Variance de blocs et variance de dispersion

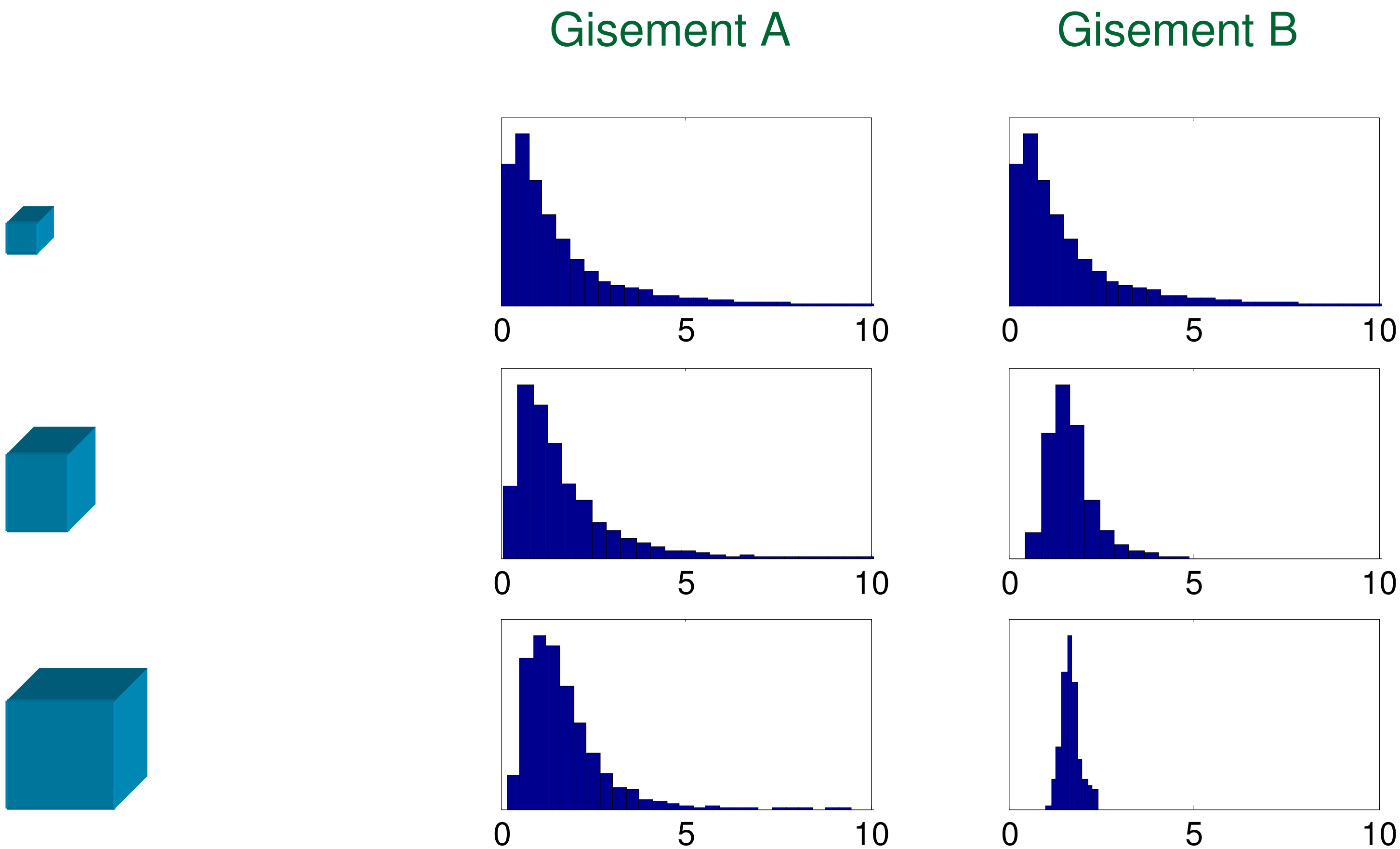
Automne 2003

Plan

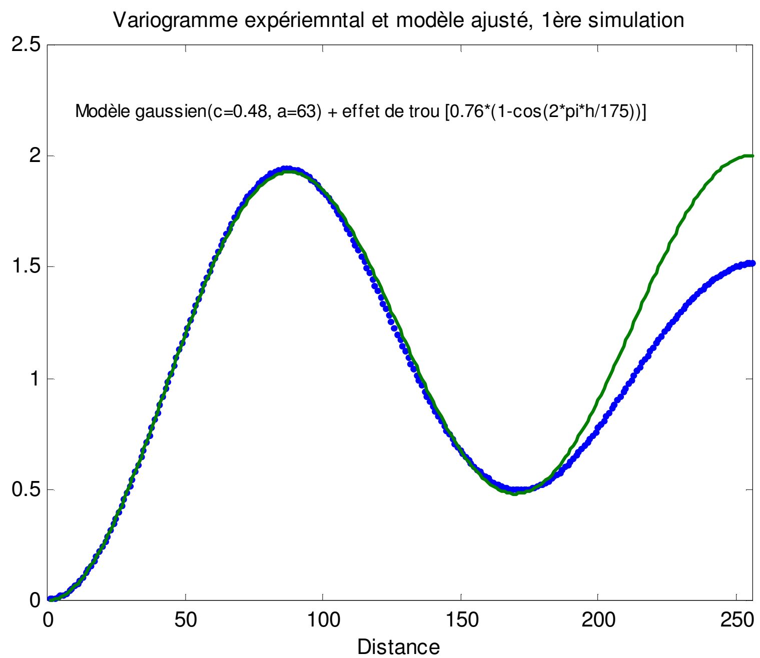
- Effet support (rappel)
- Variance de bloc et propriétés
- Variance de dispersion et propriétés
- Comment calculer et exemples
- Homogénéité du minerai
- Règle simple
- Effet de pépite et variance de dispersion

