Chapitre 2 : Variables aléatoires et distributions

2.1 Variable aléatoire **1**

2.2 Fonction de répartition **2**

2.3 Fonction de masse et de densité **2**

2.4 Distribution conjointe de variables aléatoires **5**
2.4.1 Distribution marginale 5
2.4.2 Distribution conditionnelle 5
2.4.3 Indépendance de variables aléatoires 6

2.5 Fonctions de variables aléatoires **7**

2.6 Caractéristiques de distributions (une seule variable) **8**
2.6.1 L'espérance mathématique (moyenne) 9
2.6.2 Autres caractéristiques courantes 10

2.7 Caractéristiques de distributions (plusieurs variables) **10**

2.8 Propriétés de l'opérateur espérance mathématique **12**

2.9 Formules d'approximation pour l'espérance et la variance de fonctions de v.a. **12**
2.9.1 Formules d'approximation pour le cas multivariable 13

2.1 Variable aléatoire

Définition. Variable aléatoire : fonction qui associe un nombre réel à chaque élément de l'espace échantillonnal.

Exemple 1 : On prélève 3 échantillons de sol et l'on note pour chacun la nature du sol (argile (A), silt (F), sable (S), gravier (G)). L'espace échantillonnal est : {AAA, AAF, AAS...SGG GGG}. Si X représente le nombre d'échantillons de type sable, alors X(AAA)=0, X(AAF)=0, X(AAS)=1, ...X(ASS)=2, ... X(SSS)=3.

Exemple 2 : Prélever un échantillon de sol et mesurer sa masse volumique sèche. La masse volumique est une variable aléatoire.

Note : L'exemple 1 illustre une variable aléatoire discrète, l'exemple 2 une variable aléatoire continue. Il existe aussi des v.a. mixtes, i.e. discrète pour certains éléments de l'espace échantillonnal et continue pour d'autres.

2.2 Fonction de répartition

Définition : $F_X(x) = P(X \le x)$. En mots : la fonction de répartition donne la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à toute valeur particulière « x ».

Propriétés :

i. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
ii. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
iii. $F_X(x)$ est non-décroissante
iv. Si X est une v.a. discrète, alors $F_X(x)$ est une fonction en escalier;
si X est continue alors $F_X(x)$ est une fonction continue.

2.3 Fonction de masse et de densité

Définition :

a) cas discret : $p_X(x) = P(X = x)$ est la fonction de masse de la v.a. discrète X. On peut aussi exprimer la fonction de masse comme : $p_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$

b) cas continu : $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ est la fonction de densité de la v.a. continue X.

Propriétés :

a) Cas discret :

i. $p_X(x) \ge 0$
ii. $p_X(x) \le 1$
iii. $\sum_i p_X(x_i) = 1$

b) cas continu :

i. $f_X(x) \ge 0$
ii $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$
iii. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

En génie civil, on rencontre plus souvent les v.a. continues.

Exemple 3 : Des tiges d'acier montrent une résistance en tension variable. La fonction de densité est donnée par :

$$f_X(x)\begin{cases}\dfrac{2}{55-35}\dfrac{x-35}{41-35} & 35 \le x \le 41\\ \dfrac{2}{55-35}(1-\dfrac{x-41}{55-41}) & 41 \le x \le 55\\ 0 \quad \mathit{ailleurs} & \end{cases}$$

(unités de « x » en MPa)

a) Quelle est la probabilité qu'une tige donnée montre une résistance en tension comprise entre 47 et 49?

