École Polytechnique
Département des génies civil, géologique et des mines (CGM)

MTH2302C – Probabilités et statistiques
1er contrôle périodique – Hiver 2006 – 8 février

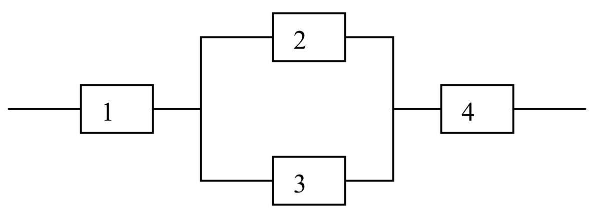
Instructions : Toute documentation permise; calculatrice, programmable ou non, permise.
Vous répondez sur le questionnaire. Utilisez le verso si vous manquez d'espace.
Bien décrire la démarche utilisée. Une réponse seule n'est pas acceptable.

L'examen comprend 8 questions totalisant 50 points et réparties sur 7 pages.
(Questions 1 et 2 : 5 points; questions 3 et 8 : 8 points; questions 4 à 7 : 6 points)

Pts

5 1- Des clients se présentent indépendamment dans le temps à un comptoir de service au rythme moyen de 2 par minute. Quelle est la probabilité que 4 clients ou plus se présentent au comptoir au cours d'une période donnée de 3 minutes ?

5 2- Quelle est la fiabilité du système décrit à la figure suivante si chaque composante a une fiabilité de 0,9 et que les composantes sont indépendantes?



8 3- Deux routes donnent accès à une troisième. Les probabilités de congestion de ces routes aux heures de pointe sont de 0,6 pour la route 1 et 0,7 pour la route 2. De plus, sachant que la route 1 est congestionnée, la probabilité que la route 2 le soit aussi est 0,95.

Calculez :

a) La probabilité que les deux routes soient congestionnées
b) La probabilité que la route 1 soit congestionnée sachant que la route 2 est congestionnée
c) La probabilité que seule la route 1 soit congestionnée
d) La probabilité que seule la route 2 soit congestionnée
e) La probabilité qu'au moins une route soit congestionnée
f) La probabilité qu'aucune des deux routes ne soit congestionnée

6 4- Une municipalité lance un appel d'offres pour réaliser la construction d'une portion du réseau d'aqueduc. Le travail demandé se décompose en trois parties principales : les travaux d'ingénierie, la construction proprement dite et le contrôle de qualité. Elle estime les coûts moyens et les écarts-types de chaque partie être :

	Ingénierie	Construction	Contrôle
Coût moyen (M$)	0,8	3	1
Écart-type (M$)	0,5	1	0,5

a) Quelle est la moyenne et l'écart-type du coût total la municipalité doit prévoir obtenir dans les soumissions si l'on suppose indépendants les coûts pour chaque partie?
b) Que devient la réponse précédente si les coûts de chaque partie montrent deux à deux une corrélation de 0,6?

6 5- Une firme doit construire un bassin pour le traitement des eaux usées. La technologie utilisée consiste à ajouter environ 7% de bentonite en poudre à un sable contenant au moins 10% de particules fines (<80 μ m). Un site est considéré pour la construction. Selon l'information géologique initiale, on estime à 60% la probabilité que le sable du site contienne suffisamment de fines.
Si le sable du site contient réellement suffisamment de fines (i.e. >10%), un échantillon prélevé aléatoirement a 95% de chances d'indiquer également plus de 10% de fines. Lorsque le sable du site ne contient pas suffisamment de fines, il y a tout de même une probabilité de 0,10 que l'échantillon prélevé montre suffisamment de fines.

a) On prélève un échantillon et celui-ci montre 12% de fines. Sachant cette information, quelle est la probabilité que le site contienne un sable ayant réellement plus de 10% de fines?
b) Que devient cette probabilité si un second échantillon prélevé montre aussi plus de 10% de fines?

6 6- Vous achetez des équipements de 5 fournisseurs différents. Chaque fournisseur produit en moyenne 2% d'articles défectueux.

a) Combien d'articles, en moyenne, devrez-vous acheter d'un même fournisseur pour observer un article défectueux?
b) On commande un article de chacun des fournisseurs. Quelle est la probabilité qu'au moins un article soit défectueux parmi les articles reçus?

---

6 7- Un minibus transporte six passagers. Les passagers peuvent descendre à 7 arrêts différents avec probabilité égale.

a) Quelle est la probabilité que les 6 passagers descendent ensemble à un même arrêt?
b) Quelle est la probabilité que chaque passager soit le seul à descendre à son arrêt?

8 8- Soit X le poids d'une pièce de béton précontraint (en tonnes « t »). La fonction de densité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} k\ x & 0 \le x \le 8 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

a) Que vaut la constante « k »?
b) Quelle est la probabilité que le poids de la pièce soit inférieur à 5t?