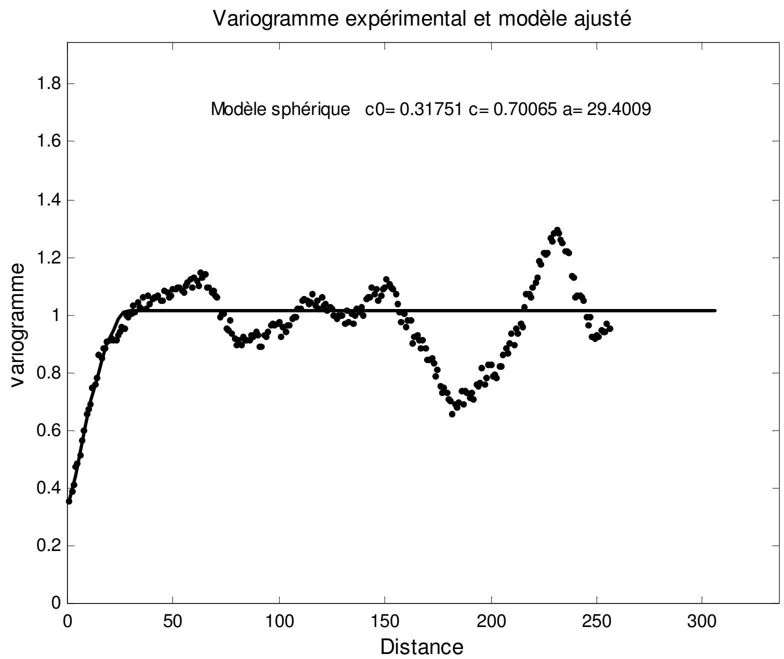
- Covariances et variogramme de blocs

Rappel: effet support



Exemple 1D

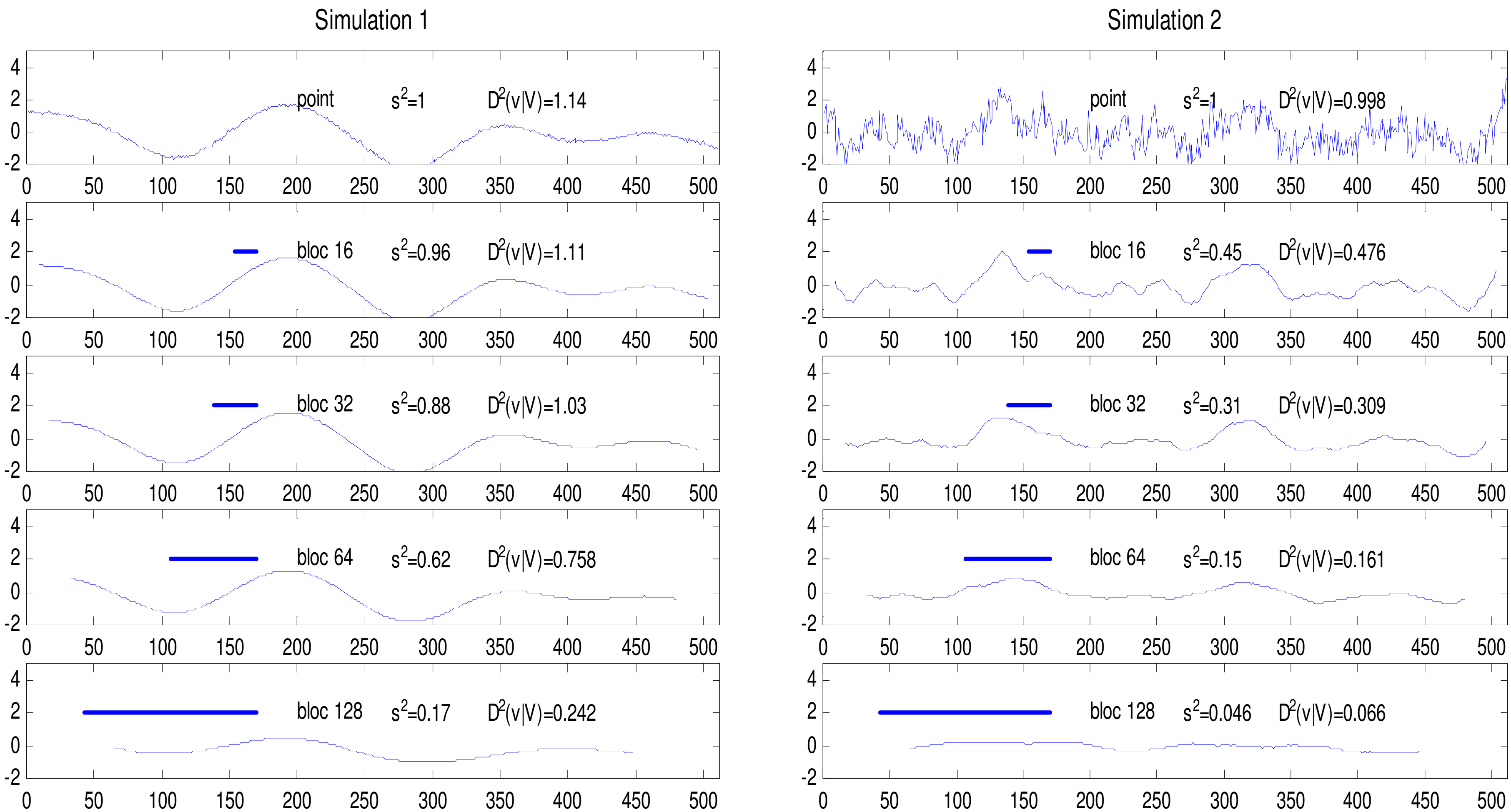




Simulation 1

Simulation 2

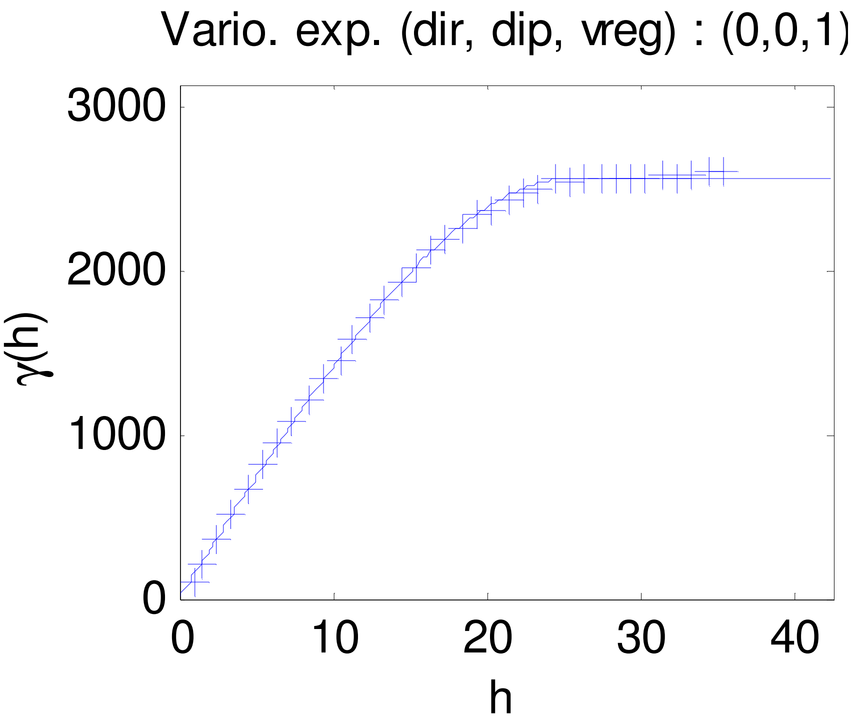
Simulation 1 + continue que simulation 2

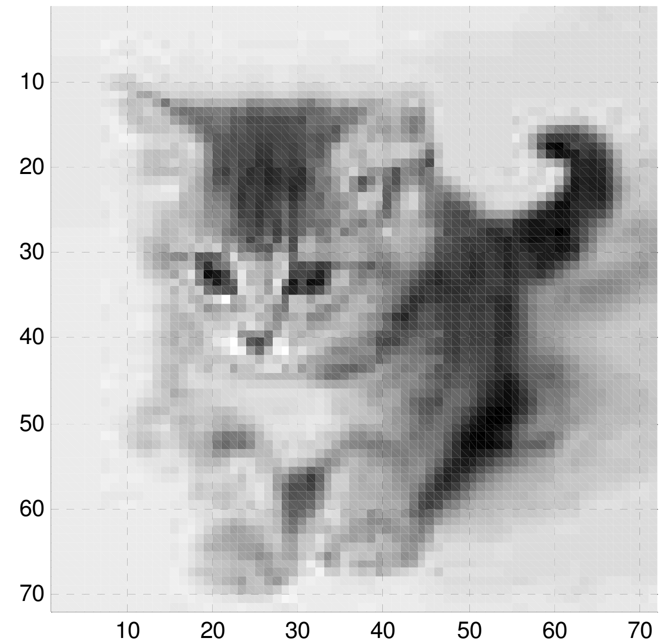


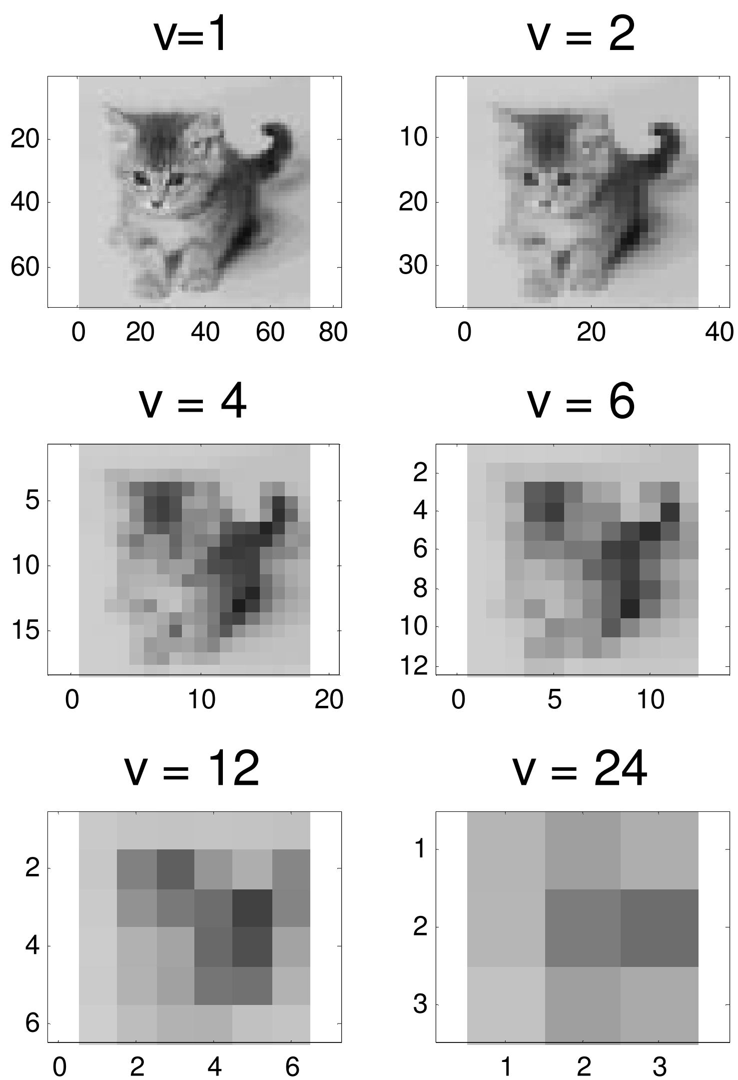
a)Variations de petite échelle disparaissent rapidement

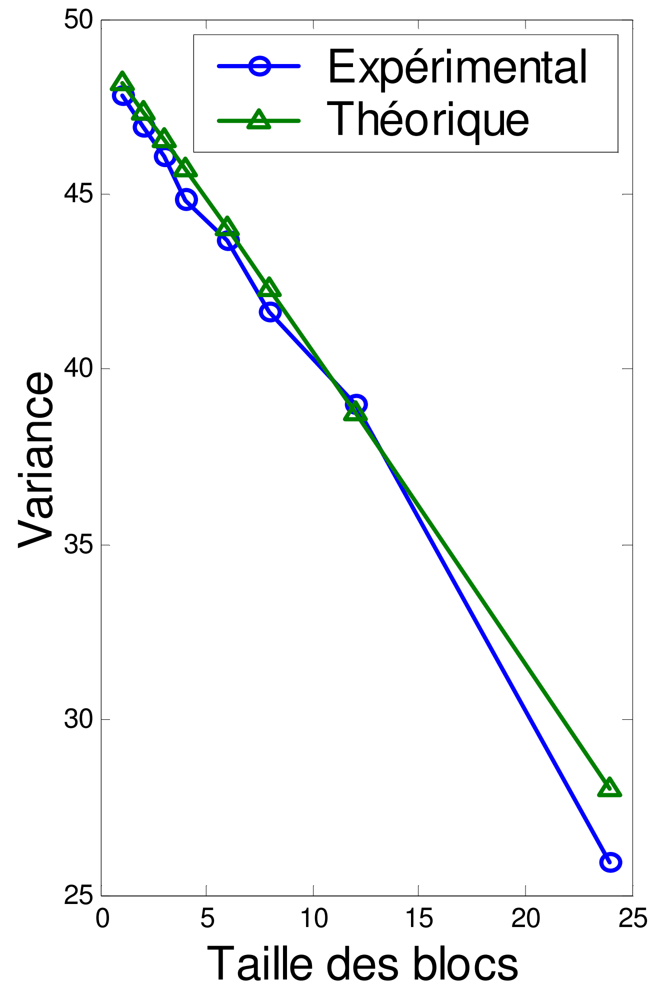
b)Variations de grande échelle persistent davantage pour un processus très continu

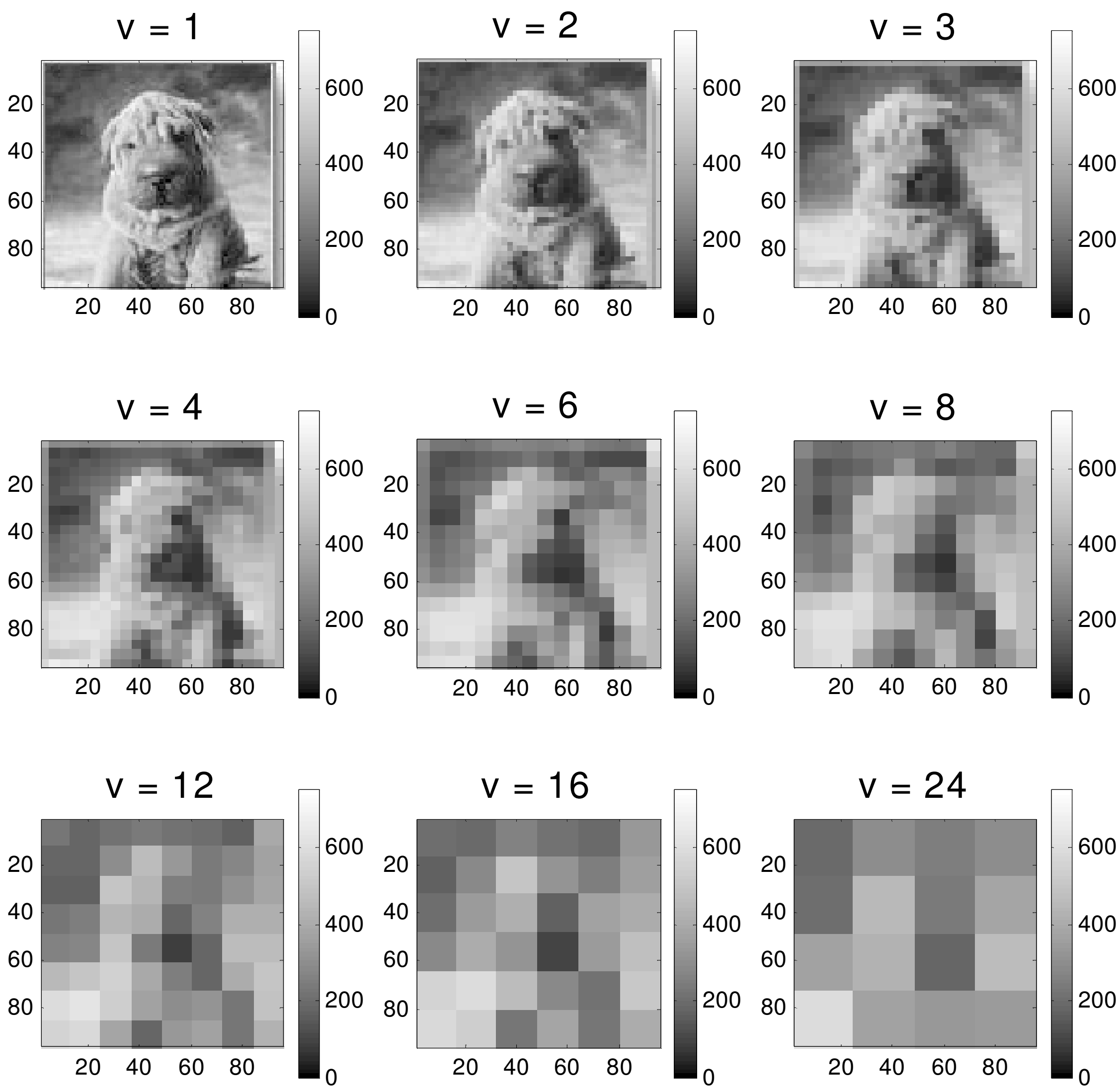
c) On peut prédire théoriquement les valeurs obtenues expérimentalement

