Krigeage d’indicatrice

Plan

- Introduction: contexte et problématique
- Cas d’une variable binaire
- Cas d’une distribution seuillée
- Interprétation de la valeur estimée
- Équations du krigeage d’indicatrices
- Corrections d’ordre
- Changements de support
- « Soft kriging »
- Exemples

Contexte et problématique

Krigeage d'indicatrices : méthode géostatistique non-linéaire =>

cherche à estimer la fonction de distribution conditionnelle en tout point;

par contraste, le krigeage ordinaire n'estime que la moyenne conditionnelle (sauf dans le cas gaussien, *la variance de krigeage n'est pas une variance conditionnelle*).

Exemples :

- Estimation du volume in-situ de sols contaminés; sur un site donné, quel est le volume de sols excédant le critère « C » du MENV ? Quelle quantité totale de contaminants y retrouve-t-on ?

- Dans une mine, quel est le tonnage de minerai (in-situ); quelle est la teneur moyenne ou la quantité de métal contenue dans le minerai?

Exemples:

- Dans une mine, la sélection finale des blocs se fait à partir d'estimations qui seront obtenues une fois les données des blocs voisins connues. Peut-on prédire *maintenant* la proportion des blocs qui seront identifiés plus tard comme du minerai ? Quelle devrait être la teneur de ces blocs sélectionnés sur des *estimations futures* ?

Note: il y a 3 grandes catégories de méthodes pour répondre à ce genre de questions :

- le krigeage d'indicatrices (et ses variantes multivariables)
- les méthodes gaussiennes (multigaussien)
- le krigeage disjonctif (lois bivariables isofactorielles)

(note: dans le cours, on ne voit que les 2 premières méthodes)

Variable binaire

a) Variable binaire (0-1) (ex. $I(x)=1$ si on a le faciès A au point x et $I(x)=0$ si l'on a un autre faciès)

Quelle interprétation donner au résultat du krigeage dans ce contexte ?

Soit $I(x)$ la v.a. binaire au point x.

$$E[I(x)] = P(I(x)=0)*0 + P(I(x)=1)*1 = P(I(x)=1)$$

Si l'on tient compte des observations disponibles:

$$E[I(x)|I(x_1),I(x_2)\ldots I(x_n)] = P(I(x)=1|I(x_1),I(x_2)\ldots I(x_n))$$

Pour une variable continue, le krigeage est un bon estimateur de l'espérance conditionnelle, on *suppose* que ceci demeure vrai pour une indicatrice.

$$I^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I(x_i)$$

où les poids sont obtenus par krigeage ordinaire de la variable indicatrice est donc une estimation de $P(I(x)=1|I(x_1),I(x_2),\ldots I(x_n))$

$$I^*(x) \equiv P^*(I(x) \mid I(x_1), I(x_2),\ldots I(x_n))$$

Généralisation: variable continue

Soit Z(x) une v.a. continue définie au point x et F(x,c), la fonction de répartition de la v.a. au point x pour la valeur « c ».

Par définition: $F(x,c) = P(Z(x) \leq c) = E[I(x,c)]$

où $I(x,c) = 1$ si $Z(x) \leq c$

0 si $Z(x) > c$

Par krigeage ordinaire d'indicatrices, on aura :

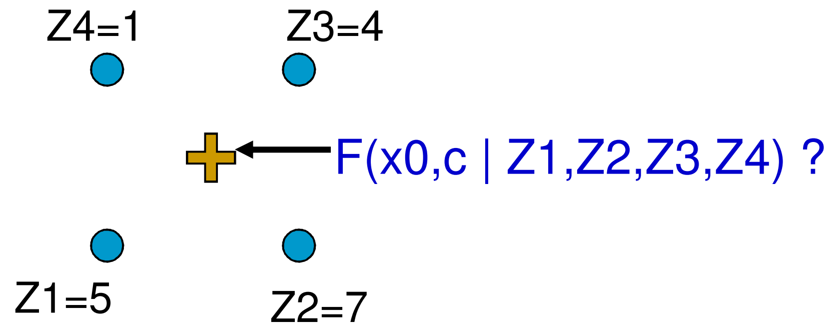
$$I^*(x,c) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i I(x_i, c)$$

Cette valeur *devrait* être un bon (?) estimateur de :

$$P(I(x,c)=1 \mid I(x_1,c), I(x_2,c), \ldots I(x_n,c)) =$$
$$P(Z(x)<c \mid I(x_1,c), I(x_2,c), \ldots I(x_n,c)) =$$
$$F(x,c \mid I(x_1,c), I(x_2,c), \ldots I(x_n,c))$$

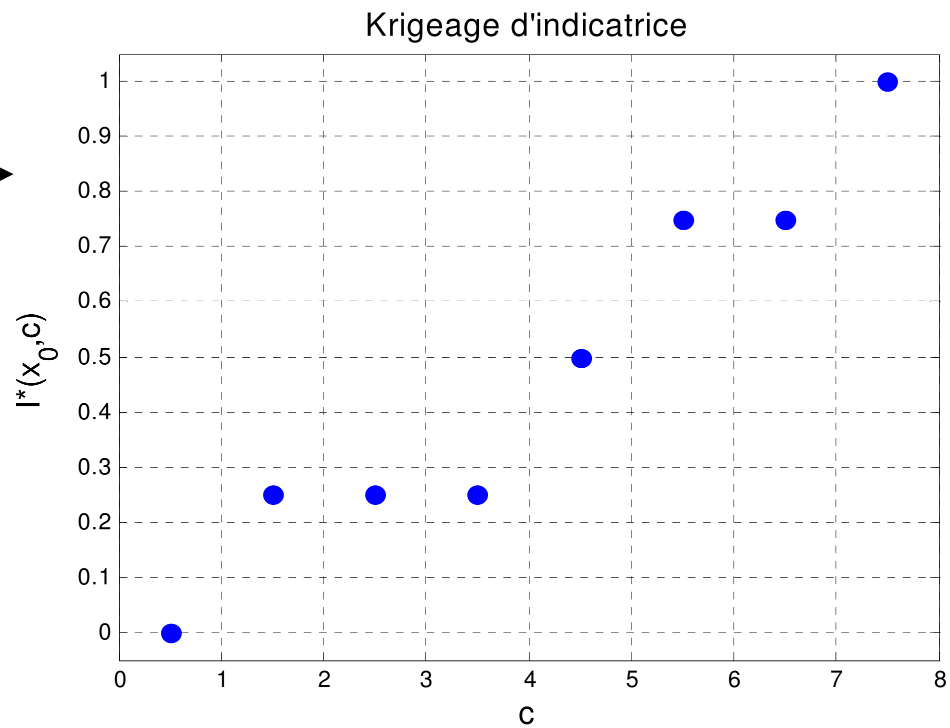
Si l'on choisit une infinité de « c » différents, on aura une estimation de la fonction de répartition au point « x » conditionnelle aux indicatrices obtenues aux points échantillons.

Exemple



Ici, par symétrie, les poids valent tous 1/4

c	F*(x0,c,|(n))
0.5	0
1.5	0.25
2.5	0.25
3.5	0.25
4.5	0.50
5.5	0.75
6.5	0.75
7.5	1.0



Que gagne-t-on par rapport à un krigeage ordinaire ?

