

7- Étude statistique de vecteurs orientés et non-orientés	2
Introduction	2
7.1 Détermination des vecteurs unitaires.....	2
7.2 Orientation moyenne des vecteurs et mesure de dispersion ou de concentration	3
7.3 Fonctions de densités.....	3
7.3.1 Lois symétriques radialement	3
7.3.2 Lois non-symétriques radialement.....	8
7.4 Quelques relations utiles	12
7.4.1 Centrer les vecteurs.....	12
7.4.2 Coordonnées des vecteurs sur stéréonet	13

7- Étude statistique de vecteurs orientés et non-orientés

Réf utilisées dans ce chapitre:

Fisher N.I., Lewis T. et Embleton B.J.J., 1987, *Statistical analysis of spherical data*, Cambridge

Watson G.S., 1983, *Statistics on spheres* Wiley.

Priest S.D., 1993 : *Discontinuity analysis for rock engineering*, Chapman Hall.

Introduction

L'étude statistique de données vectorielles orientés ou non nécessite une attention particulière. Ici nous nous concentrons sur les données linéaires et planaires en 3D, en mettant surtout l'emphase sur les données non-orientées plus fréquentes en génie géologique. Des modèles et méthodes similaires existent pour les données 2D.

Pour spécifier l'orientation d'une ligne, on précise sa direction et sa plongée. Pour spécifier l'orientation d'un plan, plusieurs alternatives existent. Ici nous utiliserons la normale du plan (pôle) dont nous préciserons la direction et la plongée.

Les données relatives à des plans sont non-orientées puisque la normale peut être orientée arbitrairement par rapport au plan.

Règle 1: Aucune des statistiques élémentaires connues ne peut s'appliquer directement aux angles définissant la direction et la plongée. On doit toujours travailler avec les vecteurs unitaires définis par les cosinus directeurs du vecteur avec le système de coordonnées de référence.

Ex. La moyenne de deux vecteurs orientés à 1° et 359° est 180° au lieu de 0° . La moyenne de 2 vecteurs non-orientés dont un a reçu arbitrairement la direction 0° et l'autre 180° est 90° au lieu de 0° ou 180° .

7.1 Détermination des vecteurs unitaires

On suppose que la direction est donnée en azimut et que la plongée positive désigne un vecteur allant vers le bas. On cherche les coordonnées du vecteur sur la sphère unité. On utilise ici le système de référence main droite (paume de la main droite tendue vers le haut, le pouce pointe vers x, l'index vers y et le majeur vers z).

Avec ces conventions, on a:

a: direction, b: plongée

$$x = \sin(a)\cos(b)$$

$$y = \cos(a)\cos(b)$$

$$z = -\sin(b)$$

7.2 Orientation moyenne des vecteurs et mesure de dispersion ou de concentration

i. "*n*" vecteurs orientés:

On définit: $S_x = \sum x_i$, $S_y = \sum y_i$, $S_z = \sum z_i$ $S = (S_x, S_y, S_z)$

On définit $R^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$

Le vecteur moyen est alors donné par $(S_x/R, S_y/R, S_z/R)$

(Note ce vecteur est pratiquement parallèle au 1^{er} vecteur propre d'une ACP de la matrice d'orientation lorsque les pôles sont concentrés. On a alors : $\frac{R^2}{N^2} \approx \lambda_1$.

Diverses mesures ont été proposées pour mesurer la concentration des vecteurs autour du pôle moyen dont:

$N/(N-R)$ et $(N-1)/(N-R)$ où N est le nombre de données et R est la racine carrée de R^2 défini plus haut. Plus cette valeur est grande, plus les vecteurs sont concentrés autour du pôle moyen.

ii. "*n*" vecteurs non-orientés

Vecteur moyen: le premier vecteur propre de la matrice d'orientation. Voir chapitre 3, section 3.6.5.

Concentration: Donnée par l'importance de la 1^{ère} valeur propre pour des données bipolaires.

7.3 Fonctions de densités

Les fonctions de densité habituelles (normale, χ^2 , ...) ne sont pas bien adaptées à la description de variables d'orientation dont les valeurs varient entre 0 et 360° pour la direction et 0 et 90° pour la plongée. Des fonctions de densité spécifiques aux variables d'orientation ont donc été développées. Parmi celles-ci, certaines sont symétriques autour du pôle moyen de la population, d'autres non-symétriques. Les fonctions symétriques sont le plus fréquemment utilisées.

7.3.1 Loïs symétriques radialement

i- *Loi de Fisher pour vecteurs orientés:*

Fonction de distribution de Fisher (ne pas confondre avec la loi de Fisher utilisée en régression): Après rotation du pôle moyen pour coïncider avec le vecteur (0,0,1), la fonction de densité est:

$f(\theta, \varphi) = C_F \exp(k \cos(\theta)) \sin \theta$ pour $0 \leq \theta \leq 180^\circ, 0 \leq \varphi \leq 360$

où θ est l'angle entre le pôle le vecteur considéré;

φ est la position sur la circonférence du cercle défini par θ

k est un paramètre de concentration des vecteurs autour du pôle

et C_F est une constante de normalisation : $C_F = \frac{k}{2\pi(\exp(k) - \exp(-k))}$

La probabilité d'observer un vecteur sur un élément de surface ds est simplement

$$h * ds = h * \sin(\theta) d\theta d\varphi = f d\theta d\varphi \Leftrightarrow h = \frac{f}{\sin(\theta)}$$

h est la fonction de probabilité par élément de surface.