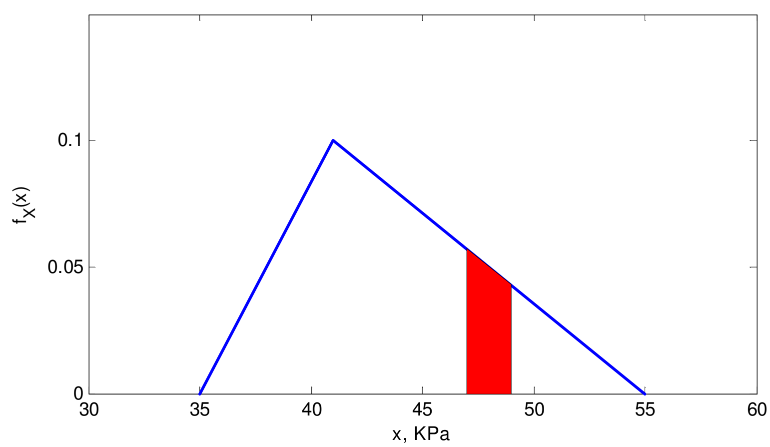
$$\int_{47}^{49} f_X(x)dx = 0.1$$

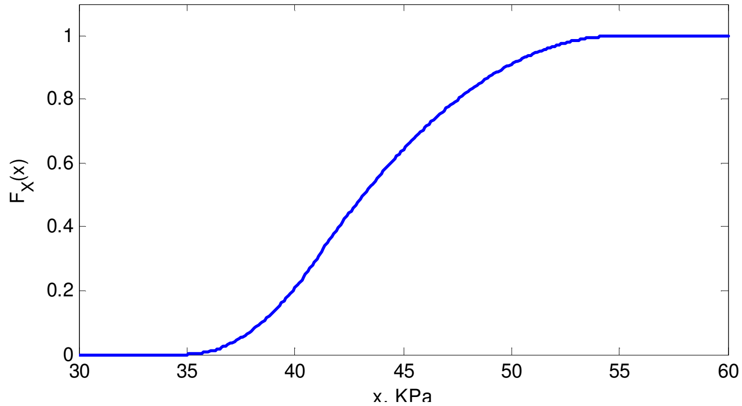
b) Quelle est la probabilité que la résistance soit inférieure à 41?

$$\int_{35}^{41} f_X(x)dx = 0.3$$

c) Quelle est la probabilité que la résistance soit supérieure à 41?

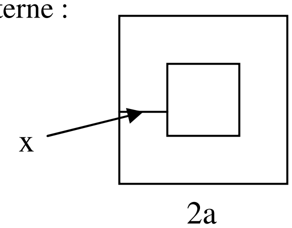
$$\int_{41}^{55} f_X(x)dx = 0.7$$





Exemple 4 : Une portion de plancher de superficie 2a x 2a est supportée par les côtés. On dispose une charge aléatoirement sur le plancher. Quelle est la probabilité que cette charge soit à une distance supérieure à « x » du côté le plus près du point de charge?

La probabilité est proportionnelle à la surface du carré interne :



$$1 - F_X(x) = \frac{(2a - 2x)^2}{(2a)^2} = \frac{(a - x)^2}{a^2} \quad 0 \le x \le a$$

La fonction de densité est donc :

$$f_X(x) = \frac{2(a - x)}{a^2} \quad 0 \le x \le a$$

Exemple 5 : Sur un site, l'on doit construire une tour. On étudie l'historique de la force des vents durant plusieurs années. On note X la force du vent maximale durant une année. Supposons que X possède la fonction de densité suivante :

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad 0 \le x$ (distribution exponentielle; x donné en km/h)

La fonction de répartition est alors :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad 0 \le x$$

Si $\lambda = 0.02$ (nous verrons plus loin différentes façons d'estimer les paramètres que l'on retrouve dans une distribution), alors quelle est la probabilité que le vent excède 100km/h ?

$$P(X > 100) = 1\text{-}\ F_X(100) = e^{-0.02*100} = 13.6\%$$

Exemple 6 : Un lot de béton doit rencontrer une résistance minimale. Même si le lot dans son ensemble rencontre la norme, il est possible qu'un échantillon pris au hasard ne rencontre pas la norme avec une probabilité « p ». Quelle est la probabilité que parmi « n » échantillons pris au hasard, il y en ait « x » qui ne rencontrent pas la norme?

$$P(X = 0) = (1 - p)^n$$

$$P(X = 1) = n(1 - p)^{n-1} p^n$$

....