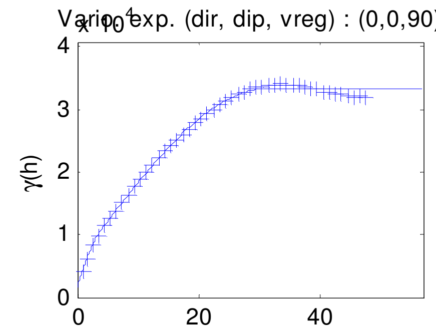

Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (0,0,1)
3000
2000
1000
0
γ(h)
0
10
20
30
40
h

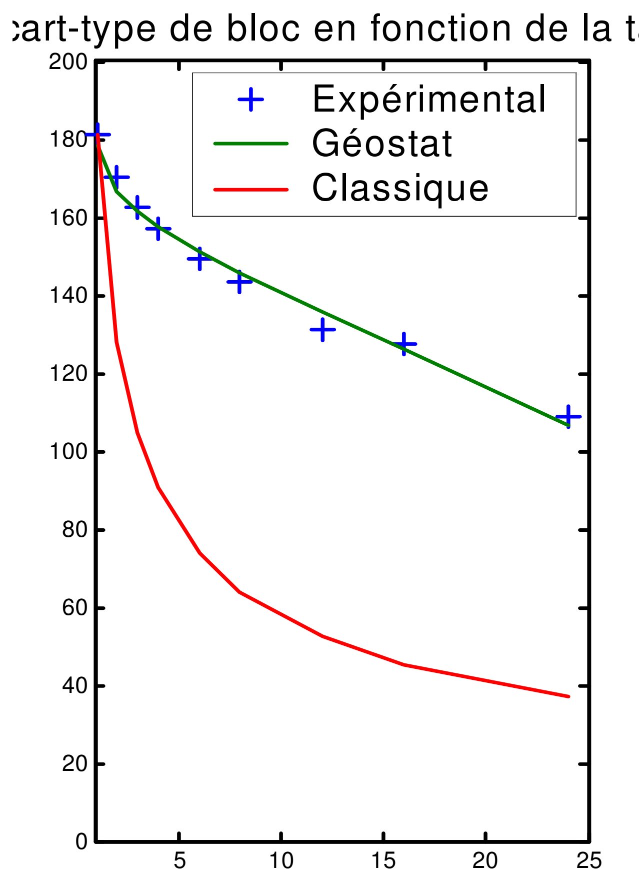

10
20
30
40
50
60
70
10
20
30
40
50
60
70

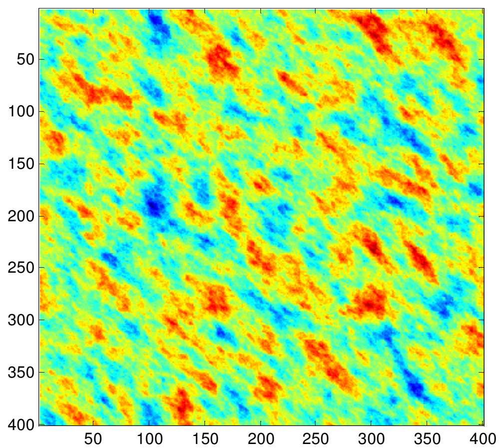

v=1
v = 2
v = 3
v = 4
v = 6
v = 8
v = 12
v = 24

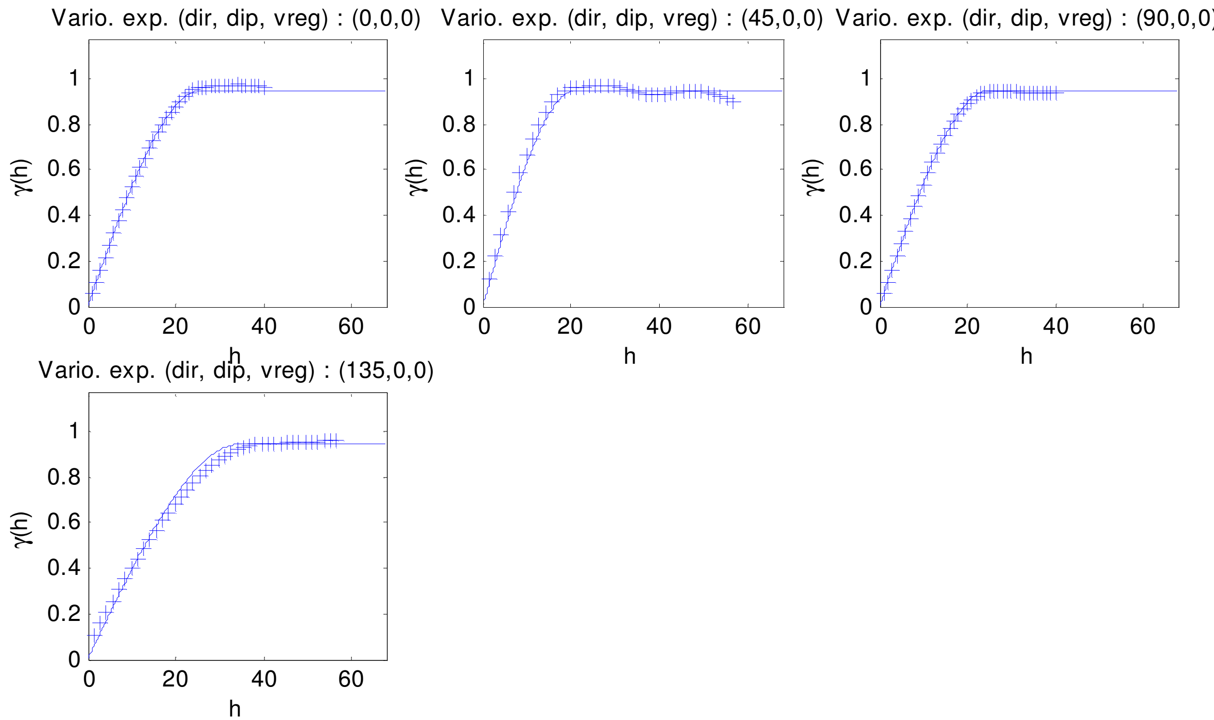

Expérimental
Théorique
Variance
Taille des blocs

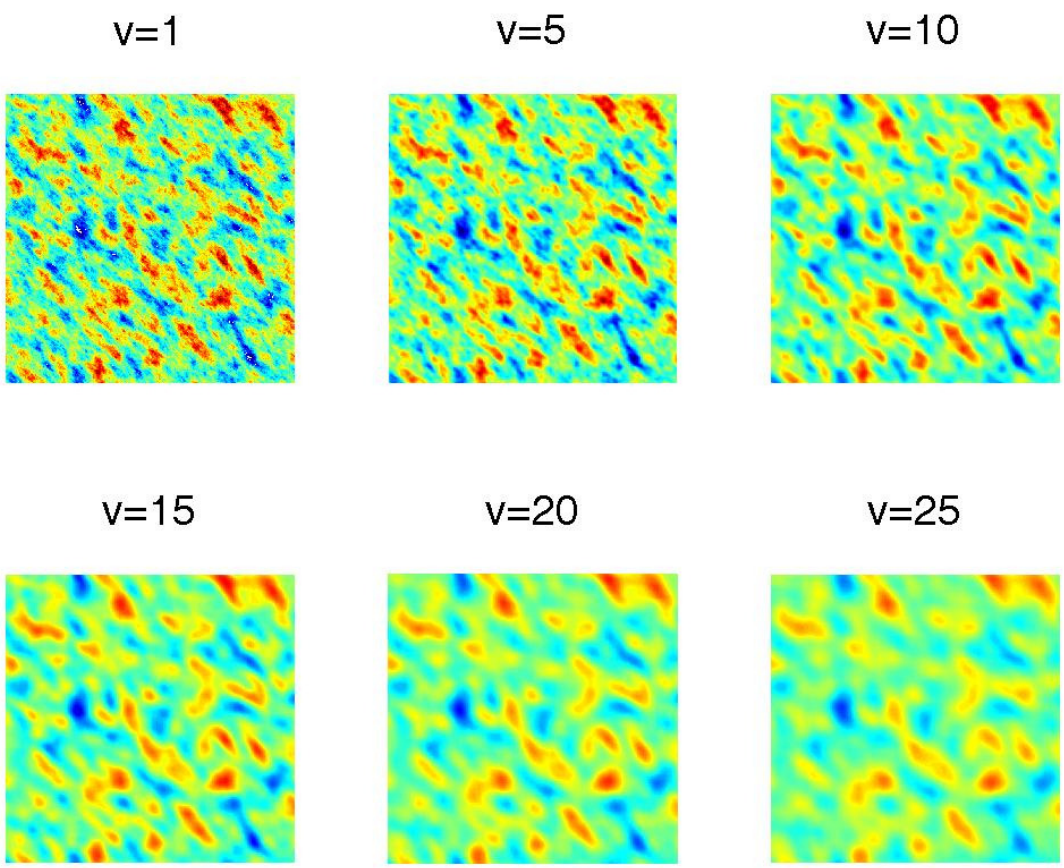

v = 1
v = 2
v = 3
v = 4
v = 6
v = 8
v = 12
v = 16
v = 24

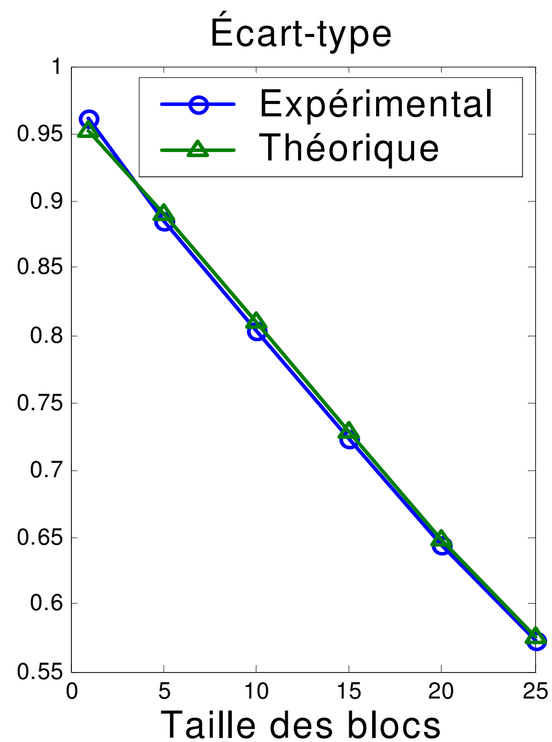

Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (0,0,90)
x 10^4
γ(h)


cart-type de bloc en fonction de la ta
Expérimental
Géostat
Classique


50
100
150
200
250
300
350
400


Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (0,0,0)
Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (45,0,0)
Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (90,0,0)
Vario. exp. (dir, dip, vreg) : (135,0,0)
γ(h)
h


v=1
v=5
v=10
v=15
v=20
v=25


Écart-type
Expérimental
Théorique
Taille des blocs
1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0
5
10
15
20
25

