Examen 2007

Q1-Un schéma d'échantillonnage servant à contrôler la qualité de lots de briques, consiste à choisir un échantillon aléatoire de *n* briques de chaque lot, à déterminer leur masse volumique moyenne, $\bar{x}$, et à accepter un lot comme satisfaisant si $\bar{x} \leq c$, ou à le rejeter si $\bar{x} > c$.

Il a été décidé que si μ, la masse volumique moyenne d'un lot de briques, excède *2,38* Mg/m^3, la probabilité de rejet doit être au moins *0,99*, tandis que si μ est inférieure ou égale à *2,36* Mg/m^3, la probabilité de son acceptation doit être au moins *0,95*.
L'écart-type de la masse volumique d'une brique est égal à *0,015* Mg/ m^3.

Déterminer la plus petite valeur de *n* satisfaisant à ces exigences et la valeur correspondante de c.

Q3- **Dix** (10) supports sphériques ont un diamètre moyen $\bar{x} = 5{,}060\ mm$ et un écart-type $s = 0{,}040\ mm$.

En considérant que l'échantillon choisi est aléatoire et qu'il provient d'une population suivant la loi normale, on demande de **construire un intervalle de confiance** à 95 % pour le diamètre moyen des supports.

Q4- Un échantillon aléatoire de six (6) éprouvettes d'acier provient d'une population normale. La contrainte moyenne d'écoulement en traction uniaxiale et l'écart-type de cet échantillon sont de 410 MPa et de 10 MPa respectivement.

Peut-on affirmer que la contrainte moyenne d'écoulement de l'acier d'où provient l'échantillon est supérieure à 400 MPa ? Utiliser un intervalle de confiance à 95%, unilatéral.

Q5- On rejette l'hypothèse que la variance d'une population normale soit $\sigma^2 = 21.3$, si la variance d'un échantillon (S^2) de taille 15 excède 39.74. Quelle est la probabilité que $S^2 > 39.74$ lorsque $\sigma^2 = 21.3$?

Q6-

a) Un sondage d'opinion est réalisé avant les élections dans une province donnée auprès d'un échantillon aléatoire de 3101 citoyens en âge de voter.
Quelle est, en pourcentage, la marge d'erreur de ce sondage (i.e erreur maximale) et ce, 19 fois sur 20 ?

b) Ce sondage révèle que les personnes interrogées ont exprimé leur intention de vote dans les proportions suivantes :
Parti A : 36 %,
Parti B : 29 %,
Parti C : 25 %,
Parti D : 5 %,
Parti E : 5%,
Autres : ~1%.

Estimer l'intervalle de confiance bilatéral à 95 % pour la proportion réelle des citoyens désireux, au moment où le sondage est réalisé, de voter effectivement pour le **Parti A** aux prochaines élections ?

Examen 2008

Q1- Dans un projet de construction, le devis exige que la résistance d'un matériau donné, pour une observation, soit supérieure à 20 MPa dans 95 % des cas et que la résistance moyenne obtenue d'un échantillon de quatre observations soit supérieure à 21 MPa dans 97,5 % des cas.

On demande de déterminer les caractéristiques du matériau (μ et σ). On suppose que la résistance du matériau est distribuée suivant la loi normale.

Q2- Le débit maximum annuel d'une rivière donnée a été mesuré sur une période de dix ans (n = 10). On a ainsi obtenu les statistiques suivantes :

$$\bar{x} = 283\, m^3/s$$

$$s^2 = 7\,216{,}6\, (m^3/s)^2$$

On demande :

a) de déterminer un intervalle bilatéral de confiance à 90 % pour le débit maximum annuel moyen. On suppose que le débit maximum annuel suit la loi normale.

b) d'estimer le nombre d'années additionnelles d'observation requises, pour pouvoir affirmer que le débit maximum annuel moyen soit dans l'ntervalle 283 ± 28,3 m^3/s avec un degré de confiance de 90 %. On supposera que la variance échantillonnale (s^2) reste à peu près constante et égale à 7 216,6 $(m^3/s)^2$.

Q3- Un fournisseur produit des éléments préfabriqués avec un béton de résistance en compression moyenne, à 28 jours, de 30 MPa et d'écart-type 3 MPa.

