Chapitre 4 : Lois de distribution continues

4.1 Loi uniforme

Si toute valeur de X est équiprobable dans l'intervalle [a,b], alors X suit une loi uniforme.

La fonction de densité est:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \le x \le b$$

La fonction de répartition est :

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad a \le x \le b$$

On a :

$$E[X] = (a+b)/2$$
$$Var(X) = (b-a)^2/12$$

Note : Un cas très fréquent utilisé pour la simulation de variables aléatoires continues (ou pour simuler des tirages aléatoires) est a=0, b=1. La valeur de X est alors interprétée comme une probabilité et l'on simule une valeur « z » de la loi voulue par $z = F_Z^{-1}(x)$.

4.2 Loi normale

C'est sans contredit la loi la plus importante en statistique. Elle est adéquate pour décrire plusieurs phénomènes naturels surtout ceux causés par l'addition d'un grand nombre de petits effets indépendants. Mathématiquement, elle jouit de plusieurs propriétés extrêmement intéressantes. Finalement, elle constitue la distribution limite pour une somme de v.a. indépendantes de même distribution (théorème central limite). Cette propriété demeure valide pour des v.a. indépendantes de distribution différentes pourvu que chacune séparément contribue peu à la somme.

La fonction de densité de X est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-u}{\sigma}\right)^2\right] \quad -\infty < x < \infty$$

où μ et σ (ou σ^2) sont les paramètres de la distribution, en fait l'espérance de X et son écart-type (ou sa variance)

On a :

$$E[X] = \mu$$
$$Var(X) = \sigma^2$$

La fonction de répartition de la loi normale ne possède pas d'expression simple. Cependant les valeurs ont été tabulées numériquement pour la loi N(0,1). Cette table suffit pour toutes les lois normales.

4.2.1 Propriétés de la loi normale

Transformation linéaire

Une v.a. normale X demeure normale après transformation linéaire Y = aX + b.
Donc,

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Additivité

Soit $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, i=1...n, et les X_i sont indépendantes. Alors la somme des variables est une normale dont la moyenne est la somme des moyennes et la variance est la somme des variances. On peut généraliser ce résultat à des v.a. dépendantes pourvu qu'elles présentent une distribution conjointe qui soit aussi multinormale (extension au cas multivariable de la distribution normale).

Théorème central limite

a) Soit la somme de « n » v.a. indépendantes et de même distribution. Alors la distribution de la somme tend vers une loi normale lorsque « n » augmente. L'espérance de la somme est la somme des espérances et la variance de la somme est la somme des variances des « n » v.a.

b) Soit la somme de « n » v.a. indépendantes et de distributions quelconques. Alors la distribution de la somme tend vers une loi normale lorsque « n » augmente pourvu que chaque v.a. contribue peu à la somme. L'espérance de la somme est la somme des espérances et la variance de la somme est la somme des variances des « n » v.a.

Note : d'autres propriétés tout aussi importantes seront vues dans le contexte multivariable.

Simulation d'une v.a. normale

On simule deux v.a. provenant d'une loi U(0,1). On forme ensuite :

$$Z = \left(-2\ln U_1\right)^{1/2} \cos(2\pi U_2)$$

On peut montrer que Z est N(0,1).

On peut aussi simuler une v.a. normale en sommant un grand nombre de v.a. indépendantes (théorème central limite). On peut aussi simuler par l'inverse de la fonction de répartition (évaluée numériquement).

Exemples :
Soit X~N(5,16)
a) P(X > 4) = P(Z >(4-5)/4)= P(Z > -0.25) = P(Z < 0.25) = 0.599
b) P(X>7) = P(Z > (7-5)/4) = P(Z > 0.5) = 1- P(Z < 0.5) = 0.309
c) P(X < 4.5) = P(Z < (4.5-5)/4) = P(Z < -1/8) = P(Z > 1/8) = 1- P(Z < 1/8) = 0.45

4.3 Loi lognormale

Si $Y = ln(X)$ suit une loi $N(\mu, \sigma^2)$, alors $X = e^Y$ suit une loi lognormale (note X>0).

