Application du krigeage au calcul des ressources

Automne 2003

Plan

- Prédiction des ressources avec estimés actuels; estimés futurs
- Fonctions de récupération : lois normale et lognormale
- Influence de la variance sur le profit conventionnel
- Exemple détaillé
- L'apport de la géostatistique pour la définition des catégories de ressources

Sélection libre des blocs : chaque bloc rentable est sélectionné indépendamment de sa position par rapport à d'autres blocs et des contraintes minières.

Profit conventionnel : on suppose que la teneur de coupure représente la teneur nécessaire pour payer pour l'ensemble des coûts variables liés à l'exploitation de ce bloc

$$P(c) = T(c) * \left[m(c) - c \right]$$

P(c) : profit conventionnel pour la t.c. « c »

T(c) : tonnage de minerai à la t.c. « c »

m(c) : teneur du minerai sélectionné

Deux façons de prédire les ressources

1- Appliquer la (les) teneur de coupure directement aux valeurs krigées;

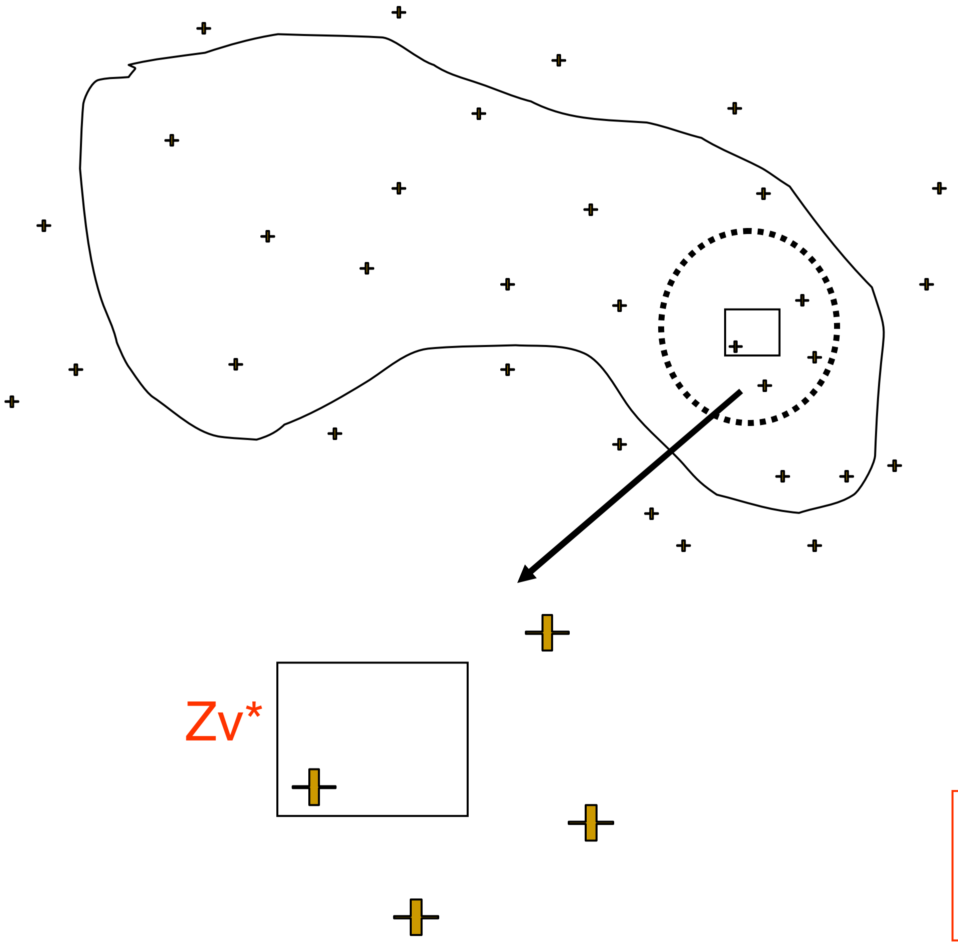
2- Supposer une loi de distribution et calculer les paramètres de la loi à partir du variogramme et des résultats du krigeage.

