Annexe A

QUELQUES RÉSULTATS SUR LES MATRICES

Les références utilisées pour cette annexe sont:

Weisberg, S., 1985. Applied linear regression. Wiley, 324p.

Greenacre, M.J., 1984. Theory and applications of correspondence analysis. Academic Press, 364p.

Rappels sur les matrices et les vecteurs

Définitions

Une **matrice** X_{nxp} est un tableau de nombres contenant n lignes et p colonnes. Souvent on omet les indices dans la description d'une matrice.

Un **vecteur** Y_{nx1} ou Y_n ou Y est une matrice ayant une seule colonne. Souvent, on utilise des lettres minuscules pour le distinguer d'une matrice ordinaire.

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée (n=p) dont tous les éléments hors diagonale sont nuls. On la note habituellement D_n.

Une **matrice identité I** est une matrice diagonale avec chaque élément sur la diagolnale égal à 1.

Une **matrice symétrique** est une matrice tels que les éléments $x_{ij} = x_{ji}$ pour tout i,j.

Une **matrice idempotente** est une matrice (carrée mais pas nécessairement symétrique) telle que AA=A. Également A'A'=A=A' et A'A=A=A'.

Opérations

L'**addition** de matrices se fait élément par élément. Deux matrices ne peuvent être additionnées que si elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes, i.e. si elles sont de même dimension.

La **multiplication par un scalaire** s'effectue en multipliant chaque élément de la matrice par le scalaire.

La **multiplication de deux matrices** s'écrit:

$$\begin{aligned} C_{nxr} &= A_{nxp} B_{pxr} \\ c_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

i.e, on effectue la somme des multiplications entre éléments de la ligne i de la matrice A avec les éléments correspondants dans la colonne j de la matrice B. Pour effectuer la multiplication il **faut** que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égale au nombre de lignes de la matrice de droite. Ainsi, dans l'exemple ci-haut, AB existe, BA n'existe pas. Lorsque les matrices A et B sont carrées, AB et BA existent mais généralement $AB \neq BA$.

La **transposée d'une matrice** X est notée X' ou X^T. La ligne i de X' est la colonne i de X, i.e. $x_{ij}=x'_{ji}$. Si X est nxp, alors X' est pxn.

La **transposée d'un produit de matrices** est le produit des matrices transposées prises dans l'ordre inverse, i.e.: (ABC)'= C'B'A'.
Contrairement à ce que l'on pourrait croire, le produit de deux matrices symétriques n'est pas généralement une matrice symétrique. On a alors (AB)'=B'A'=BA or généralement BA $\neq$ AB.
La **partition d'une matrice** s'obtient en scindant une matrice en blocs disjoints. Pour une matrice carrée symétrique, il est courant de partitionner la matrice de la façon suivante:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

où X_{11}, X_{22} sont des matrices carrées, $X_{12}=X_{21}'$.

L'**inverse d'une matrice carrée** est C^{-1}. On a que $CC^{-1}=C^{-1}C=I$. L'inverse n'existe que si la matrice est non-singulière. Une matrice est singulière si on peut trouver une combinaison linéaire des lignes ou des colonnes qui donne le vecteur 0.

L'**inverse de produits de matrices carrées** est obtenu par le produit des inverses en inversant l'ordre des matrices. Ainsi, $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, A,B et C sont des matrices carrées.

Une matrice dont l'inverse est la transposée est une **matrice orthogonale**, i.e.
$Q'Q=QQ'=QQ^{-1}=I$.

L'inverse et la transposée d'une matrice symétrique sont aussi des matrices symétriques.

Le **rang d'une matrice** rectangulaire est le minimum du nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes. Une matrice carrée possède une inverse ssi elle est de plein rang, i.e. non-singulière.

La **trace d'une matrice carrée** est la somme des éléments sur la diagonale. On a la propriété suivante: Tr(ABCD)=Tr(DABC)=Tr(CDAB)=Tr(BCDA), i.e. les permutations circulaires d'un produit de matrice ne changent pas la trace du produit. A,B,C et D peuvent être rectangulaires.

Une matrice symétrique est **positive définie** si on a aCa>0 pour tout vecteur a.

Les **valeurs propres et les vecteurs propres** d'une matrice symétrique C_{pxp} sont données par $Cv=\lambda v$. v est un vecteur réel p x 1, λ est un scalaire réel. Si C est de plein rang, on peut trouver p vecteurs propres orthogonaux associées aux p valeurs propres. Si C n'est pas de plein rang, alors on a moins de q<p valeurs propres positives et q-p valeurs propres égales à 0. Si C n'est pas symétrique, les valeurs propres et vecteurs propres peuvent être complexes. On peut aussi écrire: $C=VD_\lambda V'$, avec V'V=I. V est une matrice p x k ayant chacun des vecteurs propres placés en colonne dans V. Si la matrice C est de plein rang, alors V est pxp et on a aussi VV'=I.

La somme des valeurs propres d'une matrice symétrique est égale à la trace de cette matrice.
Une généralisation de la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres est la **décomposition en valeurs singulières (SVD).** Pour toute matrice rectangulaire, on peut trouver une décomposition de la forme: $X_{nxp}=U_{nxp}D_{pxp}V'_{pxp}$, avec U'U=V'V=I. (Note, UU'$\neq$I)

Preuve: On peut écrire C=X'X. C est symétrique. C possède donc une décomposition en valeurs propres et vecteurs propres, i.e. $C=X'X=VD_\lambda V'$. Par ailleurs, on peut toujours écrire:
$X=XVD_\lambda^{-1/2}D_\lambda^{1/2}V'$. Posant $U=XVD_\lambda^{-1/2}$ et $D=D_\lambda^{1/2}$, on a le résultat escompté.

Les valeurs propres d'une matrice symétrique sont aussi des valeurs singulières de cette matrice et idem pour les vecteurs propres.

Les valeurs propres d'une matrice idempotente sont toutes des 0 ou des 1. Ceci est évident puisque A'A=A. A'A et A ont donc les mêmes valeurs singulières et donc $D_\lambda^{-1/2}=D_\lambda$, ce qui implique que les valeurs singulières sont toutes 1 ou 0.

Forme généralisée de la décomposition en valeurs singulières. On peut imposer une contrainte d'orthogonalité et de normalisation plus générale que la précédente à la décomposition SVD.
$X_{nxp}=U_{nxp}D_{pxp}V'_{pxp}$, avec $U'M_{nxn}U=I$ et $V'N_{pxp}V=I$, M et N des matrices symétriques et positives définies. La plupart des méthodes d'analyse factorielles (ACP, AC, AD et autres) peuvent s'écrire comme une SVD généralisée.