Les moyennes et variances de *X* et *Y* sont reliées par :

	$X = e^Y$	$Y = ln(X)$
Espérance	$\mu_X = \exp(\mu_Y + \sigma_Y^2 / 2)$	$\mu_Y = \ln(\mu_X) - \sigma_Y^2 / 2$
Variance	$\sigma_X^2 = \mu_X^2 (e^{\sigma_Y^2} - 1)$	$\sigma_Y^2 = \ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right)$

Note : Comme le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes, le produit de variables lognormales indépendantes est aussi distribué suivant une loi lognormale.

Note : La loi lognormale est très fréquemment observé en géologie et en mines pour représenter des teneurs par exemple. On peut aussi s'en servir pour représenter les distributions de grand nombre de v.a. positives par définition (ex. crue annuelle maximale, précipitation annuelle maximale, magnitude de tremblement de terre, concentration de contaminants....)

Exemple : La teneur en or d'une carotte de forage suit une distribution lognormale de moyenne 5 ppm et de variance 100 ppm^2. Quelle est la probabilité qu'une carotte de forage montre une teneur supérieure à 20 ppm ?

Il faut d'abord déterminer la moyenne et la variance logarithmique.

$\sigma_Y^2 = \ln\left(\frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} + 1\right) = \ln\left(\frac{100}{25} + 1\right) = 1.6094$ et $\mu_Y = \ln(\mu_X) - \sigma_Y^2 / 2 = \ln(5) - 1.6094 / 2 = 0.8047$

P(X>20) = P(Y > log(20)) =P(Z > (log(20)-0.8047)/1.6094$^{0.5}$) = P(Z > 1.7271) =
1-P(Z < 1.7271) = 0.0421

4.4 Loi χ^2

Soit $Z_i \sim N(0,1)$, i=1…n, « n » v.a. indépendantes, alors $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2$

La loi χ^2 apparaît naturellement dans la plupart des méthodes statistiques utilisant le principe des moindres carrés. Elle apparaît aussi pour décrire la distribution des statistiques utilisées pour estimer la variance de v.a. normales.

La fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \qquad x > 0$$

La fonction gamma vaut : $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$. Si « z » est un entier « n » alors $\Gamma(n)$ =(n-1)!

On a :

$$E[X] = n$$
$$Var(X) = 2n$$

Note : Comparant avec la loi gamma, on note qu'une χ^2 avec « n » degrés de liberté est équivalente à une loi gamma avec $\lambda = 1/2, k = n/2$.

4.5 Loi Student (loi t)

Soit $Z \sim N(0,1)$ et $V \sim \chi_n^2$, Z et V indépendantes. Alors, $X = \dfrac{Z}{\sqrt{V/n}} \sim t_n$. La loi de Student apparaît surtout lorsque l'on veut comparer les moyennes de deux échantillons différents pour tester s'ils sont égaux. On la retrouve aussi en régression pour tester si un coefficient est différent de 0.

La fonction de densité de X est :

$$f(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\ \Gamma(n/2)} \left(\frac{x^2}{n} + 1 \right)^{-(n+1)/2} \qquad -\infty < x < \infty$$

On a :

$$E[X] = 0$$
$$Var(X) = n/(n-2) \quad n > 2$$

4.6 Loi Fisher

Soit $V_1 \sim \chi_{n_1}^2$ et $V_2 \sim \chi_{n_2}^2$, V_1 et V_2 indépendantes. Alors, $X = \dfrac{V_1/n_1}{V_2/n_2} \sim F_{n_1,n_2}$. La loi de Fisher apparaît surtout en régression et en analyse de variance pour tester si une ou plusieurs variables améliorent significativement un modèle donné.

La fonction de densité de X est :

$$f(x) = \frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{n_1/2} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(\frac{n_1 x}{n_2} + 1 \right)^{-(n_1+n_2)/2} \qquad 0 < x$$

On a :

$$E[X] = n_2/(n_2-2) \quad n_2 > 2$$
$$Var(X) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)} \quad n_2 > 4$$

Note : Les distributions Khi², Student et Fisher sont des distributions échantillonnales, i.e. les distributions de statistiques calculées sur un échantillon.

Note : Si $X \sim t_n$ alors $X^2 \sim F_{1,n}$.

