
Théorie des Turbomachines

M. Reggio et J-Y. Trépanier



Reggio, Trépanier

Table des matières

1		7
1.1	Classification des turbomachines	7
1.2	Bref historique	11
2		21
2.1	Dynamique des fluides et turbomachines	21
2.1.1	Conservation de la masse	21
2.1.2	Conservation de la quantité de mouvement	22
2.1.3	Conservation du moment de la quantité de mouvement	22
2.1.4	Équation d'Euler	22
2.1.5	Equation d'Euler et l'équation de conservation de l'énergie	26
2.2	Rappels de notions de thermodynamique	28
2.2.1	Rapport de température	30
2.2.2	Rapport de pression et de densité	31
2.2.3	Entropie	32
2.3	Rendement	32
2.3.1	Rendement isentropique	33
2.3.2	Rendement mécanique	37
2.3.3	Rendement volumétrique	37
2.3.4	Rendement global	38
2.4	Types de travail	38
2.4.1	Travail isentropique	38
2.4.2	Travail effectif	39
2.4.3	Travail polytropique	39
2.4.4	Exemples	44
2.4.5	Exercices	49

3		52
3.1	Les triangles de vitesse	52
3.1.1	Nomenclature et convention de signes	53
3.2	Le triangle normal	56
3.3	Caractérisation des triangles de vitesse	57
3.3.1	Le coefficient de charge	57
3.3.2	Le coefficient de débit	58
3.3.3	Le degré de réaction	59
3.4	Turbines et degré de réaction	61
3.4.1	Expressions pour le degré de réaction	63
3.5	Les triangles de vitesse spéciaux	65
3.5.1	Degré de réaction de 100 %, $R = 1$	66
3.5.2	Degré de réaction de 50 %, $R = 0.5$	67
3.5.3	Degré de réaction nul, $R = 0$	68
3.6	Les compresseurs axiaux	70
3.7	Analyse du Rendement	73
3.7.1	Choix des coefficients de charge et de débit et du degré de réaction	73
3.7.2	Considérations théoriques et empiriques	74
3.7.3	Corrélations	75
3.8	Grille d'aubes	77
3.8.1	La solidité ou le pas de la grille	79
3.8.2	Principes généraux sur la forme des pales	81
3.9	Opération hors-design	84
3.9.1	Caractéristiques	84
3.9.2	Compresseur en mode hors-design	85
3.9.3	Turbine en mode hors-design	88
3.10	Diffusion de l'écoulement	89
3.10.1	Exemples	91
3.10.2	Exercices	109
4		114
4.1	Compresseurs	114
4.1.1	Transfert d'énergie	115
4.1.2	Déviations et facteur de glissement	116
4.1.3	L'inclinaison des pales	119
4.1.4	Les diffuseurs	123
4.2	Pompes centrifuges	127

4.2.1	Caractéristiques et degré de réaction	128
4.2.2	Point d'opération pour les pompes et le système hydraulique	132
4.3	Turbines Hydrauliques	133
4.3.1	Exemples	140
4.3.2	Exercices	144
5		148
5.1	Forme particulières	152
5.1.1	Pompes	152
5.1.2	Ventilateurs	153
5.1.3	Compresseurs et turbines à gaz	153
5.1.4	Turbines hydrauliques	154
5.2	La généralité des courbes caractéristiques	155
5.3	Vitesse spécifique et diamètre spécifique	161
5.3.1	Pompes et turbines hydrauliques	161
5.4	Diagramme de Cordier	165
5.4.1	Utilisation des nombres adimensionnels	167
5.4.2	Exemples	169
5.4.3	Exercices	171
6		174
6.1	Le cycle idéal d'un turbomoteur	175
6.1.1	Efficacité idéale	176
6.1.2	Poussée de propulsion	177
6.1.3	Performance du cycle d'un turbomoteur	185
6.1.4	Analyse d'un turboréacteur	187
6.1.5	Analyse d'une turbosoufflante	189
6.1.6	Détermination du SFC pour un turbojet	190
6.2	Production de puissance	191
6.2.1	Le cycle avec surchauffe	191
6.2.2	Le cycle avec régénération	192
6.2.3	Le cycle avec refroidissement intermédiaire	194
6.3	Cycles réels de la turbine à gaz	195
6.3.1	Utilisation des c_p variables	195
6.3.2	Variations des propriétés du gaz	196
6.3.3	Le brûleur	198
6.3.4	La consommation spécifique	202

6.3.5	Efficacité des échangeurs de chaleur	202
6.3.6	Optimisation des cycles réels	204
6.4	La performance hors-design	205
6.4.1	Performances hors-design des composantes de turbine à gaz	206
6.4.2	Mariage des composantes (matching)	206
6.4.3	Exemples	208
6.4.4	Exercices	216

Chapitre 1

Les roues du temps

Les turbomachines forment une famille importante d'appareils qui utilisent un fluide pour effectuer une transformation d'énergie. De manière générale, une turbomachine est définie comme un dispositif qui permet de donner ou de retirer de l'énergie à un fluide par l'action dynamique d'un élément rotatif appelé *le rotor*. Le préfixe *turbo* provient du latin *turbinis* qui signifie *qui tourne* ou alors *en rotation*. Il a été introduit en France en 1822 par l'ingénieur de mines Claude Burdin(1790-1873).

On rencontre les turbomachines dans un grand nombre d'applications nécessitant un transfert d'énergie. Essentiellement, on distingue trois types d'applications : *Production d'électricité*, turbines à gaz, turbines à vapeur, turbines hydrauliques ; *Propulsion*, turbines à gaz d'aviation compresseurs de locomotives, turbines à gaz de navires ; *Industrie lourde*, compresseurs centrifuges, turbo-compresseur pour moteur diesel, turbines à vapeur, turbines à gaz, pompes et ventilateurs.

1.1 Classification des turbomachines

Il existe plusieurs façons de classifier les turbomachines. La première concerne le *sens du transfert d'énergie*. On divise alors les turbomachines en deux catégories principales :

- les turbomachines qui fournissent de l'énergie au fluide (enthalpie).
Dans ce groupe on trouve les compresseurs, les ventilateurs et les pompes ;

- les turbomachines desquelles on retire de l'énergie du fluide pour l'utiliser comme un travail mécanique. Dans ce cas, on parle alors de turbines.

On trouve une seconde classification des turbomachines en fonction de la *direction principale de l'écoulement* par rapport à l'axe de rotation de la machine. Selon ce critère on a :

- les turbomachines *axiales* dans lesquelles la direction de l'écoulement est parallèle à l'axe de rotation de la machine ;
- les turbomachines *radiales* ou *centrifuges* dans lesquelles une partie importante de l'écoulement à l'entrée ou à la sortie est dans la direction normale à l'axe de rotation ou radiale ;
- les turbomachines *mixtes* dans lesquelles la direction de l'écoulement, à l'entrée ou à la sortie, comporte de composantes axiales et radiales

Une troisième classification peut être faite en fonction de la *nature du transfert énergétique*. En particulier on trouve :

- les turbomachines à *impulsion* ou à *action* dans lesquelles le fluide subit seulement un changement d'impulsion lors du passage dans le rotor sans aucune variation de pression ;
- les turbomachines à *réaction* dans lesquelles l'échange énergétique entre le fluide et le rotor entraîne une chute de pression sans aucune variation de vitesse ;
- les turbomachines de type *combiné* dans lesquelles le fluide subit un changement de pression et de vitesse lors de son passage par le rotor.

Enfin, on peut re-classifier les turbomachines en fonction du *type d'installation*. On distingue deux types :

- les turbomachines encastrées telles que les pompes centrifuges, les turbines à gaz etc., où le fluide circule à l'intérieur de conduits ;
- les turbomachines en veine libre telles que les éoliennes, les hélices d'avion ou de navire.

La figure 1.1 illustre une turbine à gaz composée d'un compresseur axial ayant 7 étages et d'une turbine axiale ayant 2 étages. La figure 1.2 illustre les différentes composantes de cette même turbine à gaz. On représente habituellement une telle turbine selon une coupe axiale, telle qu'illustrée sur la figure 1.3 et une coupe circonférencielle, telle qu'illustrée à la figure 1.4.

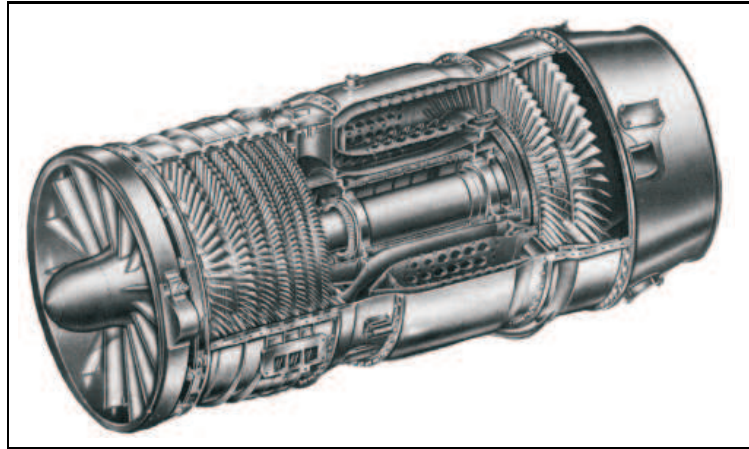


FIG. 1.1: Turbine à gaz

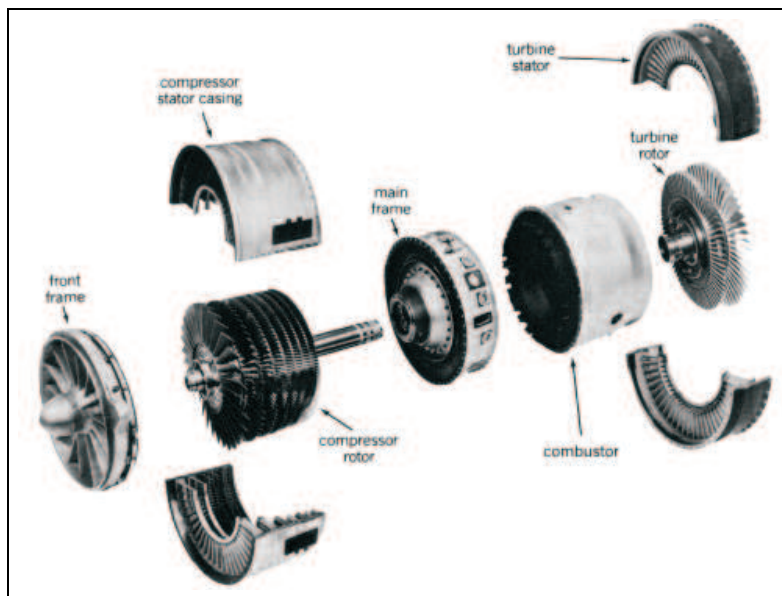


FIG. 1.2: Vue en explosé de la même turbine

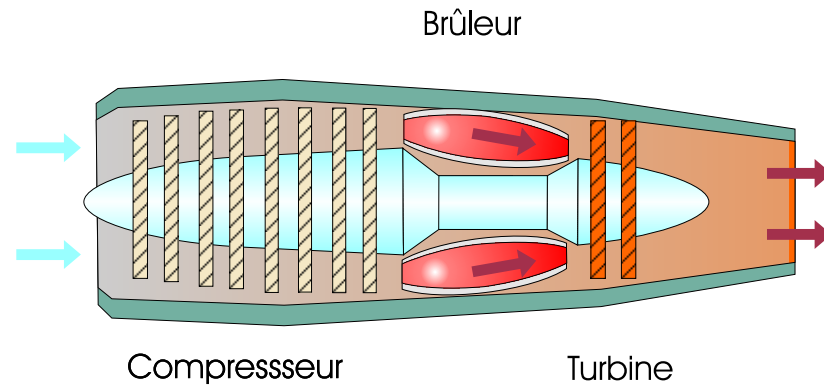
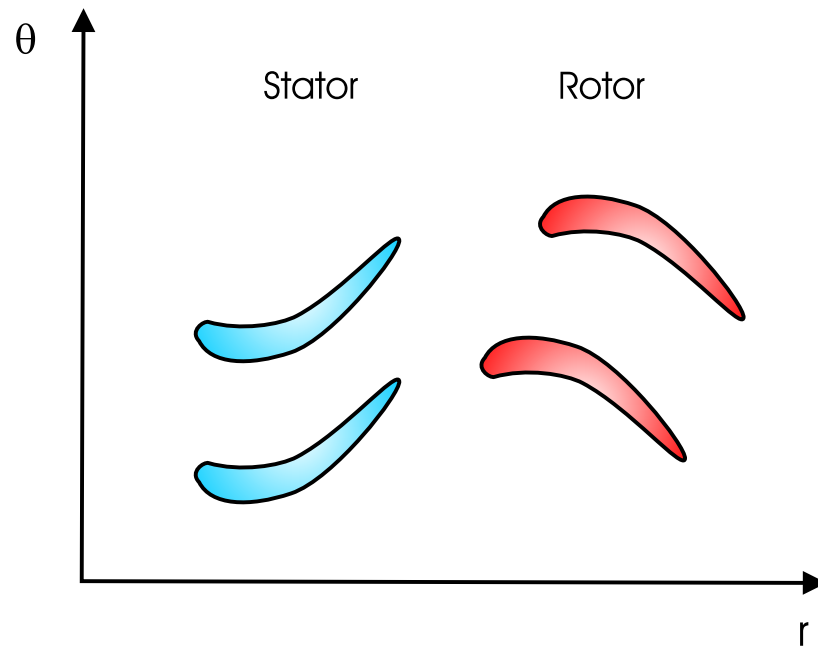


