MTH2302C CP2 H09

QUESTION 1 **(22 points)**

Le coût total (C) des travaux d'excavation sur un projet de construction de route est estimé à partir du nombre total de m^3 que l'on prévoit excaver (Y) et du prix unitaire (X) que l'on prévoit obtenir par soumission auprès d'entrepreneurs (C = XY).

On considère que X et Y sont des v.a. indépendantes distribuées suivant une loi lognormale. Les paramètres logarithmiques sont donnés au tableau suivant :

	ln(Y), Y en m^3	ln(X), X en $
Moyenne des logarithmes naturels	11.4	2.9
Variance des logarithmes naturels	0.07	0.02

a) Trouvez l'espérance et l'écart-type du coût total prévu (E[C]).

b) Le prix unitaire des soumissionnaires est décroissant en fonction du volume à excaver. On a une covariance négative de -0.015 entre ln(Y) et ln(X).
   i. Que vaut la corrélation entre ln(X) et ln(Y)?
   ii. On a déterminé que Y=120000 m^3. Quelle est l'espérance (conditionnelle) du prix unitaire (E[X | Y=120000]) ?

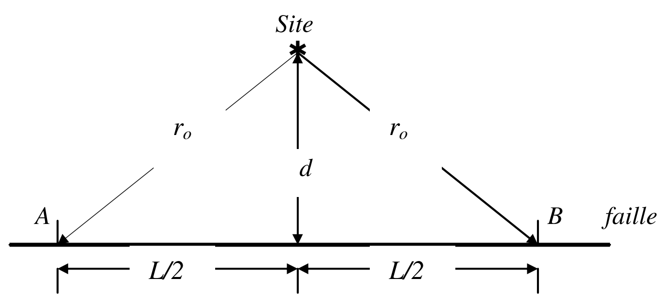
QUESTION 2 **(12 points)**

Le brise-lame d'un port est formé de réservoirs remplis de sable. La résistance au glissement (Y en MPa) des réservoirs est distribuée comme une N(120 MPa, 100 MPa^2). La contrainte exercée, par la plus grande vague, au brise-lame pendant sa durée de vie utile (X), est distribuée comme une N(60 MPa, 400 MPa^2). Un glissement des réservoirs se produit quand X>Y. X et Y sont indépendantes.

Quelle est la probabilité qu'un réservoir se déplace sous l'action de la plus grande vague au cours de sa vie utile ?

QUESTION 3 **(14 points)**

Le diagramme suivant montre un site d'intérêt (e.g. emplacement d'un building) et une faille de longueur L. Des tremblements de terre peuvent survenir le long de cette faille selon une distribution uniforme entre les points A et B. Soit R, la v.a. décrivant la distance entre le site et la position du prochain tremblement de terre.



Trouvez la fonction de densité de R. (*Aide : quelle est la fonction liant R à X la v.a. donnant la distance le long de la faille par rapport au point milieu ? Quelle est la distribution de X? En déduire la distribution de R.*).

QUESTION 4 **(14 points)**

La proportion de la population habitant à une distance « r » du centre d'une ville suit une loi exponentielle avec paramètre λ =0.2 (km^{-1}):

$$f_R(r) = \lambda e^{-\lambda r} \qquad \lambda, r > 0$$

a) Déterminez le rayon du cercle, centré sur le centre-ville, englobant 75% de la population de la ville?

b) Quelle est la distance moyenne que doit parcourir un résidant de la ville de son domicile au centre-ville ?

c) Quelle est la distance moyenne que doit parcourir un résidant pour se rendre au centre-ville sachant que son domicile se retrouve dans le cercle décrit en a) ?

Aide pour c) i. limité au cercle de rayon r_0 calculé en a), la fonction de densité est :

$$f_R(r) = \frac{\lambda e^{-\lambda r}}{0.75} \qquad 0 < r < r_0$$

ii. $$\int r\lambda e^{-\lambda r} dr = -\frac{e^{-r\lambda}(1 + r\lambda)}{\lambda}$$

QUESTION 5 **(12 points)**

Le déplacement maximal dû au vent (en mm) au sommet d'un édifice, sur une année, est distribué suivant une loi de Weibull:

$$P(X > x) = 1 - F_X(x) = \exp(-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}) \text{ avec } \delta = 50 \text{ mm et } \beta = 0.7$$

où $F_X(x)$ est la fonction de répartition.

a) Trouvez la probabilité que X>200 mm.

b) Trouvez le déplacement de récurrence 50 années (i.e. survenant en moyenne 1 fois par 50 ans).

<u>QUESTION 6</u> (12 points)

Un site contaminé est échantillonné dans 8 tranchées différentes (T_i). L'échantillonnage des tranchées est fait à chaque année de façon à suivre l'évolution de l'atténuation naturelle de la contamination en hydrocarbures (C_{10}-C_{50}). Deux années consécutives ont donné les mesures suivantes en C_{10}-C_{50} (en %)

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
An 1	0.1	0.1	0.5	1	0.7	2	0.2	0.3
An 2	0.2	0.1	0.3	0.7	0.6	1.3	0.3	0.1
D=An 1- An 2	-0.1	0	0.2	0.3	0.1	0.7	-0.1	0.2

On calcule $\overline{D} = 0.163$ % et s_D=0.261 %

a) Construisez l'intervalle de confiance à 90% (bilatéral) pour la différence des niveaux moyens de contamination au cours des deux années.

b) Compte tenu de la réponse en a) les données supportent-elles l'hypothèse qu'une atténuation naturelle significative est survenue entre les deux années ?