Note : Si $X \sim F_{n1,n2}$ alors $1/X \sim F_{n2,n1}$

Note : Les fonctions de répartition des lois normale, lognormale, Khi^2, Student, et Fisher n'ont pas d'expressions simples. Les intégrales de la fonction de densité sont évaluées numériquement et présentées sous forme de tables ou évaluées à l'aide d'expressions d'approximation.

4.7 Loi exponentielle

Soit X la longueur (ou le temps) entre deux objets suivant un processus de Poisson. X sui une loi exponentielle.

La fonction de densité de X est :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0, \lambda > 0$$

La fonction de répartition est :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$$

On a :

$$E[X] = 1/\lambda$$
$$Var(X) = 1/\lambda^2$$

Note : La loi exponentielle est souvent utilisée pour décrire les durées de vie de composantes mécaniques ou électriques. D'autres exemples sont : les distances entre des joints dans la roche le long d'un forage, l'intervalle de temps entre deux voitures sur une route peu fréquentée, l'intervalle de temps entre l'émission de deux rayons gamma par une roche radioactive, etc.

4.8 Loi d'Erlang

Le temps écoulé avant la k^e arrivée ou la longueur parcourue à partir d'un joint avant d'en observer « k » autres joints sont décrits par la loi d'Erlang.

La fonction de densité de X est :

$$f(x) = \frac{(\lambda x)^{k-1} \lambda e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \quad x \geq 0, \lambda > 0, k = 1,2...,$$

La fonction de répartition est :

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i e^{-\lambda x}}{i!} \quad x \geq 0, \lambda > 0, k = 1,2...$$

On a :

$$E[X] = k / \lambda$$
$$Var(X) = k / \lambda^2$$

Note : λ représente le nombre moyen d'arrivées par unité de temps ou de longueur (voir loi de Poisson).

Note : Si k=1, on retrouve la loi exponentielle. La loi d'Erlang représente la distribution d'une somme de « k » v.a. indépendantes de distribution exponentielle.

Note : Le paramètre k contrôle le coefficient d'asymétrie. Celui-ci est donné par : $\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt{k}}$.

Note : Si l'on permet que k ne soit pas entier, la loi se généralise à la **loi gamma**. La fonction de la densité de la loi gamma est alors donnée par :

$$f(x) = \frac{(\lambda x)^{k-1}\lambda e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)} \quad x \geq 0, \lambda > 0, k > 0.$$

Si l'on pose k=n/2 et λ =1/2, on retrouve la loi χ_n^2

4.9 Loi bêta

La loi bêta est une loi à 2 paramètres définie sur [0,1]. Les paramètres α et β contrôlent la forme de la courbe.

La fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

On a :

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Note : Si $\alpha = \beta = 1$, on retrouve la loi uniforme.

Note : On peut généraliser la loi bêta à une v.a. Y sur [a,b] en écrivant : $X = \frac{(Y-a)}{(b-a)}$.

4.10 Loi Weibull

Il s'agit d'une loi à 2 paramètres très flexible car elle présente une grande variété de forme selon les valeurs de ces paramètres. Elle peut donc fournir de bonnes approximations pour plusieurs autres lois. On la retrouve utilisé fréquemment en hydrologie pour représenter la distribution de précipitations ou autres événements extrêmes.

La fonction de densité est :

$$f(x) = \lambda\beta x^{\beta-1}\exp(-\lambda x^{\beta}) \quad x \geq 0, \lambda > 0, \beta > 0$$

La fonction de répartition est :

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x^{\beta}) \quad x \geq 0$$

Les paramètres λ, β contrôlent respectivement la dispersion et la forme de la distribution.

Il n'y a pas d'expressions simples pour la moyenne et la variance de cette distribution.

Note : La loi de Weibull peut aussi être présentée avec 3 paramètres, le paramètre additionnel représentant une limite inférieure positive sur les valeurs que peuvent prendre X.

4.11 Distribution de valeurs extrêmes

Souvent en génie civil, géologique ou des mines, les décisions de design se font relativement aux valeurs maximales ou minimales que l'on risque de rencontrer sur une période de temps donné ou à l'intérieur d'un volume donné.