FIG. 1.3: Schéma d'une turbine à gaz axiale

FIG. 1.4: Coupe circulaire (θ, x) d'un rotor et stator

La figure 1.5 illustre les éléments d'un compresseur centrifuge. L'air entre par l'oeil de façon parallèle à l'axe de rotation et ressort dans le diffuseur avec une vitesse débitante radiale et une vitesse tangentielle (composante circumférencielle) importante.

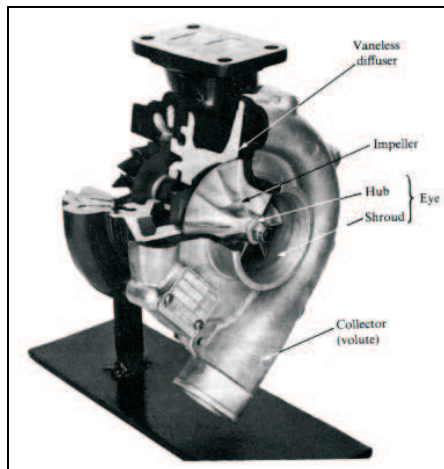


Fig. 1.5: Compresseur centrifuge

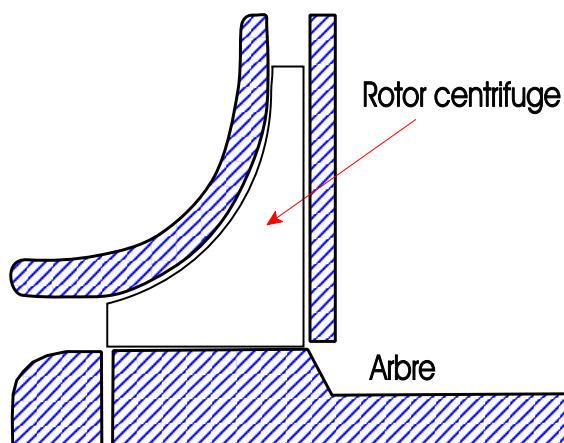


FIG. 1.6: Coupe axiale($r - z$) d'une machine radiale

On utilisera habituellement une coupe axiale, telle qu'illustrée à la figure 1.6 pour spécifier les dimensions d'une telle machine.

1.2 Bref historique

Suivant le parcours des célèbres conférences données par de Sir Charles Parson en 1911, on peut attribuer à Héron d'Alexandrie l'invention de

l'ancêtre des turbomachines modernes. Vers l'an 200 A.C, Alexandrie était une province Romaine au sommet de la prospérité avec une importante concentration de richesse et de savoir faire. Dans la ville d'Euclide, Héron, un rédacteur innui, écrivit le manuscrit "Spiritalia seu Pneumatica" où l'on retrouve la description d'un certain nombre machines à vapeur inventées par l'ingénieur et mathématicien Cestesibus (270 A.C.) et d'autres inventées par lui-même. Malheureusement, dans son traité Héron n'identifie pas à qui appartenait la "propriété intellectuelle" des différents dispositifs. Selon les figures du document, plusieurs de ces machines étaient employées pour ouvrir les portes des temples, mais c'est le dispositif identifié par le No 70 qui a attiré le plus l'attention des historiens. Il s'agissait d'une sphère de cuivre montée sur pivots sur laquelle on avait ajusté deux petits tuyaux d'échappement recourbés. Lorsque l'on remplissait partiellement la sphère d'eau et que l'on chauffait le tout sur un feu, la vapeur ainsi produite s'échappait des tuyaux et faisait tourner la sphère par réaction. La figure (1.2) correspond à celle d'un dessin simplifié de l'éolipile d'Héron, selon l'interprétation du professeur J. G. Greenwood, apparaissant dans un document gardé par le musée britannique.

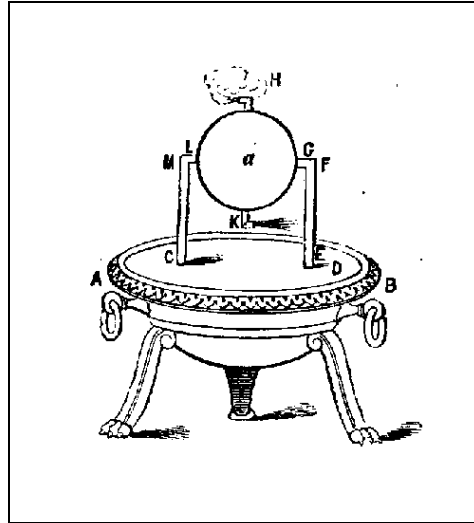


Fig. 1.7: Turbine de Héron

Une autre route de l'histoire des turbomachines remonte peu avant l'ère chrétienne où déjà les Syriens employaient le moulin à eau. Celui-ci était essentiellement une roue en position horizontale placée dans le courant avec l'arbre en position verticale. Par sa nature simple, l'usage de ce dispositif se propagea très rapidement en Grèce et dans le reste de l'ancien monde pour atteindre la Chine au premier siècle de l'ère chrétienne.

À cette même époque, les Romains aussi utilisaient également les roues à aube pour moulin le grain. Mais, leur conception était tout différente avec la roue disposée verticalement et tournée sur un arbre horizontal. L'inventeur de cette roue hydraulique fut l'ingénieur et architecte Vitruvius autour de l'an 27 A.C. La nouveauté de ce type de moulin par rapport à celui à axe verticale était l'inclusion d'engranages pour permettre un ajustement par rapport à

la vitesse de la rivière. Ces deux sortes de machines tournantes témoignent de la naissance de la transformation de l'énergie de l'écoulement de l'eau en mouvement rotatif

Au cours des siècles suivants, on retrouve les efforts de plusieurs mathématiciens et expérimentateurs dans le développement des ancêtres de turbomachines actuelles. Entre le XI^e et le XIV^e siècle, leur évolution peut se retracer par l'application de la roue hydraulique, où elle passa de l'actionnement des moulins à grain vers l'actionnement d'éléments de plus grande envergure, tels que l'outillage des métallurgistes (perceuses, forges, scies mécaniques, etc).

Selon les archives royales d'Espagne, on note qu'en 1543, l'officier de la marine, Blasco de Garay aurait tenté d'entraîner un navire au moyen de roues à pales impulsées par la vapeur. Mais, ce n'est qu'en 1629, que l'ingénieur italien Giovanni Branca, de la ville de Loretto, a présenté avec succès la première machine à vapeur dans laquelle un jet était dirigé vers une roue horizontale connecté à un système d'engrenages pour actionner un presse. La figure (1.8) illustre l'appareil de Branca.

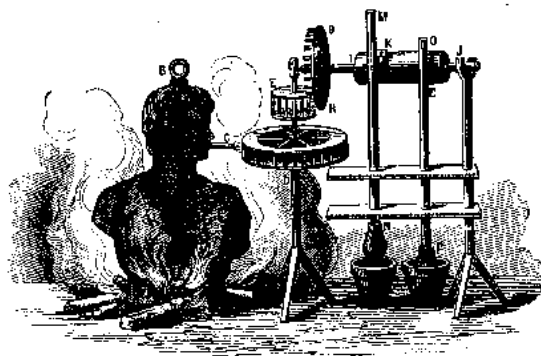


FIG. 1.8: Appareil de Giovanni Branca

À l'aube de la révolution industrielle, les pompes étaient de plus en plus en demande pour le drainage des mines. Aujourd'hui, on sait que ce problème avait été traité plusieurs siècles auparavant, puisque en 1772, on a trouvé dans la mine abandonnée de San Domingos, au Portugal, des vestiges d'un rotor centrifuge en bois estimé avoir été construit au VI^e siècle.

Cependant, l'invention et la formalisation de la pompe centrifuge doit être attribué à Denis Papin en 1689. Papin né en France, travailla en An-

gleterre, en Italie et en Allemagne. Sa contribution se situe au niveau de la compréhension du vortex forcé généré au moyen d'aubes à l'intérieur d'une conduite en spirale. L'autre invention importante de Denis Papin, est le cuiseur ou marmite à pression.

En ce qui regarde la théorie des machines hydrauliques, le mathématicien suisse Leonard Euler fut sans doute le premier à proposer en 1754 un modèle qui permit une analyse scientifique quantitative du transfert d'énergie dans ces turbomachines. C'est sur les machines hydrauliques que se portèrent les premières études en vue de déterminer la pression exercée par l'eau sur les pales. Ces genres d'analyses permirent à ses contemporains de se positionner vers une prometteuse voie pour le développement de turbomachines de plus en plus performantes. Malgré ceci, plusieurs années s'écoulerent avant que la mise en oeuvre des rotors centrifuges se fasse par d'autres moyens que la technique d'essai et erreur.

Quelques années plus tard, en 1828, le talentueux mathématicien et mécanicien Jean-Victor Poncelet établit un moyen d'augmenter le rendement des roues à aubes planes, dont le rendement n'était que de l'ordre de 30%. Dans ce domaine, la contribution principale de Poncelet se retrouva au niveau de l'introduction d'aubes avec courbure pouvant ainsi diminuer les pertes d'énergie dues au choc de l'eau sur les pales. Poncelet est également reconnu comme l'un des fondateurs de la géométrie projective, si l'on se réfère à son ouvrage *Traité des propriétés projectives des figures* publié en 1822. La figure 1.9 est une reproduction de la modification proposée par Poncelet

Turbines hydrauliques

Dans les années 1820-1833, le professeur Claude Burdin de l'École des Mines de Saint-Étienne a réalisé plusieurs installations avec une nouvelle génération de machines hydrauliques dérivées de la roue d'Euler. Burdin a nommée ces dispositifs turbines, mot dérivé du latin *turbinis* signifiant "qui tourne". Bien que la roue de Burdin était une nette

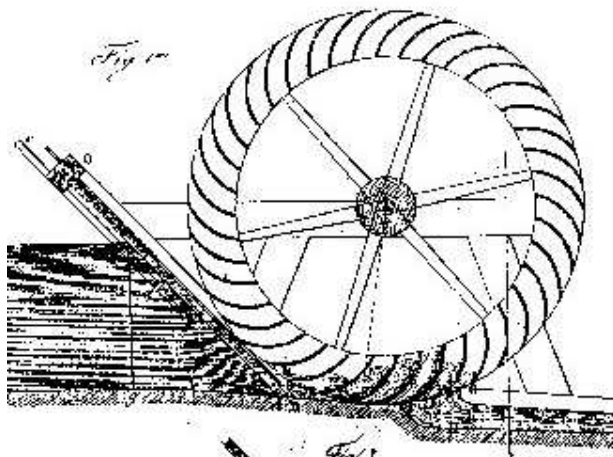


FIG. 1.9: Roue de Poncelet

amélioration de ses prédécesseurs, elle n'a pas réussi à passer au stade de machine industriellement utilisable.