La méthode 1 est très simple mais beaucoup moins flexible que la méthode 2

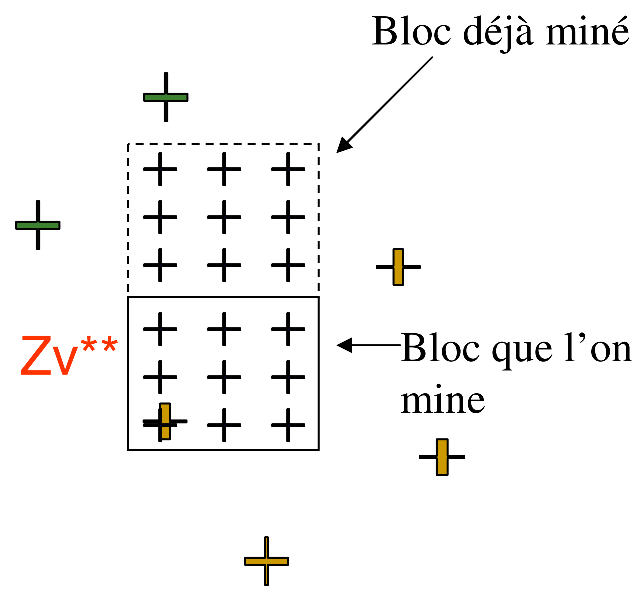
La méthode 1 suppose que le krigeage a été effectué avec les données disponibles au moment de la sélection.

La méthode 2 ne nécessite pas d'avoir les données qui seront disponibles au moment de la sélection; tout ce dont on a besoin c'est de connaître comment l'estimation finale sera effectuée.

Exemple



Au moment de la planification



Au moment de la décision finale de sélectionner ou non le bloc

Au moment de la planification, seul Zv* est disponible, i.e. estimé actuel

Les résultats de la mine dépendent de la distribution de Zv**, les estimés (futurs) qui seront disponibles au moment de la sélection

Peut-on prévoir la distribution de ces estimés futurs à partir des seules informations disponibles actuellement ?

Oui, dans le cas du krigeage en supposant une loi de distribution dont les paramètres sont déduits du krigeage grâce aux propriétés du krigeage.

Fonctions de récupération

Soit,

T(c) : tonnage de minerai avec la t.c. « c »
Q(c) : quantité de métal contenue dans le minerai à la t.c. « c »
m(c) : la teneur du minerai à la t.c. « c »

La loi de distribution permet de calculer ces quantités

Loi normale	Loi lognormale
$T(c) = T_o \left(1 - F\left(\frac{c - m}{\sigma}\right)\right)$	$T(c) = T_o \; F\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{m}{c}\right) - \frac{\beta}{2}\right)$
$Q(c) = m\,T(c) + T_o\,\sigma\, f\left(\frac{c - m}{\sigma}\right)$	$Q(c) = m\,T_o\,F\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{m}{c}\right) + \frac{\beta}{2}\right)$

Loi normale

$$T(c) = T_o\left(1 - F\left(\frac{c - m}{\sigma}\right)\right)$$

$$Q(c) = m\,T(c) + T_o\,\sigma\,f\left(\frac{c - m}{\sigma}\right)$$

Loi lognormale

$$T(c) = T_o\;F\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{m}{c}\right) - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$Q(c) = m\,T_o\,F\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{m}{c}\right) + \frac{\beta}{2}\right)$$

où :

f : fonction de densité d’une loi N(0,1) => $\boxed{f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}}$

F : fonction de répartition (cumulative) d’une loi N(0,1)

c : teneur de coupure

m : moyenne de la population

σ : écart-type de la population

β : écart-type du logarithme des teneurs (population)

Lien entre paramètres logarithmiques et paramètres originaux

$$m = e^{\mu + \frac{\beta^2}{2}} \qquad\qquad \sigma^2 = m^2 (e^{\beta^2} - 1)$$

où μ : moyenne du logarithme des teneurs (population)

β : Écart-type du logarithme des teneurs

Inversant ces relations, on a:

$$\beta^2 = \ln\left(\frac{\sigma^2}{m^2} + 1\right) \quad \text{et} \quad \mu = \ln(m) - \frac{\beta^2}{2}$$

La plupart du temps, les distributions de teneurs dans les mines ressemblent beaucoup plus à des distributions lognormales que normales

Exemple

Des blocs de minerai de fer suivent une loi normale de moyenne 50% et d'écart-type 15%.