$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n - x)!}(1 - p)^{n-x} p^x$ (loi binomiale)

Ainsi, si p=0.05, la probabilité qu'un échantillon parmi 5 prélevés ne respecte pas la norme est :
$5*0.95^4*0.05^1=0.20$.

2.4 Distribution conjointe de variables aléatoires

Définitions :

- Soit deux v.a. X, Y. La fonction de répartition conjointe est : $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
- Soit deux v.a. discrètes X et Y. La fonction de masse conjointe est : $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$
- Soit deux v.a. continues X et Y. La fonction de densité conjointe est :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$$

Note : Des propriétés très similaires au cas à une seule v.a. existent.

Note : Si X est discrète et Y continue ou si une des deux variables est mixte, on a alors une fonction de répartition conjointe mixte.

Note : Ces définitions se généralisent facilement au cas de p>2 v.a.

2.4.1 Distribution marginale

Soit deux v.a. X et Y discrètes ou continues et leur fonction de répartition conjointe. La fonction de répartition obtenue en ne considérant qu'une des deux variables est appelée fonction de répartition marginale. On peut l'obtenir directement de la fonction de répartition conjointe :
$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$

- Si X et Y sont des v.a. discrètes, on obtient la fonction de masse marginale de X par :

$$p_X(x) = \sum_i p_{X,Y}(x, y_i)$$

- Si X et Y sont des v.a. continues, on obtient la fonction de densité marginale de X par :

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy$$

2.4.2 Distribution conditionnelle

Soit deux v.a. X et Y discrètes. La fonction de masse conditionnelle de X sachant que Y=y est :

$$p_{X|Y}(x | y) = P(X = x | Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)} \qquad avec\ p_Y(y) > 0$$

Soit deux v.a. X et Y continues. La fonction de densité conditionnelle de X sachant que Y=y est :

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad avec\ f_Y(y) > 0$$

Les fonctions de répartition conditionnelles s'obtiennent directement par sommation de la fonction de masse conditionnelle (cas discret) ou par intégration de la fonction de densité conditionnelle (cas continu) :

Exemple 7 : Deux rivières X et Y alimentent un réservoir. La distribution conjointe de leurs débits quotidiens (en m^3) est :

$$f_{X,Y}(x, y) = 4 \bullet 10^{-7}(6000 - x - y)/6000 \quad 0 \le x \le 4000, \quad 0 \le y \le 2000$$

a) Quelle est la probabilité que le débit de la rivière « X » soit le double du débit de la rivière Y ?

$$P(X>2Y) = \int_0^{4000}\int_0^{0.5x} f_{X,Y}(x, y)dydx = \frac{4 \bullet 10^{-7}}{6000}\int_0^{4000} 3000x - 5x^2/8 = 32/45$$

b) Vous observez Y=1000 m^3. Que vaut la fonction de densité conditionnelle de X ?

On calcule $f_Y(y) = \int_0^{4000} 4 \bullet 10^{-7}(6000 - x - y)/6000 \quad dx = \frac{4 \bullet 10^{-7}}{6000} 4000 * (4000 - y)$

La fonction de densité conditionnelle évaluée à Y=1000 est donc :

$$f_{X|Y}(x \mid y = 1000) = \frac{(6000 - x - 1000)}{4000 * 3000} = \frac{5000 - x}{12 \bullet 10^6} \quad 0 \le x \le 4000$$

Note : La probabilité que X soit supérieure à 2000 m^3 sachant que Y=1000 est :

$$\int_{2000}^{4000} \frac{5000 - x}{12 \bullet 10^6} dx = 1/3$$

2.4.3 Indépendance de variables aléatoires

Soit deux v.a. X et Y continues. X est indépendant de Y ssi

a) $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$
b) $f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x)$
c) $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$
d) $F_{X|Y}(x \mid y) = F_X(x)$

Note : des relations similaires existent pour des couples de v.a. discrètes ou mixtes.

Note : ces relations se généralisent facilement au cas de plusieurs v.a. indépendantes.