L'orientation moyenne est donnée par le vecteur S/R.

Le paramètre k peut être estimé par la solution de l'équation suivante:

$$\frac{e^k + e^{-k}}{e^k - e^{-k}} - \frac{1}{k} - \frac{R}{N} = 0$$

Note: Des formules plus simples sont présentées pour l'estimation de k dans Priest (1993), dont l'estimateur $k \approx N/(N-R)$ déjà introduit plus tôt.

Note: La 1ère valeur propre d'une ACP est, tout comme le paramètre " k " une mesure de concentration des pôles autour d'un pôle moyen. En fait, pour k grand, on a la relation suivante: $R \approx N * \sqrt{\lambda_1}$, et donc

$$k \approx \frac{1}{1 - \sqrt{\lambda_1}}$$

Note, " f et h " ne dépendent pas de la variable φ en raison de la symétrie radiale de la distribution. La fonction de densité " f ", la densité de probabilité par élément de surface " h " et la cumulative sont représentées à la figure suivante en fonction de θ avec $k=5$. On notera qu'il existe une probabilité non-nulle (mais faible) que l'angle θ soit supérieur à 90° . Si on utilise la fonction de Fisher pour décrire des vecteurs non-orientés, il faudrait donc tronquer celle-ci à 90° et renormaliser en conséquence.

La fonction cumulative de Fisher est:

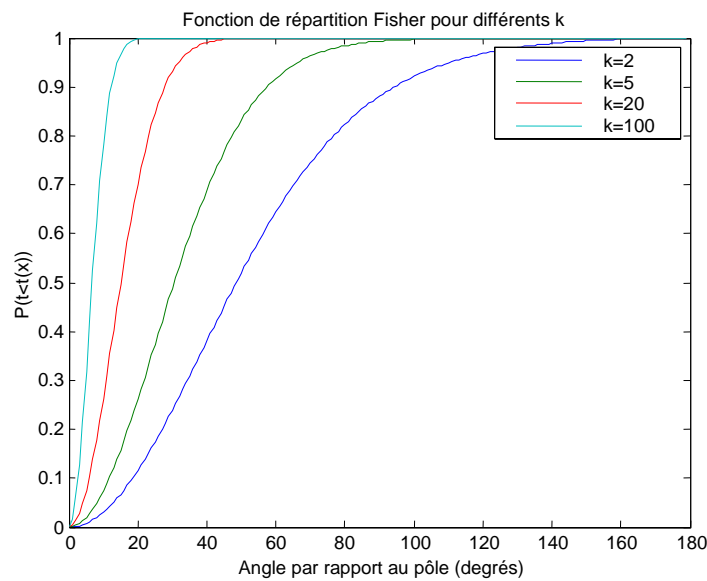
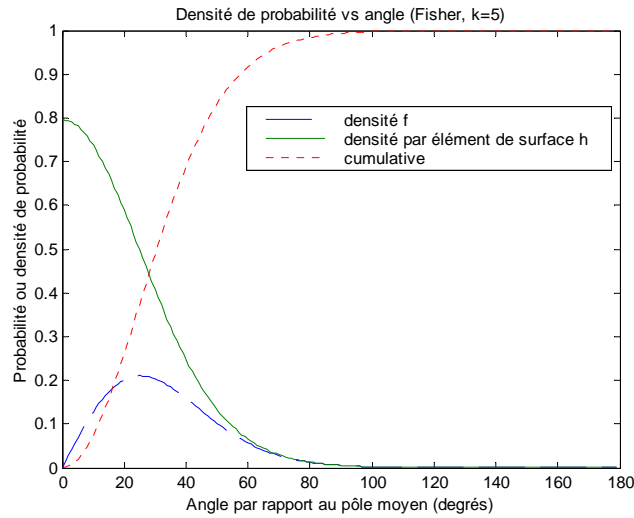
$$P(\text{angle (joint, pôle moyen)} < \theta) = F(\theta) = \frac{e^k - e^{k \cos(\theta)}}{e^k - e^{-k}} \quad 0 \leq \theta \leq 180$$

Note: Pour $\theta=0$, $F(\theta)=0$;

pour $\theta=180$, $F(\theta)=1$;

pour $\theta=90$, $F(\theta) = \frac{e^k - 1}{e^k - e^{-k}} \approx 1$ si k grand (ex. = 0.993 si $k = 5$);

Comme on le voit, il reste une probabilité non-nulle d'observer un angle supérieur à 90° , ce qui n'est pas possible dans le cas de vecteurs non-orientés.