Quelles sont les ressources à c= 40% ?

$$T(c) = T_o\left(1 - F\left(\frac{c - m}{\sigma}\right)\right)$$

$$T(c) = T_o\left(1 - F\left(\frac{40 - 50}{15}\right)\right) = T_o(1-0.25) = 0.748\,T_o$$

$$Q(c) = m\,T(c) + T_o\,\sigma\,f\left(\frac{c - m}{\sigma}\right)$$

$$Q(c) = 50\,\%\,T_o 0.75 + T_o 15\%\,f\left(\frac{40 - 50}{15}\right) = T_o(0.5*0.75 + 0.15*0.32) = 0.422\,T_o$$

f(-10/15)=
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(2/3)^2/2} = 0.32$$

$$m(c) = 0.422/0.748 = 56.4\%$$

Même exemple en supposant la loi lognormale

On calcule : $$\beta = \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma^2}{m^2}+1\right)} = \sqrt{\ln\left(\frac{15^2}{50^2}+1\right)} = 0.294$$

$$T(c) = T_o\ F\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{m}{c}\right) - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$T(c) = T_o\ F\left(\frac{1}{0.294}\ln\left(\frac{50}{40}\right) - \frac{0.294}{2}\right) = T_o F(0.612) = T_o 0.730$$

$$Q(c) = m\ T_o\ F\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{m}{c}\right) + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$Q(c) = T_o 50\%\ F\left(\frac{1}{0.294}\ln\left(\frac{50}{40}\right) + \frac{0.294}{2}\right) = T_o 0.5F(0.906) = T_o 0.409$$

$$m(c) = 0.409/0.730 = 56.0\%$$

Influence de la variance

Considérons la courbe de profit conventionnel

$$P(c) = T(c) * [m(c) - c]$$

Cette fonction est remarquable car elle *augmente* toujours (à « c » fixé) lorsque la *sélectivité* de l'opération *augmente*.

La sélectivité augmente lorsque la sélection est faite

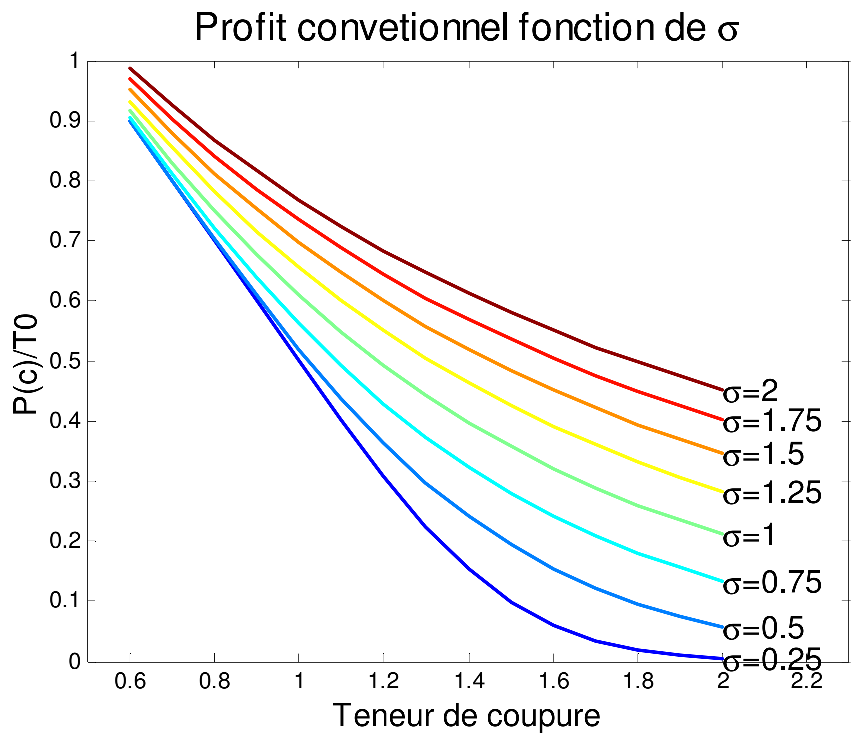
- sur de plus petits blocs (effet support)
- à partir d'estimations des teneurs de blocs plus précises et sans biais conditionnel (effet information)