Souvent dans la pratique, l'indépendance est une propriété attribuée à des v.a. que l'on croit non reliées. L'indépendance permet de simplifier grandement les calculs impliquant plusieurs v.a.

2.5 Fonctions de variables aléatoires

Parfois, on connaît la fonction de répartition d'une v.a. X alors que ce qui nous intéresse davantage c'est la distribution d'une fonction (dont l'image est réelle) de X, soit Y=g(X). Y se trouve à associer une valeur réelle à chaque valeur de X. Par le fait même, Y associe aussi une valeur réelle à chaque élément de l'espace échantillonnal, c'est donc une v.a.

Soit un événement C associé à R_Y. L'événement équivalent B de R_X, est B=$\{x \in R_x, g(x) \in C\}$.

Exemple 8 : X représente l'élévation de la surface d'une rivière en un point. Y représente le débit de la rivière associé à cette élévation. Le lien (non-linéaire) Y=g(X) entre les deux est décrit par une courbe de tarage.

Exemple 9 : X représente le nombre de fractures par mètre foré dans un massif rocheux. Y représente la distance entre deux fractures consécutives observées le long du forage.

Cas discret : la fonction de masse de Y s'obtient pas simple énumération. Pour une valeur donnée « y », on cherche l'ensemble des valeurs « x » donnant cette valeur « y ». On connaît la probabilité d'avoir chaque « x », donc on connaît la probabilité d'avoir chaque « y ».

$$p_Y(y_j) = \sum_{i, g(x_i) = y_j} p_X(x_i)$$

Cas continu (on suppose g(X) continu et strictement croissante) :

On a :

$$F_Y(y) = P_Y(Y \le y) = P_X(X \le x \text{ où } x = g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{dF_X(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = f_X(x)\frac{dx}{dy}$$

donc,

$$f_Y(y)dy = f_X(x)dx$$

En termes simples, la probabilité d'observer X dans un petit intervalle *dx* autour de *x* est égale à la probabilité d'observer Y dans un petit intervalle *dy* autour de *y*. La largeur *dy* s'obtient en appliquant la fonction *g(x)* aux deux limites de l'intervalle autour de *x*.

Note : si la fonction *g(X)* est strictement décroissante alors $X<x$ entraîne $Y>y$ avec $g(x)=y$, on aura donc :

$$F_Y(y) = P_Y(Y \le y) = P_X(X \ge x \text{ où } x = g^{-1}(y))$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d(1 - F_X(x))}{dx}\frac{dx}{dy} = -f_X(x)\frac{dx}{dy}$$

Mais comme dans ce cas *dx/dy* est aussi négatif, on peut écrire :

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Note : si *g(x)* n'est pas strictement croissante ou décroissante, i.e. *g(x)* n'est pas bijective, alors il faut décomposer la fonction *g(x)* en intervalles (en *x*) ou elle est strictement croissante ou décroissante et appliquer les résultats séparément sur chaque intervalle. On n'a ensuite qu'à sommer les résultats sur les différents intervalles.

Exemple 10 : Vous voulez soumissionner sur un projet de construction. Les coûts de matériaux sont de 10K$, le coût de la main d'oeuvre est de 100$/hr. Vous estimez que le projet devrait prendre H heures (H est incertain). Vous adoptez donc une fonction de coût de la forme suivante : C=10000+100H.

La fonction de répartition de H est donnée par : $F_H(h) = \begin{cases} 0 & h \le 100 \\ 1-\left(\dfrac{h-110}{10}\right)^2 & 100 \le h \le 110 \\ 1 & h > 110 \end{cases}$

On a : H=(C-10000)/100

La fonction de répartition de C est donc :

$$F_C(c) = \begin{cases} 0 & c \le 20000 \\ 1-\left(\dfrac{(c-10000)/100-110}{10}\right)^2 = 1-\left(\dfrac{c-21000}{1000}\right)^2 & 20000 \le c \le 21000 \\ 1 & c > 21000 \end{cases}$$

Exemple 11 : Vous mesurez la charge hydraulique à une erreur près X dont la fonction de densité est : (2-|x|)/4, $-2 \le x \le 2$. Quelle est la fonction de densité de l'erreur carrée (i.e. $Y=X^2$)?