Variance de bloc

Physiquement, la teneur d'un bloc est la teneur moyenne des points qu'il renferme (si densité constante)

$$Z_v(x) = \frac{1}{v} \int_v Z(y)\, dy$$

$$Var(Z_v(x)) = \sigma_v^2 = E[(Z_v(x) - m)^2]$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{v}\int_v Z(y)\,dy - m\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{v^2}\int_v \int_v (Z(y_1) - m)(Z(y_2) - m)\, dy_1\, dy_2\right]$$

$$= \frac{1}{v^2}\int_v \int_v E\left[(Z(y_1) - m)(Z(y_2) - m)\right] dy_1\, dy_2$$

$$= \frac{1}{v^2}\int_v \int_v Cov(Z(y_1), Z(y_2))\, dy_1\, dy_2$$

$$\boxed{= \overline{C}(v,v)}$$

$$\sigma_v^2 = \overline{C}(v,v) = \sigma^2 - \overline{\gamma}(v,v)$$

$$\text{si } v \to 0 \qquad \sigma_v^2 \to \sigma^2$$

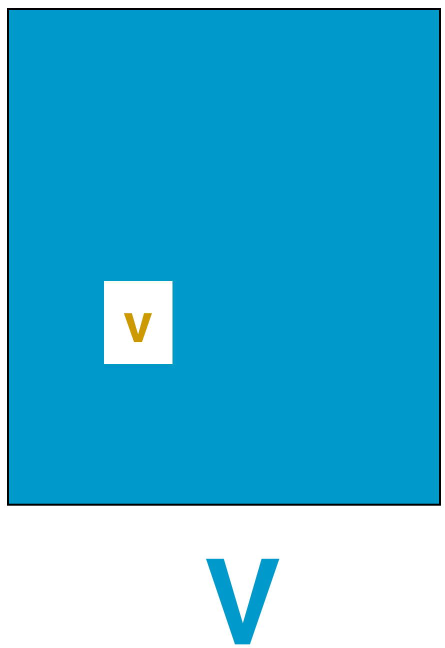
$$\text{si } v \to \infty \qquad \sigma_v^2 \to 0$$

$$\text{si } v \uparrow \qquad \sigma_v^2 \downarrow$$

-Il suffit de connaître le variogramme pour pouvoir calculer la variance de tout bloc

-Pour que la variance de bloc existe, il faut que le variogramme montre un palier

Variance de dispersion

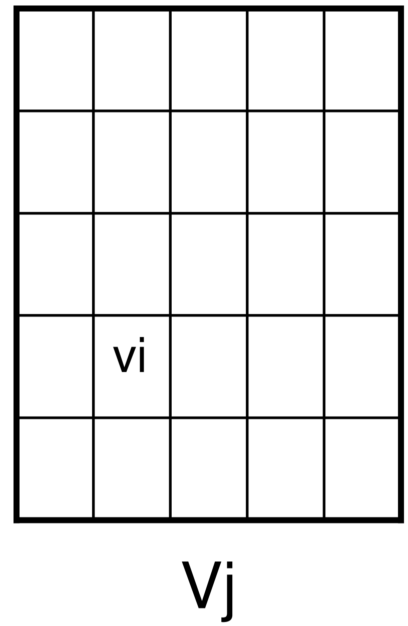


Jusqu'à quel point la teneur dans le petit bloc diffère de celle du grand bloc ?

Approche discrète

$$Z(V_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z(v_i)$$

$$s^2_{v_i \mid V_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(Z(v_i) - Z(V_j) \right)^2$$

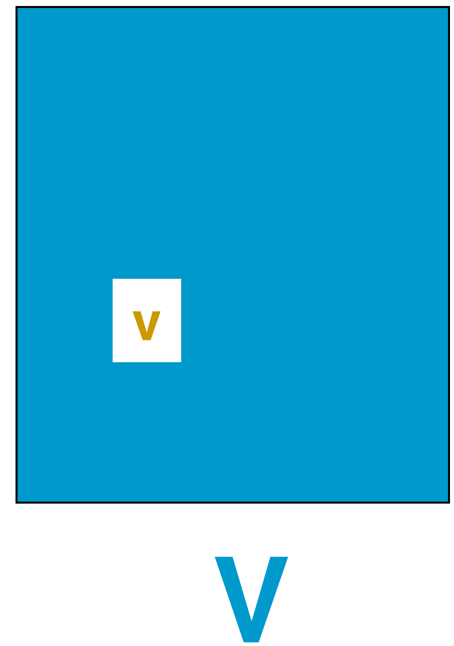


$$D^2(v \mid V) = E\left[s^2_{v_i \mid V_j} \right] = \sigma_v^2 - \sigma_V^2$$

Approche continue

v balaye toutes les positions possibles dans V.

$$D^2(v|V)=E\left[\frac{1}{V}\int_V (Z(v(x))-Z_V)^2\,dx\right]=\sigma_v^2-\sigma_V^2$$



Il s'agit d'une mesure moyenne pour un ensemble théoriquement infini de blocs v et V

Expressions équivalentes

$$D^2\ (v|V) = \sigma_v^2 - \sigma_V^2$$

$$D^2\,(v|V) = \overline{C}(v,v) - \overline{C}(V,V)$$

$$= \overline{\gamma}(V,V) - \overline{\gamma}(v,v)$$

=> Contrairement à la variance de bloc, la variance de dispersion est définie même si le variogramme ne montre pas de palier

Propriétés de la variance de dispersion

$$v \rightarrow 0 \qquad D^2(v|V) \rightarrow \bar{\gamma}(V,V)$$

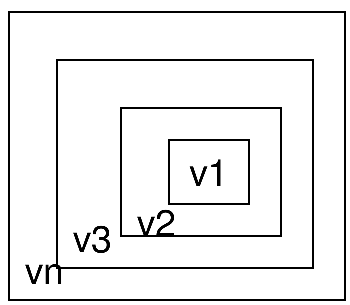
$$v \rightarrow V \qquad D^2(v|V) \rightarrow 0$$

$$V \rightarrow \infty \qquad D^2(v|V) \rightarrow \sigma_v^2$$

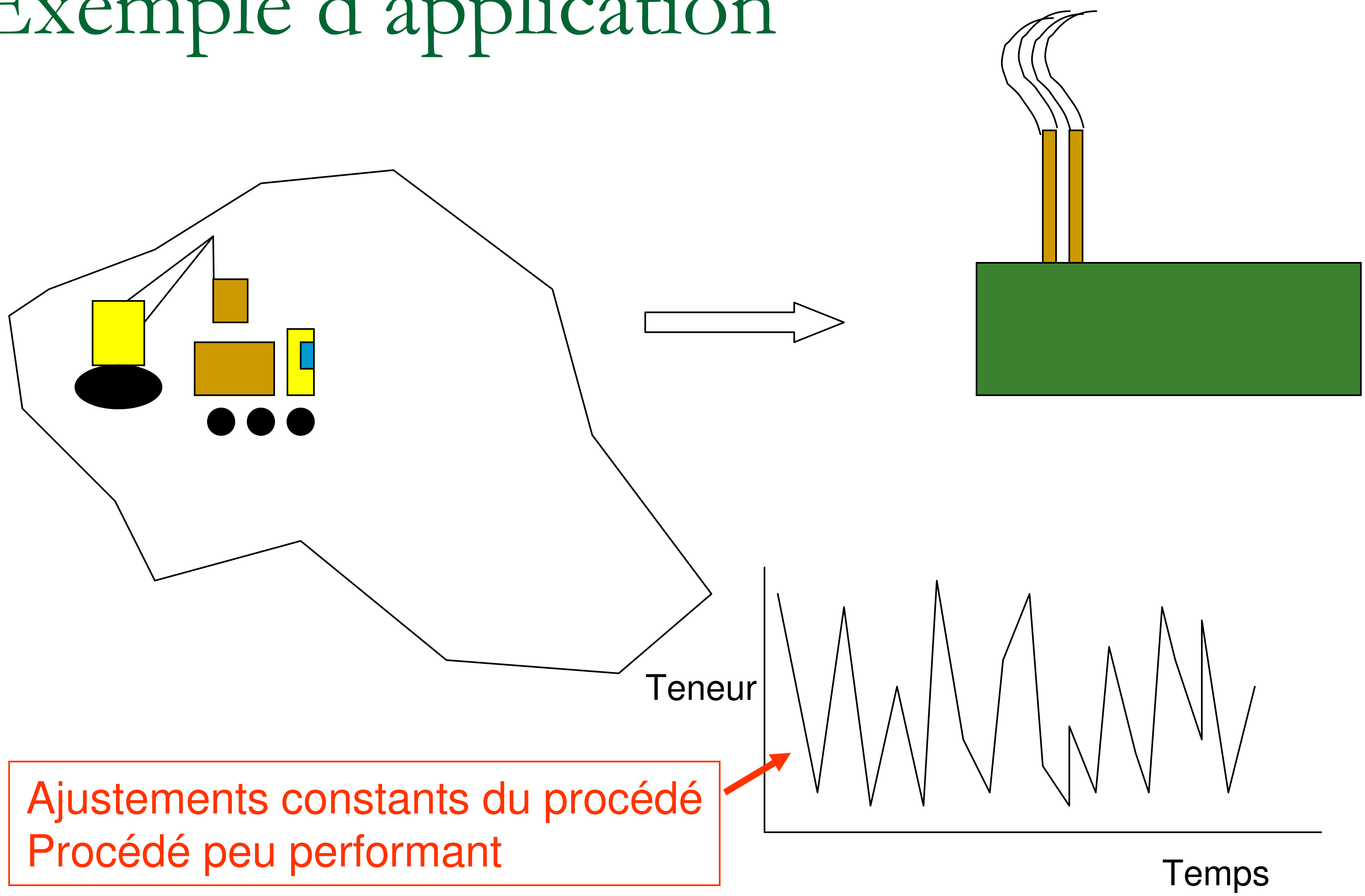
Règle d'additivité

Soit : $v_1<v_2....<v_{n-1}<v_n$ une série de volumes imbriqués les uns dans les autres, alors