Note: dans les 2 cas, <u>*la variance des valeurs estimées augmente*</u>

Gisement de Cuivre, m=1.5%, loi lognormale

Sélectivité croissante

Profit conv. croissant



On sera sur une courbe P(c) d'autant plus élevée que :

- les blocs pouvant être sélectionnés seront petits (effet support)

- les estimés seront précis (effet information)

Deux propriétés essentielles du krigeage ordinaire :

i) presque sans biais conditionnel

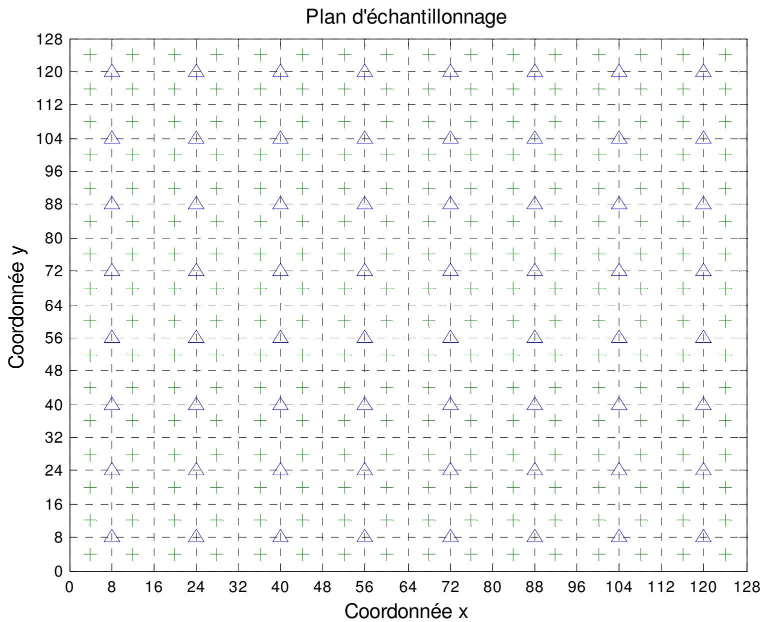
ii) $\mathrm{Var}(Z_v^*) = \mathrm{Var}(Z_v) - \sigma_{ko}^2 - 2\mu$

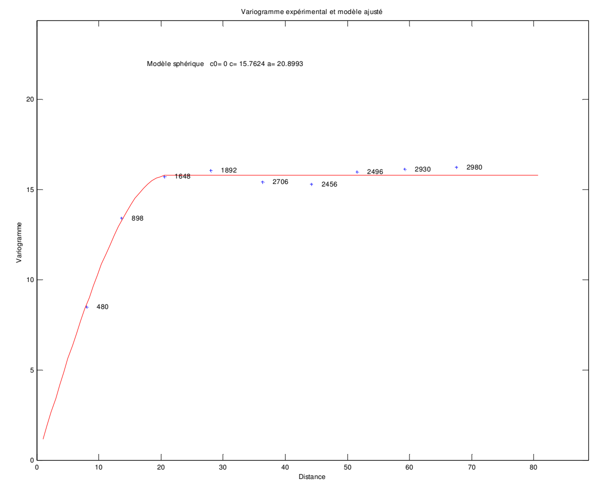
La propriété i) assure que l'on récoltera approximativement ce que l'on prédit

La propriété ii) permet de calculer les fonctions de récupération et le profit conventionnel *des estimés futurs* ou actuels

(en supposant que tous les blocs sont estimés de la même façon; sinon, on prend une valeur moyenne pour la variance de krigeage et le multiplicateur de Lagrange).