Suite à ces travaux, le brillant élève de Burdin, Benoit Fourneyron, améliora la conception de son professeur et en 1827 fit marcher une turbine d'essai de 6 CV sous une chute de 1,40 m. Trois ans plus tard, il installa une turbine industrielle d'une puissance de 50 CV aux Forges de Fraisans. En 1837, la turbine de Fourneyron atteignait les 60 CV et tournait à 2300 rpm. Elle suivait les caractéristiques du schéma de conception donné par Burdin, composée de deux roues horizontales concentriques; la première étant un distributeur fixe munie d'aubes directrices placé à l'intérieur et

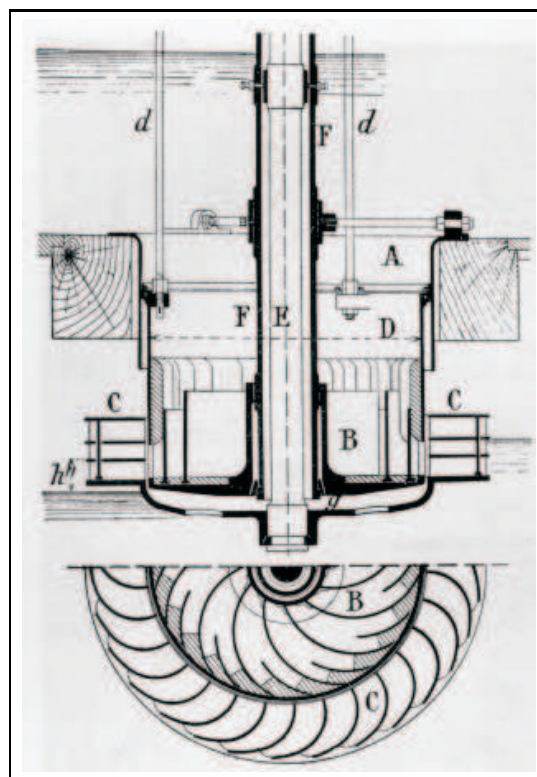


Fig. 1.10: Turbine de Fourneyron

l'autre, le rotor mobile, placée à l'extérieur. Dans ces machines, l'eau circulait de l'intérieur vers l'extérieur et de haut en bas. Fourneyron aussi incorpora des aubages dont l'inclinaison pouvait varier avec la hauteur de chute. La figure (1.2) illustre la turbine proposée par Fourneyron.

Les turbines de Fourneyron furent installées en Europe et aux États-Unis où des améliorations furent apportées par l'ingénieur mécanicien Uriah Boyden en 1844. Quelques années plus tôt, le jeune anglais James B. Francis émigra aux États-Unis et entreprit sa carrière comme dessinateur dans la Lowell Locks and Canal Company. Il était devenu l'ingénieur en chef en 1837 et devint le directeur en 1845. Le groupe Appleton Mills acheta en 1844 une turbine de Boyden dont Francis fut tellement émerveillé qu'il décida de faire acheter le brevet en 1849. Dans son laboratoire, Francis un expérimentateur passionné, effectua des longues campagnes de tests et obtint des règles empiriques pour la construction de turbines plus performantes qui dépassèrent le cap de 80% de rendement. Après ces expériences, Francis inversa le design de la turbine Fourneyron-Boyden en plaçant le distributeur fixe à l'extérieur et la roue mobile à l'intérieure. Ce système avait déjà été proposé par Poncelet vers l'année 1820 et breveté par le Nord-américain Samuel B. Howd en 1838. A partir d'environ des années 1860, cette turbine commença à remplacer formellement la roue hydraulique.

Lester Pelton, originaire de l'Ohio, partit tôt dans sa jeunesse pour la Californie où il s'installa à Sacramento pour apprendre le métier de pêcheur. On peut bien imaginer qu'à cette époque ses premières réflexions ont eu lieu sur la puissance de l'eau en mouvement. Toutefois, ce fut l'époque fébrile des découvertes d'or qui l'a poussé à déménager à Camptonville dans le Nevada pour tenter sa chance dans le monde fascinant des mines d'or. Cependant, Pelton ne se sentait pas attiré par la vie de mineur. Par contre, il voulait améliorer les méthodes d'exploitation employées dans les mines qui avaient un grand besoin de puissance pour opérer les machines ainsi que pour transporter les minéraux. On dit que son inspiration de la turbine lui est venue dans la décennie de 1870 en observant l'accélération sans limites d'une roue hydraulique accidentellement désalignée lorsqu'elle était frappée par un jet d'eau. Ainsi Pelton vint à la conclusion qu'on pouvait mieux exploiter la puissance d'un jet en inversant sa direction avec l'aube. Il inventa alors des augets avec deux poches accolées qui dévient le jet en presque 180°. Puisque le fonctionnement de cette turbine dépend de l'impulsion d'un jet, on la catégorise comme turbine à impulsion.

La version populaire concernant l'invention de Pelton raconte qu'un jour il était en train de chasser une vache de sa maison à l'aide d'un boyau d'arrosage. Lors de l'opération, il aurait dirigé le jet tout juste dans une narine de la vache et que l'eau serait sortie par l'autre. Cet incident lui aurait donné l'idée de construire des augets partitionnés.

Au cours des années 1877-1880, Pelton développa davantage son design (Brevet 223,692, Octobre 1880), mais avec peu de succès commercial. Mais, en 1883, la Idaho Mining Company de Grass Valley en Californie, organisa une compétition entre les différents modèles de turbines existantes. La turbine de Pelton gagna le concours avec un rendement de 90.2%, comparé aux autres turbines dont la meilleure atteignait seulement 76.5%. La fabrication industrielle de la turbine Pelton commença à partir de ce moment. En 1888, avec l'aide de A. P. Brayton, il forma la Pelton Water Wheel Company. Après Pelton, plusieurs ingénieurs ont contribué à l'amélioration de cette technologie.

Victor Kaplan naquit en Autriche en 1876 et il fut un étudiant de grand talent. Déjà à l'école, il construisait toute sorte d'engins incluant, bien sur, les miniturbines. Kaplan n'était pas seulement doué pour les sciences mais aussi par les sports où il excellait au tennis et au patin à glace. Il fit des études en génie à l'université technique de Vienne et après un séjour académique à l'université Bern en Allemagne, il obtint le doctorat dans son Alma Mater en 1909. En 1912, il breveta une turbine corrigeant le rendement médiocre de la turbine Francis dans le cas de faibles charges. Cette turbine est à axe verticale et à rotor en hélice avec des aubes à pas adaptable à la hauteur d'aspiration et le débit. La turbine expérimenta des problèmes avec l'apparition de bulles, ce qui entraîna des aubes endommagées et une forte dégradation du rendement. Après un nombre important d'essais effectués en laboratoire, la cavitation fut identifiée comme étant la cause du problème et des corrections furent apportées au moyen de nouvelles géométries. Les modifications ont permis l'installation de la première turbine Kaplan commerciale, en 1919, dans une usine textile de Velm en Autriche. Cette pièce se trouve aujourd'hui au musée technique de Vienne.

Le problème de la cavitation continua à hanter le développement des turbines Kaplan, jusqu'en 1925 où il a été supprimé par une société suédoise au moyen d'un servo-mécanisme pour la rotation des aubes. En cette année, une turbine au rotor de 5,8 m de diamètre pour une hauteur de chute de 6,5 m et atteignant jusqu'à 8 MW fut installé à Lilla Edet en Suède.

Turbines à vapeur

Après l'extrapolation faite par Giovanni Branca en 1629, de ce qu'aurait été l'invention d'Héron, les premiers appareils industriels à vapeur, ou "pompes à feu", sont apparus au XVIIIème siècle pour extraire l'eau des galeries des mines grâce aux travaux de Denis Papin, Thomas Savery et Thomas Newcomen. Cependant, la véritable machine à vapeur industrielle, dans le sens large (chemins de fer, navigation, etc), fut une réalisation de James Watt.

À partir du début du XIXème siècle, des recherches s'opèrent pour améliorer le fonctionnement et le rendement des machines à vapeur et l'idée d'une machine rotative commença à germer dans l'esprit de plusieurs inventeurs. En raison de l'énergie cinétique de l'écoulement de vapeur, la turbine pro-

mettait des rendements supérieurs à ceux de la machine à piston de Watt. Elle aussi se profilait à un coût inférieur à cause d'une plus petite taille. Finalement, elle permettait la génération d'un mouvement rotatif sans avoir recours à une bielle.

La turbine à vapeur de nos jours n'est pas l'oeuvre d'un seul inventeur, mais le produit du travail acharné de plusieurs. Des contributions importantes furent apportées par Sir Charles A. Parsons (1854-1931) d'Angleterre, Gustaf Patrik

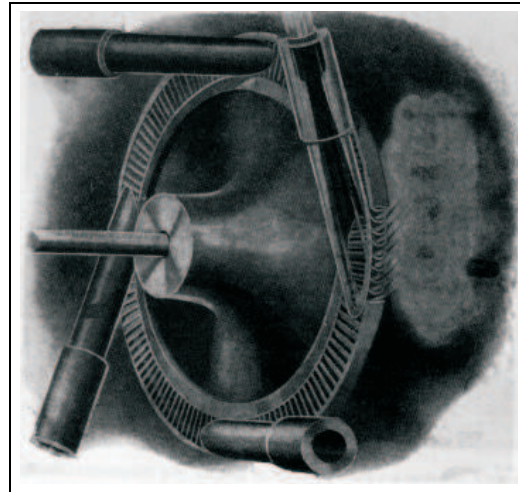


Fig. 1.11: Turbine à vapeur à impulsion

de Laval de Suède (1845-1913), Auguste Rateau (1863-1930) de France et par Charles Gordon Curtis (1860-1953) des États Unis. Parsons introduisit la turbine à plusieurs étages et il proposa la vente d'une première turbine industrielle vers 1884. Son design consistait en une machine axiale à réaction multi-étages et produisait 10hp à 18000rpm. À peu près à la même époque, de Laval développa la turbine à vapeur à impulsion alimentée par un jet supersonique permettant ainsi une utilisation plus efficace de la vapeur. Son principe est illustré sur la figure (1.2). De Laval, qui était descendant d'une famille française installé en Suède dans le XVIIIème siècle, est aussi connu

par l'invention du séparateur à crème.

Des raffinements ont été proposés par la suite, dont ceux de Rateau, avec une turbine multicellulaire ayant un rapport de pression uniforme pour toutes les étages. Curtis ajouta une conception basée sur deux séries d'aubages mobiles avec une couronne d'aubes fixes après les tuyères. En 1896 Curtis breveta son modèle de turbine à vapeur et vendit les droits à GE en 1901. La première turbine à gaz américaine en 1899 est également l'une de ses inventions.

Les turbines à gaz ont commencé à se matérialiser entre la fin du XIX^{ème} siècle et le début XX^{ème} siècle. On mentionne qu'une première turbine à gaz capable de fournir un travail net fut construite en 1903 par Elling en Norvège. Sa puissance était de 11hp et la température à l'entrée de la turbine était de 400 C. Un impact important pour l'industrie a été obtenu par la turbine à gaz industrielle de Brown-Bovery, développée sous l'influence de Stodola. La configuration comprenait un compresseur axial de 20 étages ayant un rendement de 86% et une turbine axiale de 5 étages ayant un rendement de 88%. Le rapport de pression était de 4.4 et la température maximale du cycle de 1000 F. Le rendement thermodynamique du cycle était alors de 18%.

En ce qui concerne l'utilisation de la turbine à gaz en propulsion aéronautique, l'histoire remonte en 1910 lorsque l'ingénieur d'origine roumain, Henri Coanda (1886-1972), essaya un avion, *sans hélice*. Le moteur était une turbine à gaz élémentaire composée d'un compresseur, d'une chambre de combustion et d'une tuyère. Coanda raconta lui-même, qu'il était en train de vérifier le moteur de l'avion sans aucune intention d'entreprendre le vol, lorsque l'avion s'éleva plus rapidement que ce qu'il aurait cru mais il s'écrasa et rapidement prit feu. Heureusement Coanda avait été projeté hors de l'appareil ce qui lui a sauvé la vie. On raconte que Gustave Eiffel aurait dit au sujet de l'invention de Coanda : "ce jeune homme aurait dû naître 30 ans plus tard". En effet, c'est dans les années 1930 que l'idée des turbines à gaz a été réellement présentée aux États-Unis, en France, en Italie, en Grande-Bretagne et en Allemagne.