Pour transporter cette pièce sur le chantier, on doit payer un prix fonction du poids de la pièce :
Coût de transport = 1000$*x.

c) Quelle est la fonction de densité du coût de transport?
d) Quelle est l'espérance de ce coût?

Corrigé :

1- X : Nombre de clients en 3 minutes. X est Poisson(6). On cherche $P(X \geq 4)$
$=1-P(X=0,1,2,3)=1-e^{-6}(1+6+18+36)=0,8488$

2- Soit A,B,C,D les événements : le composant 1, 2, 3, ou 4 fonctionne.
Le système fonctionne si $A \cap (B \cup C) \cap D$.
$P(B \cup C) = P(B)+P(C)-P(A \cap C)=0,9+0,9-0,81=0,99$
(aussi $P(B \cup C) = 1 - P(\overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - (0,1)(0,1) = 0,99$)
La fiabilité du système est donc : 0.9*0.99*0.9=0,802

3- Soit A et B, les routes 1 et 2 sont congestionnées. De l'énoncé, on a : P(A)=0,6, P(B)=0,7 et P(B|A)=0,95.

a) $P(A \cap B)=P(B|A)*P(A)=0,95*0,6= 0,57$
b) $P(A|B)=P(P(A \cap B)/P(B)=0,57/0,7= 0,814$
c) $P(A \cap \overline{B})=P(A)-P(A \cap B)=0,6-0,57=0,03$
d) $P(\overline{A} \cap B) =P(B)- P(A \cap B)=0,7-0,57=0,13$
e) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)- P(A \cap B)=1,3-0,57=0,73$ ou a)+c)+d) 0,57+0,03+0,13=0,73
f) $P(\overline{A \cup B})=1-0,73=0,27$

4- Soit C le coût total.

a) E[C]=0,8+3+1= 4,8 M$
$Var(C)=0,5^2+1^2+0,5^2=1,5$ L'écart-type est donc : $1,5^{0.5}=1,225$M$

b) Soit C_i le coût pour chaque partie. On calcule les covariances pour chaque couple :

$Cov(C_1,C_2)=0,6*0,5*1=0,3$
$Cov(C_1,C_3)=0,6*0,5*0,5=0,15$

$Cov(C_2,C_3)=0,6*1*0,5=0,3$

$E[C]=4,8$ M$
$Var(C)=1,5+2*(0,3+0,15+0,3)= 3,0$ L'écart-type est donc 1,732 M$

5- Soit A, le sable du site contient suffisamment de fines (>10%)
Soit B_i, l'échantillon « i » a montré plus de 10% de fines.

De l'énoncé, on a : $P(A)=0,6$ $P(B_1|A)=0,95$ et $P(B_1|\overline{A})=0,10$

a) $$P(A|B_1)=\frac{P(B_1\mid A)*P(A)}{P(B_1\mid A)*P(A)+P(B_1\mid \overline{A})*P(\overline{A})}=\frac{0,95*0,6}{0,95*0,6+0,1*0,4}=0,934$$

b) On répète la formule de Bayes en prenant cette fois comme probabilité à priori celles obtenues en a)

$$P(A|B_1\cap B_2)=\frac{P(B_2\mid A)*P(A\mid B_1)}{P(B_2\mid A)*P(A\mid B_1)+P(B_2\mid \overline{A})*P(\overline{A}\mid B_1)}=\frac{0,95*934}{0,95*0,934+0,1*0,066}=0,993$$

6- a) X : nb articles pour observer un article défectueux : X est géométrique (p). $E[X]=1/p=1/.02=50$ articles en moyenne.
b) Y : nb articles défectueux reçus parmi les 5 commandés. Y est Binomiale(5,0.02).
On cherche $P(Y>0)=1-P(Y=0)= 1-,98^5= 0,096$

7- a) Pour un arrêt particulier, la probabilité que les 6 passagers descendent est $(1/7)^6$. Pour les 7 arrêts ce sera donc $7*(1/7)^6=5.95 \times 10^{-5}$

b) Chaque passager peut descendre à 7 stations différentes. Le nombre de possibilités sans restrictions est donc 7^6. Le nombre de choix de 6 stations différentes parmi 7 est une permutation $P_6^{\,7}=7!/1!=7!$ (le premier a le choix parmi 7, le second parmi 6, le 3^e parmi 5...le 6^e parmi 2).

La probabilité que les 6 descendent en solitaire à leur station respective est donc : $7!/7^6=0,043$

8- a) Par intégration, on trouve : $(kx^2/2)|^8_0= 32k=1$ =>$k=1/32$
b) $P(X<5)=$ $F_X(x)=\int_0^5 1/32t\,dt=25/64$

c)
$C= 1000*X$
$x=c/1000$
$dx/dc=1/1000$

donc $f_C(c)=x/32000 = c/32x10^6$ $0\le x\le 8000$
$f_C(c)=0$ ailleurs.

d) Par intégration directe de X, on trouve : $E[X]=x^3/96\,|^8_0=5.333$
Pour C, c'est donc 1000*5,333=5333$