On a : $x=y^{0.5}$ $dx/dy=0.5/y^{0.5}$

Pour $-2 \le x \le 0$, $f(y) = \dfrac{2-y^{0.5}}{4}\dfrac{1}{2y^{0.5}} = \dfrac{1}{4y^{0.5}} - \dfrac{1}{8} \quad 0 \le y < 4$

Pour $0 \le x \le 2$, $f(y) = \dfrac{1}{4y^{0.5}} - \dfrac{1}{8} \quad 0 \le y < 4$

Donc, $f(y) = \dfrac{1}{2y^{0.5}} - \dfrac{1}{4} \quad 0 \le y < 4$

2.6 Caractéristiques de distributions (une seule variable)

Il est intéressant de définir des quantités permettant de décrire les caractéristiques principales d'une distribution. Ceci facilite la comparaison de distributions entre elles. Quand nous travaillerons au niveau de l'échantillon, il arrivera que l'on ne connaisse pas nécessairement les distributions impliquées, pourtant les mesures caractéristiques pourront toujours être estimées à partir de l'échantillon.

2.6.1 L'espérance mathématique (moyenne)

Pour simplifier la présentation, seule le cas continu sera considéré. L'adaptation au cas discret est immédiate en remplaçant la fonction de densité par la fonction de masse et les intégrales par des sommations.

L'espérance mathématique de X (moyenne de X)

$$E[X] = \int x f_X(x)dx$$

L'espérance mathématique d'une fonction quelconque de X : g(X)

$$E[g(X)] = \int g(x) f_X(x)dx$$

Quelques fonctions particulières g(X) :

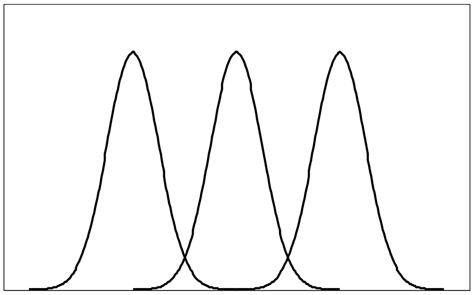
g(X)	Nom donné à E[g(X)]	Symbole courant	Utilité
X	Moyenne	μ	Mesure la tendance centrale
$(X-\mu)^2$	Variance	σ^2	Mesure la dispersion (l'étalement) autour de la moyenne
$\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3$	Coefficient d'asymétrie	γ_1	>0 indique une asymétrie vers la droite; <0 indique une asymétrie vers la gauche
$\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^n$	Moment centré et « normalisé » d'ordre « n »	-	-
exp(tX)	Fonction génératrice des moments	$M_X(t)$	La « n$^{\text{ième}}$ » dérivée de $M_X(t)$ évaluée en t=0 est égale au « n$^{\text{ième}}$ » moment par rapport à l'origine.

Note : On a $\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2\right] - \mu^2$. Cette dernière forme étant souvent plus simple à évaluer.

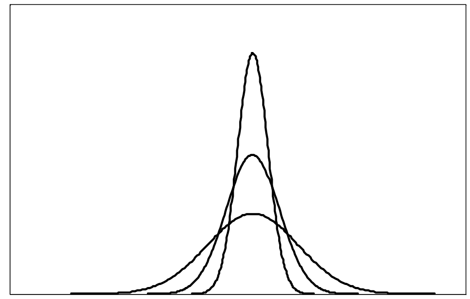
Note : On appelle écart-type la quantité $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Alors que la variance possède des unités qui sont le carré des unités de X, l'écart-type possède les mêmes unités que X.

Note : le coefficient de variation σ/μ est souvent utilisé pour décrire l'importance relative des variations dans le cas d'une variable positive.