Exemple : Supposons que l'on veuille déterminer la probabilité qu'un vent excède la vitesse très grande « c » au cours d'une période de 50 ans. On pourrait examiner la distribution de la force du vent maximale enregistrée sur une heure et à partir de l'observation faite sur quelques années ajuster une loi de distribution « classique » et partant calculer la probabilité recherchée. Le problème c'est que la valeur « c » se trouve être un événement rare et que la probabilité calculée va dépendre assez lourdement du type de loi choisi afin de représenter la distribution. Une meilleure approche consisterait à ne retenir que la valeur maximale du vent enregistrée sur une heure mais au cours d'une période beaucoup plus longue (mois, année). On aurait beaucoup moins de données à notre disposition mais la valeur « c » ne se retrouvera plus dans les valeurs très extrêmes de la distribution.

La distribution des événements extrêmes a été étudiée par Gumbel (1958) qui a identifié 3 types de distribution couvrant la majeure partie des situations. Avec beaucoup d'originalité on les a nommés : type I, type II, et type III (la loi de Weibull fait partie du type III). Chacun de ces types correspond à un ensemble de distributions de la variable de base (ex. vent mesuré au cours d'une heure) ayant une décroissance particulière au niveau de la queue de la distribution.

4.11.1 Distribution de valeurs extrêmes Type I

A- Pour le maximum d'un grand nombre de valeurs

La variable de base Y a une fonction de répartition ayant pour les fortes valeurs la forme :

$$F_Y(y) = 1 - e^{-g(y)}$$

(cas des lois exponentielle, gamma, et normale)

Alors, si X désigne la valeur maximale de Y sur une certaine période, on a :

$$F_X(x) = \exp\left(-e^{-\alpha(x-\beta)}\right) \quad -\infty < x < \infty, \alpha > 0$$

$$f(x) = \alpha \exp[\alpha(\beta - x) - \exp(\alpha(\beta - x))]$$

où α et β (β est le mode de la distribution) sont des paramètres à ajuster aux données observées.

On a :

$$E[X] \approx \beta + \frac{0.577}{\alpha}$$

$$Var(X) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}$$

Le coefficient d'asymétrie vaut 1.1396 et ne dépend pas de α et β

B- Pour le minimum d'un grand nombre de valeurs

Si X désigne la valeur minimale de Y sur une certaine période, on a :

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-e^{\alpha(x-\beta)}\right) \quad -\infty < x < \infty, \alpha > 0$$

où α et β (β est le mode de la distribution) sont des paramètres à ajuster aux données observées.

On a :

$$E[X] \approx \beta - \frac{0.577}{\alpha}$$

$$Var(X) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}$$

Le coefficient d'asymétrie vaut -1.1396 et ne dépend pas de α et β

4.11.2 Distribution de valeurs extrêmes Type II

La variable de base Y a une fonction de distribution ayant pour les fortes valeurs la forme :

$$F_Y(y) = 1 - \frac{b}{y^k} \quad y > 0, k > 0$$

Alors, si X désigne la valeur maximale de Y sur une certaine période, on a :

$$F_X(x) = \exp\left(-(\beta / x)^k\right) \quad x > 0, \beta > 0, k > 0$$

Il n'y a pas d'expressions simples pour l'espérance et la variance.

Note : Si X est Type II, alors ln(X) est Type I.

Note : les moments d'ordre $\geq$k n'existent pas pour cette distribution.

4.12 Distributions tronquées

Les différentes distributions présentées peuvent être tronquées pour mieux représenter certaines v.a.

Ainsi, la loi normale est définie pour $-\infty < x < \infty$, or plusieurs v.a. sont toujours positives. On peut alors definer une distribution normale tronquée à gauche à x_0 par :

$$f(x) = \frac{f_{Normale}(x)}{1 - F(x_0)} \quad x_0 \le x < \infty$$

Bien sûr on peut aussi tronquer les distributions à droite.

4.13 Distributions censurées

Souvent, on dispose d'appareils de mesure avec une limite inférieure de détection. D'autres fois, la valeur maximale que peut enregistrer un appareil est atteinte (phénomène de saturation), d'autres fois encore, pour des raisons de commodité, on décide d'arrêter un test ou une mesure à un seuil "c" fixé. Tous ces exemples sont des exemples de distributions censurées.