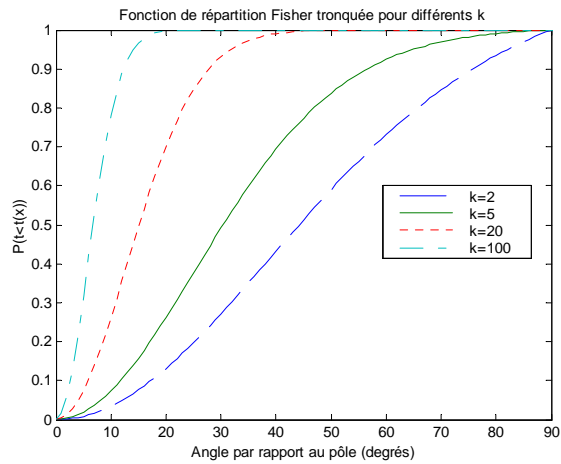
ii. Loi de Fisher tronquée (vecteurs non-orientés)

La constante de normalisation permettant de limiter le domaine de définition de θ entre 0 et 90° , est la valeur de la cumulative à $\theta = 90^\circ$ et vaut $\frac{\exp(k) - 1}{\exp(k) + \exp(-k)}$. En divisant la fonction de densité de Fisher par cette constante, on obtient:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{k}{2\pi(\exp(k) - 1)} \exp(k \cos(\theta)) \sin\theta \text{ pour } 0 \leq \theta \leq 90^\circ, 0 \leq \varphi \leq 360$$

De même, la fonction cumulative Fisher tronquée vaut :

$$P(\text{angle (joint, pôle moyen)} < \theta) = F(\theta) = \frac{e^k - e^{k \cos(\theta)}}{e^k - 1} \quad 0 \leq \theta \leq 90$$



Exemple: 3 familles de fractures suivant une loi de Fisher avec paramètre k variable (projection stéréographique à angles égaux)

Statistiques

Famille 1

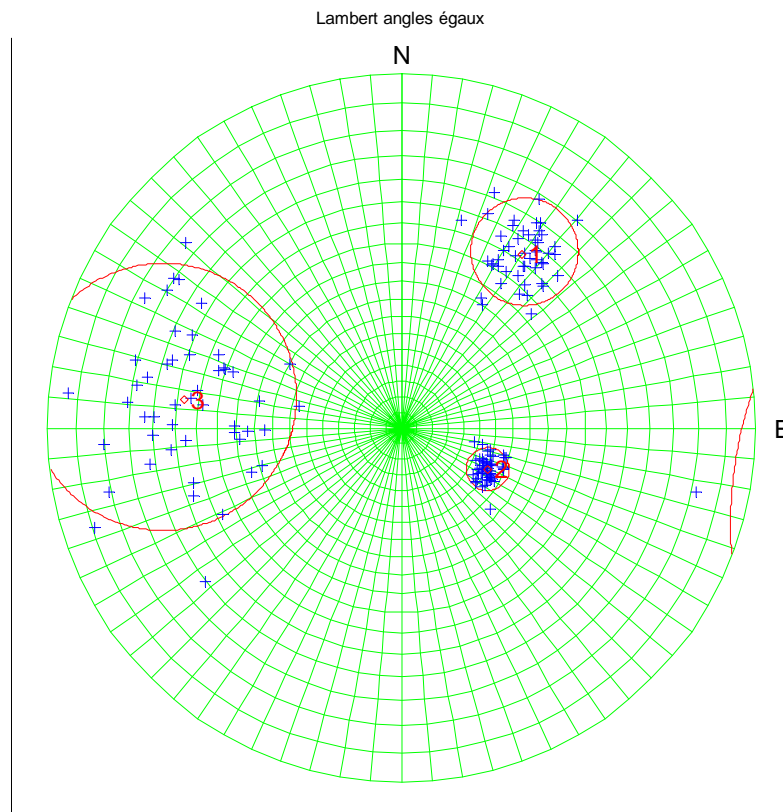
Proportion : 0.33
 Azimut (pôle) : 34.94
 Pendage (pôle) : 28.34
 Paramètre K : 94.15

Famille 2

Proportion : 0.33
 Azimut (pôle) : 115.4
 Pendage (pôle) : 59.89
 Paramètre K : 360.1

Famille 3

Proportion : 0.33
 Azimut (pôle) : 97.42
 Pendage (pôle) : -26.65
 Paramètre K : 17.45



iii. *Loi de Watson pour vecteurs non-orientés*

Outre la loi de Fisher (ou Fisher tronquée si "k" petit), on peut aussi utiliser la fonction de densité de Watson définie comme:

$$f(\theta, \varphi) = C_w \exp(k \cos^2(\theta)) \sin \theta \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq 90^\circ, 0 \leq \varphi \leq 360$$

où θ est l'angle entre le pôle et le vecteur considéré
 k est un paramètre de concentration des vecteurs autour du pôle
et C_w est une constante de normalisation (fonction de k).

C_w est donnée par l'intégrale suivante :