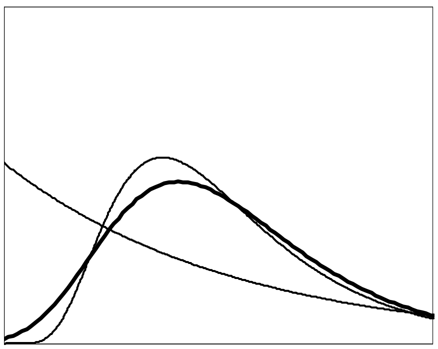
Trois normales de moyennes différentes



Trois normales de variances différentes



Mêmes moyennes et variances, 3 coeff. d'asymétrie diff



2.6.2 Autres caractéristiques courantes

quantile p : Q(p)= $x \text{ tel que } F_X(x) = p \quad \equiv F_X^{-1}(p)$

médiane : Q(0.5) (dans l'échantillon : la valeur milieu)

écart inter-quartile : Q(0.75)-Q(0.25)

étendue : maximum-minimum.

minimum : plus petite valeur possible (ou réalisée dans le cas d'un échantillon).

maximum : plus grande valeur possible (ou réalisée dans le cas d'un échantillon).

mode : $x \text{ tel que } f_X(x)$ est maximal.

2.7 Caractéristiques de distributions (plusieurs variables)

Outre les caractéristiques décrites à la section précédente pour chaque variable considérée séparément (i.e. obtenue avec la distribution marginale), on peut définir les caractéristiques suivantes pour les couples de variables aléatoires :

Covariance : $\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$.
Mesure la force du lien linéaire unissant les variables X et Y. Peut être positif ou négatif.
Présente les unités du produit XY.

On notera que si Y=X dans cette expression, on a :

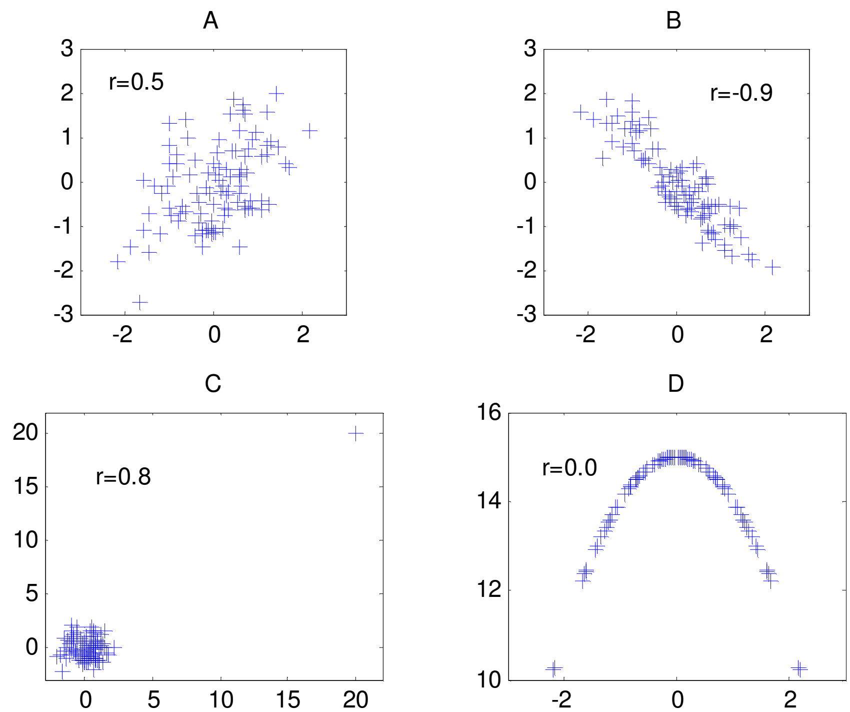
$$\sigma_{XX} = E[(X-\mu_X)(X-\mu_Y)] = \sigma_X^2$$

bref, la covariance entre une v.a. et elle-même n'est autre que sa variance.

Corrélation : $\rho_{XY} = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$.