Pour contrôler la résistance du béton, un échantillon aléatoire de quatre cylindres de béton (n = 4) est prélevé périodiquement pour être soumis à des essais de compression à 28 jours. On supposera que la résistance du béton suit la loi normale. On rejette un béton si la moyenne des quatre cylindres est inférieure à un seuil « c ».

a) Trouver « c » tel que $P(\bar{X} < c) = 0.01$

Un déréglage survenu à l'usine de fabrication occasionne une baisse de la résistance de 6 MPa de la résistance du béton.

b) Quelle est la probabilité de détecter ce changement en se basant sur la moyenne de l'échantillon de quatre cylindres prélevé périodiquement (utilisez le seuil « c » déterminé en a))?

Q4- La concentration quotidienne en oxygène dissous (DO) a été mesurée dans l'eau d'une rivière en un point A situé en aval d'une usine pendant une période de dix jours consécutifs (n = 10). On a obtenu :
DO (mg/l) : 1.8 2.0 2.1 1.7 1.2 2.3 2.5 2.9 1.9 2.2

La concentration minimale en oxygène dissous (DO), exigée par l'Agence de Protection de l'Environnement de la localité où opère cette usine, est de 2.0 mg/l.

Construisez l'intervalle de confiance à gauche (95%) pour μ sur la base de l'échantillon des 10 mesures ci-dessus. Peut-on conclure que l'usine ne respecte pas la norme de 2.0 mg/l. Discutez.

Q5- Soit une variable aléatoire X de moyenne μ et de variance σ^2.
Un échantillon aléatoire de n observations est prélevé de cette population : .
On suppose que les Xi sont indépendantes.
On pose :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad S_{xx} = \sum_{1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

$$S^2 = \frac{S_{xx}}{n-1} \qquad C^2 = \frac{S_{xx}}{n}$$

Dans les affirmations 1 à 4, la loi de la V.A. X n'est pas forcément la loi normale.
Dans les affirmations 5 à 10, considérer que la loi de la V.A. X est la loi normale.

Des dix (10) affirmations suivantes, dire lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses. On fournira les réponses au tableau et il n'est pas nécessaire de les justifier.

	Affirmation	Vraie	Fausse
1	$\overline{X}$ est un estimateur sans biais de μ		
2	S^2 est un estimateur sans biais de σ^2		
3	C^2 est un estimateur sans biais de σ^2		
4	$\overline{X}$ est un estimateur sans biais de μ et de variance minimum σ^2/n		
5	$\overline{X}$ est l'estimateur de maximum de vraisemblance de μ		
6	$\overline{X}$ n'est pas l'estimateur de μ par la méthode des moments		
7	S^2 est l'estimateur de maximum de vraisemblance de σ^2		
8	C^2 est l'estimateur de maximum de vraisemblance de σ^2		
9	S^2 n'est pas l'estimateur de σ^2 par la méthode des moments		
10	C^2 est l'estimateur de σ^2 par la méthode des moments		

Q6- Soit une variable aléatoire X de moyenne μ et de variance σ^2.
Un échantillon aléatoire de n observations est prélevé de cette population :
On suppose que les Xi sont indépendantes.
On demande de montrer que :

a) $E[X_i X_j] = E[X_i]E[X_j], \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots n$

b) $C = \dfrac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ est un estimateur sans biais de σ^2.

Corrigé

Examen 2007

Q1- On cherche « n » et « c » tel que :
P($\overline{X}$ >c)=0.99 si X~N(2.38, 0.015^2) et P($\overline{X}$ <c)=0.95 si X~N(2.36,0.015^2)
ou
P(Z>(c-2.38)$n^{0.5}$/0.015)=0.99 et P(Z<(c-2.36)$n^{0.5}$/0.015)=0.95

On trouve avec la table N(0,1) :
(c-2.38)$n^{0.5}$/0.015=-2.33 et (c-2.36)$n^{0.5}$/0.015=1.65

On trouve : c=2.368 et n=8.9 => n=9

Q3- L'intervalle est donné par : $\overline{X} \pm t_{9,0.05/2} s/\sqrt{n} = 5.06 \pm 2.262 \times 0.04/\sqrt{10}$ = [5.031, 5.089]

Q4- On construit l'intervalle limité à gauche. On calcule $\overline{X} - t_{5,0.05} s/\sqrt{n} = 410 - 2.015 \times 10/\sqrt{6}$ = 401.77. Comme l'intervalle n'inclut pas la valeur 400, on conclut que l'acier présente une contrainte moyenne d'écoulement significativement supérieure à 400.