$$\left(4\pi \int_0^1 e^{ku^2} du \right)^{-1}$$

La probabilité d'observer un vecteur sur un élément de surface ds est simplement

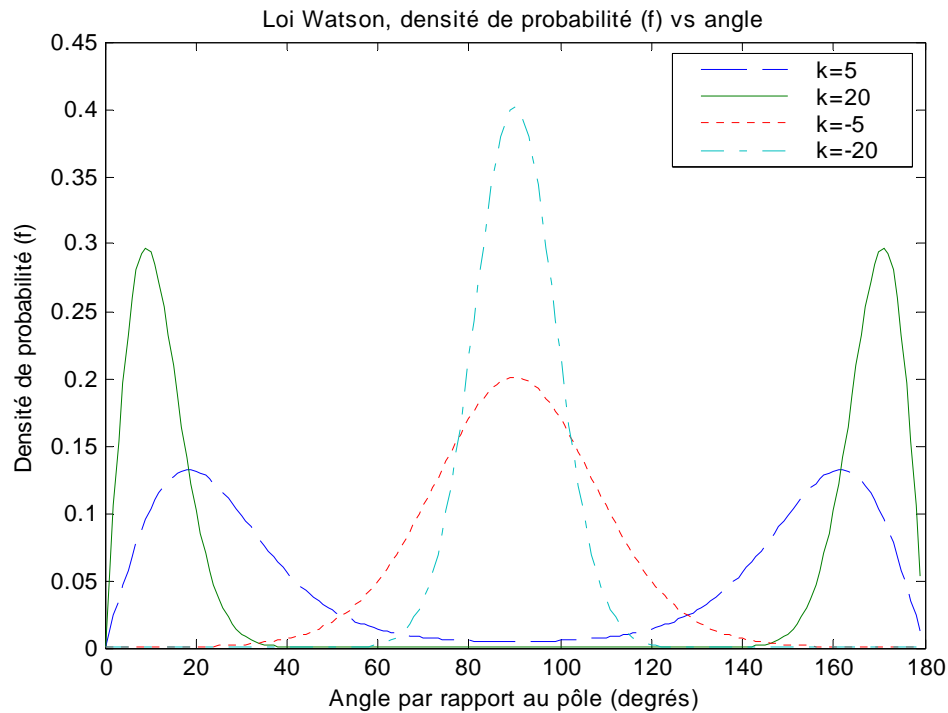
$$h * ds = \frac{f * ds}{\sin(\theta)} = f d\theta d\varphi \Leftrightarrow h = \frac{f}{\sin(\theta)}$$

Tout comme pour la loi Fisher, le paramètre "k" est un paramètre de concentration. Toutefois, ici, les vecteurs sont non-orientés, et la densité est la même pour les deux directions de chaque vecteur. Le paramètre k peut être positif ou négatif. S'il est positif, cela indique une distribution bipolaire (i.e. comme Fisher mais de part et d'autre du vecteur). Si k est négatif, ceci représente une distribution sur un grand cercle. Plus k est négatif, plus la distribution se concentre sur le grand cercle.

La figure suivante illustre quelques fonctions de densité de probabilité par élément de surface en fonction du paramètre k pour la loi Watson.

Note: Il n'existe pas de forme analytique pour la loi cumulative de la distribution de Watson. On doit recourir à des évaluations numériques (comme pour la loi normale).

L'orientation de l'axe principal est donnée par l'ACP de la matrice d'orientation et il existe des relations approximatives pour estimer k (voir Fisher et al., 1987).



7.3.2 Lois non-symétriques radialement

i. Loi binormale (vecteurs non-orientés)

Soit le plan orthogonal au pôle moyen. On suppose que les projections des pôles sur ce plan suivent une loi binormale (tronquée au cercle unité). Sous cette hypothèse, en doublant chaque vecteur pour qu'il pointe vers les 2 orientations possibles et en effectuant une ACP de la matrice des orientations, on trouve les résultats suivants (Marcotte et Henry, 2002):

- le 1^{er} vecteur propre donne le pôle moyen
- les 2^e et 3^e vecteurs propres donnent les directions principales dans le plan orthogonal au pôle moyen
- les valeurs propres donnent les variances des coordonnées selon les directions principales
- les covariances des coordonnées selon les directions principales sont nulles
- les moyennes des coordonnées sur les vecteurs propres 2 et 3 sont nulles
- on peut facilement construire des intervalles de confiance autour du pôle moyen
- on peut utiliser cette distribution pour identifier différentes familles, calculer la probabilité de chaque joint d'appartenir à une famille donnée et classer chaque joint dans la famille ayant la plus forte probabilité

L'avantage principal de la loi binormale est que l'estimation de tous les paramètres de la distribution peut être effectuée par une simple ACP. Bien que définie dans un plan, elle définit indirectement une distribution sur la sphère. La fonction de densité est :

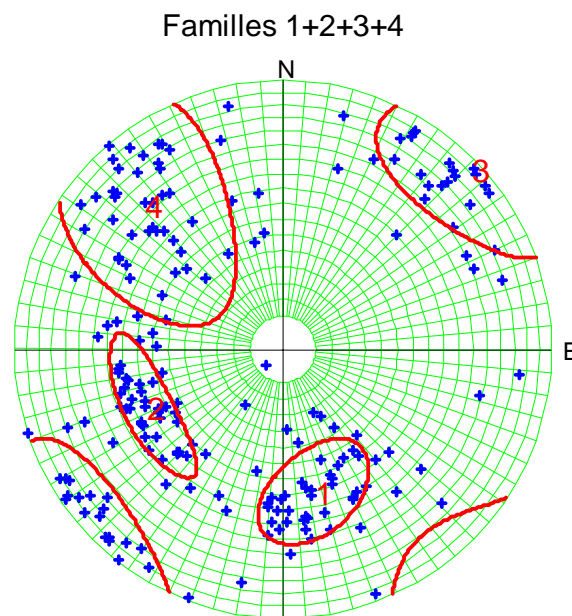
$$f(c_2, c_3) = cte \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_2\sigma_3}} \exp\left(-0.5\left(\frac{c_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{c_3^2}{\sigma_3^2}\right)\right) \text{ avec } c_2^2 + c_3^2 \leq 1$$

où c_2, c_3 sont les coordonnées sur les 2^e et 3^e vecteurs propres de la matrice d'orientations. Si $\sigma_2^2 \ll 1$ et $\sigma_3^2 \ll 1$, alors on peut les estimer par λ_2 , et λ_3 , les valeurs propres associées aux 2^e et 3^e v.p. Sinon, il faut introduire une constante de normalisation (*cte*) pour assurer la troncature au cercle unité (i.e. toute la probabilité doit être incluse dans le cercle unité) et on peut déduire les paramètres de dispersion à partir des valeurs propres expérimentales.

