.05$
On peut aussi utiliser la loi de Poisson avec c=3 sur 10 ans. P(X=0)=exp(-3) =0.05.
On peut aussi utiliser la loi binomiale avec p=0.259 et n=10. On calcule alors $P(X=0)=(1-0.259)^{10}$=0.05.
barème : 6 points pour a), b) et c)

7- a) X : nb de pneus défectueux dans l'échantillon. X est hypergéométrique avec N=20, D=3, n=5.
$P(X \geq 1) = 1-P(X=0) = 1 - C_5^{17}C_0^3 / C_5^{20} = 0.60$

b) 0.

c) On veut $P(X \geq 1) \geq 0.9 \Rightarrow 1-P(X=0) \geq 0.9 \Rightarrow P(X=0)<0.1$ donc $C_n^{17}/C_5^{20}<0.1$

$P(X \geq 1)$

n	5	9	10	11
$P(X \geq 1)$	0.6	0.855	0.895	0.926

donc n=11

barème : a) 5 pts, b) 3 pts, c) 4 pts. Si l'étudiant a calculé $P(X=1)$ au lieu de $P(X \geq 1)$, -3 points.