Krigeage (compléments)

Plan

- Krigeage avec dérive sur la moyenne
  - Estimation du variogramme des résidus
- Krigeage avec dérive externe
- Krigeage dual
- Estimation d'une transformation linéaire de Z(x)
- Poids négatifs dans le krigeage

Krigeage avec dérive sur la moyenne

<u>Moyenne non stationnaire</u>

$\Downarrow$

E[Z(x)]=m(x) dépend de la localisation

Krigeage avec dérive

1- m(x) fonction des coordonnées $$m(x) = \sum_{k=1}^{nc} a_k f_k(x)$$

2- m(x) fonction d'une autre variable $$m(x) = a_0 + a_1 Y(x)$$

Krigeage avec dérive externe

Exemples

1- m(x) fonction des coordonnées :

- gradient régional pour la charge hydraulique
- forme logarithmique induite par un pompage sur la charge hydraulique
- pente le long du talus continental
- gradient géothermique

2- m(x) fonction d'une autre variable Y(x)

(Y(x) doit être connue en tout point)

- types de roches différents
- carte de « temps » sismiques à un réflecteur
- variable indicatrice indiquant la position par rapport à une faille connue
- le temps (phénomène ayant une dérive dans le temps ou une composante cyclique)

$$m(x) = \sum_{k=1}^{nc} a_k f_k(x)$$

-Les $f_k(x)$ sont des fonctions de bases (monômes, fonctions trigonométriques, logarithme,…)

-Les coefficients a_k sont inconnus. Ils peuvent être estimés soit explicitement, soit implicitement (préférable)

Implicitement :

Il suffit d'imposer des contraintes assurant le non-bais

Ex.

$$Z(x_0)^* = \sum_i \lambda_i Z_i \Longrightarrow E\left[Z(x_0)^*\right] = \sum_i \lambda_i E[Z_i] = \sum_i \lambda_i \sum_k a_k f_k(x_i) = \sum_k a_k \sum_i \lambda_i f_k(x_i)$$

D'autre part :

$$E\left[Z(x_0)\right] = \sum_k a_k f_k(x_0)$$

Si l'on pose les conditions suivantes:

$$\boxed{\sum_i \lambda_i f_k(x_i) = f_k(x_0) \qquad k = 1...nc}$$

Alors on a l'égalité recherchée indiquant l'absence de biais :

$$E[Z(x_0)^*]=E[Z(x_0)]$$

Contraintes additionnelles de non-biais

$\Rightarrow$ lagrangien augmenté

$\Rightarrow$ système d'équations linéaires à (n+nc) inconnues et (n+nc) équations, nc: nombre de contraintes de non-biais

Solution unique si

- $n \geq nc$
- les $f_k(x_i)$ sont linéairement indépendantes

Sous forme matricielle:

$$K_t \lambda_t = k_t$$

$$\sigma^2_{kt} = \sigma^2_v - \lambda'_t \, k_t$$

avec

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_s & F \\ F' & 0 \end{bmatrix}}_{K_t} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}}_{\lambda_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix}}_{k_t}$$

où F est la matrice n x nc des fonctions de base évaluées aux points x_i

f est le vecteur nc x 1 des fonctions de bases évaluées à x_0

μ est le vecteur nc x 1 des multiplicateurs de Lagrange

Exemple :

i- Le krigeage ordinaire (m(x)= m)

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \quad f = 1$$

Exemple :

ii- Dérive linéaire en 1D : m(x)=a+b*x

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & . \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

iii- Dérive linéaire en 2D : m(x)=a+b*x+c*y

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ . & . & . \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

iv- Dérive quadratique en 2D : m(x)=a+b*x+c*y+d*x^2+e*x*y+f*y^2

$$F = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & y_n & x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 \\ x_0 y_0 \\ y_0^2 \end{bmatrix}$$