Il est possible d'utiliser la fonction de densité dans une approche automatique d'identification, et d'estimation des paramètres dans le cas où l'on a plusieurs familles observées simultanément (voir Marcotte et Henry, 2002)

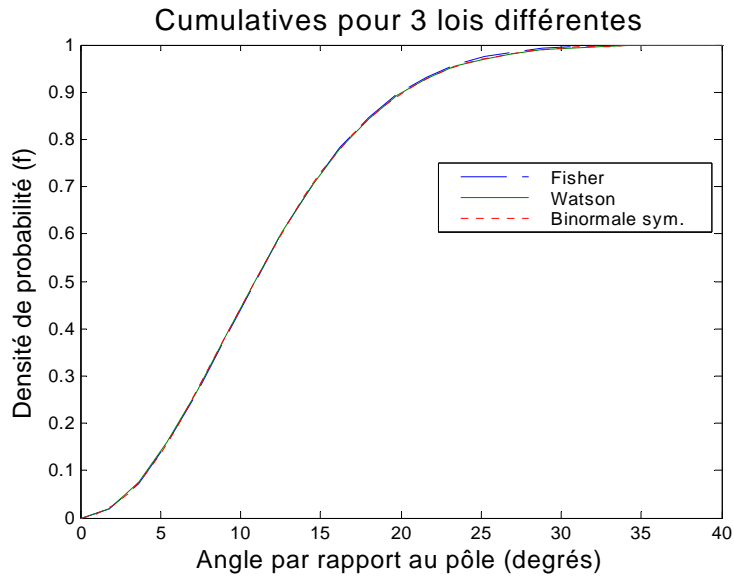
ex. On a simulé 50 joints pour 4 familles dont les paramètres sont donnés au tableau suivant. On a estimé le nombre de familles et les paramètres des 4 familles trouvées à partir des 200 joints par la méthode de vraisemblance maximale (entièrement automatiquement, i.e. sans indiquer au programme le nombre de familles ni pour chaque joint quelle était la famille d'origine). Comme on le voit au tableau suivant, l'estimation est précise sur l'ensemble des paramètres. La figure suivante montre l'ellipse d'intervalle de confiance de 70% calculée à partir des paramètres estimés pour chaque famille.

	Ensemble 1	Ensemble 2	Ensemble 3	Ensemble 4
Azimut (°) (pôle)	245 (249.5)	45 (47.1)	165 (167.5)	-45 (-43.0)
Pendage du pôle(°)	45 (44.2)	5 (4.4)	45 (44.4)	30 (26.1)
Angle entre pôle estimé et simulé	3.3°	2.2°	1.8°	4.3°
Dispersion selon 2 ^e vecteur propre	0.1 (0.08)	0.1 (0.08)	0.05 (0.05)	0.1 (0.21)
Dispersion selon 3 ^e vecteur propre	0.01 (0.009)	0.05 (0.06)	0.05 (0.02)	0.1 (0.05)
Proportion (%)	0.25 (0.25)	0.25 (0.26)	0.25 (0.21)	0.25 (0.28)



Comparaison des lois Fisher, Watson et binormale symétrique (i.e. avec $\lambda_2 = \lambda_3$)

La figure suivante montre la cumulative pour ces 3 lois avec $k=38.4$ pour la Fisher, $k=20$ pour la loi Watson et $\lambda_1=0.9486$ pour la loi binormale (correspondant à $k=38.4$). Les paramètres des 3 lois ont été ajustés de façon à fournir une cumulative quasi-identique. Cette figure indique que Les 3 lois peuvent très bien ajuster le même jeu de donnée. L'avantage de la loi binormale réside dans sa plus grande flexibilité qui lui permet aussi d'ajuster des lois radialement non-symétriques. L'exemple illustre aussi que le paramètre de concentration « k » n'a pas exactement la même signification pour les lois Fisher et Watson.



ii. *Loi de Bingham (vecteurs non orientés)*

La fonction de densité de la loi de Bingham est :

$$f(c_2, c_3) = cte * \exp(k_2 c_2^2 + k_3 c_3^2) \text{ avec } c_2^2 + c_3^2 \leq 1$$

où c_2, c_3 sont les coordonnées sur les 2^e et 3^e vecteurs propres de la matrice d'orientation, cte est une constante de normalisation dont la valeur dépend de k_2 et k_3 . k_2 et k_3 sont les paramètres décrivant la concentration des pôles selon les directions définies par les 2^e et 3^e vecteurs propres (valeurs négatives). Comparant avec la loi binormale, on voit que la loi Bingham n'est rien d'autre qu'une loi binormale tronquée avec le choix :

$k_2 = \frac{-1}{2\sigma_2^2}, k_3 = \frac{-1}{2\sigma_3^2}$. La loi de Bingham peut donc être vue comme une distribution binormale tronquée au cercle unité.