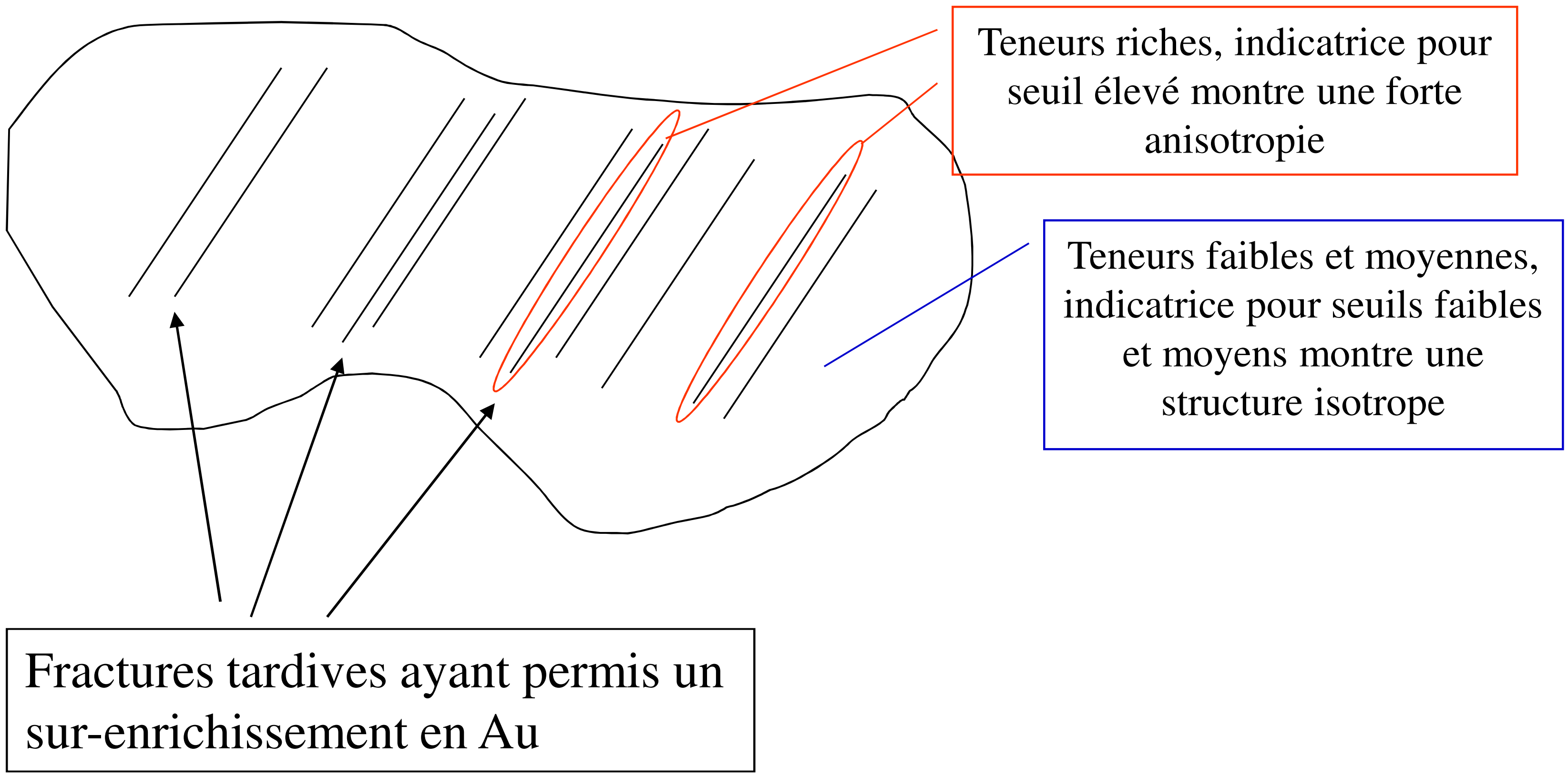
À quel prix ?

Quels sont les problèmes qui se posent ?

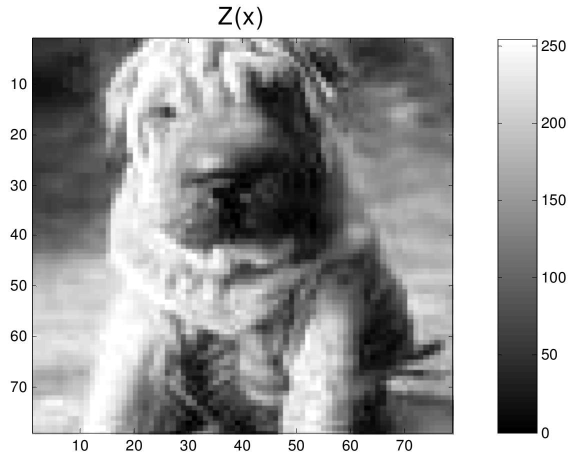
Que gagne-t-on par rapport à un krigeage ordinaire ?

- **Estimer une probabilité d'excéder un seuil (e.g. en environnement);**
- **estimer un quantile (e.g. valeur ayant 5% de chances d'être dépassée au point x0);**
- **calculer une variance conditionnelle, i.e. qui dépend des valeurs locales;**
- **fournir un estimateur qui minimise l'espérance d'une fonction de coût;**
- **+ de flexibilité :**
    - **utiliser des informations du type Z(xi)>t, Z(xi)<t, t2>Z(xi)>t1; des données semi-quantitatives fournies par le géologue (e.g. « dans ce type de roche, la teneur n'excède jamais « t »)**
    - **les variogrammes peuvent varier d'une indicatrice à l'autre**

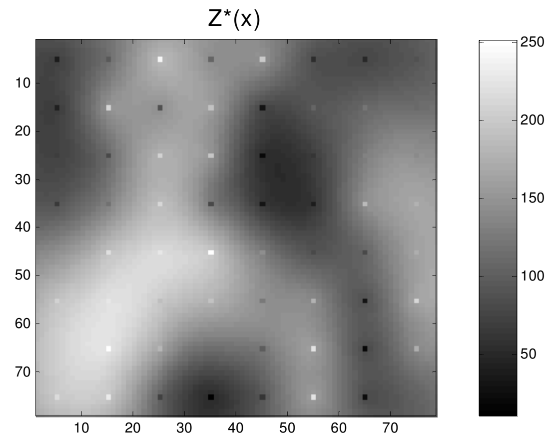
Exemple: les variogrammes peuvent varier d'une indicatrice à l'autre



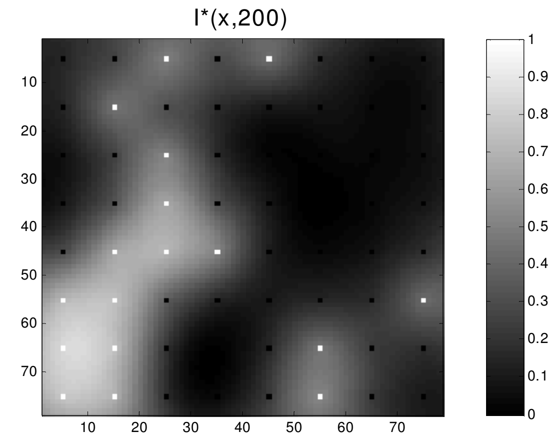
Exemple: le krigeage d'indicatrices permet de mieux estimer les quantiles, probabilités, etc. que le krigeage ordinaire



Réalité



Krigeage ordinaire



Krigeage indicatrice

Nb(Z(x)>200) = 1453

Nb(Z(x)*>200) = 561

sous-estimation de 61% !

Σ_x I*(x,200) = 1655

sur-estimation de 12%

À quel prix ?