Exemple

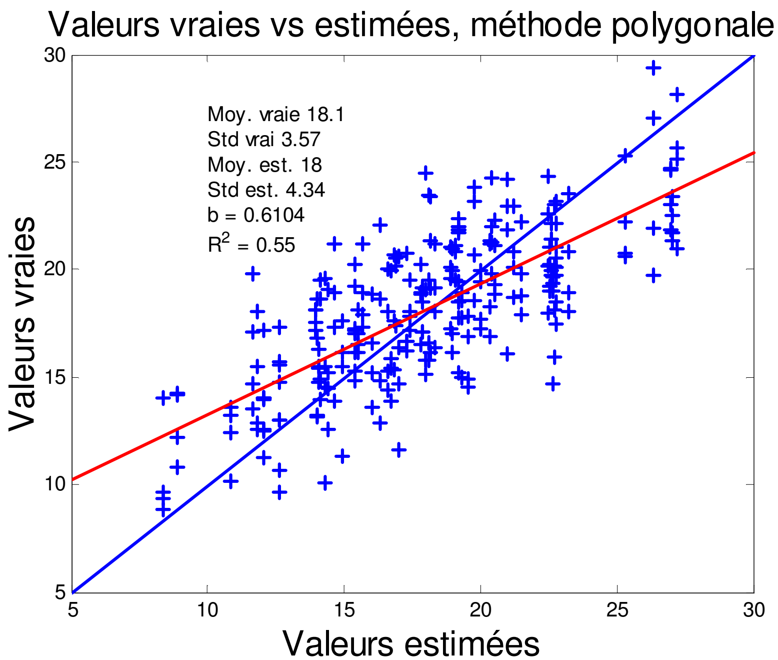


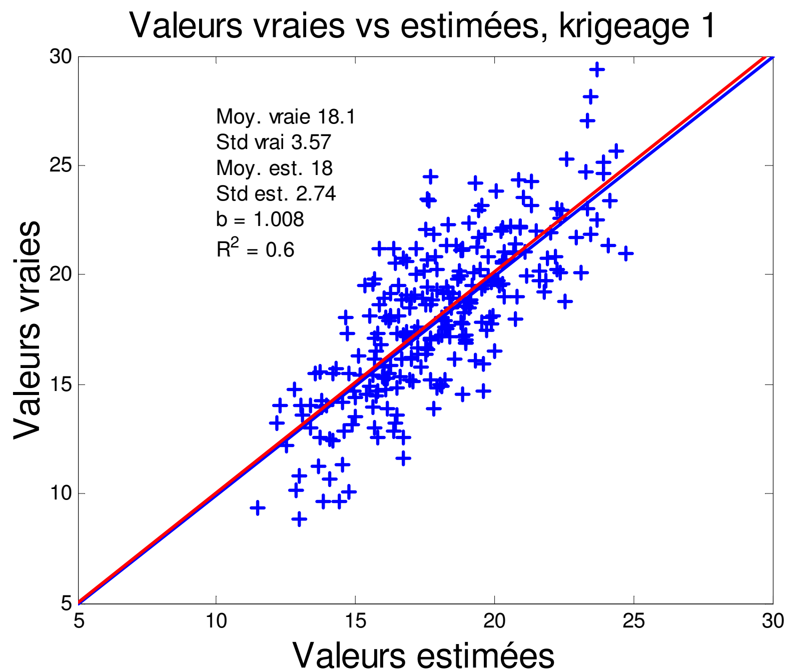


Blocs 8 x 8

Grille 1: échant aux 16m (Δ)