Parmi les diverses inventions, on retrouve la contribution de René Leduc de France qui proposa un turboréacteur en 1938 et les travaux de Hans Pabst von Ohain en Allemagne, qui en 1939 donnèrent lieu à un turboréacteur dont la configuration comportait un compresseur centrifuge et une turbine à entrée radiale. À ces inventions s'ajoutèrent celles développées par

l'équipe de Secundo Campini qui construisit un turbopropulseur en 1940 et la contribution Frank Whittle d'Angleterre auquel on attribue la création pratique de la turbine à gaz moderne. La figure 1.12 illustre la turbine à gaz de Frank Whittle. Le premier turbojet des États Unis n'a été construit qu'en 1944, par la Westinghouse Electric Corp.

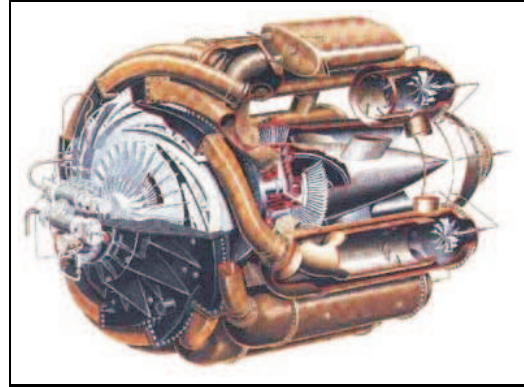


Fig. 1.12: La turbine à gaz de F. Whittle

Chapitre 2

Au commencement

2.1 Dynamique des fluides et turbomachines

Les principes fondamentaux de la conservation de la masse, de la conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de l'impulsion angulaire (ou le moment de la quantité de mouvement), sont les éléments clés pour les applications dans le domaine des turbomachines. Dans la suite, on rappelle les expressions mathématiques de ces principes à la lumière de la notion de volume de contrôle. La figure (2.1) illustre un volume de contrôle V de

2.1.1 Conservation de la masse

La conservation de la masse exprime que l'accumulation de matière dans un volume de contrôle est égale à la somme des flux massiques qui traversent les frontières du volume. L'expression mathématique du principe est :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.1)$$

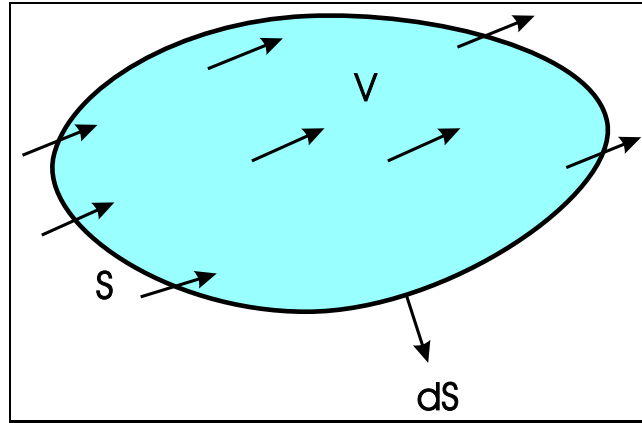


FIG. 2.1: Volume de contrôle

2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement indique que la sommation des forces est égale à l'accumulation de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle plus la somme des flux de quantité de mouvement qui traversent les frontières du volume..

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

2.1.3 Conservation du moment de la quantité de mouvement

Ce principe indique que la variation de l'impulsion angulaire est égale à la somme des moments des forces externes. Tel que pour la quantité de mouvement, la conservation du moment de la quantité de mouvement est couramment exprimée par la formule :

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2)$$

2.1.4 Équation d'Euler

Le point de départ pour l'étude des turbomachines est l'*Equation d'Euler*. Celle-ci peut être déduite aisément du principe de conservation de l'impul-

sion angulaire ou moment de la quantité de mouvement. En particulier, on considère un écoulement unidimensionnel en régime stationnaire dans le rotor d'une turbomachine ayant des conditions uniformes à l'entrée et à la sortie notées par les indices 1 et 2, respectivement. On applique alors, l'équation (2.2) à un filet de fluide entre ses deux points illustrés à la figure 2.2 et celle-ci devient :

$$\mathbf{M} = \int_S \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{r}_2 \times \rho_2 \mathbf{v}_2 Q_2 - \mathbf{r}_1 \times \rho_1 \mathbf{v}_1 Q_1 \quad (2.3)$$

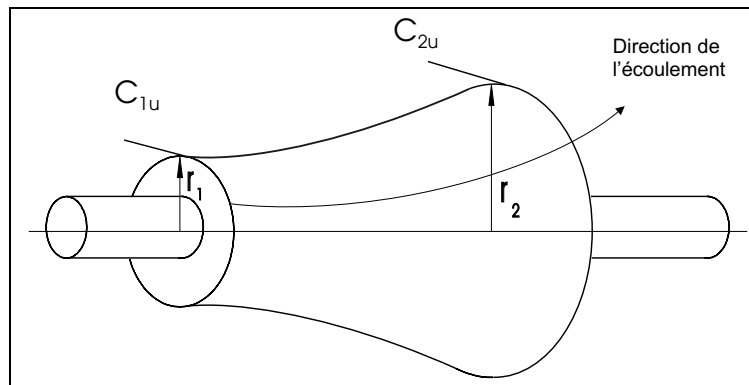


FIG. 2.2: Rotor schématique et équation d'Euler

D'autre part, pour un écoulement unidimensionnel en régime permanent, l'équation de la conservation de la masse se traduit par :

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \rho_2 \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 - \int_{S_1} \rho_1 \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = 0 \quad (2.4)$$

ou encore $\dot{m} = \rho_2 Q_2 = \rho_1 Q_1$. Alors, l'Eq.2.3 se réduit à :

$$\boxed{\mathbf{M} = \dot{m}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1)} \quad (2.5)$$

Bien que cette expression de l'équation d'Euler est sous une forme mathématique élégante, elle requiert de modifications pour être facilement utilisable.

Formes courantes

Dans une turbomachine, l'élément qui produit les changements importants dans le fluide est le rotor et un paramètre très important pour l'analyse est la variation de la vitesse dans les différents systèmes de référence.

Les vecteurs de vitesse à considérer sont la vitesse périphérique \mathbf{U} au rayon r par rapport au centre de rotation, la vitesse absolue \mathbf{C} du fluide mesuré dans le système fixe ou global et la vitesse relative \mathbf{W} dans un système solidaire avec l'aubage en mouvement. Ces trois vitesses sont reliées par l'équation :

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$$

Dans ce contexte, on appelle C_u la composante *tangentielle* de la vitesse absolue projetée dans la direction de \mathbf{U} , C_x la composante dans la direction *axiale* et C_m la composante *méridionale* de la vitesse \mathbf{C} selon la direction normale à \mathbf{U} (Fig.2.3). On considère que C_u est positive si elle a la direction de \mathbf{U} et négative dans le cas contraire. L'introduction de ces définitions dans l'équation(2.5) conduit à l'équation fondamentale des turbomachines.

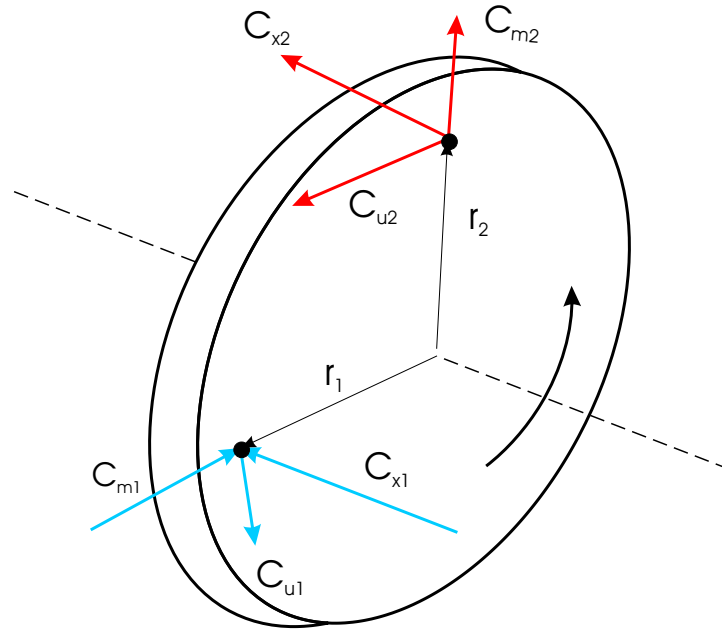


FIG. 2.3: Rotor élémentaire

$$\boxed{M = \dot{m}(C_{2u}r_2 - C_{1u}r_1)} \quad (2.6)$$

Pour un rotor ayant une vitesse de rotation ω , la puissance \dot{W} est donnée par :

$$\dot{W} = M\omega = \dot{m}(C_{2u}r_2 - C_{1u}r_1)\omega = \dot{m}(C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1)$$

où on a employé la relation : $U_i = r_i\omega$ ($i = 1, 2$). On peut ainsi considérer le *travail spécifique* (l'énergie transmise par *unité de masse*) entre le rotor et le fluide selon :

$$E = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1) \quad (2.7)$$

Pour les machines hydrauliques, on exprime généralement l'énergie par unité de poids, $\dot{m}g$, plutôt que par unité de masse \dot{m} . Dans ce cas, la puissance par unité de poids a les dimensions d'une distance et on la note par le symbole H , que l'on l'appelle *la charge* et elle devient :

$$H = \frac{(C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1)}{g} \quad (2.8)$$

Une deuxième forme de l'équation d'Euler peut être trouvée à partir de la relation trigonométrique :

$$C^2 + U^2 - 2U \underbrace{C \cos \bar{\alpha}}_{C_u} = W^2$$

Alors, les équations d'Euler (2.7) et (2.8) deviennent respectivement :

$$E = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} \quad (2.9)$$

$$H = \underbrace{\frac{C_2^2 - C_1^2}{2g}}_I + \underbrace{\frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}}_{II} + \underbrace{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2g}}_{III} \quad (2.10)$$

Ces deux équations montrent que le transfert d'énergie peut être répartie de différentes manières. Le premier terme indique la variation d'énergie cinétique dans l'écoulement, le deuxième, la variation d'énergie due aux forces centrifuges et le troisième la variation d'énergie due aux vitesses relatives W_i .

2.1.5 Equation d'Euler et l'équation de conservation de l'énergie

Pour un volume de contrôle V et en négligeant les effets dissipatifs, ce principe s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV + \int_S (\rho e + p) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \dot{Q} - \dot{W} + S$$

où :

- \dot{Q} = taux de transfert de chaleur au volume de contrôle
- \dot{W} = taux de travail extrait du volume de contrôle
- e = énergie totale par unité de masse
- S = Source d'énergie par unité de masse

L'énergie totale par unité de masse est définie $e = u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + gz$ avec u étant l'énergie interne, $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}$ l'énergie cinétique et gz l'énergie potentielle .

Dans l'étude des turbomachines, on utilisera habituellement les hypothèses suivantes :

- Écoulement permanent

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV = 0$$

- Écoulement unidimensionnel

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (1 : \text{entrée}, \quad 2 : \text{sortie})$$

- Le taux de transfert de chaleur est faible en des termes relatifs, i.e.

$$\dot{Q} = 0$$

- Aucun type de source ; $S = 0$

Alors, l'équation de l'énergie devient :

$$-\dot{W} = \dot{m} \left[\left(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \right]$$

En plus, dans une turbomachine, à gaz ou à vapeur, on peut considérer que la variation de l'énergie potentielle est négligeable par rapport aux autres formes d'énergie (cinétique, de pression et interne). Ainsi, $\left(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right)$
 $= \left(h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \right) - \left(h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \right)$ et l'équation de l'énergie prend la forme répandue :

$$\boxed{-\dot{W} = \dot{m}(h_{02} - h_{01})} \quad (2.11)$$

avec h étant l'enthalpie du fluide et $h_0 = h + \frac{1}{2}v^2$, l'enthalpie totale ou de stagnation.