- **Fonction de répartition représentée sous forme discrète : combien de seuils ? (en pratique souvent de 5 à 10 seuils)**
- **Chaque seuil => v. indicatrice différente => variogramme => krigeage d'indicatrice => effort ++ important; possibilité d'incohérences dans la modélisation.**
- **Chaque indicatrice doit être stationnaire => fonction de répartition stationnaire, (hypothèse + forte que pour le krigeage).**
- **On a réduit l'ensemble conditionnant à { $I(x_1,c), I(x_2,c)\ldots I(x_n,c)$ } au lieu de { $Z(x_1), Z(x_2)\ldots Z(x_n)$ } => certaine perte d'information ?**

Quels sont les problèmes qui se posent ?

- **Problème de relation d'ordre:**
  - **valeurs de $I^*(x_0,c_i)$ peuvent être >1 ou <0;**
  - **$I^*(x_0,c_i)>I^*(x_0,c_j)$ quand $c_i<c_j$**

- **Variogrammes d'indicatrices sont souvent + faciles à modéliser (il n'y a pas de données extrêmes, que des 0 ou des 1) mais souvent la structure spatiale est faible => manque de précision dans les estimations de I***

- **Comment interpoler entre les valeurs de $I^*(x_0,c_i)$? Comment extrapoler au-delà de c_{min} et c_{max} ?**

- **Que faire si l'estimation doit porter sur des blocs ? Ex.: $P^*(Zv(x)>c|(n))$**

Problème de relation d’ordre

- **Problème de relation d’ordre:**
  - $I^{**}(x0,c_i) = \max(0, I^*(x0,c_i))$
  - $I^{**}(x0,c_i) = \min(1, I^*(x0,c_i))$
  - **Correction avant,**
    - $I^*_{avant}(x0,c_{i+1}) = \max(I^*(x0,c_i),I^*(x0,c_{i+1}))$
  - **Correction arrière,**
    - $I^*_{arr}(x0,c_i) = \min(I^*(x0,c_i),I^*(x0,c_{i+1}))$
  - $I^*(x0,c_i) =0.5^*[I^*_{avant}(x0,c_{i+1}) +I^*_{arr}(x0,c_i)]$

Exemple

seuil c	$F_{KI}(x_0,c)$	$F_{KI,avant}(x_0,c)$	$F_{KI,arr}(x_0,c)$	$F_{KI,corr}(X_0,c)$
1	-.01 --> 0	0	0	0
2	0.13	0.13	0.13	0.13
3	0.24	0.24	0.234	0.237
4	0.238	0.24	0.234	0.237
5	0.234	0.24	0.234	0.237
6	0.237	0.24	0.237	0.2385
7	0.53	0.53	0.53	0.53
8	0.79	0.79	0.77	0.78
9	0.77	0.79	0.77	0.78
10	1.02 -> 1.0	1	1	1

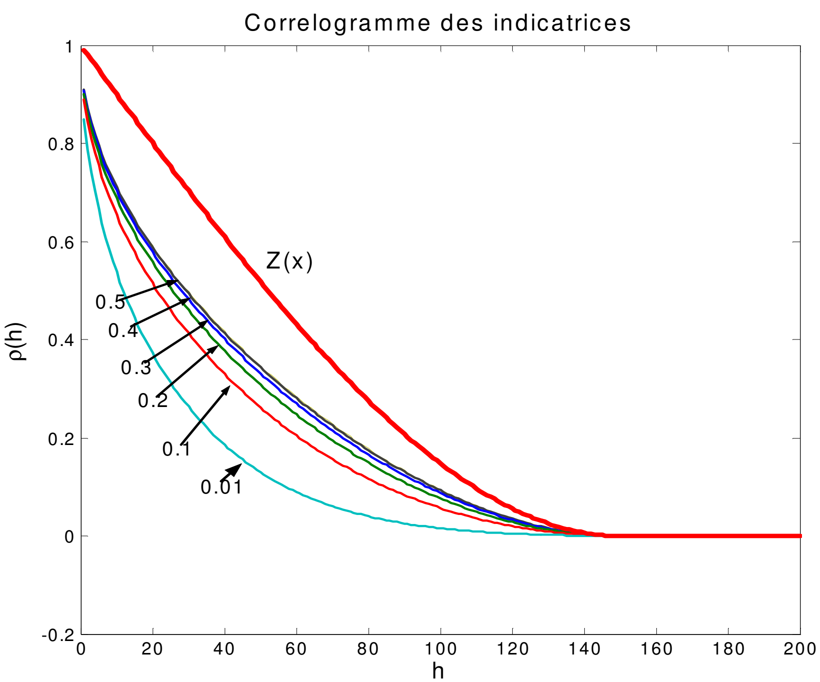
Structure spatiale plus faible

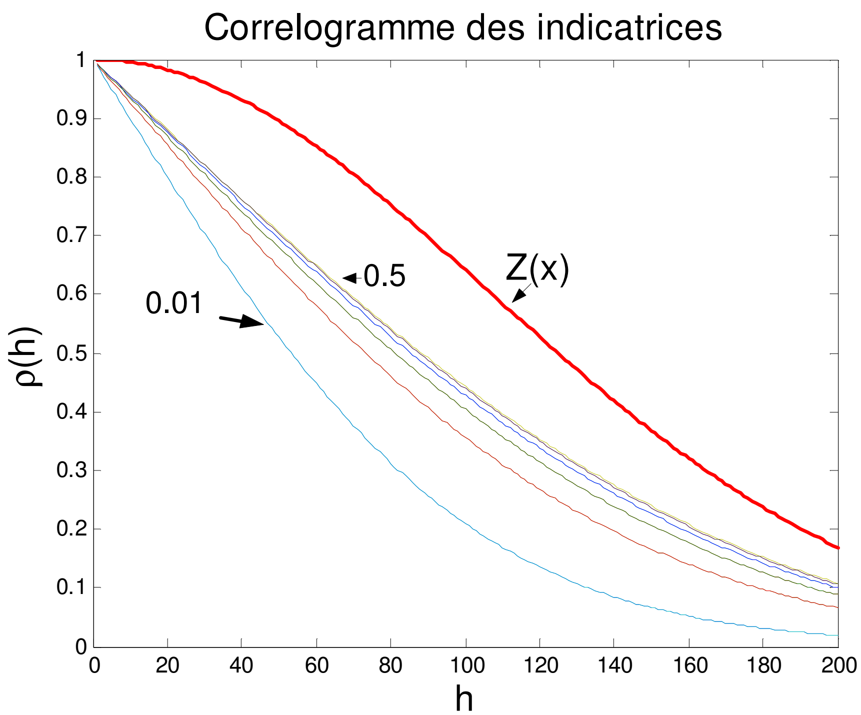
Exemple : cas gaussien

Si Z(x) est bigaussien (0,1), on connaît la relation entre $\gamma_Z(\mathrm{h})$ et $\gamma_I(\mathrm{h},\mathrm{c})$

$$C_I(h,c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho(h)} \exp\left(-\frac{c^2}{1+u}\right)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

ou ρ(h) est le corrélogramme de Z(x)