Exemple: Les analyses chimiques de contaminants en hydrocarbures que fournissent les laboratoires montrent souvent la valeur <seuil de détection.

Exemple: Lors d'un sautage, il arrive souvent que le séismogramme enregistrant les déplacements des particules sature lorsque l'explosion est trop forte.

Exemple: Lors du relevé de fractures dans un massif rocheux, on peut decider pour sauver du temps de ne mesurer que les fractures montrant une longueur d'au moins 10 cm.

Exemple: Lors de tests de fatigue des matériaux, on decide de faire un maximum de 10^6 cycles de chargement. Les matériaux n,ayant pas rompu reçoivent la valeur $>10^6$.

Dans ce cas les lois précédentes s'appliquent. Il faut ajuster les paramètres des lois aux données non-censurées en veillant à retrouver la bonne proportion de valeurs sous le point de censure.

4.14 Composition de distributions

Parfois, une v.a. suit une certaine distribution dont le paramètre peut lui-même être considéré comme une v.a. Soit Y la v.a. avec fonction de répartition $F_Y(y \mid \theta)$, θ le paramètre aléatoire avec fonction de densité $f_\theta(\theta)$, alors la v.a. X résultant de la composition de Y et θ a comme fonction de répartition et de densité :

$$F_X(x) = \int F_Y(x \mid \theta) f(\theta) d\theta$$
$$f_X(x) = \int f_Y(x \mid \theta) f(\theta) d\theta$$

des adaptations évidentes existent pour le cas où X, Y ou θ sont discrets. On notera la similitude avec la notion de probabilité totale (voir chap. 1).

Note : Ces relations indiquent que $F_X(x)$ est en fait l'espérance de la fonction $F_Y(x \mid \theta)$ considérée comme une fonction de θ.

Exemple : Le nombre de véhicules arrivant en un point donné par minute suit une loi de Poisson de moyenne β. On ferme une route pour des travaux. Le temps que durera la fermeture est une variable aléatoire T distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Combien de véhicules risquent d'être touchés par la fermeture de la route?

On a :

$$
\begin{aligned}
&f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\
&f_y(y) = e^{-\beta t}(\beta t)^x / x! \\
&p_X(x) = \int e^{-\beta t}(\beta t)^x \lambda e^{-\lambda t} / x! dt \\
&\quad = \frac{\lambda}{\lambda+\beta}\left(\frac{\beta}{\lambda+\beta}\right)^x \qquad x = 0,1,2...
\end{aligned}
$$

On reconnaît la loi géométrique avec paramètre $\frac{\lambda}{\lambda+\beta}$. Par exemple, si le nombre de véhicules par minute est en moyenne $\beta = 3$ par minute et que le délai prévu entre 2 autos est en moyenne, $1/\lambda = 1$ min , alors $\frac{\lambda}{\lambda+\beta}$=1/4. Le nombre moyen de véhicules arrêté par les travaux sera de 4-1=3 (voir la loi géométrique).

4.15 Distributions de vecteurs aléatoires (loi multinormale)

Sans conteste la loi conjointe la plus utilisée en statistique est la loi multinormale. Soit $X_1, X_2, \ldots X_p$ « p » v.a. distribuées suivant une loi multinormale, la fonction de densité est :

$$
f(x_1, \ldots, x_p) = (2\pi)^{-p/2} |\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})' \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right] \quad -\infty < \mathbf{x} < \infty,
$$

où

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdot & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{p1} & \cdot & \cdot & \sigma_{pp} \end{bmatrix}
$$

$\boldsymbol{\mu}$ est le vecteur px1 des moyennes et $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice pxp des covariances entre toutes les paires de variables. La loi multinormale est entièrement définie par ces deux paramètres, $|\boldsymbol{\Sigma}|$ est le déterminant de la matrice de covariance.

4.15.1 Propriétés de la loi multinormale

La loi multinormale possède des propriétés remarquables :

- les distributions conditionnelles sont toutes normales ou multinormales;
- les distributions marginales sont toutes normales;
- toute somme de v.a. multinormales est aussi normale
- tout sous-ensemble des « p » v.a. est aussi multinormal ou normal.