$$D^2(v_1|v_n) = D^2(v_1|v_2)+ D^2(v_2|v_3)+........+D^2(v_{n-1}|v_n)$$

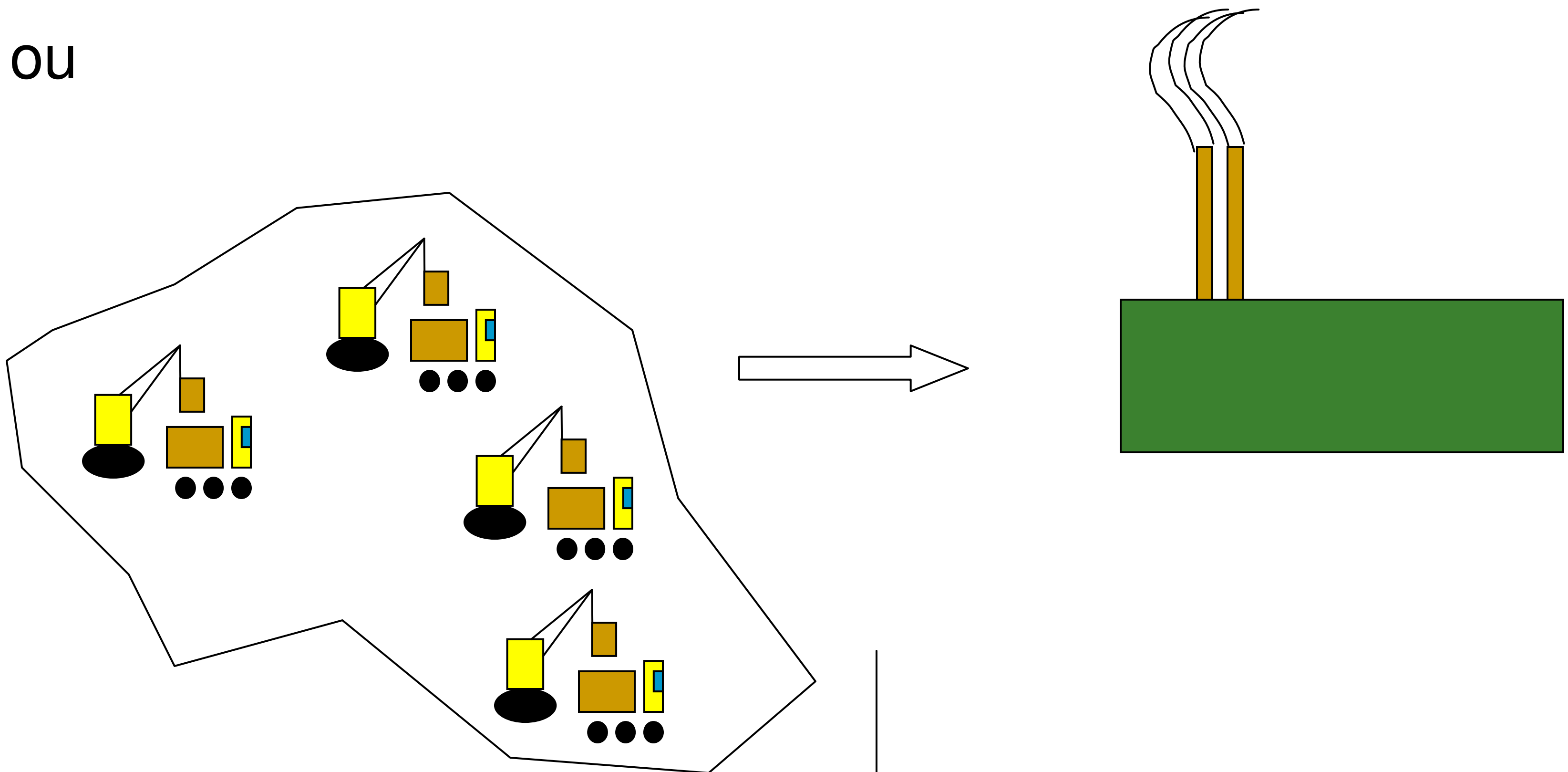


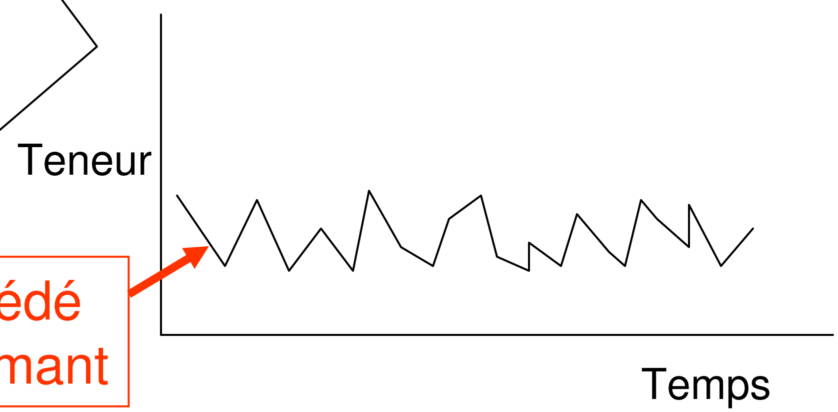
Exemple d'application



Ajustements constants du procédé
Procédé peu performant

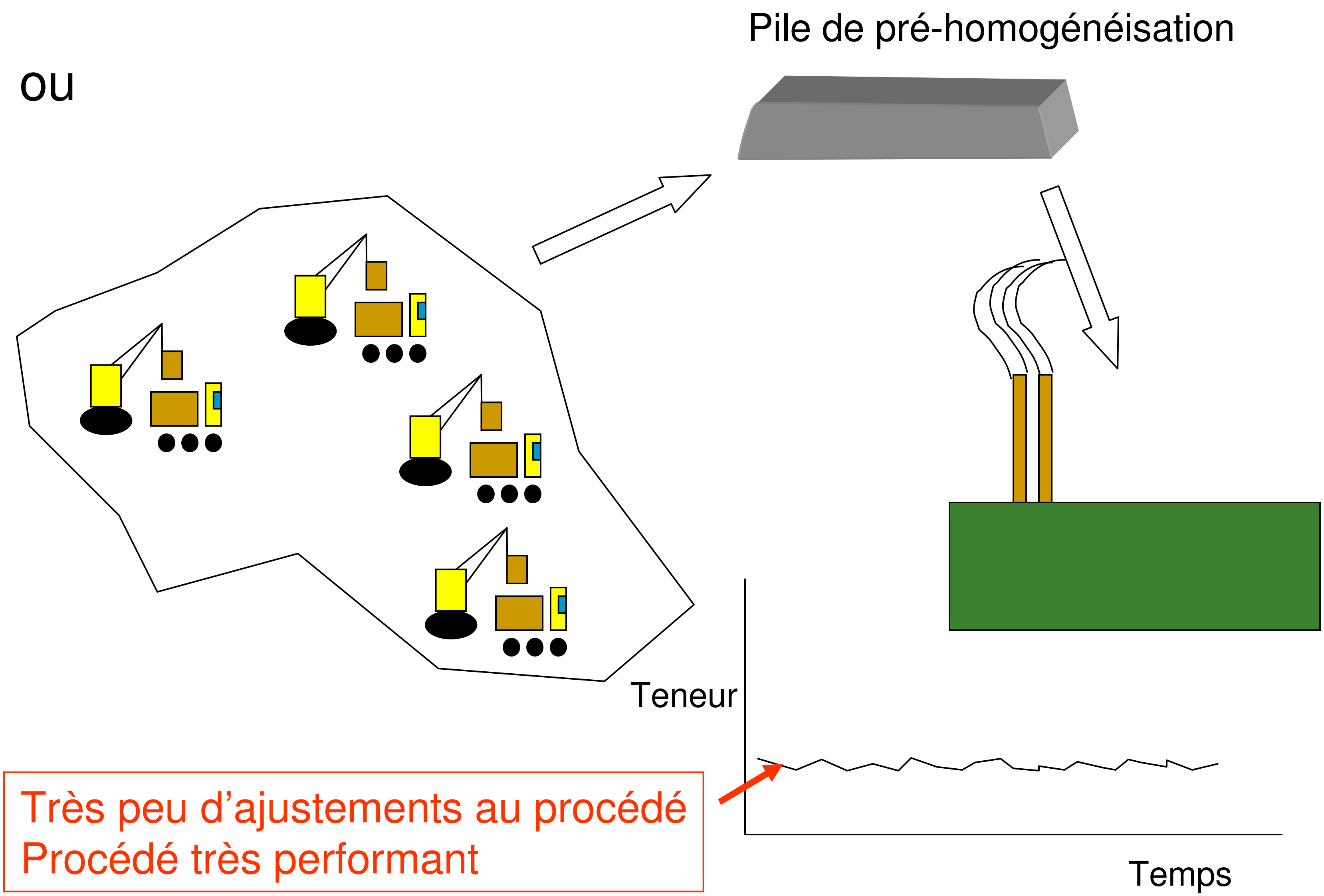
ou



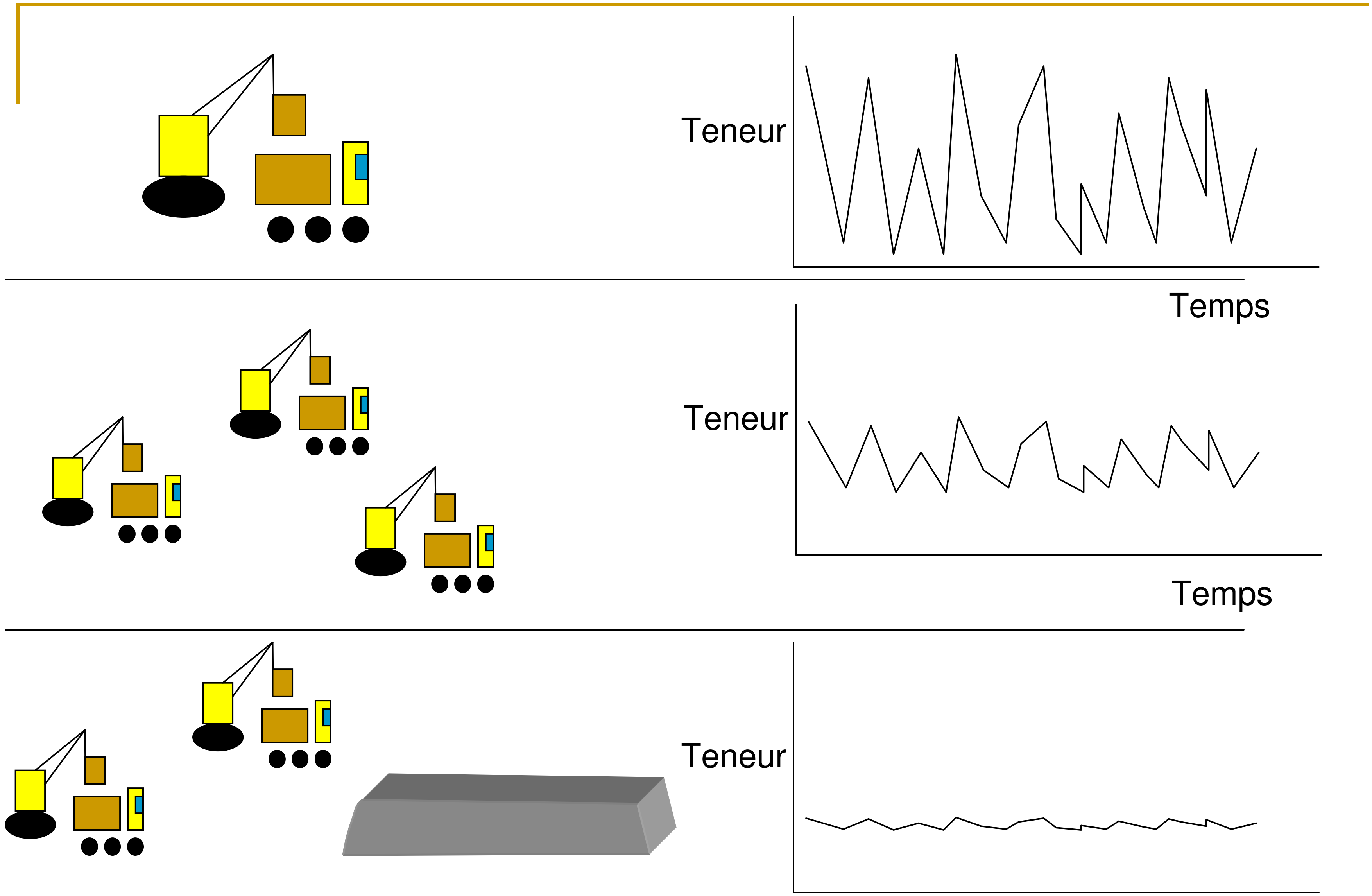


Ajustements modérés du procédé
Procédé moyennement performant

ou



Très peu d’ajustements au procédé
Procédé très performant

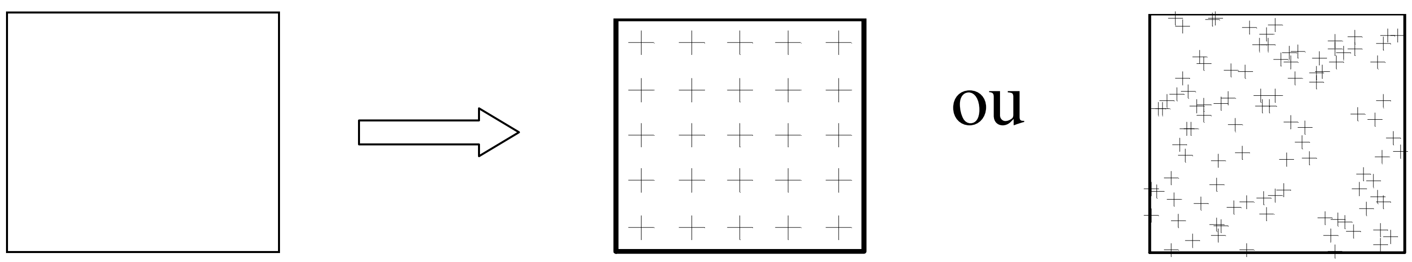


Le variogramme => variance de dispersion => prévoir ces courbes =>**design** de l’exploitation

Comment obtenir $\overline{C}(v,v)$ ou $\overline{\gamma}(v,v)$?

- 1D : analytique ou numérique
- 2D : abaques ou numérique
- 3D : abaques ou numérique

Numérique :



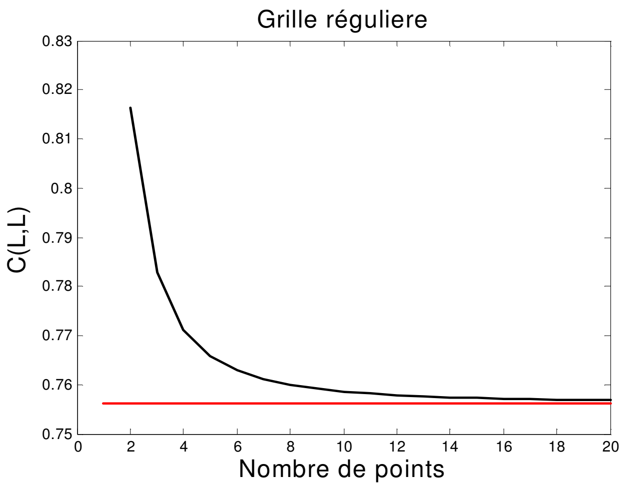
$$\frac{1}{v^2}\iint_{v,v} C(x,y)\,dxdy \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C(x_i, x_j)$$