Finalement, si on confronte cette équation par unité de masse avec l'Eq.2.7 (la convention de signe pour le travail est l'opposé), on trouve la relation suivante utilisée pour les turbines à gaz et à vapeur :

$$\boxed{(h_{02} - h_{01}) = (C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1)} \quad (2.12)$$

Rothalpie

L'équation (2.12), valable pour un écoulement adiabatique et dans l'absence de termes sources, peut s'écrire comme :

$$h_{02} - C_{2u}U_2 = h_{01} - C_{1u}U_1$$

et en général :

$$h_0 - C_u U = h + \frac{1}{2}C^2 - C_u U$$

Le terme $h_0 - C_u U$ est appelé *rothalpie* R_{th} . À partir de cette dernière équation, on peut définir l'*enthalpie de stagnation relative*. Notamment par :

$$\begin{aligned} R_{th} &= h + \frac{1}{2}C^2 - C_u U + \frac{1}{2}U^2 - \frac{1}{2}U^2 \\ &= h + \frac{1}{2}(C^2 - 2C_u U + U^2) - \frac{1}{2}U^2 \\ &= \underbrace{h + \frac{1}{2}W^2}_{\text{enthalpie de stagnation relative}} - \frac{1}{2}U^2 \end{aligned}$$

L'équation d'énergie dans *le système relatif* est donc :

$$R_{th} = h + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}U^2 = cte. \quad (2.13)$$

Pour un écoulement axial avec faible variation du rayon (quasi-cylindrique), la variation de l'énergie cinétique produite par la vitesse périphérique ($\frac{1}{2}\Delta U^2 =$

0) peut être considérée nulle. Alors, l'équation d'énergie dans le système relatif a la même forme que dans le système absolu.

2.2 Rappels de notions de thermodynamique

La thermodynamique, peut être interprétée comme étant la science des surfaces et des courbes dans une multitude d'espaces tridimensionnels définis par des coordonnées physiques, sans aucun souci du temps. Compliqué ? Pas nécessairement !

Tel que dans une géométrie on peut reconnaître des surfaces ou des lignes qui joignent deux points, dans le monde de la thermodynamique on définit également des points, des courbes et des surfaces. Cependant, les coordonnées de base ne sont plus les classiques x, y et z , de l'espace cartésien, mais des quantités ayant une connotation physique, tel que la pression, le volume et la température, par exemple. Dans ce monde, on identifie les coordonnées des points extrêmes d'une courbe thermodynamique comme étant deux *états thermodynamiques* et la courbe elle-même est associée à une *transformation* ou *processus*.

En résumé, lorsque on se transforme en funambule et qu'on "marche" d'une extrémité à l'autre sur une "corde thermodynamique", on dit qu'une transformation a eu lieu entre deux états. L'exemple typique est donnée par la compression d'un gaz dans un piston passant d'une pression P_1 , volume V_1 et température T_1 données vers une deuxième condition (état) décrite par P_2, V_2 et T_2 . La figure 2.4 illustre une surface et une transformation thermodynamique dans ce repère.

Le funambule nous permet aussi de donner une image à la notion d'équilibre thermodynamique. En effet, dans le monde tridimensionnel des coordonnées thermodynamiques, on peut concevoir un "funambule parfait" qui ne tombe jamais. La corde est rigide et il peut s'arrêter sur n'importe quel point de l'infinité qui forme la corde. Chaque point est un état d'*équilibre thermodynamique*.

Maintenant c'est le tour à l'épineux problème du temps. Lorsque on analyse une transformation thermodynamique, on découvre que la coordonnée temporelle est inexistante. Ceci implique, entre autres, qu'il est possible d'effectuer une évolution (se promener sur la corde) sans se préoccuper de la vitesse de la transformation. Encore plus, le concept de vitesse de transformation n'existe simplement pas puisque peu importe l'endroit où l'on soit

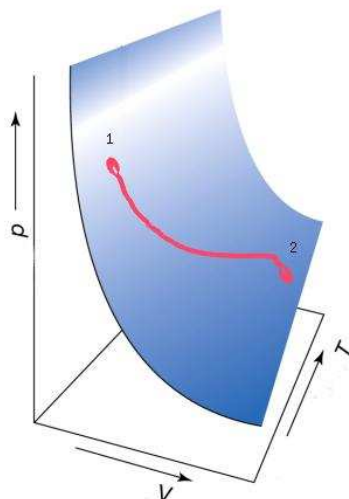


FIG. 2.4: Surface et processus thermodynamique

sur la corde, on sera toujours en équilibre. Dans ce cas la notion de temps irrelevante.

Dans l'univers de la thermodynamique, les courbes ne sont qu'un sous ensemble des surfaces appelé *surfaces d'état*. Elles sont formées par une infinité de points en équilibre thermodynamique. Par exemple, une surface d'état est celle formée par une multitude des points de pression, de température et de volume correspondant à plusieurs conditions d'un gaz enfermé dans un piston. C'est sur chacune de ces surfaces d'état que l'on définit des trajectoires (transformations) pour aller d'un point (un état) vers un autre.

Les derniers mots de cette courte introduction sont dédiés à la *réversibilité* et à l'*irréversibilité*. Si pour aller d'un état thermodynamique vers un autre on suit une courbe sur une surface d'état, on réalise alors une transformation réversible. Le nom réversible peut être associé au fait qu'on pourra emprunter le même chemin pour revenir au point de départ. Par contre, si on décolle de la surface d'état pour "sauter" d'un état vers un autre ou que l'on passe par un chemin inconnu, alors la transformation est de nature irréversible. Dans ce cas, il impossible de revenir au point de départ puisque aucun chemin n'a été défini. On pourra cependant retourner à l'état initial par d'autres chemins, mais on ne retrouvera pas la même qualité d'énergie. Qualité de l'énergie ?

Bien que un chemin irréversible emprunté par un mouton noir est in-

connu, il est souhaitable d'avoir une mesure de combien il s'est éloigné du chemin réversible des moutons blancs. Afin de mesurer cet écart on a inventé l'*entropie*. L'entropie est alors l'indice du degré d'irréversibilité.

En fait, l'irréversibilité d'un processus empêche de revenir à l'état initial sans payer un coût. Alors on découvre que l'entropie est une sorte de taxe qui indique que **l'énergie a diminué en qualité**. Voilà la deuxième loi ! L'image de Geourgescu pour expliquer les lois de la thermodynamique est incomparable à ce sujet.

Il apparente la quantité d'énergie à la quantité de sable dans un sablier. Le sable demeure le même indépendamment de la partie sur laquelle il se trouve. Par contre, une fois que tout le sable a rempli la partie inférieure, il ne peut pas revenir de soi-même vers la partie supérieure. Cette situation est associée à la perte en qualité que subit l'énergie dans le processus.

Il est grand temps de reprendre quelques unes des quantités employées en thermodynamique.

2.2.1 Rapport de température

L'enthalpie totale ou de stagnation est définie comme étant la somme de l'enthalpie et de l'énergie cinétique, soit : $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$. Pour un gaz parfait, avec $C_p = cte.$ et $h_{ref} = 0$, de sorte que $h = C_p T$ et $h_0 = C_p T_0$, alors :

$$T_0 = T + \frac{v^2}{2C_p}$$

En utilisant les relations :

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

on obtient

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)v^2}{2a^2} \quad \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2} \quad (2.14)$$

où le rapport $M = \frac{v}{a}$ est le nombre de Mach.

2.2.2 Rapport de pression et de densité

Lors d'un processus adiabatique réversible (isentropique), pour un gaz idéal les relations entre les propriétés totales et statiques sont :

$$\boxed{\left(\frac{P_0}{P}\right) = \left(\frac{T_{0s}}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \left(\frac{T_{0s}}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (2.15)$$

où l'indice s a été ajouté (un abus) pour insister que le passage de l'état statique vers l'état de stagnation s'effectue suivant un processus isentropique.

Équation non linéaire du débit massique

On a vu que (Éq.2.4) pour un écoulement unidimensionnel en régime permanent, l'équation de la conservation de la masse devient $\dot{m} = \rho v A$, alors :

$$\dot{m} = \rho v A = \frac{P}{RT} v A = \frac{P}{\gamma RT} \gamma v A = \frac{P}{\gamma RT} \gamma a M A$$

$$\dot{m} = \frac{P}{\gamma RT} \gamma \sqrt{\gamma RT} M A = \frac{P}{\sqrt{\gamma RT}} \gamma M A$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{RT}}{P A} = M \sqrt{\gamma}$$

Si on connaît les conditions de stagnation au lieu des conditions statiques, avec l'utilisation des relations (2.14) et (2.15), on trouve

$$\boxed{\frac{\dot{m} \sqrt{RT_0}}{P_0 A} = M \sqrt{\gamma} \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right]^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}} \quad (2.16)$$

L'utilisation de cette équation pour le calcul du débit massique est simple et directe. Par contre, elle prend la forme d'une équation non linéaire, de la forme $f(M) = 0$, lorsque l'inconnue c'est le nombre de Mach. Dans ce cas, la solution requiert d'outils de calcul numérique, tel que la méthode d'un point fixe ou la méthode de itérative de Newton. Pour faciliter la solution de cette équation anciennement on procédait par l'utilisation de tables.

2.2.3 Entropie

Le concept d'entropie permet de mesurer le degré d'irréversibilité d'une transformation. Pour un écoulement *stationnaire*, avec une accumulation nulle, le bilan générale sur un volume de contrôle ;

$$\text{Accumulation} = \underbrace{\text{Entrées} - \text{Sorties}}_{\text{transport par convection}} + \underbrace{\text{Entrées} - \text{Sorties}}_{\text{par gradient de } T} + \text{Génération interne}$$

devient

$$\dot{m}s_2 + \int_T \frac{Q_e}{T_e} = \dot{m}s_1 + \int_T \frac{Q_i}{T_i} + \dot{S}_g$$

Pour un fluide incompressible :

$$s_2 - s_1 = C \ln \frac{T_2}{T_1}$$

et pour un gaz idéal, avec l'aide de l'équation de Gibbs $Tds = du + pdv$, on peut obtenir les relations suivantes pour la variation d'entropie entre deux états 1-2 :

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{v_2}{v_1} + C_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

2.3 Rendement

Dans une turbomachine, il a fondamentalement deux types de pertes : *les pertes externes* entre la machine et l'ambient, notamment par le frottement des composantes mécaniques et *les pertes internes* de l'écoulement. Les pertes dues à l'écoulement sont causées par les forces visqueuses qui transforment de l'énergie mécanique en chaleur, par le phénomène de turbulence, par le décollement de la couche limite et par les fuites.

Ces différents types de pertes ont donné lieu à diverses définitions de rendement tel que le rendement mécanique, le rendement interne ou isentropique, et le rendement volumétrique.

2.3.1 Rendement isentropique

La nature non isentropique de l'écoulement suggère l'utilisation d'un rendement pour prendre en compte les irréversibilités de façon globale. En général, le rendement est défini comme une relation entre le travail spécifique idéal (possible) et le travail spécifique réel (efficace). La définition dépend s'il s'agit d'une machine qui consomme de l'énergie ou bien d'une machine qui fournit de l'énergie.

Rendement d'une turbine : Le rôle d'une turbine est la conversion de l'énergie disponible dans le fluide en énergie mécanique. Puisque les pertes diminuent le travail possible, on définit le rendement isentropique comme le rapport entre le travail possible théorique et l'énergie disponible. Alors,

$$\eta_s = \frac{\text{travail dans l'arbre}}{\text{énergie disponible théorique du fluide}} = \frac{W_r}{W_s}$$

où les indices r et s indiquent des conditions réelles et isentropiques (idéales), respectivement. Ainsi, W_r indique le travail réel et W_s le travail idéal.

Rendement d'un compresseur : Le rôle d'un compresseur (ou d'une pompe) est celui de fournir de l'énergie au fluide. Dans ce cas, le travail dans un compresseur réel est plus grand que dans un compresseur idéal sans pertes. On définit alors le rendement par le rapport entre l'énergie dans le fluide et l'énergie appliquée dans l'arbre.

$$\eta_s = \frac{\text{énergie du fluide}}{\text{énergie donnée par l'arbre}} = \frac{W_s}{W_r}$$

Dans plusieurs turbomachines (turbines à gaz, turbines à vapeur, etc) les changements d'énergie potentielle entre l'entrée (1) et la sortie (2) sont négligeables en des termes relatifs, on a alors :

$$\begin{aligned} W_r &= h_{01} - h_{02} \\ W_s &= h_{01} - h_{02s} \end{aligned}$$

pour une machine qui fournit de l'énergie et

$$\begin{aligned} W_s &= h_{02s} - h_{01} \\ W_r &= h_{02} - h_{01} \end{aligned}$$

pour une machine qui consomme de l'énergie.