C'est la covariance « normalisée » par les écarts-types des deux variables. La corrélation est comprise entre –1 et 1. La valeur –1 indique un lien linéaire parfait avec pente négative, 1 indique un lien linéaire parfait de pente positive, 0 indique absence de lien linéaire (il peut y avoir toutefois des liens non-linéaires entre X et Y).

Exemples de corrélations :



La figure A indique une corrélation moyenne, celle en B une corrélation forte mais de signe négatif, celle en C une corrélation forte causée par une seule valeur aberrante et celle en D une absence de corrélation bien qu'il existe une relation non-linéaire parfaite entre X et Y. De C on conclut que la présence d'une forte corrélation peut être due à une anomalie des données, de D on conclut que l'absence de corrélation n'indique pas nécessairement une absence de relation entre les variables. Cela indique simplement une absence de relation linéaire. Ainsi, si l'indépendance entre 2 v.a. implique l'absence de corrélation, l'inverse est faux (sauf pour le cas particulier de la loi binormale).

2.8 Propriétés de l'opérateur espérance mathématique

L'opérateur espérance mathématique est un opérateur linéaire (il s'agit d'une intégrale ou d'une sommation). Conséquemment, on a :

E[aX]= aE[X]

E[c+aX]=c+aE[X]

E[ag(X)+bh(Y)]=aE[g(X)]+bE[h(Y)]

mais en général

E[XY]=E[X]E[Y]+Cov(X,Y) $\neq$ E[X]E[Y] (sauf si X et Y sont des v.a. non-corrélées)

Deux relations utiles concernent l'espérance et la variance d'une somme de v.a. :

$$E\left[\sum_i X_i\right] = \sum_i E[X_i]$$

$$Var\left(\sum_i X_i\right) = E\left[\left(\sum_i X_i - \mu_i\right)^2\right] = \sum_i \sum_j Cov(X_i, X_j)$$

Cette dernière expression se simplifie **<u>lorsque les v.a. sont indépendantes</u>**. Dans ce cas, on a en effet : $Cov(X_i, X_j) = 0 \quad \forall\, i \neq j$, ce qui laisse :

$$Var\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \sigma_i^2$$

<u>Plus généralement</u>, on a :

$$Var\left(\sum_i a_i X_i\right) = E\left[\left(\sum_i a_i (X_i - \mu_i)\right)^2\right] = \sum_i \sum_j a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Finalement, considérons les variances de quelques fonctions particulières de X :

Var(aX+b)=a^2Var(X). On note que l'ajout d'une constante n'affecte pas la variance.

Var(b)=0. La variance d'une constante est nulle.

2.9 Formules d'approximation pour l'espérance et la variance de fonctions de v.a.

Dans plusieurs situations, il peut être suffisant de connaître l'espérance et la variance d'une fonction d'une v.a. sans avoir à connaître la distribution complète.

Soit Y=g(X). On développe cette fonction par une série de Taylor autour de la valeur $x=\mu$. On obtient à l'ordre 2 :

$$Y = g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu) + \frac{(X-\mu)^2}{2} g''(u) + R_2$$

Prenant l'espérance de part et d'autre, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} E[Y] &= g(\mu) + \frac{\sigma_X^2}{2} g''(\mu) + E[R_2] \\ &\approx g(\mu) + \frac{\sigma_X^2}{2} g''(\mu) \end{aligned}}$$

Note : Si g(X) est linéaire, alors g''=0 et on retrouve le résultat vu précédemment.

Si on limite l'expansion à l'ordre 1, on obtient :

$$Y = g(\mu) + (X-\mu)g'(\mu) + R_1$$

En prenant l'opérateur *Var* de part et d'autre et en négligeant le reste, on obtient :

$$\boxed{Var(Y) \approx g'(\mu)^2 \, \sigma_X^2}$$

Note: La qualité de l'approximation dépend de la forme particulière de g(X) (ainsi si g(X) est linéaire, les deux formules précédentes sont exactes). La qualité de l'approximation diminue lorsque σ_X^2 augmente ou lorsque μ diminue.