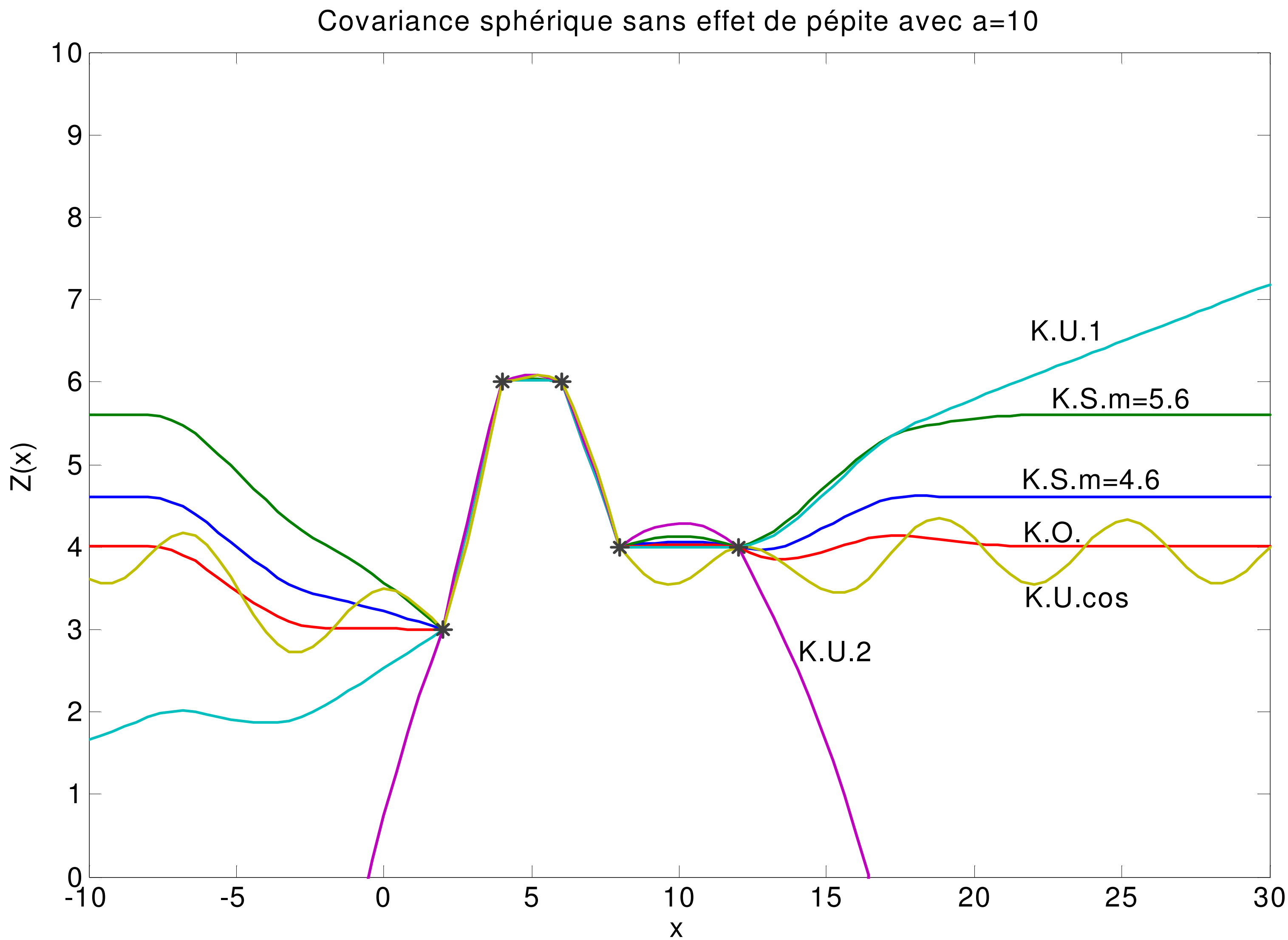
v- Écoulement régional (linéaire) + écoulement radial vers un puits :

$m(x)=a+b*x+c*y+d*\log((x-x_{puits})^2+(y-y_{puits})^2)= a+b*x+c*y+d*\ln(|h_{i,puits}|)$

où « $h_{i,puits}$ » est la distance entre le point et le puits

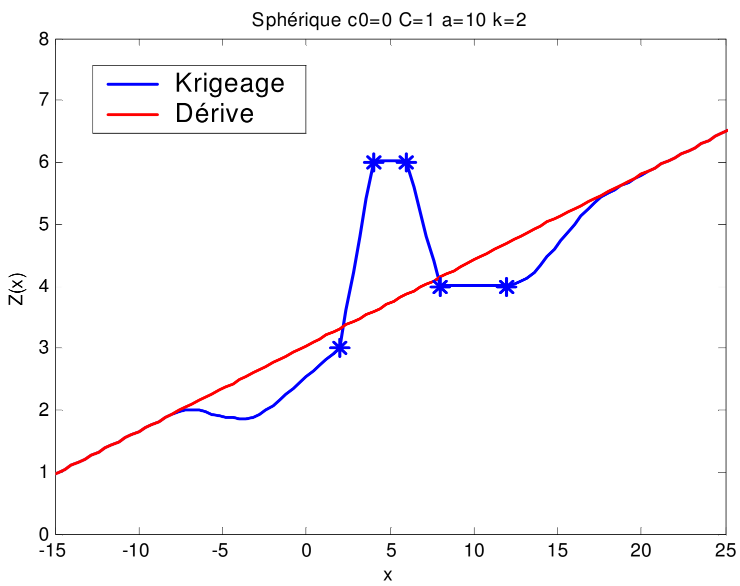
$$F=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \ln(|h_{1,puits}|) \\ 1 & x_2 & y_2 & \ln(|h_{2,puits}|) \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & y_n & \ln(|h_{n,puits}|) \end{bmatrix} \qquad f=\begin{bmatrix} 1 \\ x_0 \\ y_0 \\ \ln(|h_{0,puits}|) \end{bmatrix}$$