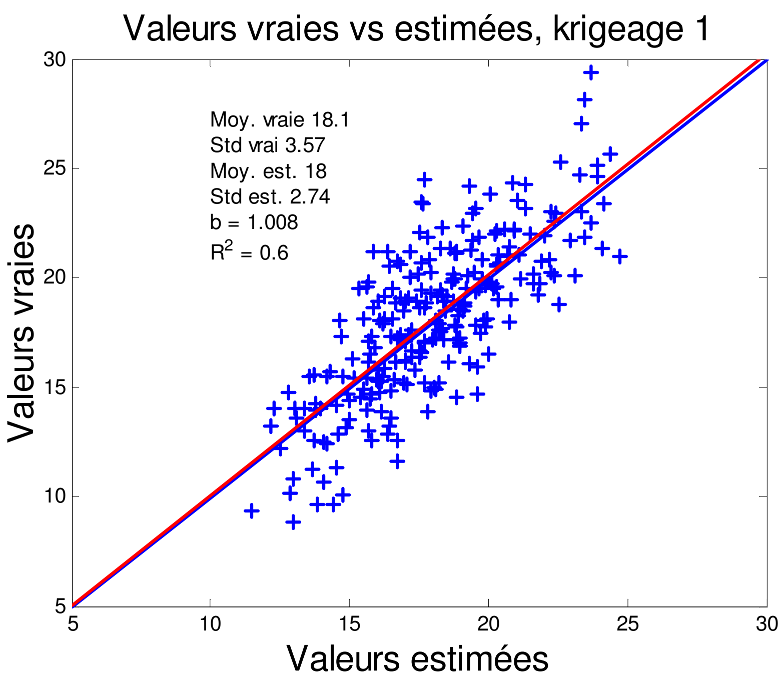
Grille 2 : échant aux 8 m (+)=> Variogramme sphérique C0=0, C=15.8, a=20.9


Valeurs vraies vs estimées, méthode polygonale
Moy. vraie 18.1
Std vrai 3.57
Moy. est. 18
Std est. 4.34
b = 0.6104
R2 = 0.55
Valeurs vraies
Valeurs estimées
30
25
20
15
10
5
5
10
15
20
25
30

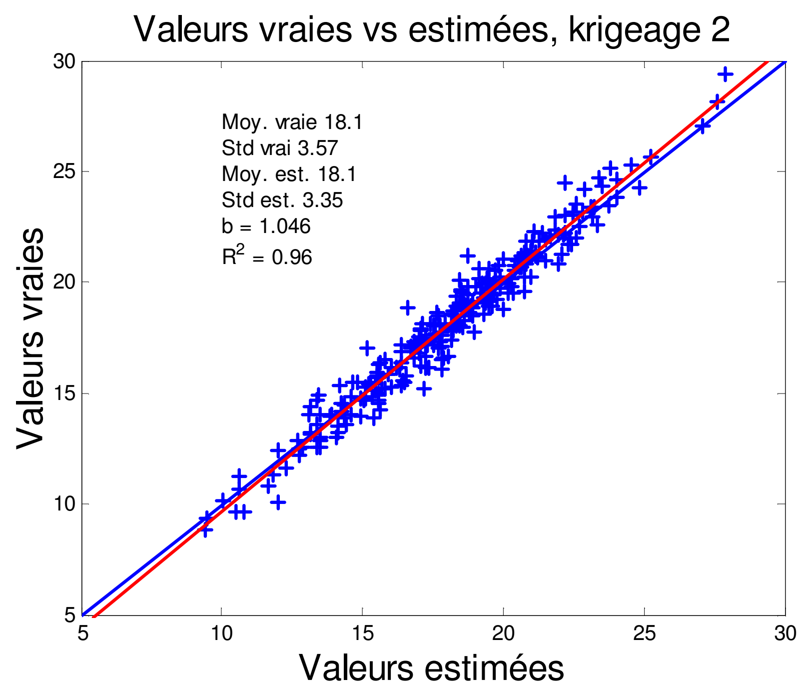

Valeurs vraies vs estimées, krigeage 1
Moy. vraie 18.1
Std vrai 3.57
Moy. est. 18
Std est. 2.74
b = 1.008
R2 = 0.6
Valeurs vraies
Valeurs estimées
30
25
20
15
10
5
5
10
15
20
25
30