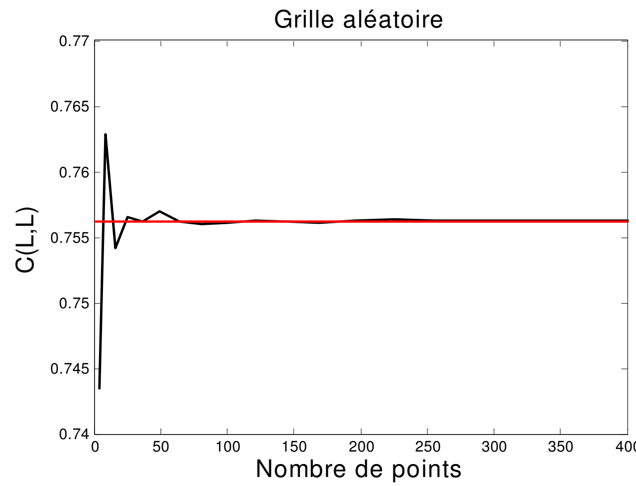
Exemple 1D

L=5

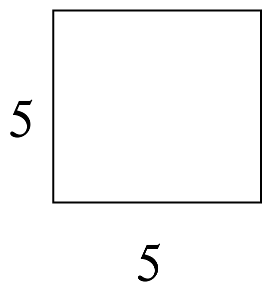
Variogramme sphérique, solution analytique (L<a): $\overline{C}(L,L)=\sigma^2\left(1-0.5\frac{L}{a}+0.05\left(\frac{L}{a}\right)^3\right)$

Avec a=10 et L=5 et σ^2=1, => $\overline{C}(L,L)=0.7562$



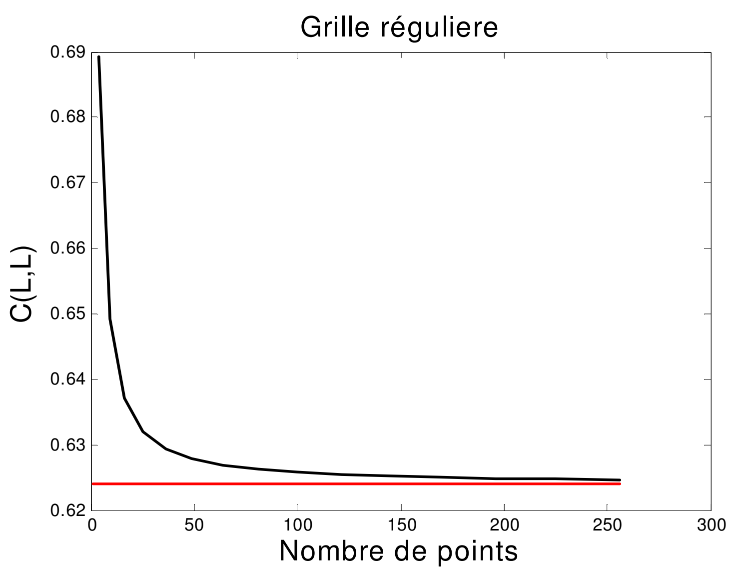


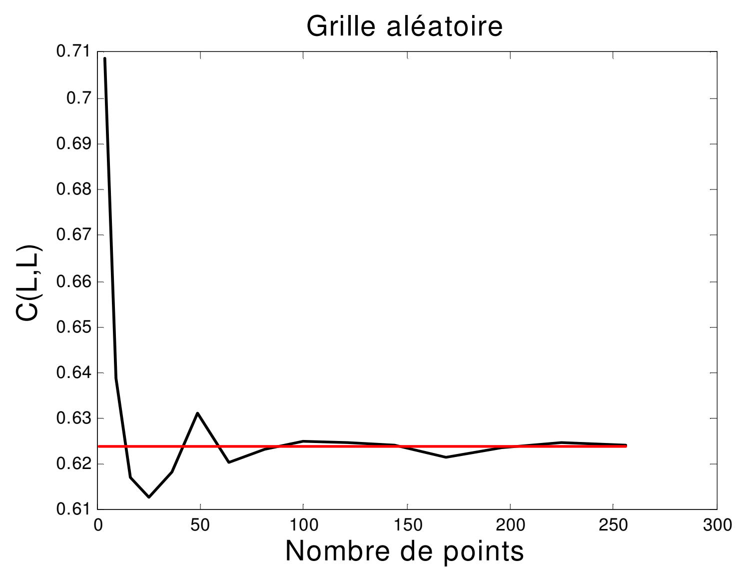
Exemple 2D



Sphérique a=10, C=1

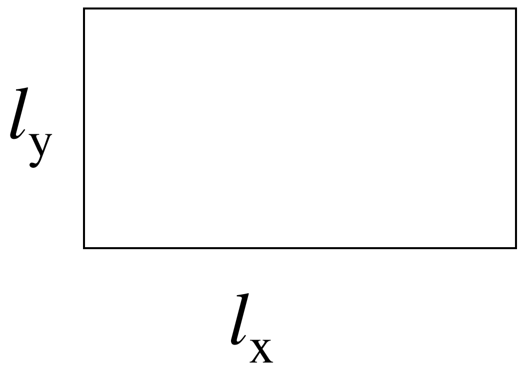
Sol. analytique: 0.624



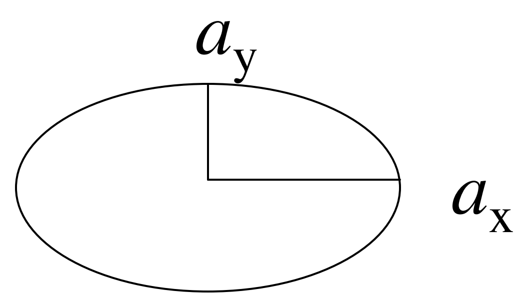


Abaques

Bloc 2D



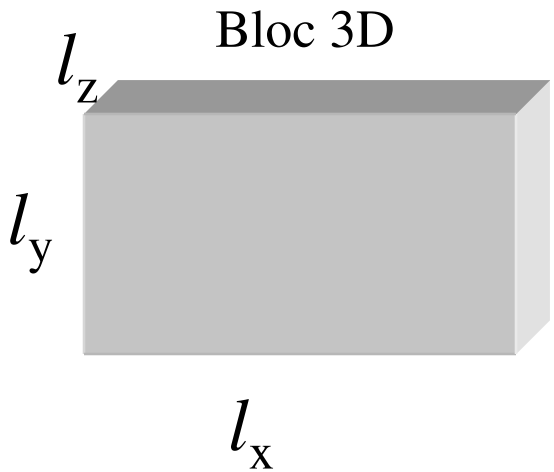
Variogramme, Sphérique, C=1



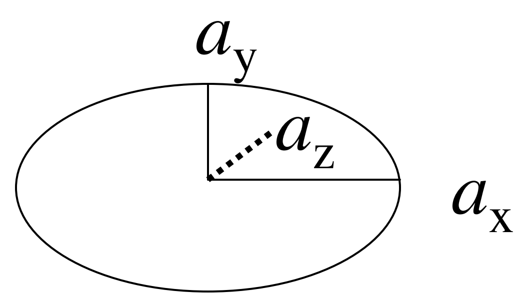
$$l_x \;//\; a_x$$

$$\bar{\gamma}(v,v) = F\left(\frac{l_x}{a_x}, \frac{l_y}{a_y}\right)$$

Abaques



Variogramme, Sphérique, C=1



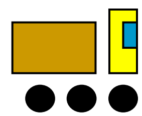
$l_x \;//\; a_x \qquad l_y \;//\; a_y \qquad l_z \;//\; a_z$ } 2 des trois rapports *l/a* sont égaux ($l/a = l_2/a_2$)