Influence de la dérive

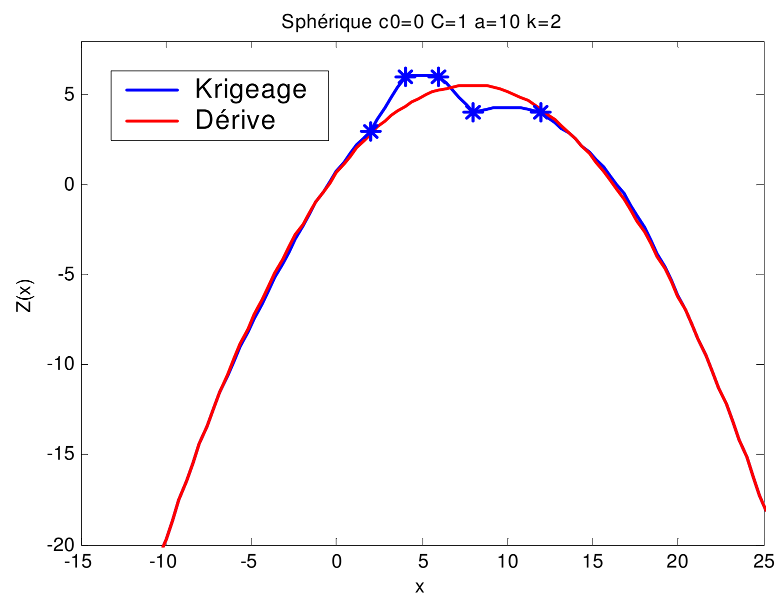


À grande distance des données, l'estimation coïncide avec la dérive estimée

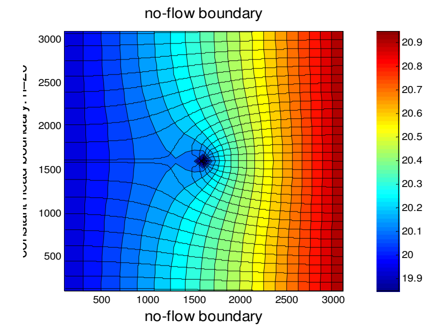
Dérive linéaire



Dérive quadratique



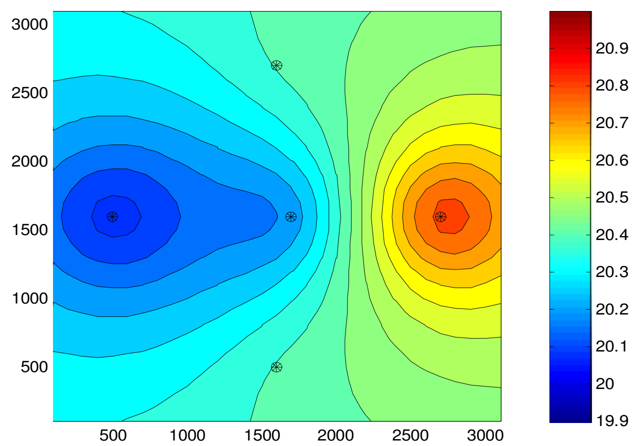
Parfois, l’inclusion d’une dérive aide à produire des cartes plus fidèles à la physique du phénomène