7.4 Quelques relations utiles

7.4.1 Centrer les vecteurs

Pour amener un vecteur "x" à coïncider avec un vecteur "y" (les 2 vecteurs sont unitaires)
Former la matrice de rotation:

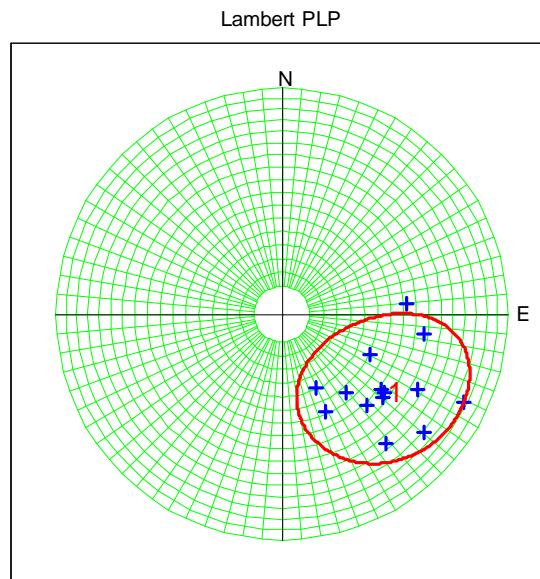
$$H = \frac{(x + y)(x + y)'}{(1 + x'y)} - I_3$$

où I_3 représente la matrice identité. On vérifie en effectuant le produit que $Hx=y$.

H est utile pour faire coïncider le pôle moyen avec le vecteur (0,0,1). Soit x: vecteur pôle moyen, soit $y=(0,0,1)$, soit z un vecteur quelconque,

- i. On calcule $H(x,y)$
- ii. On effectue $z^*=Hz$. z^* est maintenant centré par rapport au pôle (0,0,1). Sur un stéréonet les vecteurs z^* seront maintenant concentrés autour du centre du stéréonet.

Exemple: Soit le fichier de joints déjà vu au chapitre 3. La projection des joints sur un stéréonet à aires égales est:



Le vecteur pôle moyen indiqué par "1" est $m=[0.6028 \ -0.4405 \ -0.6653]'$ et correspond à une direction de 126.2 et une plongée de 41.7.

On désire faire tourner ces pôle de façon à faire coïncider le pôle moyen avec l'axe "z" $[0 \ 0 \ 1]'$.

On calcule

$$H = \begin{bmatrix} 0.0855 & -0.7933 & 0.6028 \\ -0.7933 & -0.4202 & -0.4405 \\ 0.6028 & -0.4405 & -0.6653 \end{bmatrix}$$

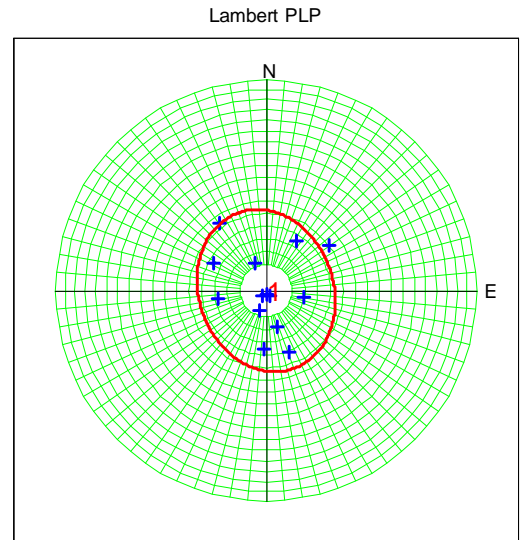
On a bien:

$$H^*m=[0 \ 0 \ 1]'$$

On effectue la rotation pour l'ensemble des joints en faisant

$$H^*joints'$$

Voici la représentation obtenue sur stéréonet après rotation:

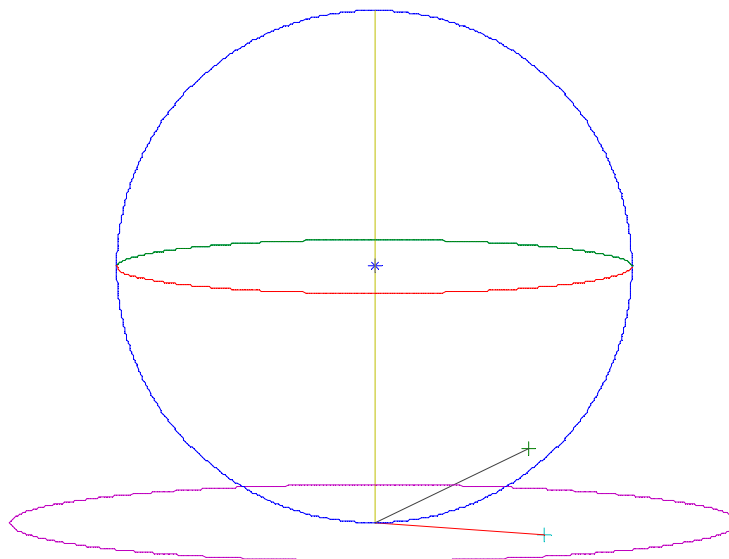


7.4.2 Coordonnées des vecteurs sur stéréonet

i. Projection "aire égale" (Lambert ou Schmitt).

Dans ce cas, 2 surfaces égales sur le stéréonet correspondent à 2 surfaces égales sur la sphère.