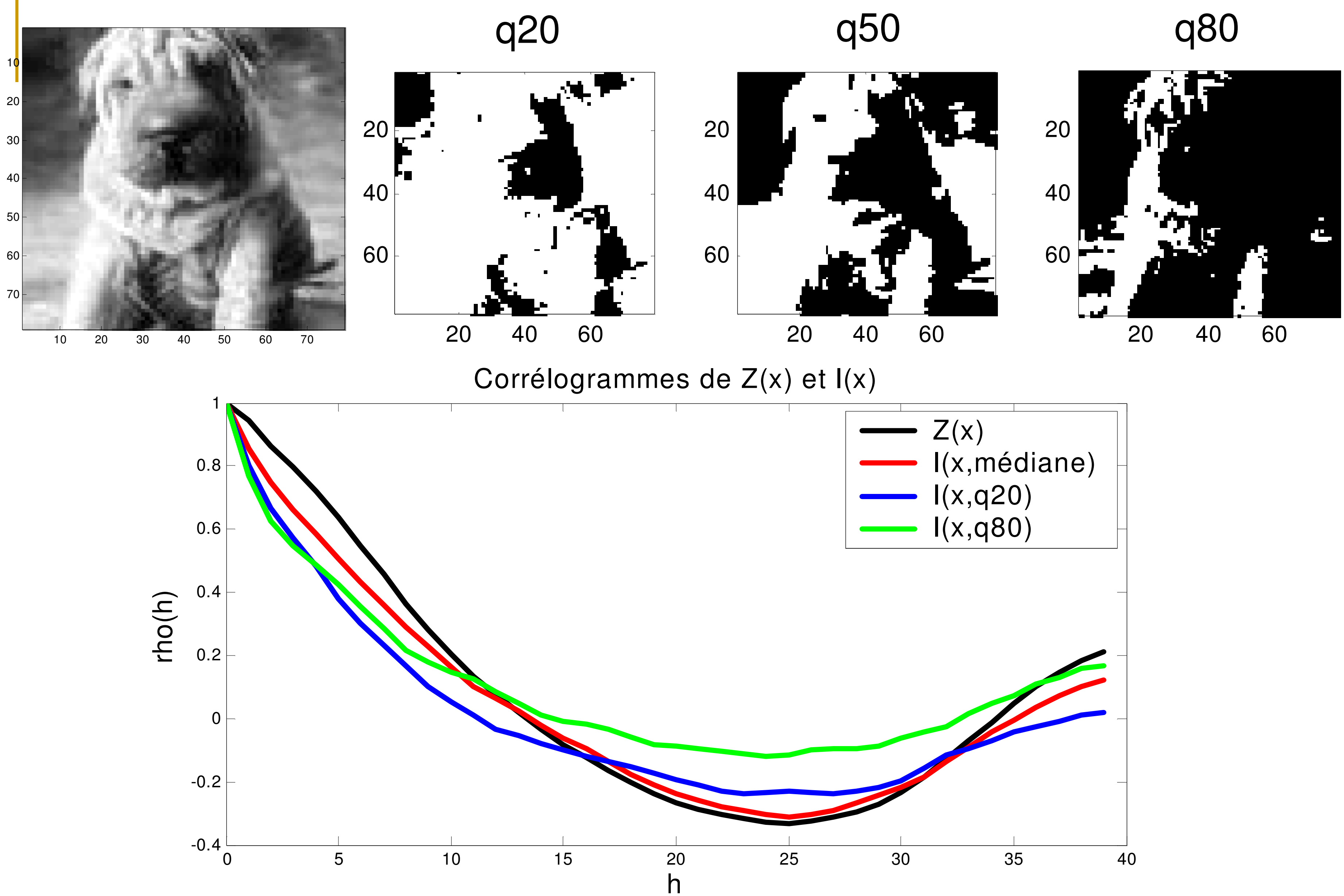


Z(x) : modèle sphérique

Z(x) : modèle gaussien

- Plus le seuil « c » est éloigné de la médiane moins il y a de structure

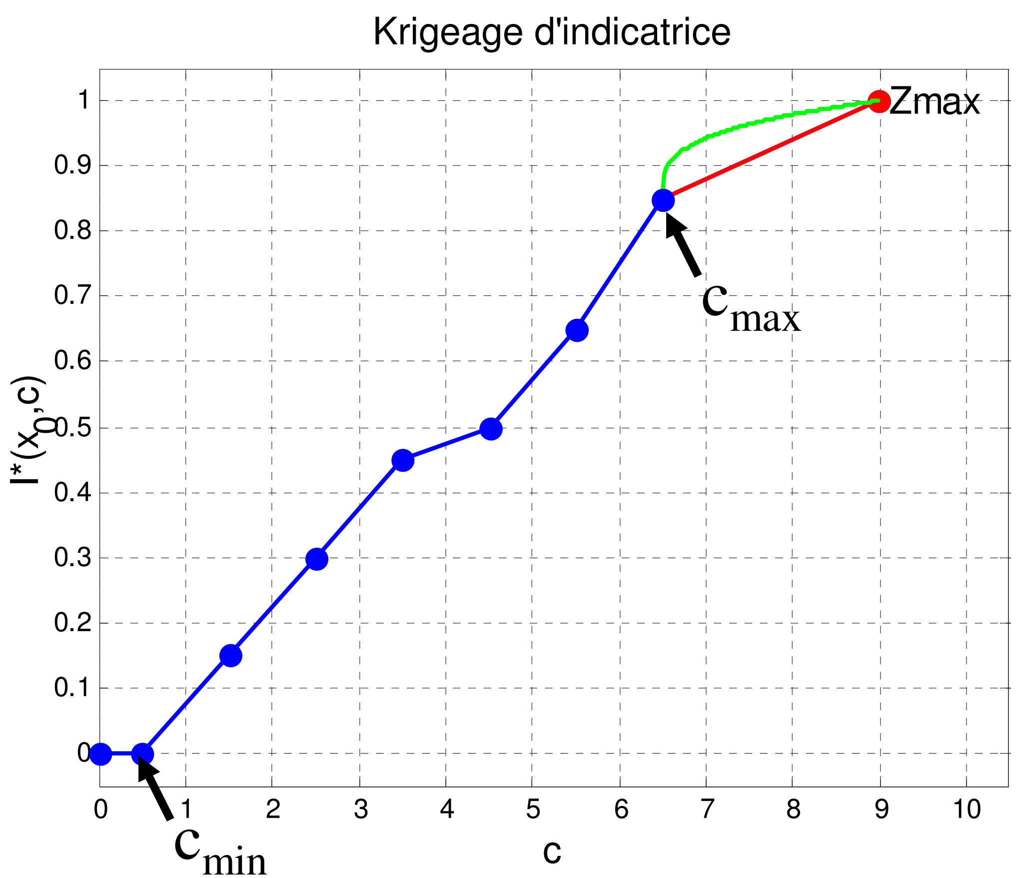
- Variogrammes des indicatrices est linéaire à l'origine même si Z(x) est parabolique à l'origine => proscrire le modèle gaussien pour les indicatrices



q20
q50
q80
Corrélogrammes de Z(x) et I(x)
Z(x)
I(x,médiane)
I(x,q20)
I(x,q80)
rho(h)
h

Interpolation entre les valeurs de $I^*(x_i,c_j)$?

Linéaire, sauf possiblement la dernière classe



Que faire si l'estimation doit porter sur des blocs ?

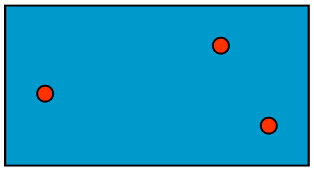
Reconnaître que:

$$P(Z_v(x)>c) \neq P(Z(x)>c)$$

$$P(Z_v(x) > c) \neq \frac{1}{v} \int_{v(x)} P(Z(y) > c)\, dy$$

$$P(Z_v(x) > c) = 1$$

$$\frac{1}{v} \int_{v(x)} P(Z(y) > c)\, dy \approx 0$$



Z(x)=1e6 c

Z(x)= 0.9 c

Solutions ?