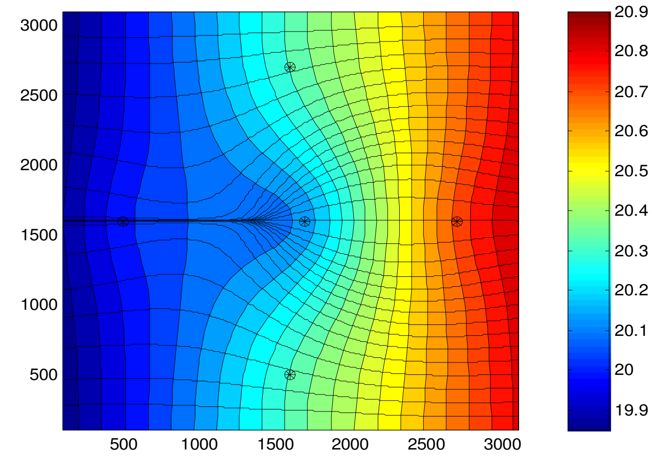
Exemple: carte de charge hydraulique

Différents krigeages avec 5 données

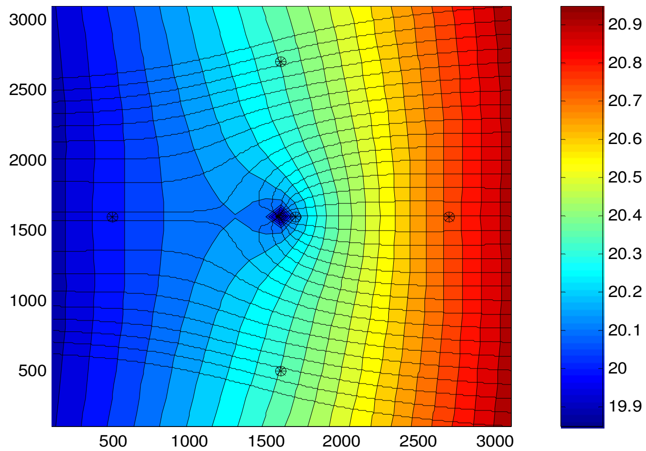
K. ordinaire



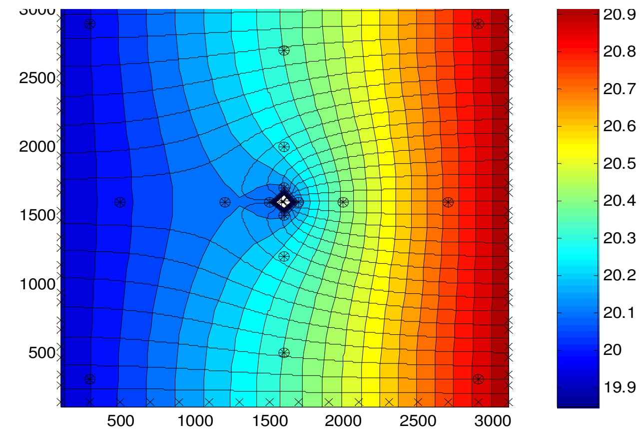
K. Dérive ordre 1

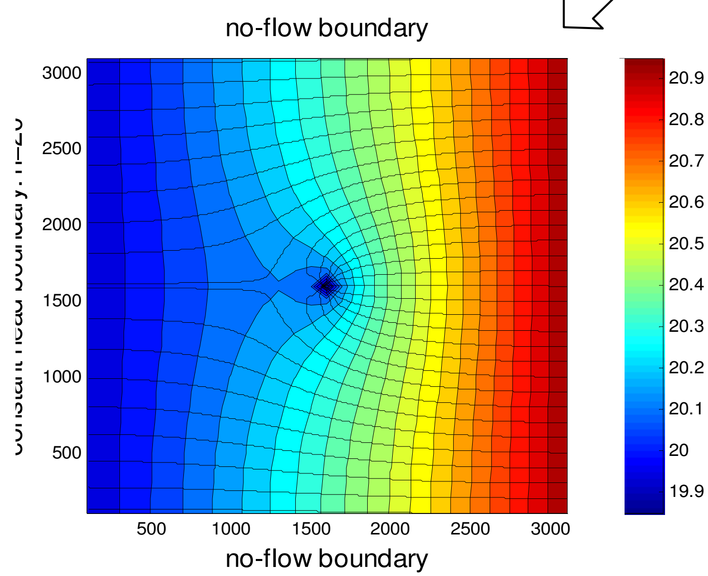


K. dérive ordre 1 + dérive puits



K. dérive ordre 1 + dérive puits + contrainte gradients aux frontières N et S



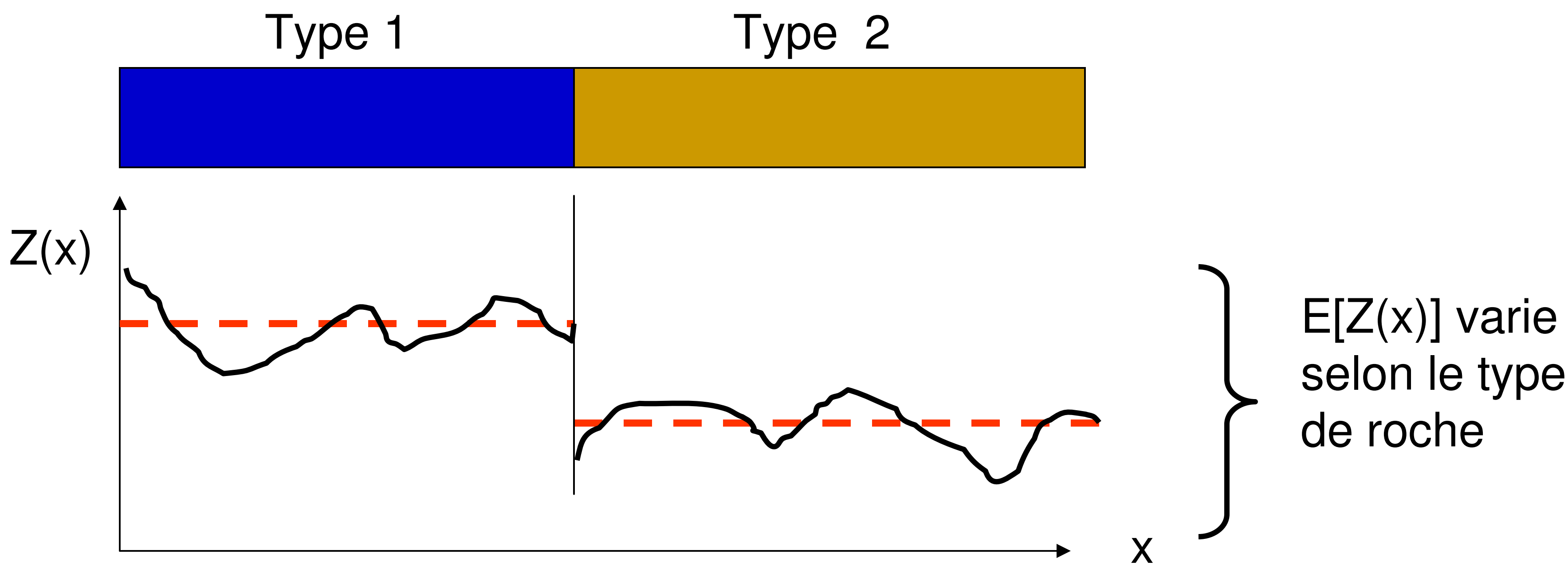


Réalité numérique avec frontières imperméables au nord et au sud

Krigeage avec dérive externe

Lorsque la dérive est liée à une autre variable

Exemple : variable indicatrice du type de roche



On peut écrire : $m(x) = m + a\,I(x)$ ($I(x)=0$ si type 1, $I(x)=1$ si type 2)