$$\bar{\gamma}(v,v) = F\left(\frac{l_1}{a_1}, \frac{l_2}{a_2}\right)$$

Exemple

1 semaine : bloc 20 x 10 x 10

1 camion : bloc 5 x 5 x 4



Variog. Sphérique, ax = 30, ay = 15, az = 12, C=20

Variance de dispersion de la teneur d'un camion au cours d'une semaine ?

$$D^2(v|V) = \sigma_v^2 - \sigma_V^2 = \bar{\gamma}(V,V) - \bar{\gamma}(v,v) = C*(F(V,V) - F(v,v))$$

Ratios:

V: 20/30 10/15 10/12 => F(5/6, 2/3) => 0.639 (abaque #5)

v: 5/30 5/15 4/12 => F(1/6,1/3) => 0.278

$D^2(v|V) = 20*(0.639-0.278) = 7.22$

Problème d'homogénéité du minerai

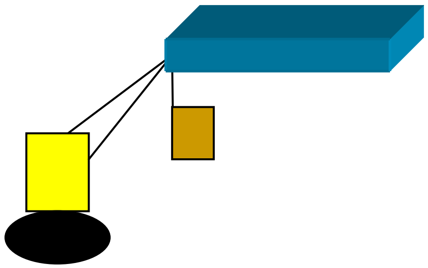
Supposons

- production quotidienne de 3 Kt => volume de 1000 m3 (20 x 10 x 5)
- ajustements quotidiens au procédé
- exploitation en bancs de 5 m
- homogénéité cruciale (ex ciment) => minimiser fluctuations de la teneur quotidienne sur 1 mois (bloc de 120 x 50 x 5)
- variogramme connu, modèle 2D (sphérique, ax=ay=50 m, C=5%^{2}).

Q1- Quel est l'impact de fonctionner à 2 pelles espacées plutôt qu'une seule?

Q2- Une pile de pré-homo de capacité de 15 Kt (bloc de 50 x 20 x 5) permet quelle homogénéité ?

Une pile de 90 Kt (bloc de 120 x 50 x 5)?

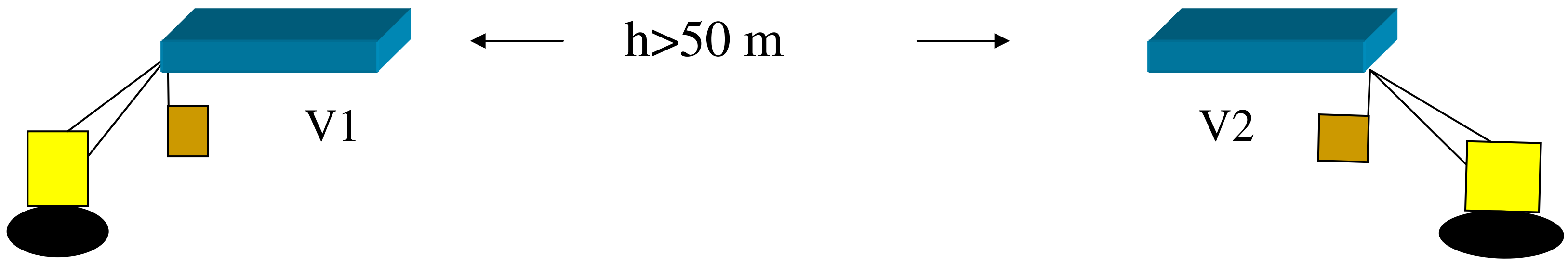


v = 1jour

$V=120 \times 50 \times 5$; $v=20 \times 10 \times 5$;

$$D^2(v|V) = 5\%^2 * (F(120/50,50/50)-F(20/50,10/50))$$

$$= 5\%^2 * (0.83-0.24) = 2.95\ \%^2$$



V=V1+V2 V1=V2

Z(V)=1/2(Z(V1)+Z(V2))

Var(Z(V))=1/4 [Cov(Z(V1),Z(V1))+Cov(Z(V1),Z(V2))+Cov(Z(V2),Z(V1))+Cov(Z(V2),Z(V2))]

=1/4[2 Var(Z(V1)) +2 Cov(Z(V1),Z(V2))= Var(Z(V1))/2

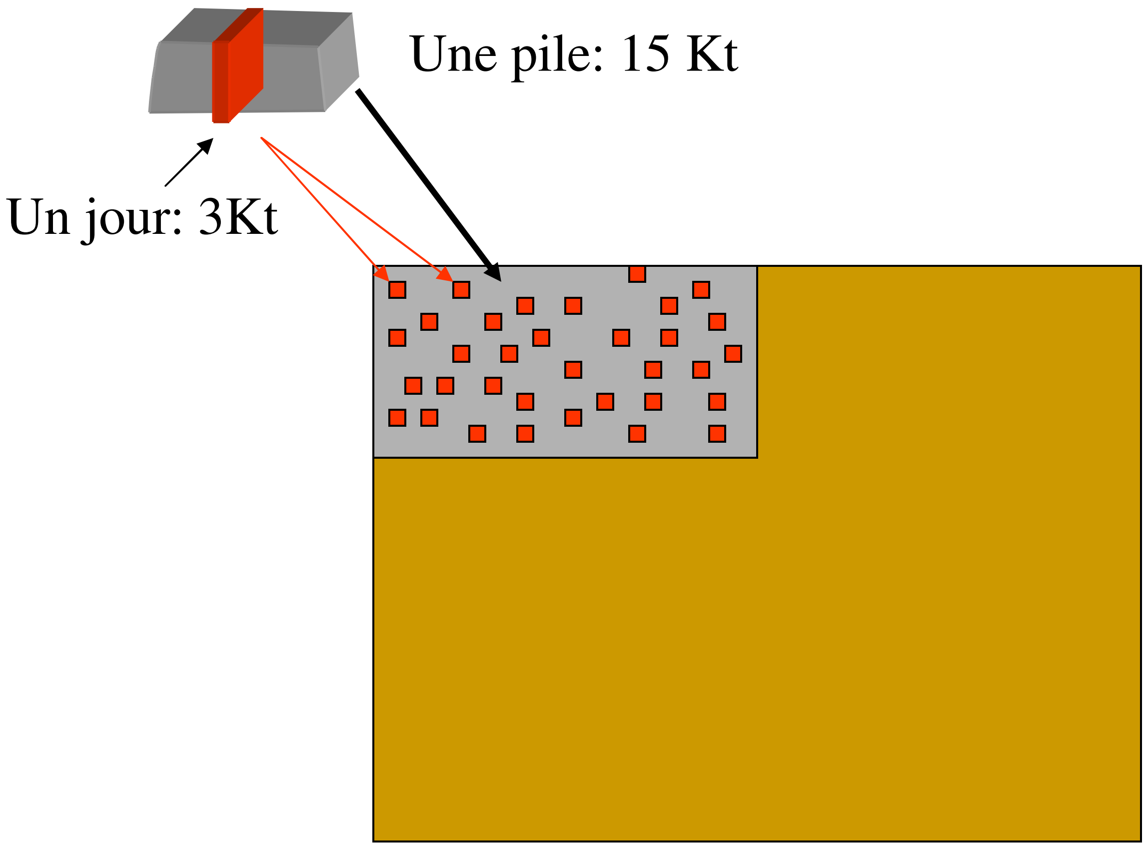
Même raisonnement s'applique pour le petit bloc « v »

Donc, $D^2(v|V) = D^2(v1|V1)/2$

On suppose V1=60 x 50 x 5 et v1=10 x 10 x 5

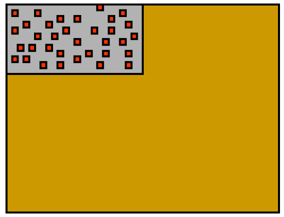
$D^2(v|V)$ =5*(F(60/50,50/50)-F(10/50,10/50))/2

=5*(0.70-0.16)/2= 1.35



Un mois : 90 Kt

$$D^2(\text{jour}|\text{mois}) = D^2(\text{jour}|\text{pile}) + D^2(\text{pile}|\text{mois})$$



$D^2(\text{jour}|\text{pile}) \approx 0$ pourquoi ?