Afin d'avoir un appuie lorsqu'on effectue un bilan dans un turbine ou dans un compresseur, on emploie des projections dans le plan h-s de l' espace tridimensionnel (h,s,p). En particulier, on projette plusieurs coupes à différents niveaux de pression dans une même image. La figure 2.5 illustre cette idée.

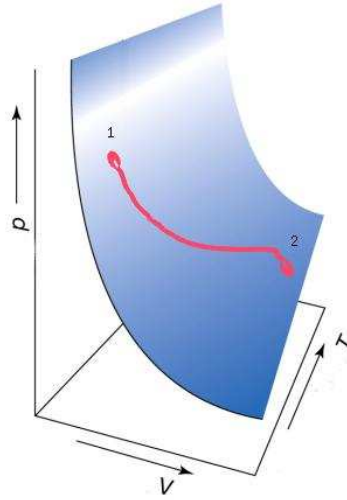


FIG. 2.5: Projections dans le plan h-s

Une définition possible donc du rendement, est celle qui considère le rapport entre la variation d'enthalpie d'enthalpie totale réelle et la variation d'enthalpie totale idéale, pour les machines qui *fournissent de l'énergie* (turbines) et le contraire pour le machines qui *consomment de l'énergie*. Ce rendement appelé *total-à-total* est donné par les relations :

$$\eta_{tt} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$

pour une *turbine* et

$$\eta_{tt} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

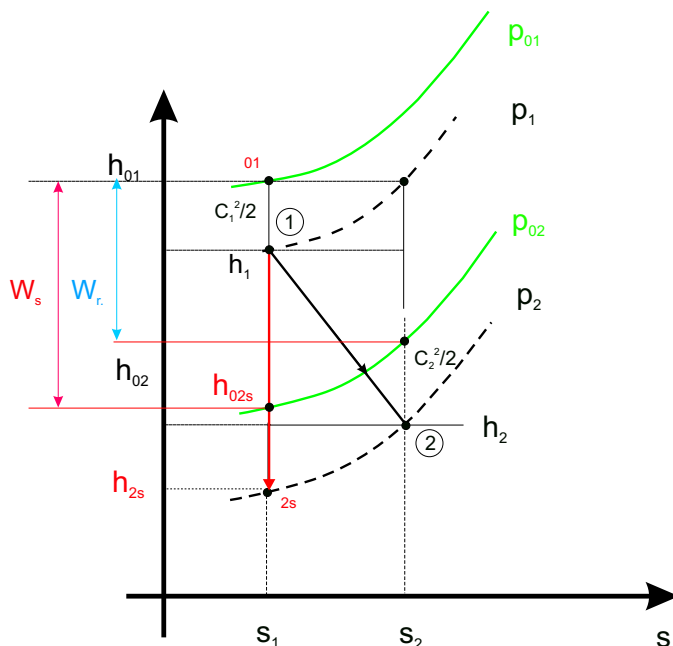


FIG. 2.6: Variation d'enthalpies : turbine

pour une *compresseur*.

Une définition alternative du rendement emploie des conditions statiques à la sortie. Pour les *compresseurs*, les *pompes* et les *ventilateurs*, le rendement *statique-à-total* ne considère pas le transfert d'énergie au fluide pour générer de l'énergie cinétique à la sortie. Cette énergie non transmise est considérée comme une perte et le rendement est donné par :

$$\eta_{st} = \frac{h_{2s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

Pour les *turbines*, le rendement *total-à-statique* suppose que la machine n'utilise pas l'énergie cinétique à la sortie. Dans ce cas, le rendement est donné par :

$$\eta_{ts} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{2s}}$$

Remarque

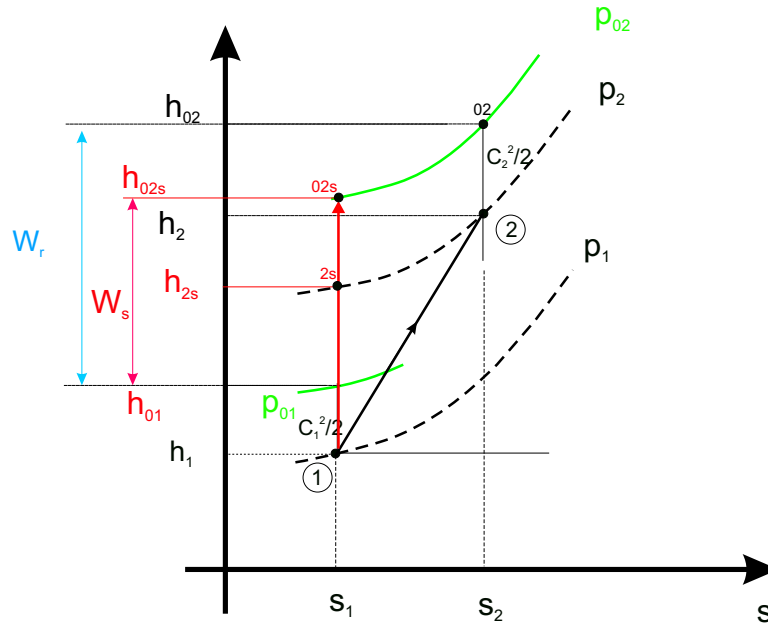


FIG. 2.7: Variation d'enthalpies : compresseur

- Les rendements peuvent être définis sur la base de conditions de stagnation ou de conditions statiques. Pour les turbines, le rendement ‘total-à-total’ est plus grand que le rendement sur la base de propriétés statiques. Ceci parce que le travail spécifique *inclut* l’énergie cinétique à la sortie dans le premier cas et l’exclut dans le deuxième.
- Si l’énergie cinétique est récupérée à la sortie, le rendement ‘total-à-total’ est la meilleure caractérisation du rendement de la machine. Dans le cas contraire, le rendement ‘totale-à-statique’ est la meilleure caractérisation.
- Pour les compresseurs, le rendement ‘total-à-total’ est encore plus grand que le rendement statique-à-total puisque dans le premier cas, la machine transfère plus d’énergie au fluide que dans le deuxième.

La relation entre les rendements total-à-total et total-à-statique est donné par :

$$\frac{1}{\eta_{tt}} = \frac{h_{10} - h_{20s}}{h_{10} - h_{20}} = \frac{h_{10} - h_{2s} - c_2^2/2}{h_{10} - h_{20}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\eta_{tt}} = \frac{1}{\eta_{ts}} - \frac{C_2^2}{2(h_{10} - h_{20})}}$$

Cette formule montre que $\eta_{tt} > \eta_{st}$

2.3.2 Rendement mécanique

Ce rendement caractérise les pertes par friction entre les composantes mécaniques et se traduit par une relation entre le travail spécifique utile et le travail fourni au rotor.

Pour une *turbine*, le rendement mécanique est le rapport entre le travail efficace et le travail spécifique fourni au rotor, soit

$$\eta_m = \frac{\text{énergie disponible sur l'arbre}}{\text{énergie fournie au rotor}}$$

Pour un *compresseur*, le rendement mécanique est le rapport entre le travail spécifique réel et le travail fourni au rotor, soit

$$\eta_m = \frac{\text{énergie fournie au rotor}}{\text{énergie fournie à l'arbre}}$$

2.3.3 Rendement volumétrique

Dans les machines *radiales* l'espacement entre composantes fixes (le carter) et mobiles (le rotor) permet l'apparition d'un débit de recirculation, \dot{m}_r , entre ces parties. Ce débit modifie celui qui traverse le rotor en le faisant plus grand que le débit \dot{m} fourni par le système, pour les machines qui ajoutent de l'énergie au fluide (pompes), et plus petit pour les machines qui enlèvent de l'énergie au fluide (turbines). Afin de quantifier ce phénomène, on utilise le concept de rendement volumétrique. Encore ici, on trouve deux définitions dépendant si la machine ajoute ou enlève de l'énergie au fluide. Elles sont, respectivement :

$$\eta_v = \frac{\dot{m}}{\dot{m} + \dot{m}_r}$$

pour les *pompes* et les *compresseurs* et

$$\eta_v = \frac{\dot{m} - \dot{m}_r}{\dot{m}}$$

pour les *turbines*.

2.3.4 Rendement global

Le rendement global est défini par

$$\eta_g = \eta_{tt}\eta_m$$

ou

$$\eta_g = \eta_{ts}\eta_m \quad \text{ou} \quad \eta_g = \eta_{st}\eta_m$$

On note que le rendement volumétrique n'apparaît pas dans ces expressions puisque toute perte autre que mécanique est comprise dans le rendement interne soit total-à-total ou total-a statique.

2.4 Types de travail

Il est temps maintenant de considérer quelques formules classiques pour reviser le concept de travail à la lumière des processus thermodynamiques.

2.4.1 Travail isentropique

Le concept de travail *idéal* est basé sur la notion de processus isentropique. Alors, le *travail isentropique*, avec $C_p = cte$, est donné par

$$W_s = \Delta h_{os} = C_p(T_{02s} - T_{01})$$

$$W_s = \Delta h_{os} = C_p T_{01} \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}} - 1 \right)$$

et pour un gaz idéal ayant $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$ on a :

$$W_s = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_{01} \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}} - 1 \right)$$

et avec $\left(\frac{T_{02s}}{T_{01}}\right) = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, le *travail isentropique* est finalement donné par :

$$W_s = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left[\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

2.4.2 Travail effectif

Si on imagine une compression ou une expansion formée d'une série d'étages infinitésimales, le processus peut être décrit par l'équation $Pv^n = cte$. Dans ce cas, le travail isentropique devient *travail effectif* :

$$W_{eff} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left[\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(n-1)/n} - 1 \right]$$

2.4.3 Travail polytropique

L'argument classique pour expliquer le besoin du rendement polytropique utilise le cas de deux étages égaux d'un compresseur. Pour chacun, le rendement basé sur l'enthalpie totale est :

$$\eta_1 = \frac{\Delta h_{01s}}{\Delta h_{01}} = \eta_2 = \frac{\Delta h_{02s}}{\Delta h_{02}}$$

tandis que le rendement de l'ensemble est

$$\eta_{1-2} = \frac{\Delta h_{01s} + \Delta h_{02ss}}{\Delta h_{01} + \Delta h_{02}}$$

mais $\Delta h_{02ss} < \Delta h_{02s}$ parce que les pentes des isobares augmentent au fur et à mesure que l'enthalpie augmente. Alors,

$$\eta_{1-2} < \eta_1 = \eta_2$$

Cet écart diminue à mesure que la variation d'enthalpie diminue. À la limite, lorsqu'on arrive à l'échelle infinitésimale, le rapport entre la variation idéale d'enthalpie et la variation réelle définit ce qu'on appelle le *rendement polytropique*.