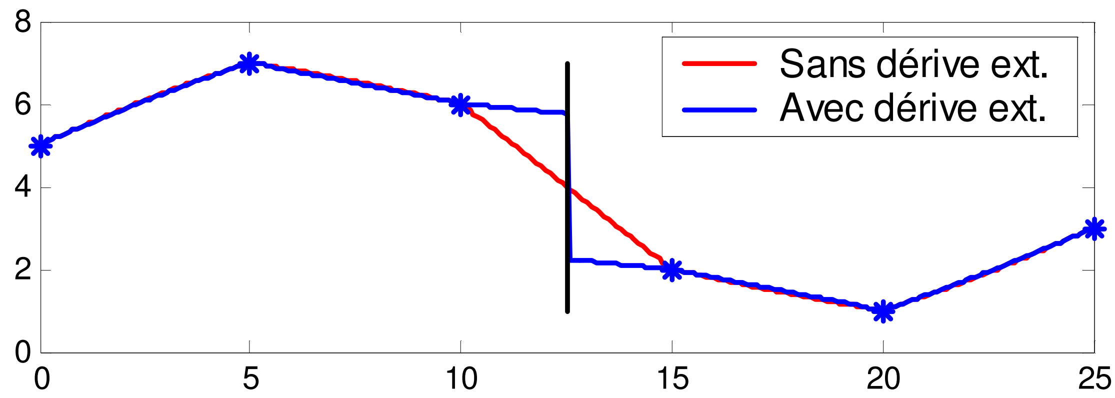
3 points dans roche 1

3 points dans roche 2

$$\Rightarrow \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X_0 dans roche 2

X_0 dans roche 1



Modélisation de la covariance des résidus

$Z(x) = m(x) + Y(x) \Rightarrow Cov(Z(x),Z(x+h)) = Cov(Y(x),Y(x+h))$

$\Rightarrow$ Pour effectuer le krigeage avec dérive, on doit connaître la covariance des résidus $Y(x)$

Méthodes :

i. Estimer la dérive, calculer les résidus puis le variogramme des résidus (biais sur le variogramme, surtout à grande distance => sous-estimation des variances d'estimation)

ii. Calculer le variogramme selon une direction non affectée par la dérive et supposer l'isotropie du modèle (ou imposer une anisotropie ad hoc)

iii. Initier un processus itératif : modèle => dérive => résidus => modèle…. Les changements au modèle se font par une méthode de type gradient basée sur les résultats d'une validation croisée.

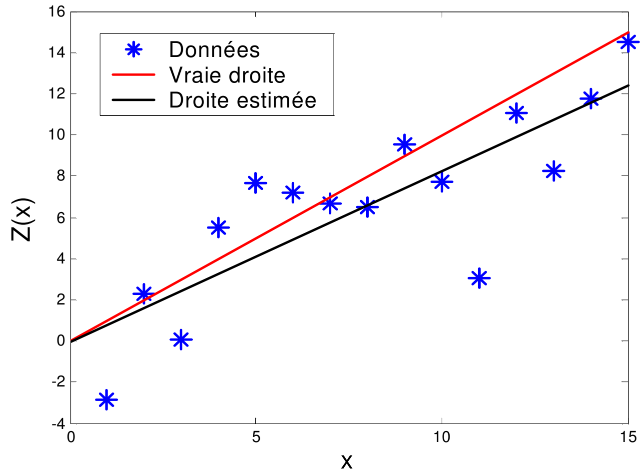
iv. Lorsque la dérive est de faible amplitude, on peut utiliser directement le variogramme de Z(x) à faible distance.

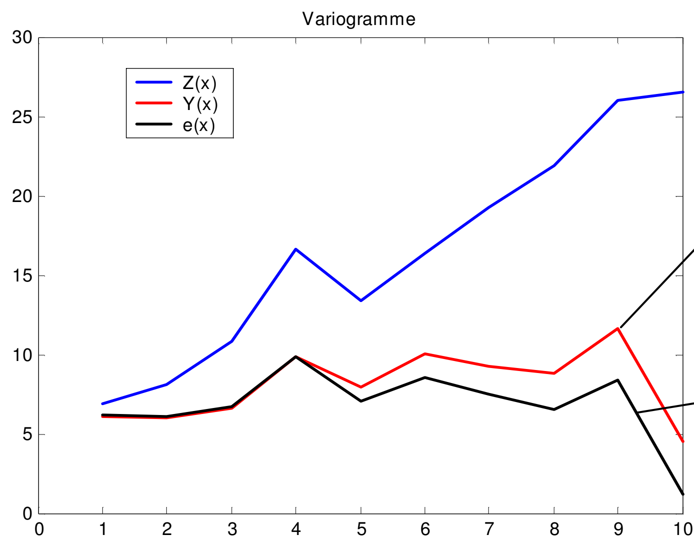
Note : krigeage simple => variogramme avec palier

krigeage ordinaire peut être réalisé avec variogramme avec ou sans palier

krigeage avec dérive peut être réalisé avec fonction de covariance, variogramme (avec ou sans palier) ou « covariance généralisée »