<u>QUESTION 7</u> (14 points)

On a déterminé la concentration en Cu de 1001 carottes de forage d'un gisement de Cu (en %). On a obtenu $\bar{x} = 1.2$ % et $s^2 = 0.8$ %^{2}. On suppose les observations indépendantes.

Donnez l'intervalle de confiance à 95%, bilatéral, pour la variance σ^2.

Aide : pour (n-1) grand, on peut approximer la loi χ_{n-1} par une N(n-1, 2(n-1))

Corrigé

Barème

Question 1 :

a) C est aussi lognormal. ln(C)~N(14.3,0.09). 8 pts
E[C]=exp(14.3+.09/2)=1.7 M$ 3 pts
V(C)=1.7^2(exp(0.09)-1)=0.272 $(M\$)^2$ 3 pts
σ_C =0.52 M$

b) i. ρ =-0.015/$(0.07*0.02)^{0.5}$ =-0.4 4 pts
ii. ln(X|Y)~N(a,b) a=2.9+(-0.015/0.07) (ln(120000)-11.4)=2.84 2 pts
b=0.02-$(-0.015)^2$/0.07=0.017
E[X|Y=120000]=exp(a+b/2)= 17.3$/$m^3$ 2 pts

Question 2 :

P(X>Y)=P(X-Y>0) W=X-Y ~ N(-60,500) 6 pts
P(W>0)=P(Z>(0-(-60))/$500^{0.5}$)=P(Z>2.68) 3 pts
= 1-P(Z<2.68)=1- 0.996=0.004 3 pts

Note: Plusieurs ont par inattention indiqué que W~N(60,500), ils arrivent alors avec P=0.996

Question 3 :

R=$(d^2+X^2)^{0.5}$ $f_X(x)$=2/L, 0<x<L/2 6 pts
X=$(R^2-d^2)^{0.5}$ 2 pts
$f_R(r)$= 2/L*dx/dr = $\frac{2r}{L(r^2-d^2)^{0.5}}$ d<r<$(d^2+(L/2)^2)^{0.5}$=r_0 6 pts

Note 1: Très peu ont réalisé que X est une distance et varie entre 0 et L/2. Plusieurs ont considéré X comme une coordonnée et fait varier X de A à B, certains en indiquant A=0. On peut le faire pourvu que R soit exprimé correctement en fonction X:
R=$((L/2-X)^2+d^2)^{0.5}$, 0<X<L.

Dans ce cas, $f_X(x)$=1/L, et |dx/dr|=$\frac{r}{(r^2-d^2)^{0.5}}$. On doit cependant considérer séparément la partie décroissante de la fonction (x<L/2) et la partie croissante (x>L/2). ce terme arrive donc 2 fois et l'on doit donc multiplier par 2, ce qui nous redonne évidemment : $\frac{2r}{L(r^2-d^2)^{0.5}}$.

Note 2 : On peut aussi bien sûr passer par la fonction de répartition de X, qu'on associe à R, puis on dérive.

Question 4 :

a) La fonction de répartition exponentielle est F(x)=1-exp(-λ x). 2 pts
On veut x tel que F(x)=0.75
exp(-λ x)=0.25 => x=ln(0.25)/($-\lambda$) =>r_0= ln(0.25)/(-0.2)=6.93 km 5 pts

b) L'espérance est 1/λ , donc 1/0.2=5 km 3 pts

c) On cherche : $\frac{1}{0.75}\int_0^{6.93} r\lambda e^{-\lambda r}dr == -\frac{e^{-r\lambda}(1+r\lambda)}{0.75\lambda}\Big|_0^{6.93}$ = -3.97-(-6.77)=2.69 km 4 pts

Note : la constante 1/0.75 est requise pour que f_R soit une fonction de densité

Question 5 :

a) exp(-(200/50)$^{0.7}$)=0.07 4 pts

b) À chaque année on a une probabilité 1/50 d'avoir un déplacement supérieur à x
P(X>x)=0.02 4 pts
P(X<x)=0.98=1-exp(-(x/50)$^{0.7}$)
⇨ -(x/50)$^{0.7}$=ln(0.02) => x/50=(-ln(0.02))$^{1/0.7}$
⇨ x=351 mm 4 pts

Question 6 :

Données appariées

a) $\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2=0.05}\frac{s_D}{\sqrt{n}} = 0.163 \pm 1.895 * 0.261/\sqrt{8}$ => [-0.01, 0.338] 8 pts

b) Comme le 0 se retrouve dans l'intervalle, on accepte qu'il n'y a pas eu d'atténuation naturelle significative entre les deux années. 4 pts

Question 7 :

L'intervalle est [(n-1)S^2/chi^2(n-1,0.025), (n-1)S^2/chi^2(n-1,0.975)]. 6 pts

On peut approximer les valeurs de la chi2 par une N(n-1,2(n-1)).
=>Z=1.96= {chi^2(n-1,0.025)-(n-1)}/(2(n-1))$^{0.5}$ =>
chi^2(n-1,0.025)=1.96*2000$^{0.5}$+1000=1087.73 pts
=> chi^2(n-1,0.975)=-1.96*2000$^{0.5}$+1000=912.35 3 pts
=> intervalle recherché : [1000*0.8/1087.7, 1000*0.8/912.35]=[0.736, 0.877] 2 pts

Note : Certains ont ulitisé d'autres approximations tirées de livres de statistique. J'acceptais toutes ces réponses pourvu que l'intervalle obtenu soit semblable.