On sépare les « p » variables « x » en deux groupes distincts : groupe 1 comprenant les v.a. dont on veut déterminer la distribution conditionnelle; groupe 2 comprenant les v.a. dont on a observé les valeurs. Le vecteur d'espérance conditionnelle et la matrice de covariances conditionnelles des v.a. du groupe 1 étant donné les valeurs prises par les v.a. du groupe 2 s'obtiennent de :

$$\boldsymbol{\mu}_{1\bullet 2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_{11\bullet 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$$

ou

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

Note : On remarque que l'espérance conditionnelle de X_1 étant donné $X_2=x_2$ est une équation linéaire en x_2. Pour la loi multinormale, le lieu des espérances conditionnelles est une droite. Ce n'est pas le cas en général quand la loi n'est pas multinormale.

Note : On remarque que la matrice de covariances conditionnelles ne dépend pas des valeurs prises par les variables conditionnantes. Ce n'est pas le cas en général quand la loi n'est pas multinormale.

4.15.2 Cas particulier avec 2 variables (loi binormale)

Dans ce cas, on a :

$$\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} = \rho\sigma_1 / \sigma_2$$
$$\mu_{1\bullet 2} = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$$
$$\Sigma_{11\bullet 2} = (1 - \rho^2)\sigma_1^2$$

avec ρ le coefficient de corrélation entre les deux variables.

4.16 Tables de distributions

4.16.1 Loi normale N(0,1)

Fonction de répartition N(0,1)

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Quantiles particuliers

p	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
$x = F^{-1}(p)$	0.0000	0.2533	0.5244	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902

4.16.2 Loi χ^2

	$\alpha : \int_x^{\infty} f_X(x)dx$		
d.l.	α =1%	α =5%	α =10%
1	6.63	3.84	2.71
2	9.21	5.99	4.61
3	11.34	7.81	6.25
4	13.28	9.49	7.78
5	15.09	11.07	9.24
6	16.81	12.59	10.64
7	18.48	14.07	12.02
8	20.09	15.51	13.36
9	21.67	16.92	14.68
10	23.21	18.31	15.99
11	24.73	19.68	17.28
12	26.22	21.03	18.55
13	27.69	22.36	19.81
14	29.14	23.68	21.06
15	30.58	25.00	22.31
16	32.00	26.30	23.54
17	33.41	27.59	24.77
18	34.81	28.87	25.99
19	36.19	30.14	27.20
20	37.57	31.41	28.41
25	44.31	37.65	34.38
30	50.89	43.77	40.26
35	57.34	49.80	46.06
40	63.69	55.76	51.81
45	69.96	61.66	57.51
50	76.15	67.50	63.17
60	88.38	79.08	74.40
80	112.33	101.88	96.58
100	135.81	124.34	118.50
120	158.95	146.57	140.23
140	181.84	168.61	161.83
200	249.45	233.99	226.02
300	359.91	341.40	331.79
400	468.72	447.63	436.65
500	576.49	553.13	540.93
1000	1106.97	1074.68	1057.72

4.16.3 Loi Student (unilatéral)

$\alpha : \int_x^\infty f_X(x)dx$

d.l.	α = 1%	α = 5%	α = 10%
1	31.821	6.314	3.078
2	6.965	2.920	1.886
3	4.541	2.353	1.638
4	3.747	2.132	1.533
5	3.365	2.015	1.476
6	3.143	1.943	1.440
7	2.998	1.895	1.415
8	2.896	1.860	1.397
9	2.821	1.833	1.383
10	2.764	1.812	1.372
11	2.718	1.796	1.363
12	2.681	1.782	1.356
13	2.650	1.771	1.350
14	2.624	1.761	1.345
15	2.602	1.753	1.341
16	2.583	1.746	1.337
17	2.567	1.740	1.333
18	2.552	1.734	1.330
19	2.539	1.729	1.328
20	2.528	1.725	1.325
25	2.485	1.708	1.316
30	2.457	1.697	1.310
35	2.438	1.690	1.306
40	2.423	1.684	1.303
45	2.412	1.679	1.301
50	2.403	1.676	1.299
60	2.390	1.671	1.296
80	2.374	1.664	1.292
100	2.364	1.660	1.290
120	2.358	1.658	1.289
140	2.353	1.656	1.288
200	2.345	1.653	1.286
300	2.339	1.650	1.284
400	2.336	1.649	1.284
500	2.334	1.648	1.283
1000	2.330	1.646	1.282