Exemple: 1D, dérive linéaire + bruit blanc





Y(x)=Z(x)-m(x)

e(x)=Z(x)-m(x)*

Krigeage dual

Krigeage primal :

$$\begin{bmatrix} K_s & F \\ F' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix}$$

Valeur estimée :

$$Z^* = \begin{bmatrix} Z' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$Z^* = \begin{bmatrix} Z' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_s & F \\ F' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s & F \\ F' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forme duale

Krigeage dual :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s & F \\ F' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le membre de droite ne dépend pas de la localisation =>1seul système à résoudre

$$Z_0{}^* = \begin{bmatrix} a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_s \\ f \end{bmatrix} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{Cov}(Z_i, Z_0)}_{} + \underbrace{\sum_{k=1}^{nc} b_k f_k(x_0)}_{}$$

Expression analytique

Fonctions de base locales

(composante aléatoire)

Fonctions de base globales

(composante déterministe)

Remarques

a) Effet pépite => discontinuité aux points échantillons de Cov($Z_{i,}Z_0$)

à $x_i=x_0$: $$Z_0{}^* = a_i(C_0 + C) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_j \mathrm{Cov}(Z_j, Z_0) + \sum_{k=1}^{nc} b_k f_k(x_0)$$

à $x_i=x_0+\varepsilon$: $$Z_0{}^* = a_i C + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_j \mathrm{Cov}(Z_j, Z_0) + \sum_{k=1}^{nc} b_k f_k(x_0)$$

La discontinuité aux points échantillons est donc a_iC_0

b) Dans le cas du K. ordinaire sous forme duale

b_1 = m* que l'on obtiendrait par KO de la moyenne

b) Dans le cas d'un effet de pépite pur,

les coefficients $b_1, \ldots b_{nc}$ sont les mêmes que ceux obtenus par n'importe quel programme de régression

le produit a^*C_0 donne les résidus de la régression

c) Pour une covariance générale,

les coefficients $b_1, \ldots b_{nc}$ sont les mêmes que ceux obtenus par n'importe quel programme de régression généralisée

les résidus de la régression généralisée sont :

$$a_i(C_0+C)+\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_j Cov(Z_j, Z_0)$$

Exemple numérique en 1D

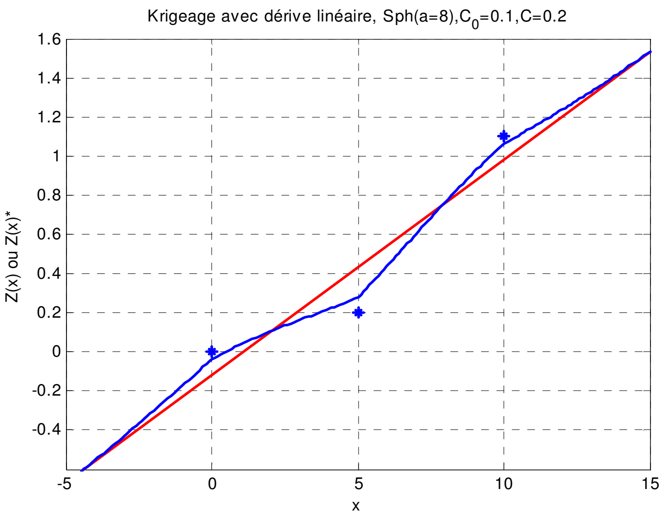
Coordonnée x	Valeur Z(x)
0	0
5	0.2
10	1.1

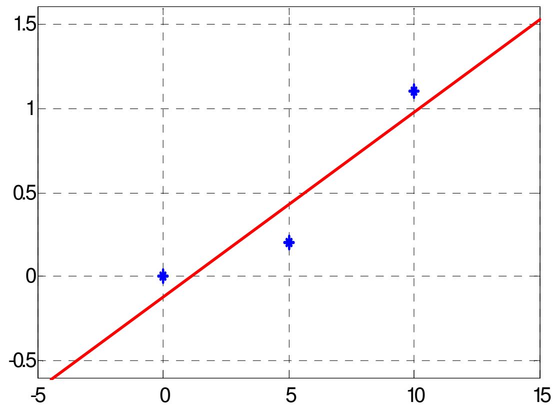
Krigeage avec dérive linéaire, C(h) sphérique, C_0=0.1, C=0.2, a=5