Q5- On cherche P(S^2>39.74). On sait que (n-1)S^2/$\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$.
P(14 S^2/21.3>14*39.74/21.3)=P(χ^2_{14} >26.12) => 0.025 (Table III, p. 549)

Q6- a) 19 fois sur 20 => intervalle de confiance à 95%. La marge d'erreur est donnée par $Z_{0.975}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Cette marge d'erreur est maximale pour p=0.5
donc $Z_{0.975}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.=1.96*0.5/$3101^{0.5}$=0.0176.

b) 0.36 ± 1.96$(0.36*0.64/3101)^{0.5}$=0.36 ± 0.0176

Examen 2008

Q1- X : résistance d'une observation d'un matériau : X~N(μ , σ^2)
On veut simultanément que :
P(X>20)=0.95 et P($\overline{X}$ >21)=0.975 => P(Z>$\frac{(20-\mu)}{\sigma}$)=0.95 et P(Z>$\frac{(21-\mu)\sqrt{4}}{\sigma}$)=0.975 =>
$\frac{(20-\mu)}{\sigma}$=-1.645 et $\frac{(21-\mu)\sqrt{4}}{\sigma}$=-1.96

On trouve : $\mu = 22.47$ et $\sigma = 1.5$

Q2 a) - L'intervalle est donné par : $\overline{X} \pm t_{9,0.10/2} s/\sqrt{n} = 283 \pm 1.833 \times \sqrt{7216.6/10}$ = [233.8, 332.2]

b) On veut : $t_{n-1,0.05} \times \sqrt{7216.6/n} = 28.3$. On procède itérativement

n	10	20	26	27
$t_{n-1,0.05} \times \sqrt{7216.6/n}$	49.2	32.8	28.5	27.9

On prendra n=27, il faut donc ajouter 17 années d'observation aux 10 actuelles.

Q3- a) P($\overline{X}$ <c)=0.01 =>P(Z<(c-30) $\sqrt{4}$ /3)=0.01 => (c-30) $\sqrt{4}$ /3= -2.33 => c=26.505

b) On cherche P($\overline{X}$ <c) sachant que X est maintenant N(30-6,3^2) => P(Z<(26.505-24) $\sqrt{4}$ /3)=P(Z<1.67)=0.952

Q4- On calcule $\bar{x}$=2.06 et s^2=0.216. L'intervalle à gauche est donné par : $\overline{X} - t_{n-1,0.05} s/\sqrt{n}$

=2.06 – 1.833 $(0.216/10)^{0.5}$ = 1.79. Donc $\mu \in$ [1.79, ∞]. L'intervalle inclut des valeurs inférieures à la norme, donc on n'a pas démontré que l'usine respecte la norme (il aurait fallu que la borne inférieure soit >2). Par contre, on ne peut pas conclure non plus que l'usine ne respecte pas la norme. Pour faire cette vérification il faudrait construire l'intervalle à droite et vérifier que la borne supérieure est plus petite que 2, ce qui n'est certainement pas le cas ici puisque $\bar{x}$=2.06.

Q5-

	Affirmation	Vraie	Fausse
1	$\overline{X}$ est un estimateur sans biais de μ	V	
2	S^2 est un estimateur sans biais de σ^2	V	
3	C^2 est un estimateur sans biais de σ^2		F
4	$\overline{X}$ est un estimateur sans biais de μ et de variance minimum σ^2 /n	V	
5	$\overline{X}$ est l'estimateur de maximum de vraisemblance de μ	V	
6	$\overline{X}$ n'est pas l'estimateur de μ par la méthode des moments		F
7	S^2 est l'estimateur de maximum de vraisemblance de σ^2		F
8	C^2 est l'estimateur de maximum de vraisemblance de σ^2	V	
9	S^2 n'est pas l'estimateur de σ^2 par la méthode des moments	V	
10	C^2 est l'estimateur de σ^2 par méthode des moments	V	

Q6- a) Par l'indépendance, on a $f(x_i,x_j)=f(x_i)f(x_j)$. Appliquant la définition d'espérance :

$$E[X_i X_j] = \int\int x_i x_j f(x_i) f(x_j) dx_i dx_j = \int x_i f(x_i) dx_i \int x_j f(x_j) dx_j = E[X_i]E[X_j]$$

b)

$$E[C] = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} E[(X_{i+1} - X_i)^2] = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} E[(X_{i+1} - \mu + \mu - X_i)^2] = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma^2 + \sigma^2 - 2Cov(X_{i+1}, X_i)) = \frac{n-1}{n-1}\sigma^2 = \sigma^2$$

car $Cov(X_{i+1},X_i)=0$ étant donné que les observations sont indépendantes (découle de a)) .