4.16.4 Loi Fisher

Loi Fisher, α=5%; $\alpha = \int_x^{\infty} f_X(x)dx$

d.l. au numérateur

d.l. au dénominateur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	40	50	100	1000
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.36	246.46	247.32	248.01	248.58	249.05	249.45	249.80	250.10	251.14	251.77	253.04	254.19
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.39	19.40	19.41	19.42	19.43	19.44	19.45	19.45	19.45	19.46	19.46	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.71	8.69	8.67	8.66	8.65	8.64	8.63	8.62	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.87	5.84	5.82	5.80	5.79	5.77	5.76	5.75	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.64	4.60	4.58	4.56	4.54	4.53	4.52	4.50	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.96	3.92	3.90	3.87	3.86	3.84	3.83	3.82	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.53	3.49	3.47	3.44	3.43	3.41	3.40	3.39	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.24	3.20	3.17	3.15	3.13	3.12	3.10	3.09	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.03	2.99	2.96	2.94	2.92	2.90	2.89	2.87	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.86	2.83	2.80	2.77	2.75	2.74	2.72	2.71	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.64	2.60	2.57	2.54	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.48	2.44	2.41	2.39	2.37	2.35	2.33	2.32	2.31	2.27	2.24	2.19	2.14
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37	2.33	2.30	2.28	2.25	2.24	2.22	2.21	2.19	2.15	2.12	2.07	2.02
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29	2.25	2.22	2.19	2.17	2.15	2.13	2.12	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.23	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.07	2.05	2.04	1.99	1.97	1.91	1.85
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.17	2.13	2.10	2.07	2.05	2.03	2.01	2.00	1.98	1.94	1.91	1.85	1.79
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.13	2.09	2.05	2.03	2.00	1.98	1.97	1.95	1.94	1.89	1.86	1.80	1.74
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.09	2.05	2.02	1.99	1.97	1.95	1.93	1.91	1.90	1.85	1.82	1.76	1.70
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.06	2.02	1.99	1.96	1.93	1.91	1.90	1.88	1.87	1.82	1.79	1.73	1.66
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04	1.99	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.85	1.84	1.79	1.76	1.70	1.63
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.95	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.69	1.66	1.59	1.52
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.89	1.85	1.81	1.78	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69	1.63	1.60	1.52	1.45
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.82	1.78	1.75	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.59	1.56	1.48	1.40
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.89	1.84	1.79	1.75	1.72	1.70	1.67	1.65	1.64	1.62	1.57	1.53	1.45	1.36
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.88	1.82	1.77	1.73	1.70	1.68	1.65	1.63	1.62	1.60	1.54	1.51	1.43	1.34
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.86	1.80	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62	1.60	1.59	1.53	1.49	1.41	1.31
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.52	1.48	1.39	1.30
110	3.93	3.08	2.69	2.45	2.30	2.18	2.09	2.02	1.97	1.92	1.84	1.78	1.74	1.70	1.67	1.64	1.62	1.60	1.58	1.56	1.50	1.47	1.38	1.28
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66	1.63	1.61	1.59	1.57	1.55	1.50	1.46	1.37	1.27
130	3.91	3.07	2.67	2.44	2.28	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.83	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60	1.58	1.56	1.55	1.49	1.45	1.36	1.26
140	3.91	3.06	2.67	2.44	2.28	2.16	2.08	2.01	1.95	1.90	1.82	1.76	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60	1.57	1.56	1.54	1.48	1.44	1.35	1.25
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.82	1.76	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57	1.55	1.54	1.48	1.44	1.34	1.24
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.77	1.71	1.66	1.62	1.59	1.56	1.54	1.52	1.50	1.48	1.42	1.38	1.28	1.14
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.76	1.70	1.65	1.61	1.58	1.55	1.53	1.51	1.49	1.47	1.41	1.36	1.26	1.11
10000	3.84	3.00	2.61	2.37	2.22	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.69	1.64	1.60	1.57	1.54	1.52	1.50	1.48	1.46	1.40	1.35	1.25	1.08