Solution duale:

a_1=0.39	a_2= -0.78	a_3= 0.39	b_1= -0.12	b_2= 0.11

KO

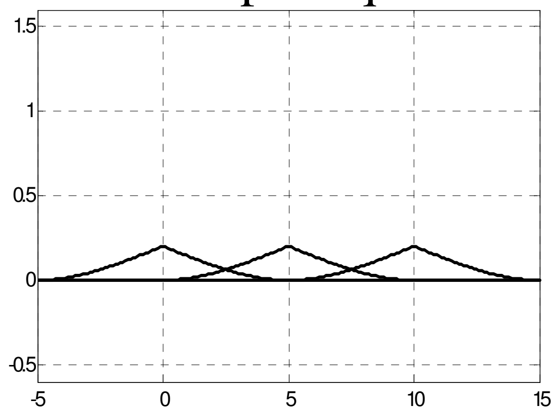




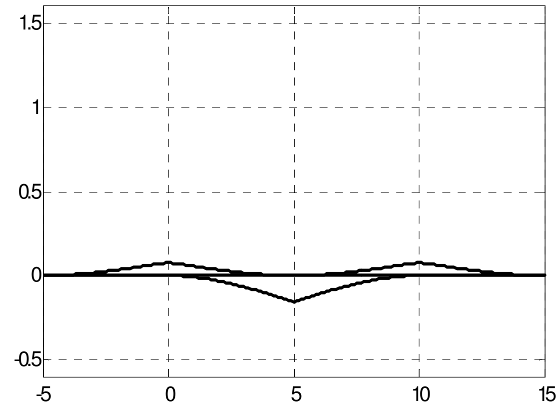
Dérive

+

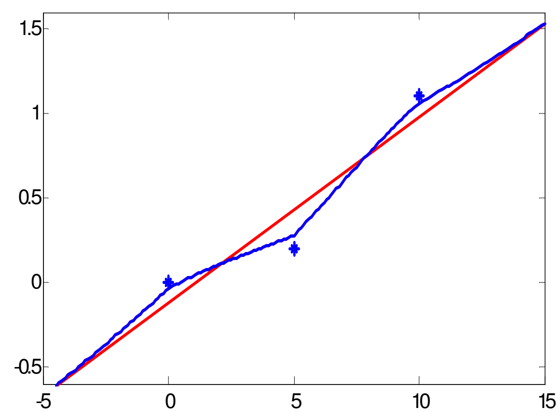
Cov. sphérique



X poids duaux



= KO



e) Toute transformation linéaire de Z_0^* s'évalue aisément (e.g. dérivée directionnelle, intégration, intégration spatiale, gradient, Laplacien,…)

f) Facile d'imposer des contraintes d'égalité (e.g. imposer que 2 points donnés aient la même valeur estimée)

Avantages du k. dual

+ rapide

Expression analytique globale

- Facile d'imposer des contraintes
- Transformations

Désavantage du k. dual

Ne peut calculer la variance de krigeage

Estimation optimale d'une transformation linéaire

Soit $L(Z_0)$ une transf. linéaire et l'estimation optimale $L(Z_0)^* = \Sigma\lambda_i Z_i$

Minimisant $Var(L(Z_0)-L(Z_0)^*)$

Par la linéarité de l'opérateur « E » et de la transformation « L », on obtient le système de krigeage suivant :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{Cov}[Z_i, Z_j] + \mu = L\{\mathrm{Cov}[Z_0, Z_i]\} \quad \forall\, i = 1 \ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j F_t(x_j) = L(f_t(x_0)) \quad \forall\, t = 1 \ldots nc$$

Sous forme matricielle: $K\lambda = L(k) \Rightarrow \lambda = K^{-1}L(k)$

$L(Z_0)^* = [a' \; b'] \, L(k)$ (forme duale)

$L(Z_0)^* = L\{[a' \; b'] \, k\} = L(Z_0^*)$

=> L'estimateur optimal d'une transformation linéaire est égal à la transformation appliquée à l'estimation obtenue par krigeage!

Exemple

Estimer dZ(x)/dx en 1D par KO avec Z(x)