$\Rightarrow D^2(\text{jour}|\text{mois}) \approx D^2(\text{pile}|\text{mois})$

La pile est une façon simple d'accroître le volume que « v » représente
Plus la pile est de grande capacité, plus le « v » représenté sera grand

Pile 15 Kt : 50 x 20 x 5

$D^2(v|V)=5(0.83-0.52)=1.55$

Pile 90 Kt : v. pile = v. mois =>

$D^2(v|V) \approx 0$

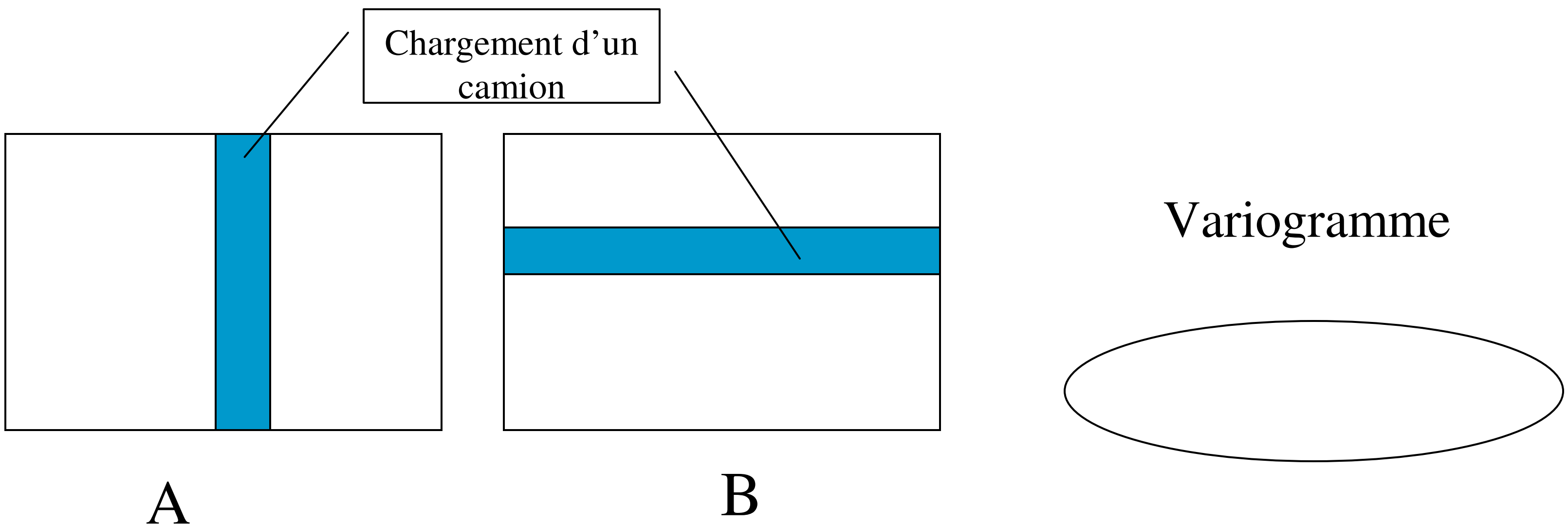
Résumé

Méthode	$D^2(v\|V)$
1 pelle	2.95
2 pelles	1.35
Pile 15 Kt	1.55
Pile 90 Kt	≈ 0

La solution simple 2 pelles est + performante qu'une pile mal « designée » et est probablement + économique

Une règle simple

Pour avoir la teneur d'un volume unitaire (v) la plus homogène possible sur une période de temps T (correspondant à V>>v), il faut opérer de façon à inclure le plus de variations possibles à l'intérieur du volume unitaire v



Les teneurs des camions en A seront plus semblables qu'en B

L’effet de pépite et les variances de bloc

A- On suppose le variogramme ponctuel connu

Deux cas de figure

Microstructure => l’effet de pépite est entièrement filtré par le passage point-bloc

Erreur de mesure, de localisation, d’analyse => ne fait pas partie du phénomène étudié

Dans les 2 cas l’effet de pépite n’intervient pas dans les calculs de variance de bloc et variance de dispersion

L'effet de pépite et les variances de bloc

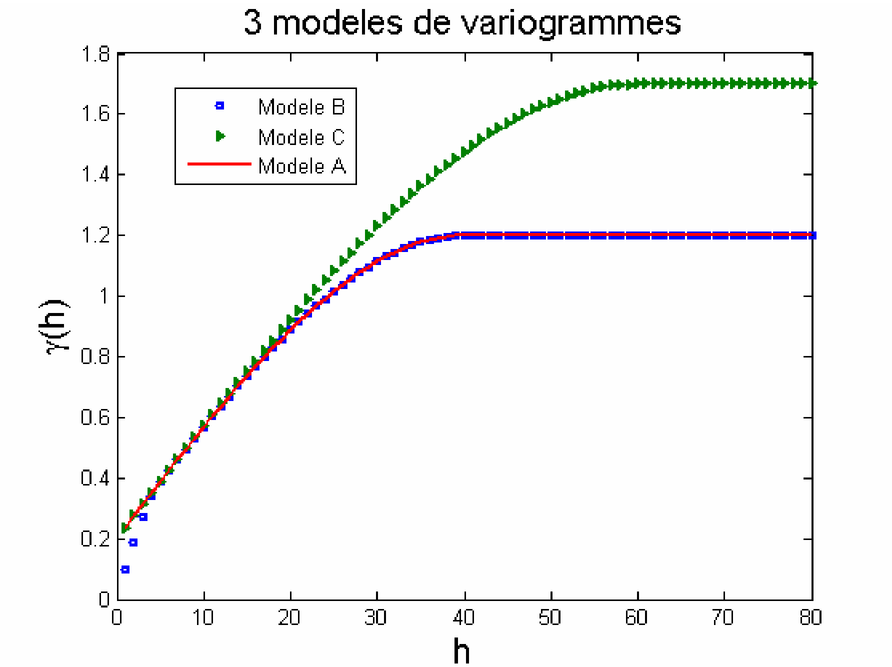
B- On suppose le variogramme défini sur un support non-ponctuel

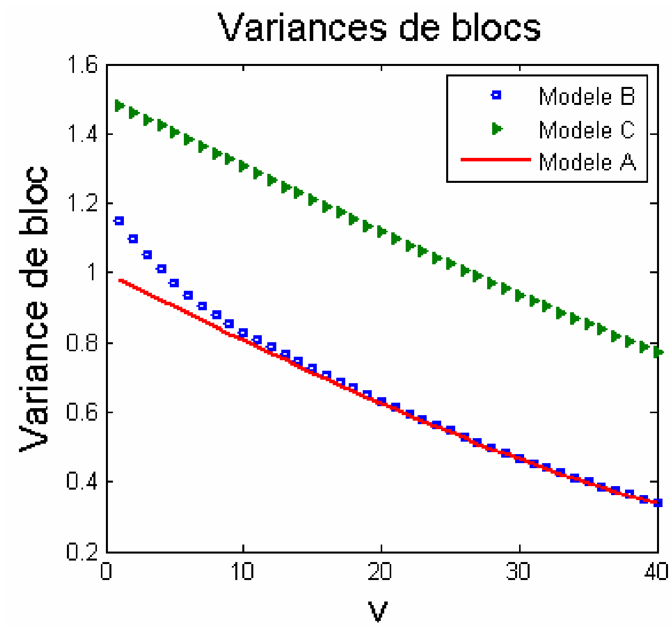
Deux cas de figure

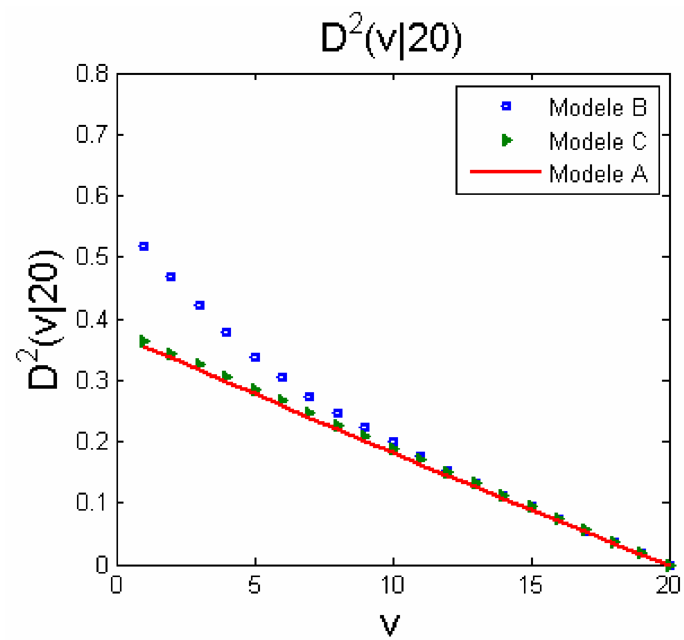
- Microstructure => l'effet de pépite est inversement proportionnel au rapport des volumes : $v1<v2 \quad C_{0,v2}/ C_{0,v1} = v1/v2$
- Erreur de mesure, de localisation, d'analyse => ne fait pas pas partie du phénomène étudié

Dans le 2e cas l'effet de pépite n'intervient pas dans les calculs de variance de bloc et variance de dispersion. Dans le 1er cas il intervient.

L'influence du modèle







Différence à l'origine => impact pour les petits blocs

Différence à grande distance => peu d'impact sur la variance de dispersion, impact important sur la variance de bloc.

Covariances et variogrammes de blocs

Variance de bloc => Cov(Zv(x),Zv(x)).

Covariance de blocs => Cov(Zv(x),Zv(x+h))

Variogramme de blocs => 1/2Var(Zv(x)-Zv(x+h))

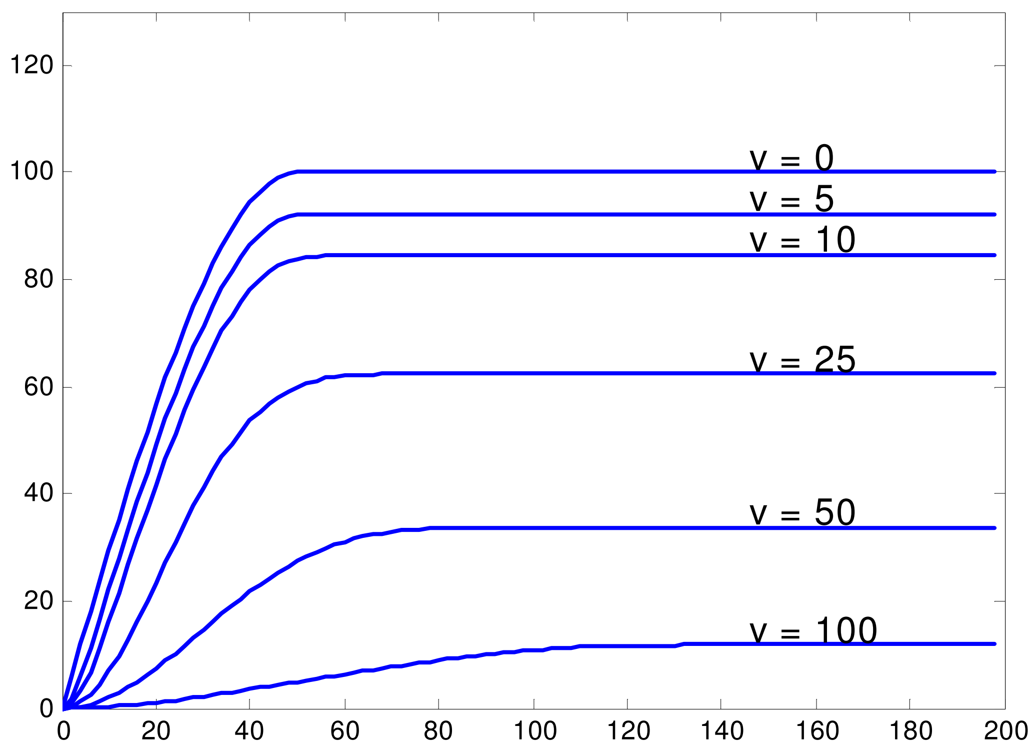
=> Se calcule tous à partir du variogramme ponctuel

-Le variogramme de blocs est + lisse à l'origine que le variogramme ponctuel

-Son palier est la variance de blocs

Exemple

Var. ponctuel: Sphérique, a=50, C=100



-Le modèle change (plus un sphérique)

- Palier diminue

- Portée augmente