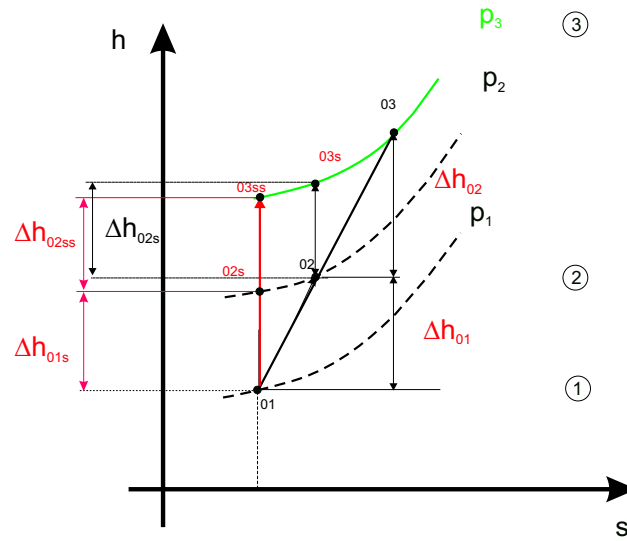


FIG. 2.8: Rendement pour : deux étages

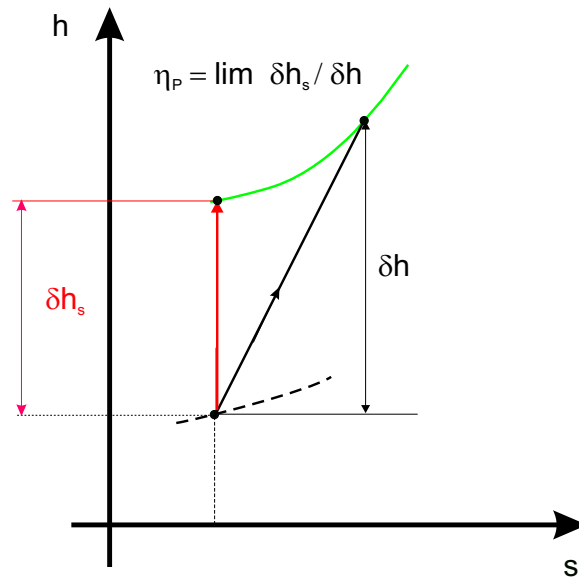


FIG. 2.9: Rendement polytropique élémentaire

Pour obtenir une expression pour le travail polytropique on utilise la relation de Gibbs

$$Tds = dh - vdp$$

$$\int_1^2 Tds = h_2 - h_1 - \int_1^2 vdp$$

et par la définition d'entropie on a :

$$ds = \frac{dQ}{T}$$

$$\left. \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \right|_{rev} = \int_1^2 Tds = h_2 - h_1 - \int_1^2 vdp$$

Pour un processus adiabatique, cette relation écrite pour des états de stagnation, devient :

$$h_{02} - h_{01} = \int_{01}^{02} vdp$$

D'autre part, une turbomachine peut être considérée comme étant un système adiabatique pour laquelle la variation d'énergie potentielle est négligeable. Alors l'équation de l'énergie s'exprime :

$$-\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = \Delta h_0$$

et le travail par unité de masse $W_e = \frac{\dot{W}}{\dot{m}}$ devient :

$$W_e = - \int_{01}^{02} vdp$$

Pour un processus polytropique définie par la relation $pv^n = cte$, le travail est simplement

$$W_e = -cte^{1/n} \int_{o1}^{o2} \frac{dp}{p^{1/n}}$$

$$W_e = -\frac{n}{n-1}(p_{o2}v_{o2} - p_{o1}v_{o1}) = -\frac{nR}{n-1}(T_{02} - T_{01}) \quad (n \neq 1)$$

Finalement, à l'aide de la relation polytropique :

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

on trouve le *travail polytropique* :

$$W_{pol} = -\frac{n}{n-1} \frac{p_{o1}}{\rho_{o1}} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(n-1)/n} - 1 \right]$$

Pour une turbine, le rendements isentropique η_s et polytropique η_{pol} sont :

$$\eta_s = \frac{W_{eff}}{W_s} \quad \eta_{pol} = \frac{W_{eff}}{W_{pol}}$$

$$\eta_{pol} = \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{o1}}{\rho_{o1}} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(n-1)/n} - 1 \right]}{\frac{n}{n-1} \frac{p_{o1}}{\rho_{o1}} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(n-1)/n} - 1 \right]}$$

c'est-à-dire :

$$\eta_{pol} = \frac{(n-1)/n}{(\gamma-1)/\gamma}$$

De sorte que le rapport entre ces deux rendements est

$$\frac{\eta_s}{\eta_{pol}} = \frac{W_{pol}}{W_s} = \frac{\frac{n}{n-1} \frac{p_{o1}}{\rho_{o1}} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(n-1)/n} - 1 \right]}{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{o1}}{\rho_{o1}} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]} = \frac{\frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(n-1)/n} - 1 \right]}{\frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]}$$

ainsi :

$$\eta_s = \eta_{pol} \frac{\frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(n-1)/n} - 1 \right]}{\frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]} = \frac{\left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(n-1)/n} - 1 \right]}{\left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]}$$

$$\eta_s = \frac{\left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right)^{\eta_{pol}(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]}{\left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]}$$

Pour un compresseur, le rendement polytropique est :

$$\eta_{pol} = \frac{(\gamma - 1)/\gamma}{(n - 1)/n}$$

et le rendement isentropique est donné par :

$$\eta_s = \frac{\left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]}{\left[\left(\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right)^{(\gamma-1)/\eta_{pol}\gamma} - 1 \right]} \quad (2.17)$$

Remarque

- Le rendement polytropique considère que l'expansion ou la compression a lieu suivant une série d'étapes infinitésimales. Il s'agit donc d'une abstraction mathématique.
- Ce rendement est indépendant du rapport de pression entre l'entrée et la sortie.
- Tel que défini, il s'agit du rendement total-à-total de chacune de ces étapes. Cependant, si dans les formules on emploie des quantités statiques au lieu de quantités de stagnation, on parle donc du rendement statique.

2.4.4 Exemples

Exemple 2.3

En utilisant l'équation d'Euler, déterminez le moment couple autour de l'axe de la pompe hydraulique mixte illustrée sur la figure 2.10 et ayant les caractéristiques suivantes :

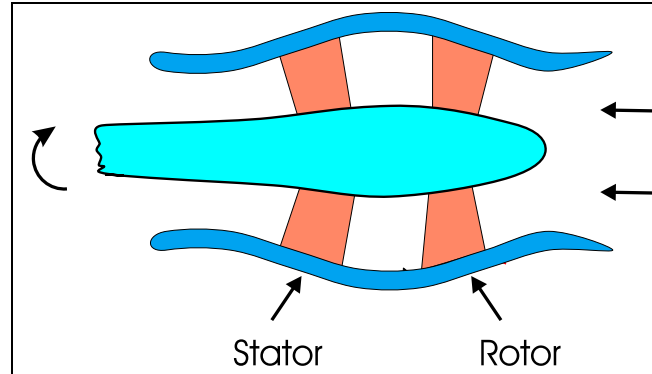


FIG. 2.10: Exemple 2.3

- vitesse absolue du fluide à l'entrée du rotor 8.1 m/s
- angle d'entrée du fluide dans le rotor $\alpha_e = 0$ par rapport à la direction axiale
- vitesse absolue du fluide à la sortie du rotor 10.8 m/s
- angle de sortie du fluide du rotor $\alpha_s = 5$ par rapport à la direction axiale
- débit total $\dot{m} = 1.423 \text{ kg/s}$
- le rayon à l'entrée du rotor varie de 0.09 m à 0.21 m
- le rayon à la sortie du rotor varie de 0.18 m à 0.25 m

Solution

Pour utiliser l'équation d'Euler on définit tout d'abord des rayons moyens à l'entrée et à la sortie du rotor.

$$\begin{aligned} r_m &= \frac{r_i + r_e}{2} \\ r_{me} &= \frac{(.09 + .21)}{2} = .15 \text{ m} \\ r_{ms} &= \frac{(.18 + .25)}{2} = .215 \text{ m} \end{aligned}$$

Le moment couple est alors donné par :

$$\begin{aligned} \tau &= \dot{m} (-r_{me}c_{1u} + r_{ms}c_{2u}) \\ \tau &= (1.423) [- (.15) (0.0) + (.215) (10.8) (\sin 5^\circ)] \\ \tau &= 0.288 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 0.288 \text{ N} - \text{m} \end{aligned}$$

Exemple 2.4

Un étage d'une turbine à vapeur axiale illustré à la figure 2.11 reçoit 6 kg/s de vapeur saturée et les stators dirigent l'écoulement vers les rotors avec un angle de 70° par rapport à la direction axiale à une vitesse absolue de 975 m/s. La vitesse tangentielle de l'écoulement à la sortie du rotor est nulle, le diamètre moyen est de 1m et l'arbre tourne 10 000 rpm.

- Quelle est la puissance produite par cet étage ?
- Quelle est la différence d'enthalpie $h_{01} - h_{02}$ dans cet étage ?

Solution

a) L'équation d'Euler pour les turbomachines est :

$$\dot{W} = \dot{m} (h_{02} - h_{01}) = \dot{m}(r_2C_{2u} - r_1C_{1u}) \omega$$

or,

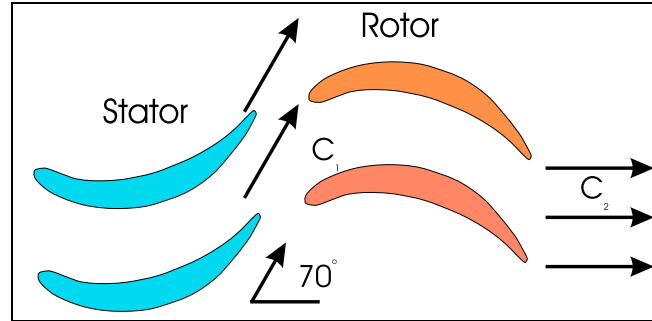


FIG. 2.11: Exemple 2.4

$$\begin{aligned}
 r_1 &= r_2 = 0.5m \\
 C_{2u} &= 0 \\
 C_{1u} &= C_1 \sin 70^\circ = 916 \text{ m/sec} \\
 \omega &= \frac{2\pi 1000}{60} = 1047.2 \text{ rad/sec}
 \end{aligned}$$

donc :

$$-\dot{W} = 6 \text{ kg/s} (0.5 \text{ m} \times 0 \text{ m/s} - 0.5 \text{ m} \times 916 \text{ m/s}) 1047.2 \text{ rad/sec}$$

$$\dot{W} = 2.878 \cdot 10^6 \text{ Watts}$$

$$\text{b) } h_{01} - h_{02} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = 479.7 \text{ kJ/kg}$$

Exemple 2.5

Considérons la turbine axiale à un étage illustrée sur la figure 2.12

Les paramètres suivants sont connus :

- diamètre moyen $d_m = 0.25 \text{ m}$
- hauteur des pales du rotor $h = 0.25 \text{ m}$
- pertes de pression totale dans le stator $\Delta P_0 = .05 \text{ bars}$
- vitesse axiale constante
- écoulement adiabatique

a) Calculer les températures et pressions totales et statiques à l'entrée du rotor ainsi que le nombre de Mach en ce même endroit.

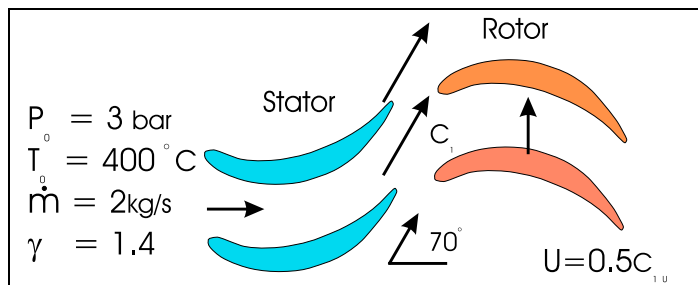


FIG. 2.12: Exemple 2.5

b) Calculer la vitesse de rotation du rotor si cette dernière doit être égale à la moitié de la vitesse tangentielle du fluide en sortie des stators.