Plusieurs propositions, dont:

- correction affine
- correction indirecte lognormale

aucune n’est entièrement convaincante

Tendance actuelle: recourir à des simulations!

Exemple: correction affine

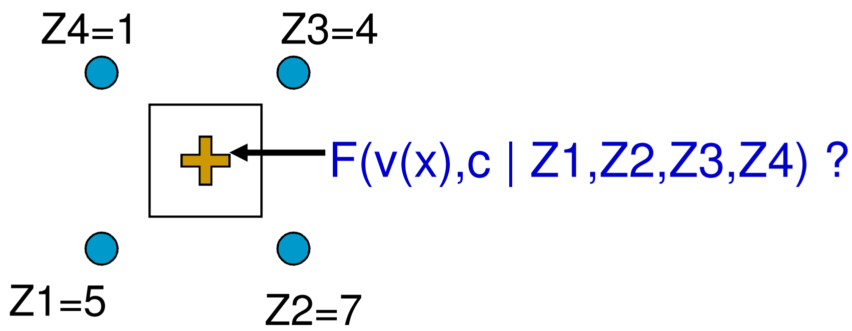
$$F_v(Z_v) = F\left((Z-m)\left\{\frac{D^2(v \mid G)}{D^2(\bullet \mid G)}\right\}^{0.5} + m \right)$$

m est la moyenne de la distribution locale estimée par KI

F est la fonction de répartition locale estimée par KI (i.e. I*(x,c) après corrections pour relations d'ordre)

F_v est la fonction de répartition « de blocs »

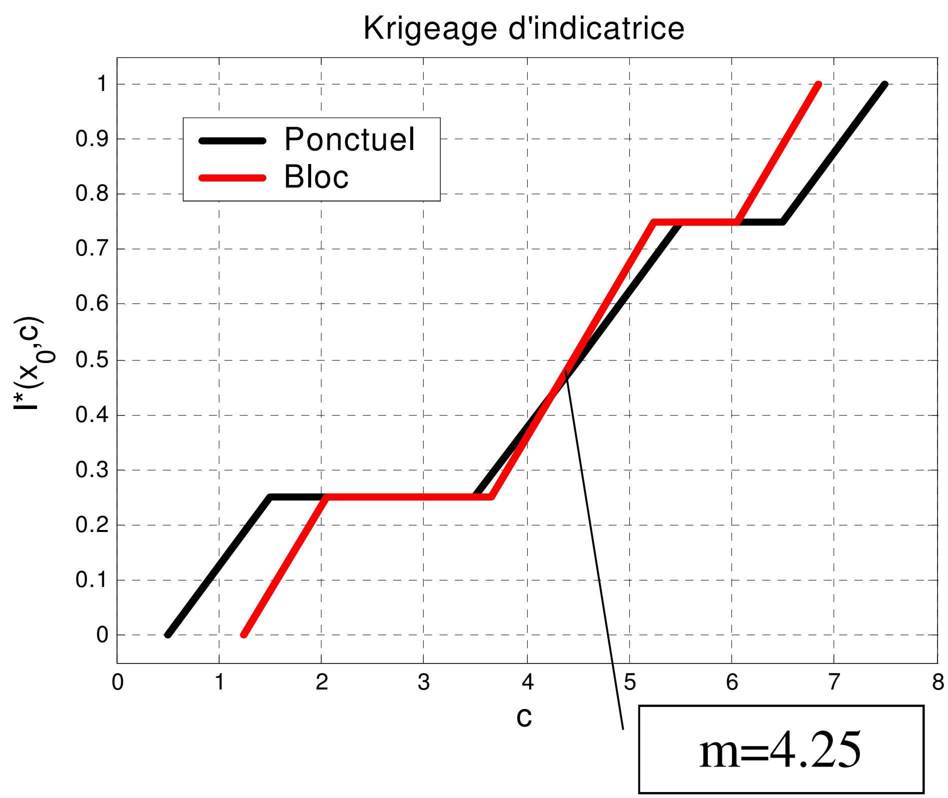
Le facteur de contraction $\left\{\frac{D^2(v \mid G)}{D^2(\bullet \mid G)}\right\}^{0.5}$ est *global* malgré que la correction soit appliquée à une *distribution locale* !



Variogramme => $D^2(.|G)$

=> $D^2(v|G)$

$$\left\{\frac{D^2(v\,|\,G)}{D^2(\bullet\,|\,G)}\right\}^{0.5} = 0.8$$



Variantes

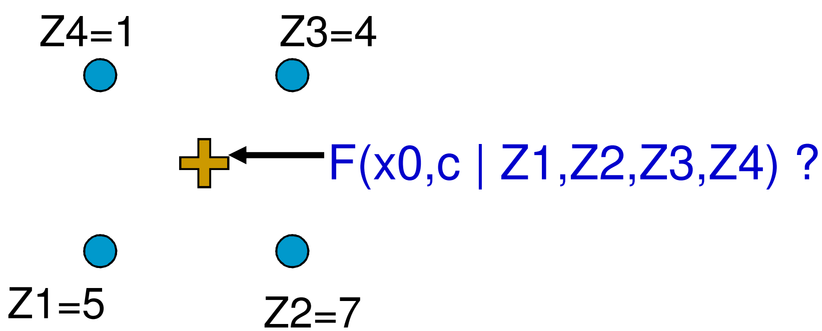
1- Krigeage simple d'indicatrice :

$$I^*(x_0,c) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, I(x_i,c) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) F_Z(c)$$

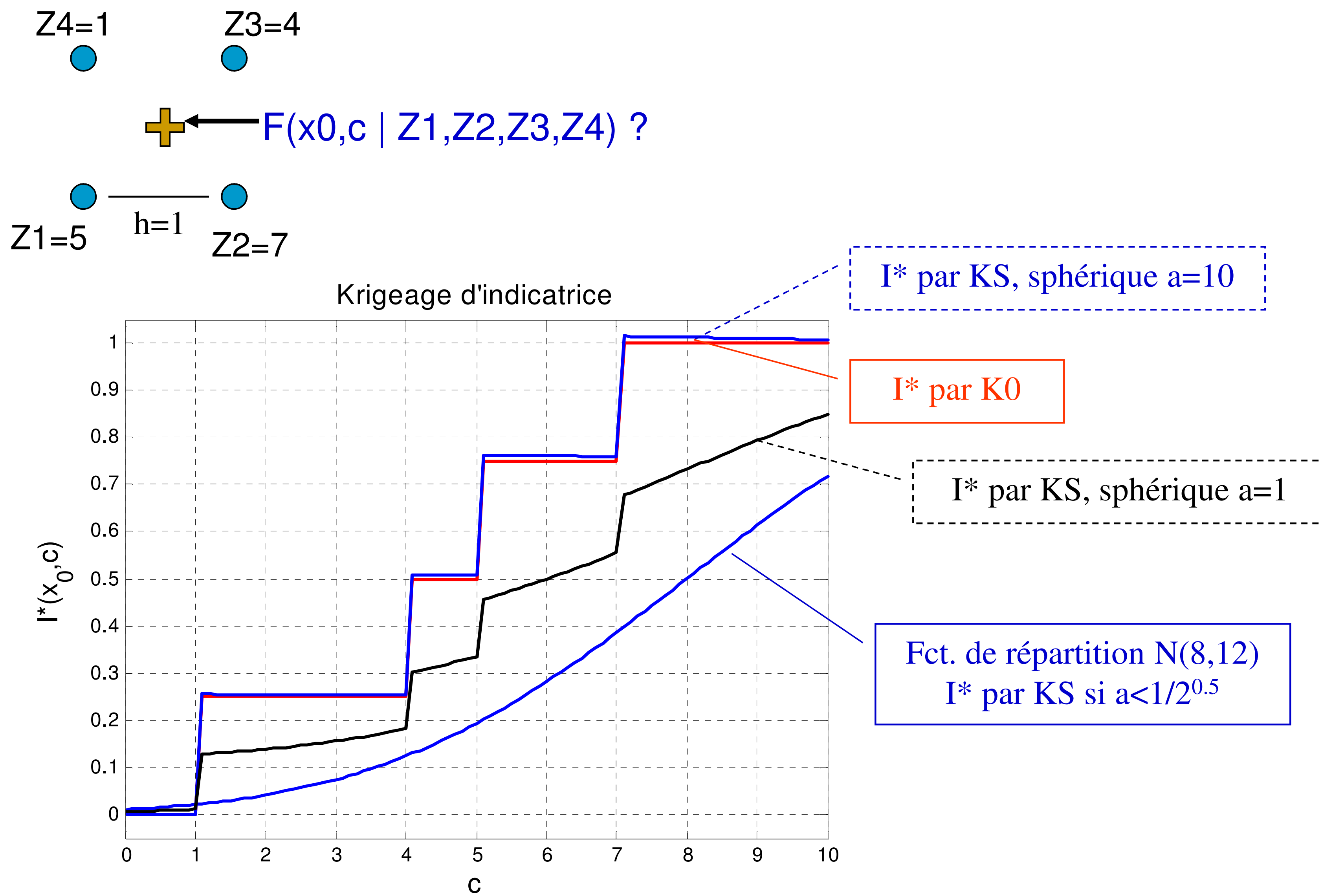
$F_Z(c)$: fonction de répartition (globale)