$|e| = 2.39$

$|e| = 1.81$

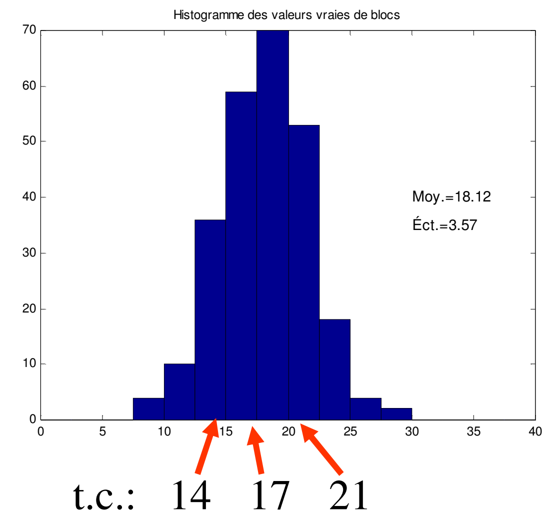

Valeurs vraies vs estimées, krigeage 1
Moy. vraie 18.1
Std vrai 3.57
Moy. est. 18
Std est. 2.74
b = 1.008
R^2 = 0.6
Valeurs vraies
Valeurs estimées
5
10
15
20
25
30

$|e| = 1.81$


Valeurs vraies vs estimées, krigeage 2
Moy. vraie 18.1
Std vrai 3.57
Moy. est. 18.1
Std est. 3.35
b = 1.046
R^2 = 0.96
Valeurs vraies
Valeurs estimées
5
10
15
20
25
30

$|e| = 0.58$

	Item	T(c)/T0	m(c)	P(c)/T0
Coupure 14	Blocs, vraies teneurs	0.88	18.97	4.35
	Polygonale, prédit	0.83	19.3	4.37
	Krigeage 1, prédit	0.93	18.37	4.05
	Krigeage 2, prédit	0.88	18.82	4.26
	Polygonale, réalisé	0.83	18.97	4.11
	Krigeage 1, réalisé	0.93	18.56	4.22
	Krigeage 2, réalisé	0.88	18.90	4.33
	Krigeage 1, loi normale	0.95	18.38	4.16
	Krigeage 2, loi normale	0.90	18.72	4.25
Coupure 17	Blocs, vraies teneurs	0.65	20.19	2.07
	Polygonale, prédit	0.58	20.91	2.26
	Krigeage 1, prédit	0.63	19.57	1.62
	Krigeage 2, prédit	0.66	19.95	1.94
	Polygonale, réalisé	0.58	19.26	1.69
	Krigeage 1, réalisé	0.63	19.79	1.76
	Krigeage 2, réalisé	0.66	20.09	2.03
	Krigeage 1, loi normale	0.67	19.47	1.65
	Krigeage 2, loi normale	0.63	20.00	1.90
Coupure 21	Blocs, vraies teneurs	0.21	22.85	0.40
	Polygonale, prédit	0.23	23.83	0.66
	Krigeage 1, prédit	0.13	22.58	0.21
	Krigeage 2, prédit	0.18	22.87	0.33
	Polygonale, réalisé	0.23	21.22	0.05
	Krigeage 1, réalisé	0.12	22.25	0.16
	Krigeage 2, réalisé	0.18	23.19	0.39
	Krigeage 1, loi normale	0.14	22.35	0.19
	Krigeage 2, loi normale	0.18	22.74	0.32



1. À quantité d'information égale le krigeage permet d'obtenir plus de profits que la méthode polygonale, et ce, pour toute teneur de coupure. L'avantage du krigeage augmente avec la teneur de coupure

Coupure	Méthode	% optimum
14	Polygonale	94.5
	Krigeage 1	97.0
17	Polygonale	81.6
	Krigeage 1	85.0
21	Polygonale	12.5
	Krigeage 1	50.0

2. Augmenter l'information permet d'obtenir plus de profits, et ce pour toutes les teneurs de coupure. L'avantage croit avec la teneur de coupure.