Principe: On considère l'hémisphère inférieure. On place un plan tangent au pôle sud et on trace un vecteur du pôle sud au point sur la sphère. On rabat ce vecteur pour l'amener sur le plan de projection. Les coordonnées sont par la suite divisées par $\sqrt{2}$ pour être incluses à l'intérieur d'un cercle unité.



Les coordonnées polaires, sur un cercle de projection de rayon unité, d'un vecteur de direction α et de plongée β sont: $0 \leq \beta \leq 90$ et $0 \leq \alpha \leq 360$

$$r = \sqrt{2} \sin\left(\frac{90 - \beta}{2}\right)$$

$$\phi = 90 - \alpha$$

En coordonnées cartésiennes (u,v)

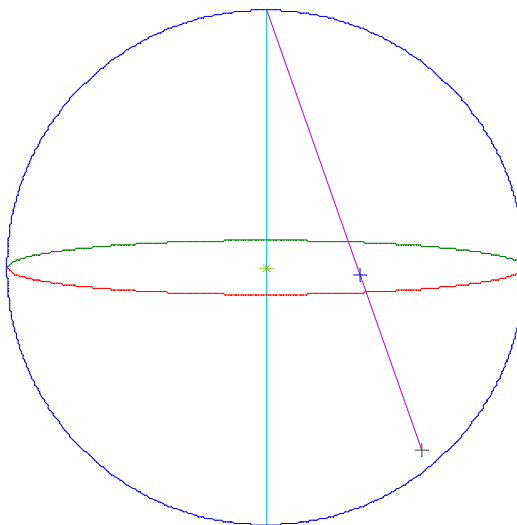
$$u = r \cos \phi$$

$$v = r \sin \phi$$

ii. Projections à angles égaux (Wulff ou stéréographique)

Dans ce cas, des cercles sur la sphère apparaissent également comme des cercles sur le plan de projection (les angles sont préservés).

Principe: On considère l'hémisphère inférieure. Le plan de projection est le plan équatorial. On trace un vecteur du pôle nord au point sur la sphère (demi-sphère inférieure). Le point d'intersection entre ce vecteur et le plan équatorial est la position du point de projection.



Les coordonnées polaires, sur un cercle de projection de rayon unité, d'un vecteur de direction α et de plongée β sont:

$$r = \tan\left(\frac{90 - \beta}{2}\right)$$

$$\phi = 90 - \alpha$$

En coordonnées cartésiennes (u,v) (ou (x,y))

$$u = r \cos \phi$$

$$v = r \sin \phi$$

Exemple: un vecteur de direction 155 et de plongée 60 aura comme coordonnées:

i. aires égales:

on calcule:

$$r = \sqrt{2} \sin\left(\frac{90 - 60}{2}\right) = 0.366$$

$$\phi = 90 - 155 = -65$$

$$u = 0.366 * \cos(-65) = 0.1547$$

$$v = 0.366 * \sin(-65) = -0.3317$$

ii. angles égaux:

on calcule

$$r = \tan\left(\frac{90 - 60}{2}\right) = 0.2679$$

$$\phi = 90 - 155 = -65$$

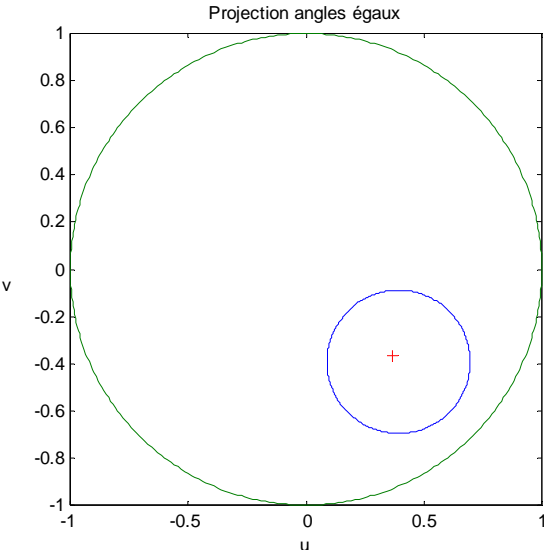
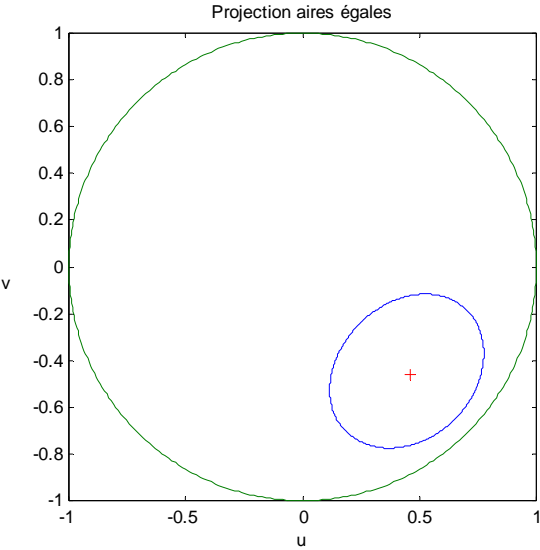
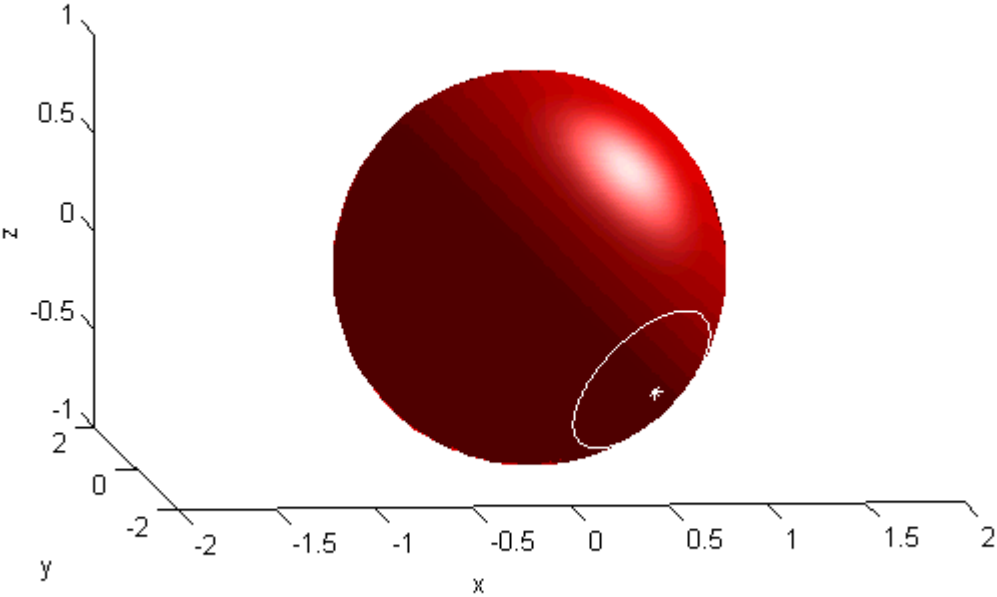
$$u = 0.2679 * \cos(-65) = 0.1132$$