Permet une gradation plus souple de I*(x,c)

Permet de mieux tenir compte du degré de corrélation locale



S'il n'y a pas de corrélation entre les points, la fonction estimée sera simplement $F_z(c)$


Z4=1
Z3=4
F(x0,c | Z1,Z2,Z3,Z4) ?
Z1=5
h=1
Z2=7
Krigeage d'indicatrice
I*(x0,c)
c
I* par KS, sphérique a=10
I* par K0
I* par KS, sphérique a=1
Fct. de répartition N(8,12)
I* par KS si a<1/2^0.5

2- Cokrigeage :

v. principale : $I(x,c_j)$

v. secondaires : $I(x,c_k)$, $k \neq j$

Très lourd, presque jamais utilisé

ou

v. principale : $I(x,c_j)$

v. secondaire : $Z(x)$ ou mieux $U(x)= \text{rang}(Z(x)) / (n+1)$

« Soft kriging »

-+ **de flexibilité :**

- **utiliser des informations du type Z(xi)>t, Z(xi)<t, t2>Z(xi)>t1; des données semi-quantitatives fournies par le géologue (e.g. « dans ce type de roche, la teneur n'excède jamais « t »)**

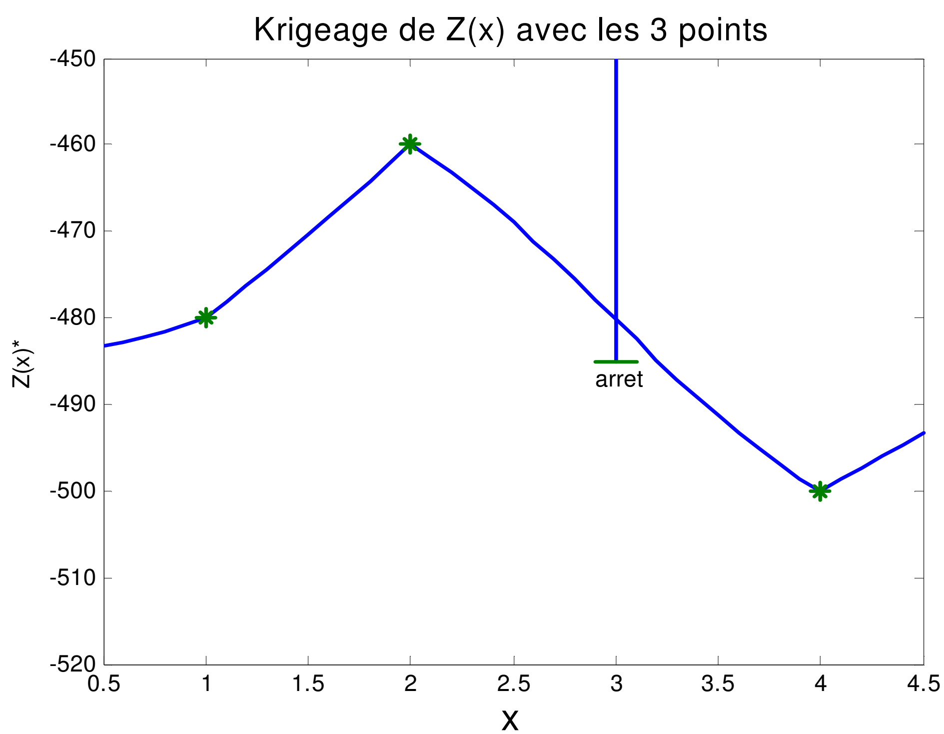
Exemple :

3 forages ont intercepté le sommet d'un réservoir pétrolier

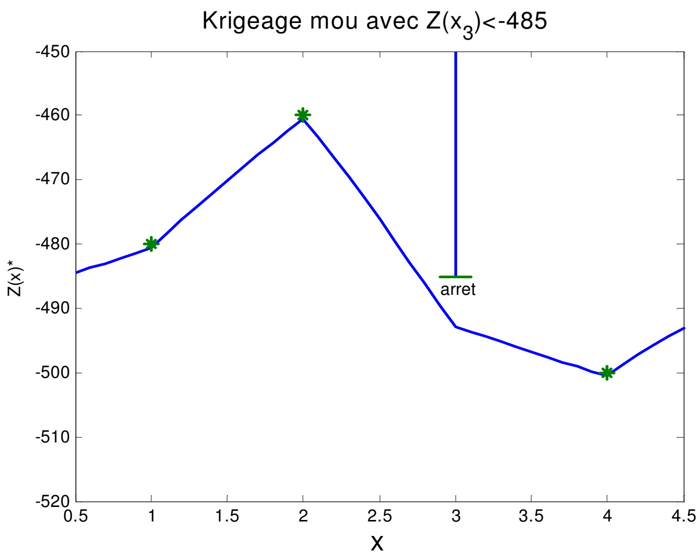
Z(1) = -480, Z(2) = -460, Z(4) = -500

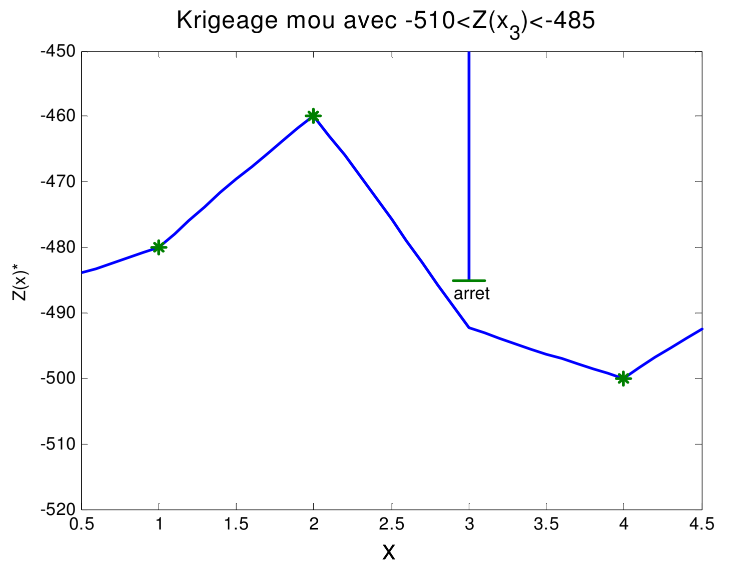
un 4e forage situé en x=3, a dû être arrêté au niveau –485 sans que le sommet n'ait été intercepté !