Coupure	Méthode	% optimum
14	Krigeage 1	97.0
	Krigeage 2	99.5
17	Krigeage 1	85.0
	Krigeage 2	98.1
21	Krigeage 1	50.0
	Krigeage 2	97.5

3. Le krigeage récupère pratiquement ce qu'il prédit. La méthode polygonale est beaucoup trop optimiste.

Coupure	Méthode	(réalisé-prédit)/réalisé*100
14	Polygonale	-6.3
	Krigeage 1	4.0
	Krigeage 2	1.6
17	Polygonale	-33.8
	Krigeage 1	8.0
	Krigeage 2	4.5
21	Polygonale	-1189.0
	Krigeage 1	-4.8
	Krigeage 2	14.5

4. On peut prédire ce que le krigeage permettra de récupérer effectivement [avant que les données soient disponibles.]

Coupure	Méthode (loi normale)	(réalisé-prédit (normal))/réalisé*100 (%)
14.0	Krigeage 1	1.6
	Krigeage 2	1.8
17.0	Krigeage 1	6.4
	Krigeage 2	6.2
21.0	Krigeage 1	(.210-.157)/.21= 25.6
	Krigeage 2	17.5

5. On peut prédire le gain que devraient procurer des forages additionnels.

Coupure	gain prévu/gain réalisé*100
14.0	88.5
17.0	95.1
21.0	92.3

Exemple d'application

Gisement de Cu, m=1.3% Cu, t. coupure c=1%, distribution lognormale
T_0 = 50Mt; Prix Cu = 2$ kg Cu

Avec forages actuels $D^2(Zv^*|G)=24\%^2$;
Avec forages additionnels $D^2(Zv^*|G)=26\%^2$

Gain obtenu ?

	$T(c)/T_0$	$Q(c)/T_0$	m(c)	$P(c)/T_0$
Actuel	0.253	1.089%	4.307%	0.836%
Futur	0.249	1.092%	4.392%	0.843%

Gain	0.007%

⇒ 7 M$

Apport de la géostatistique à la définition des catégories de ressources

	Facteurs économiques et miniers pris en compte ?	
Niveau de confiance et connaissance géologique croissants.	non : **Ressource**	oui: **Réserve**
	Inférée	
	Indiquée	Probable
	Mesurée	Prouvées

La variance de krigeage peut-elle être utilisée pour qualifier la ressource en ressource inférée, indiquée ou mesurée ?

Difficultés

a) La variance de krigeage est non-conditionnelle aux valeurs observées. Pourtant on peut imaginer, pour une même configuration, avoir plus confiance dans l'estimé au point A qu'au point B.

b) Dépend du modèle de variogramme choisi (une certaine part d'arbitraire)

c) Résulte en partie d'une série de décisions subjectives : domaine homogène, limites du gisement, traitement des données extrêmes

Propositions

i) Présenter des plans et sections aux géologues avec forages et autres informations disponibles; demander d'identifier zones « mesurées », « indiquées », « inférées »; généraliser à l'ensemble du gisement à partir des variances de krigeage correspondantes

ii) Considérer les ratios σ_k^2 / σ_v^2 (moins sensibles au choix du modèle de variogramme)

Propositions (suite)

iii) Utiliser les écarts-types de krigeage relatifs (i.e. divisés par la teneur estimée)

iv) Combiner les variances de krigeage avec des variances expérimentales calculées localement

v) Recourir à des simulations conditionnelles

Note: Bien que l'on puisse estimer les ressources récupérables (T(c) Q(c), m(c)) avec le krigeage, on ne peut fournir *d'intervalles de confiance* sur ces quantités (i.e. précision). Pour cela, il faut recourir à des méthodes non-linéaires de krigeage ou (et surtout) à *des simulations*.