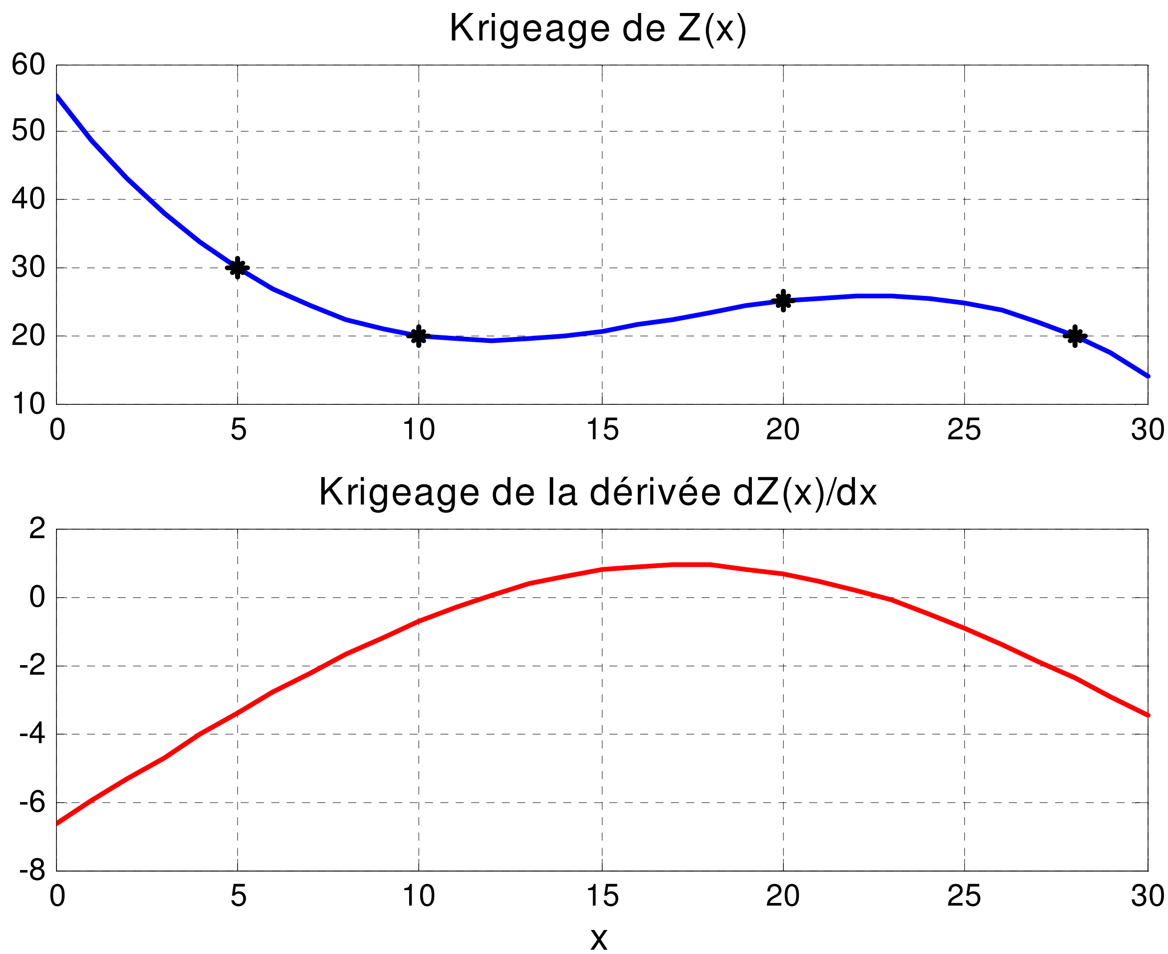
$$\frac{dZ(x)}{dx} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{Z(x+\varepsilon)-Z(x)}{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{Cov}\left(Z_i, \frac{dZ(x_0)}{dx}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{Cov}(Z_i, Z(x_0+\varepsilon)) - \mathrm{Cov}(Z_i, Z(x_0))}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C(h_{i0}+\varepsilon)-C(h_{i0})}{\varepsilon} = dC(h_{i0})/dh$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{dZ(x_0)}{dx}\right)^* = \sum_{i=1}^{n} a_i dC(h_{i0})/dh = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i C(h_{i0}+\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} a_i C(h_{i0})}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{Z(x_0+\varepsilon)^* - Z(x_0)^*}{\varepsilon}\right) = \frac{dZ(x_0)^*}{dx}$$


Krigeage de Z(x)
60
50
40
30
20
10
0
5
10
15
20
25
30
Krigeage de la dérivée dZ(x)/dx
2
0
-2
-4
-6
-8
0
5
10
15
20
25
30
x

Poids négatifs avec le krigeage

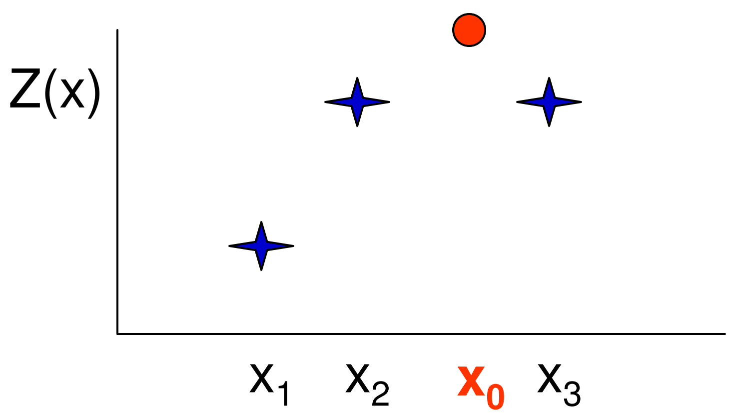
Certains des poids du krigeage peuvent être négatifs

⇒ Des estimés de teneur peuvent être négatifs !

⇒ Nécessaires pour l'extrapolation au delà des valeurs mesurées

Exemple : $Z_0^* = -0.4*Z_1 + 0.9*Z_2 + 0.5*Z_3$

$\Rightarrow Z_0^* = 0.9*(Z_2-Z_1) + 0.5*Z_1 + 0.5*Z_3$



Facteurs influençant le nombre et/ou l’importance des poids négatifs

- Effet de pépite important
- Structure linéaire à l’origine
- Données peu regroupées

diminuent l’occurrence de poids négatifs