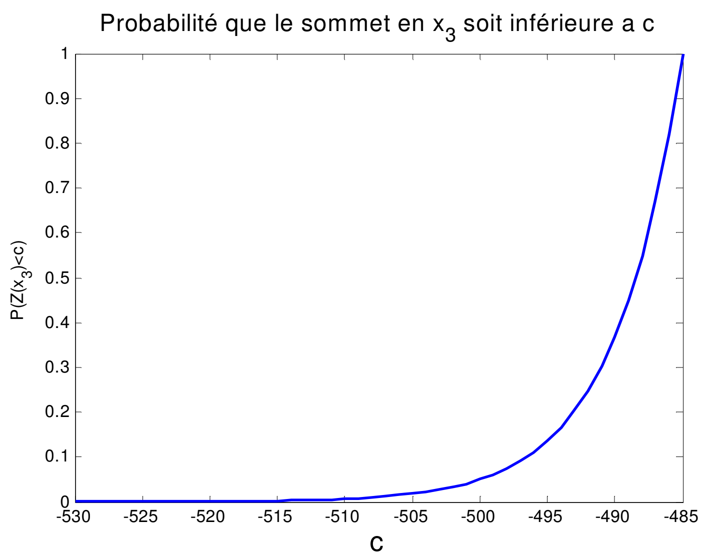
Solution par KO de Z(x) ≈ solution par KO de I(x) avec les 3 forages (1,2,4)

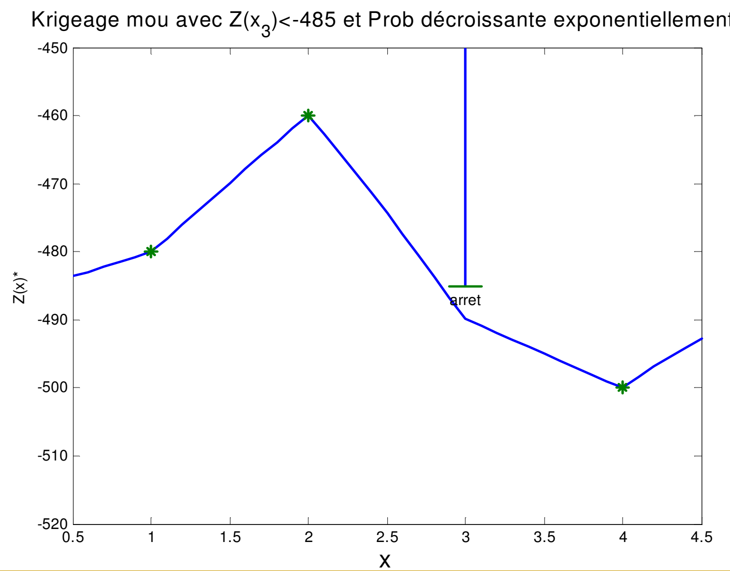


La solution n’est pas acceptable ! Elle contredit l’information en x=3.


Krigeage mou avec Z(x3)<-485
Z(x)*
x
arret


Krigeage mou avec -510<Z(x3)<-485
Z(x)*
x
arret


Probabilité que le sommet en x3 soit inférieure a c
P(Z(x3)<c)
c


Krigeage mou avec Z(x3)<-485 et Prob décroissante exponentiellement
Z(x)*
x
arret

Remarques

Soit le seuil « c » correspondant à un quantile « p » de la distribution de Z(x)

I(x,c) a les propriétés suivantes:

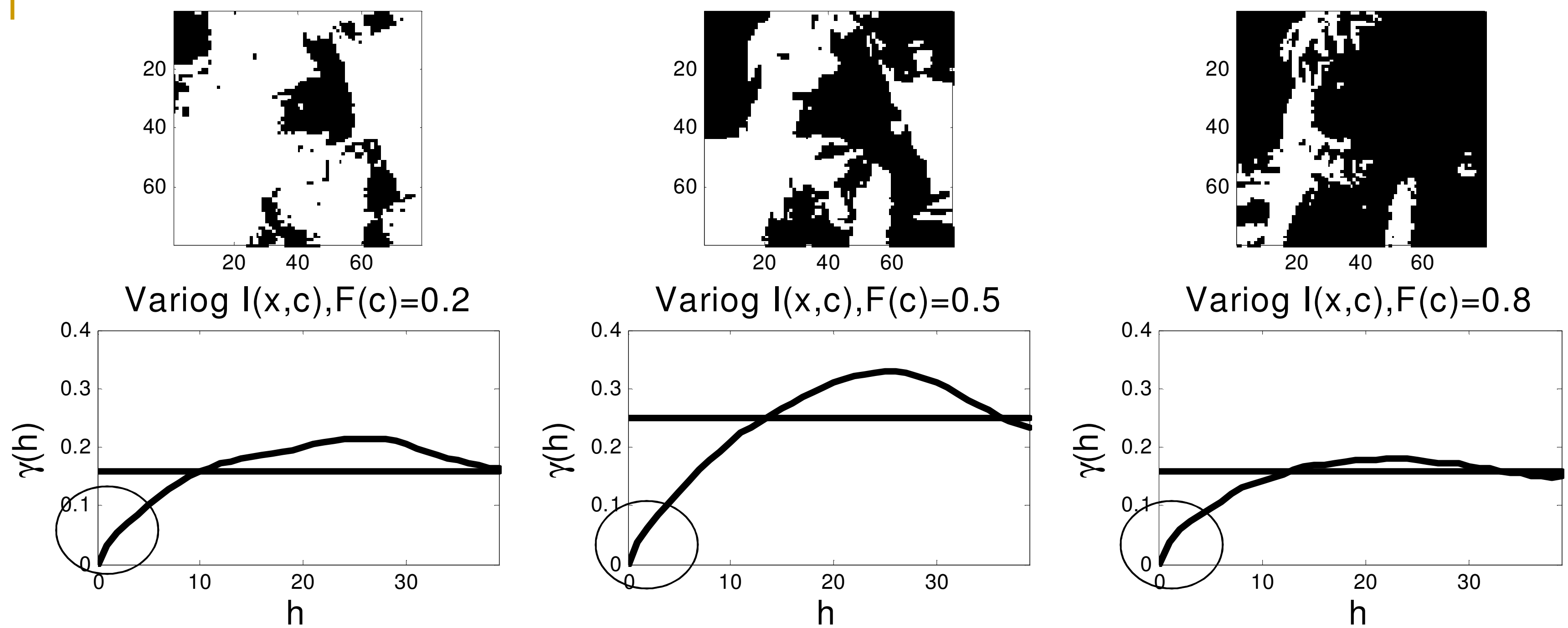
$$E[I(x,c)] = p$$

$$Var(I(x,c)) = p(1-p)$$

Ex.: si l'on choisit un seuil pour lequel 20% des observations sont inférieures, $D^2(I(x,c)|G) \approx$ **0.2*0.8 = 0.16**