2.9.1 Formules d'approximation pour le cas multivariable

Soit $Y=g(X_1,X_2,...X_n)$

En appliquant une série de Taylor multivariable et en se limitant à l'ordre 2, on trouve en suivant un développement similaire à celui de la section précédente :

$$\boxed{E[Y] \approx g(\mu_1,\mu_2,...\mu_n) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j Cov(X_i, X_j)\left(\frac{\partial^2 g(\mu_1,\mu_2,...\mu_n)}{\partial x_i \partial x_j}\right)}$$

Pour la variance, on trouve, en limitant l'expansion à l'ordre 1 :

$$\boxed{Var(Y) \approx \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial g(\mu_1,\mu_2,...\mu_n)}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial g(\mu_1,\mu_2,...\mu_n)}{\partial x_j}\right) Cov(X_i, X_j)}$$

et, si les variables sont non-corrélées deux à deux ou si l'on néglige les covariances,

$$\sum_i \left(\frac{\partial g(\mu_1,\mu_2,...\mu_n)}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{X_i}^2$$

Une approximation souvent utilisée concerne le produit de v.a. $Y = X_1 X_2 ... X_n$. On a alors, si les variables sont non-corrélées deux à deux :

$$\frac{Var(Y)}{\mu_Y^2} \approx \frac{Var(X_1)}{\mu_{X_1}^2} + \frac{Var(X_2)}{\mu_{X_2}^2} + \dots \frac{Var(X_n)}{\mu_{X_n}^2}$$

=>La variance relative (coefficient de variation au carré) d'un produit est approximativement la somme des variances relatives des variables dans le produit.

Note : on retrouve la même formule d'approximation lorsqu'on considère un mélange de produits et de quotients de variables non-corrélées. Soit $Y = \frac{X_1 X_2 \dots X_p}{X_{p+1} X_{p+2} \dots X_n}$, alors :

$$\frac{Var(Y)}{\mu_Y^2} \approx \frac{Var(X_1)}{\mu_{X_1}^2} + \frac{Var(X_2)}{\mu_{X_2}^2} + \dots \frac{Var(X_n)}{\mu_{X_n}^2}$$

Exemple : La force s'exerçant sur un grillage immergé dans une rivière est donnée par F=RCAS^2 où R est la densité de l'eau, C est le coefficient de traînée (dépend de la forme du grillage), A est la surface de l'objet et S est la vitesse de l'eau.

Les coefficients de variation pour R,C,A et S sont estimés être respectivement de 2%, 5%, 3% et 10%.
Des formules d'approximation précédentes, pour S^2 on a approximativement :
E[S^2] $\approx \mu_S^2 + \sigma_S^2 \approx \mu_S^2$ (lorsque le coefficient de variation n'est pas trop élevé). De même, la variance est approximativement : $4\mu_S^2\sigma_S^2$. Le coefficient de variation pour S^2 est donc : $\frac{2\mu_S\sigma_S}{\mu_S^2} = 2\frac{\sigma_S}{\mu_S}$, donc 20%.

Le coefficient de variation sur la force est donc : $[(2\%)^2+(5\%)^2+(3\%)^2+(20\%^2)]^{0.5}$=20.9%.

Note : Lorsque le coefficient de variation de X n'est pas trop élevé, on peut écrire :
$E[X^k] \approx \mu_X^k + \frac{k(k-1)}{2}\mu_X^{k-2}\sigma_X^2 \approx \mu_X^k$
$Var(X^k) \approx (k\mu_X^{k-1})^2\sigma_X^2$

De sorte que le coefficient de variation de X^k est approximativement :

$$V(X^k) \approx \frac{k\mu_X^{k-1}\sigma_X}{\mu_X^k} = kV(X)$$

Note : Une alternative simple aux formules d'approximation est de procéder par simulation. On simule un très grand nombre de valeurs de X_1, X_2,... avec la distribution voulue et l'on applique la fonction g(x) aux valeurs simulées. Il ne reste alors qu'à calculer la moyenne (espérance) et la variance des valeurs obtenues pour la fonction.