$$v = 0.2679 * \sin(-65) = -0.2428$$

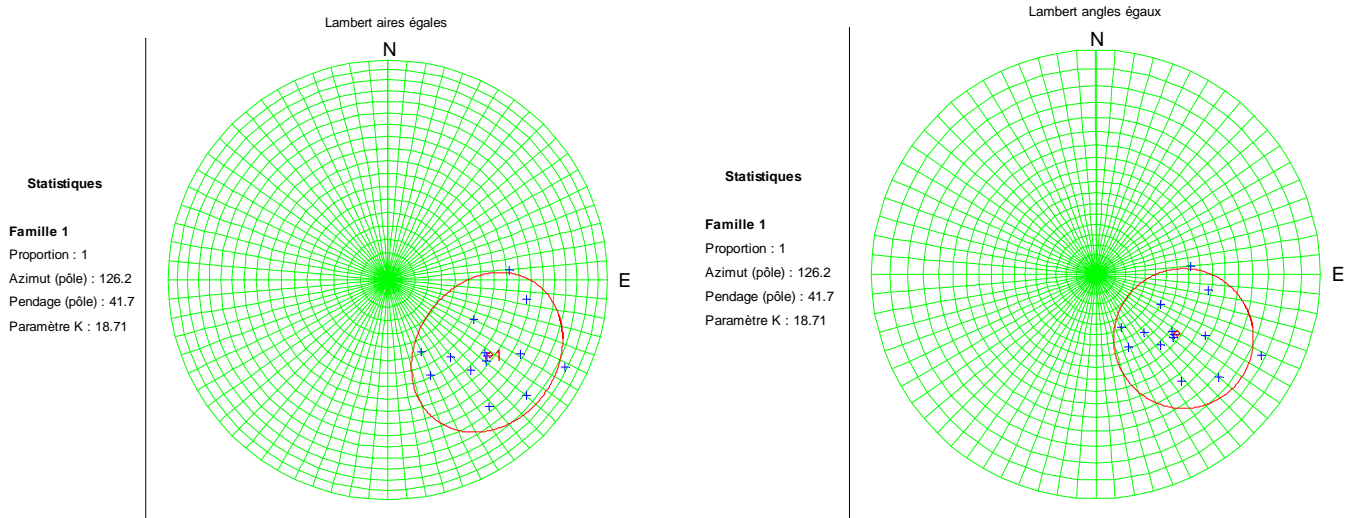
Quelques exemples: le tableau suivant montre les coordonnées aires égales et angles égaux obtenus pour quelques vecteurs particuliers.

Azimut	Plongée	Aires égales		Angles égaux	
		u	v	u	v
270	0	-1	0	-1	0
120	60	0.317	-0.183	0.232	-0.134
40	80	0.079	0.094	0.056	0.067
320	20	-0.521	0.621	-0.450	0.536
195	80	-0.032	-0.119	-0.023	-0.085
40	90	0	0	0	0

Exemple de projections: pôles se situant sur un petit cercle sur la sphère:



Exemple, un groupe de 14 joints modélisés par une loi de Fisher et représentés en projections à aires égales et à angles égaux:



Plutôt que d'utiliser un canevas polaire comme celui précédent, il est courant en géomécanique et en géologie structurale de représenter les grands cercles passant par l'axe N-S (méridiens) et les petits cercles perpendiculaires à l'axe N-S, Ceci donne les canevas de Schmidt (aires égales) ou de Wulff (angles égaux).