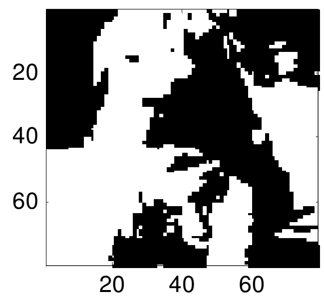
normalement, le palier est légèrement supérieur à $D^2(I(x,c)|G)$ **(dépendant de l'importance de la structure spatiale).**

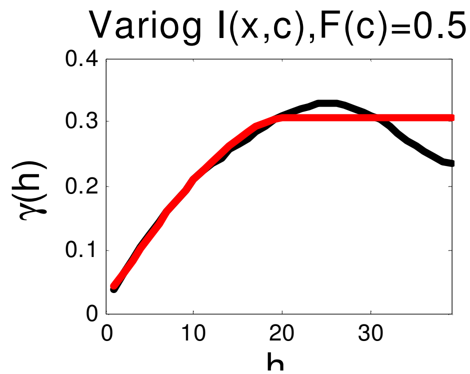
⇨ Les paliers sont presque déterminés par le seuil du codage de l'indicatrice



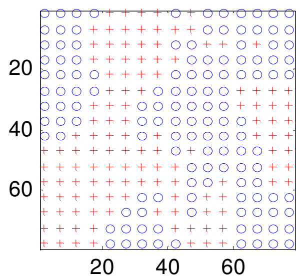
Les variogrammes d’indicatrices ne peuvent montrer un comportement parabolique à l’origine => proscrire le modèle gaussien !

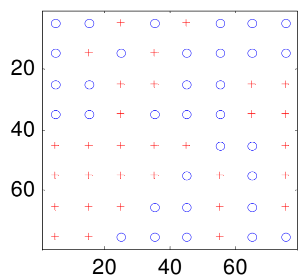
Exemple : déterminer le volume d'un sol contaminé au delà d'une norme



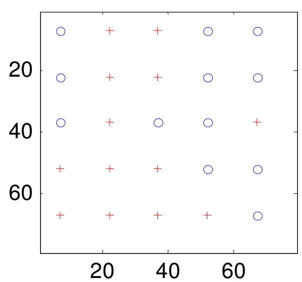


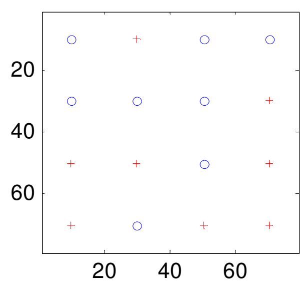
C=130; V=3120



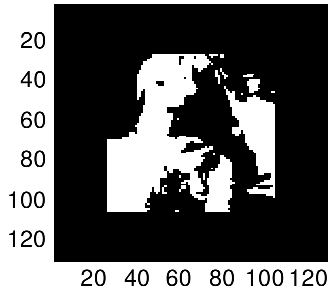


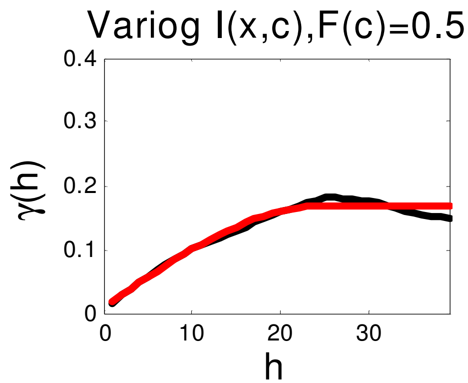
Pas	n	V*	σ	CI (95%)
5	256	3020	93	[2834,3205]
10	64	3023	210	[2603,3443]
15	25	3002	387	[2228,3775]
20	16	3089	527	[2036,4142]





Que se passe-t-il si l'échantillon déborde de la zone d'intérêt ?





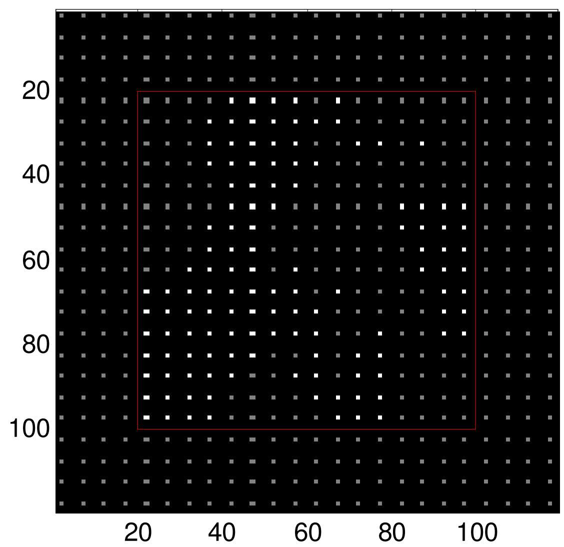
Le variogramme des indicatrices change

	Surface>c		Écart-type	
Pas	Sans	Avec	Sans	Avec
5	3020	3096	93	132
10	3023	3110	210	230
15	3002	4115	387	403
20	3089	3267	527	577

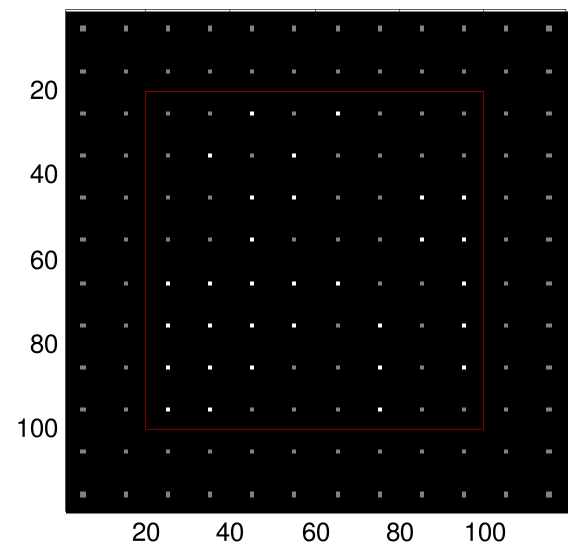
Les estimés sont semblables et l'ordre de grandeur des écarts-types est comparable, même si la zone couverte est 2.2 fois + grande en superficie

⇩

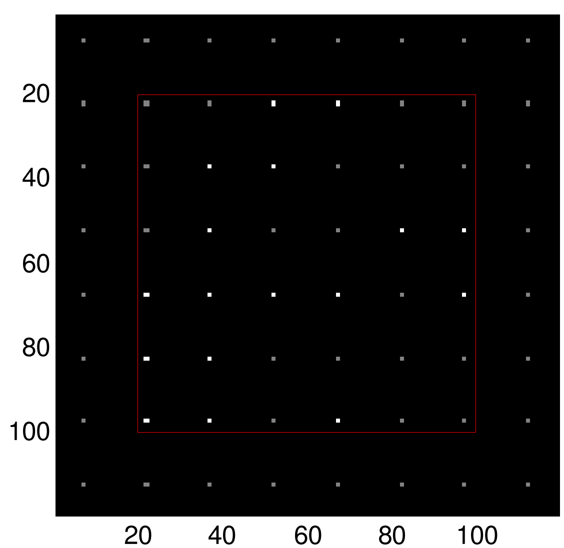
Bonne robustesse au choix initial de la zone d'étude as=5



Pas=10



Pas=15



Pas=20