Solution

a) Au point 1, on a :

$$T_{01} = T_0 = 400^\circ\text{C}, P_{01} = P_0 - 0.05\text{bars} = 2.95\text{bars}$$

La section de passage annulaire de l'écoulement est :

$$A = 2\pi r_m h = 2\pi \times 0.125 \times 0.025 = 0.0196\text{m}^2$$

Dans ce cas-ci, la vitesse du fluide n'est pas normale à la section A. Cependant, la section de passage à utiliser pour le calcul du débit est celle qui est normale à la vitesse du fluide. On a donc : $A_n = A \cos \theta$, que l'on utilise pour obtenir M dans l'équation pour le débit :

$$\frac{\dot{m}}{A \cos \theta} = P_0 \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} M \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{T_0}}{P_0 A \cos \theta} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} M \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = f(M)$$

Remplaçant les valeurs connues du membre de gauche, on obtient :

$$f(M) = (2\text{kg/s}) \sqrt{(400 + 273)\text{K}} (2.95 \text{E}5 \text{ Pa}) (0.0196\text{m}^2) (\cos 70^\circ)$$

$$f(M) = 0.0262$$

Par la solution de l'équation non linéaire au moyen d'une méthode numérique, ou par interpolation dans une table on obtient :

$$M \simeq 0.417$$

$$\frac{P_1}{P_{01}} = 0.887 \quad \rightarrow \quad P_1 = 2.616 \text{ bars}$$

$$\frac{T_1}{T_{01}} = 0.966$$

$$\frac{P_1}{P_{01}} = 0.887 \quad \rightarrow \quad T_1 = 377.1^\circ\text{C}$$

b) D'après l'énoncé, $U = 0.5C_{1u}$. En utilisant : $M_1 = \frac{c_1}{a_1} = 0.417$ et $a_1 = \sqrt{\gamma RT_1} = 511 \text{ m/s}$, on obtient : $c_1 = 213 \text{ m/s}$

La composante tangentielle peut maintenant être calculée

$$c_{1u} = c_1 \sin \theta_1 = c_1 \sin 70^\circ = 200 \text{ m/s}$$

et la vitesse de rotation requise est :

$$U = \frac{c_{1u}}{2} = 100 \text{ m/s}$$

Exemple 2.6

Une turbine reçoit de l'air à $T_1 = 550^\circ\text{C}$ et $P_1 = 4 \text{ atm}$. La pression à la sortie est $P_2 = 1 \text{ atm}$ et on y mesure $T_2 = 300^\circ\text{C}$. En supposant $\gamma = 1.4$ et en négligeant les changements d'énergie cinétique, estimez le rendement isentropique ainsi que le rendement polytropique de cette turbine.

Solution

Lorsque les changements d'énergie cinétique sont négligeables, le rendement isentropique d'une turbine est :

$$\eta_s = \frac{h_2 - h_1}{h_{2s} - h_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2s} - T_1}$$

où T_{2s} est obtenu par une détente isentropique de 1 à 2s.
Sur le chemin isentropique, on peut utiliser :

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_{2s}}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

d'où : $T_{2s} = 553.8K$ ($280.8^\circ C$) et donc $\eta_s = 0.9288$

Deux méthodes sont disponibles pour calculer le rendement polytropique :

i) La méthode directe consiste à trouver η_p qui satisfait :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\eta_p^{(\gamma-1)\gamma}}$$

En isolant, on trouve : $\eta_p = 0.9141$

ii) La méthode utilisant la formule de conversion (voir exercice 1.3)

$$\eta_s = \frac{1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\eta_p(\gamma-1)}{\gamma}}}{1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

En isolant, on trouve : $\eta_p = 0.9141$

2.4.5 Exercices

Exercice 2.1

Montrer que pour un compresseur :

$$\eta_s = \frac{\left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]}{\left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\eta_p \gamma}} - 1 \right]}$$

et montrer que pour une turbine :

$$\eta_s = \frac{\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\eta_p(\gamma - 1)}{\gamma}} \right]}{\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]}$$

dans le cas où les changements d'énergie cinétique sont négligeables.

Exercice 2.2

Un compresseur axial a un rapport de pression de 10 et un rendement polytropique $\eta_p = 0.9$. En supposant $\gamma = 1.4$, calculez le rendement isentropique.

Réponse : $\eta_s = 86.4$

Exercice 2.3

Une turbine axiale a un rendement polytropique $\eta_p = 0.86$ et un rapport de détente de 4.5. En supposant un gaz ayant un $\gamma = 1.333$, calculez le rendement isentropique.

Réponse : $\eta_s = 88\%$

Exercice 2.4

Une compagnie fabrique un compresseur centrifuge qui utilise un convergent d'entrée à section strictement convergente. Le design du compresseur requiert des conditions d'opération en amont et en aval du convergent qui sont les suivantes :

- Pression totale à l'entrée du convergent $P_{01} = 100kPa$
- Température totale à l'entrée du convergent $T_{01} = 20^\circ C$
- Vitesse à la sortie du convergent $V_2 = 50m/sec$
- Angle de l'écoulement à la sortie du convergent $\alpha_2 = 0^\circ$
- Débit de l'écoulement $\dot{m} = 1kg/sec$

En supposant que la détente est isentropique :

- a) Vérifiez que ce design opère en dessous des conditions soniques au col.
 b) Trouvez l'aire de la section de passage A2 à la sortie du convergent.
 Utilisez les propriétés de l'air avec $c_p = 1003.5 J/kgK$, $R = 287 J/kgK$,
 $\gamma = 1.4$.

Réponse : a) $M = 0.146$ b) $A_2 = 170 cm^2$

Exercice 2.5

On met en série deux compresseurs d'air dont le rendement polytropique est de 0,85 et le rapport de pression de 2.5. Quel est le rendement isentropique de chaque compresseur et quel sera le rendement isentropique de l'ensemble des deux compresseurs.

Réponse : 1 compresseur $s = 0.829$, 2 compresseurs $s = 0.808$

Exercice 2.6

Une grille de stators de turbine doit fournir à sa sortie un écoulement ayant les propriétés suivantes :

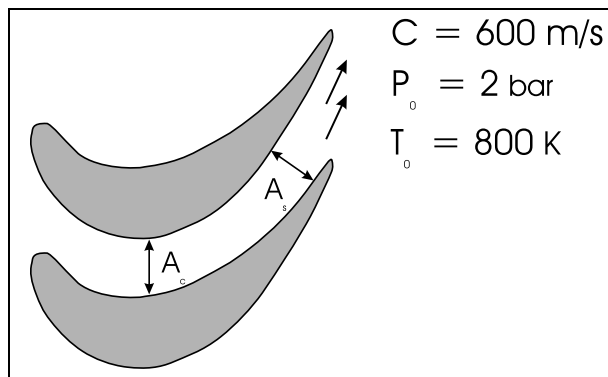


FIG. 2.13: Exercice 1.6

En supposant un écoulement isentropique d'air dans la grille et sachant que la section de passage normale à l'écoulement en sortie est $A_s = 2.0 cm^2$, calculez la section de passage au col A_c ($M = 1$). Utilisez $\gamma = 1.4$ et $c_p = 1005 J/kgK$

Réponse : $A_c = 1.94 cm^2$

Chapitre 3

Turbomachines Axiales

L'analyse d'une turbomachine requiert de la connaissance de la vitesse de l'écoulement dans le passage inter-aube. Traditionnellement, cet étude s'effectue à l'aide du diagramme ou triangle de vitesses. Cet concept permet d'obtenir une représentation graphique compacte du champ de l'écoulement étroitement lié à la géométrie des pales. Il s'applique autant aux turbines qu'aux compresseurs. Dans ce chapitre, on regarde spécifiquement les détails du mécanisme de transfert d'énergie de ces deux types de turbomachines pour le cas axial. On rappelle que pour le turbomachines axiales, l'écoulement est principalement parallèle à l'axe de la machine, c'est-à-dire qu'il ne possède que très peu de vitesse radiale. Par contre, la vitesse tangentielle (de rotation autour de l'axe) peut être appréciable.

3.1 Les triangles de vitesse

Les machines axiales opèrent, en des termes relatifs, avec un grand débit et une faible variation énergétique du fluide. En général elles disposent d'une ou plusieurs ensembles de couronnes d'aubes fixes et mobiles. Une couronne d'aubes fixes reçoit le nom de *stator* et celle d'aubes mobiles est appelée le *rotor*. L'ensemble roto-stator est connu sous le nom d'*étage*. Généralement, les machines qui fonctionnent avec des écoulement incompressibles (des liquides et ou des gaz à faible vitesse) ont un seul étage tandis que celles qui opèrent avec des écoulements compressibles ont des étages multiples

L'étude classique des turbomachines axiales considère un écoulement bidimensionnel moyen à un rayon situé à mi chemin entre le moyeu et le carter. Cet écoulement est assumé comme étant représentatif pour tout l'étage. Par la suite, on construit un diagramme vectoriel en fonction de la vitesse de rotation et des vitesses relative et absolue de l'écoulement à l'entrée et à la sortie du stator et du rotor. Cet agencement, représenté aux figures 3.1 et 3.2 pour les cas d'un turbine et d'un compresseur respectivement, est nommée *le triangle de vitesses*.

On remarque que la vitesse absolue d'écoulement est celle vue par un observateur fixe tandis que la vitesse relative est celle perçue par un observateur en mouvement avec le rotor. Aussi, on note que la composante axiale de la vitesse ne change pas entre l'entrée et la sortie de l'étage.

3.1.1 Nomenclature et convention de signes

Habituellement, pour les *turbines* l'étage est composé d'un stator et d'un rotor, dans cet ordre. Ainsi, on note le point d'entrée du fluide dans le stator avec l'indice 1, le point d'entrée du rotor, correspondant avec la sortie du stator, avec l'indice 2, et finalement la sortie du rotor avec l'indice 3. Cependant, pour les *compresseurs* l'étage est constitué d'un rotor suivi d'un stator. Dans ce cas, l'entrée du rotor est notée par l'indice 1 et la sortie par l'indice 2. Compte tenu que le domaine des turbomachines est assez vaste, la nomenclature varie légèrement d'un type d'application à une autre. Dans ces notes, les symboles utilisés pour l'étude des turbomachines sont :

- C vitesse absolue de l'écoulement
- W vitesse relative de l'écoulement
- U vitesse périphérique du rotor
- C_u , C_m et C_x composantes tangentielle, radiales et axiales de la vitesse absolue.
- W_u , W_m et W_x composantes tangentielle, radiales et axiales de la vitesse relative
- α angles des vitesses absolues
- β angles des vitesses relatives.

Les angles de l'écoulement α et β sont mesurés par rapport à la *direction axiale*. La forme des pales du rotor est donnée par les angles β , c'est-à-dire

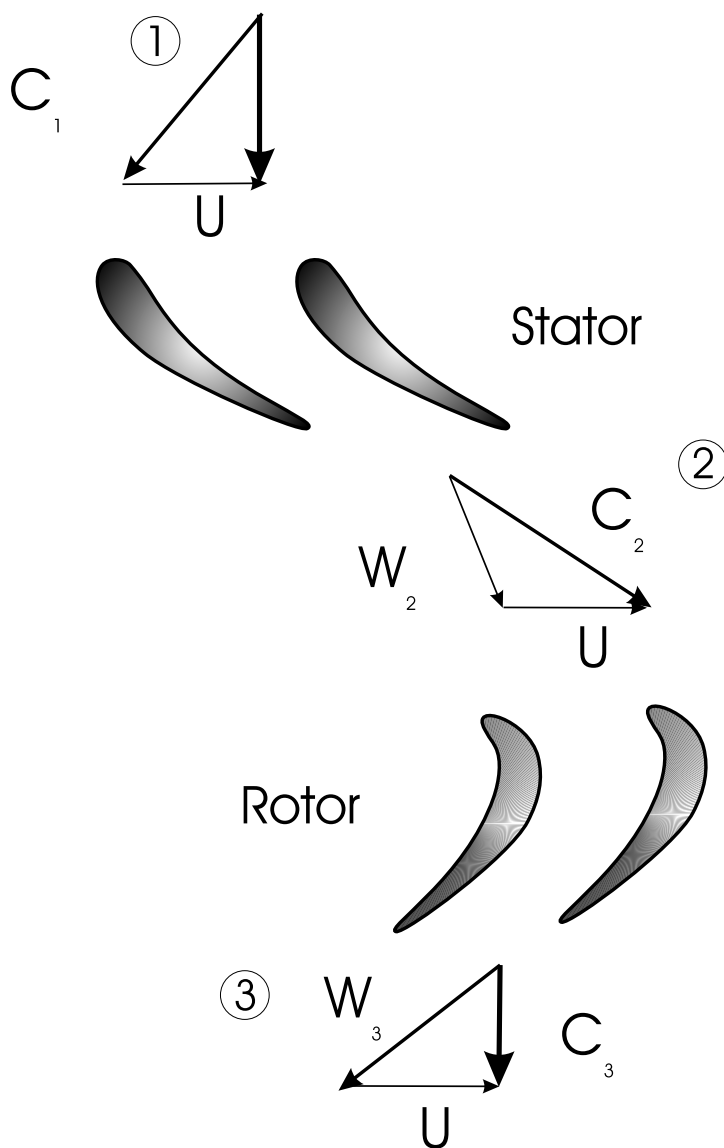


FIG. 3.1: Étage d'une turbine

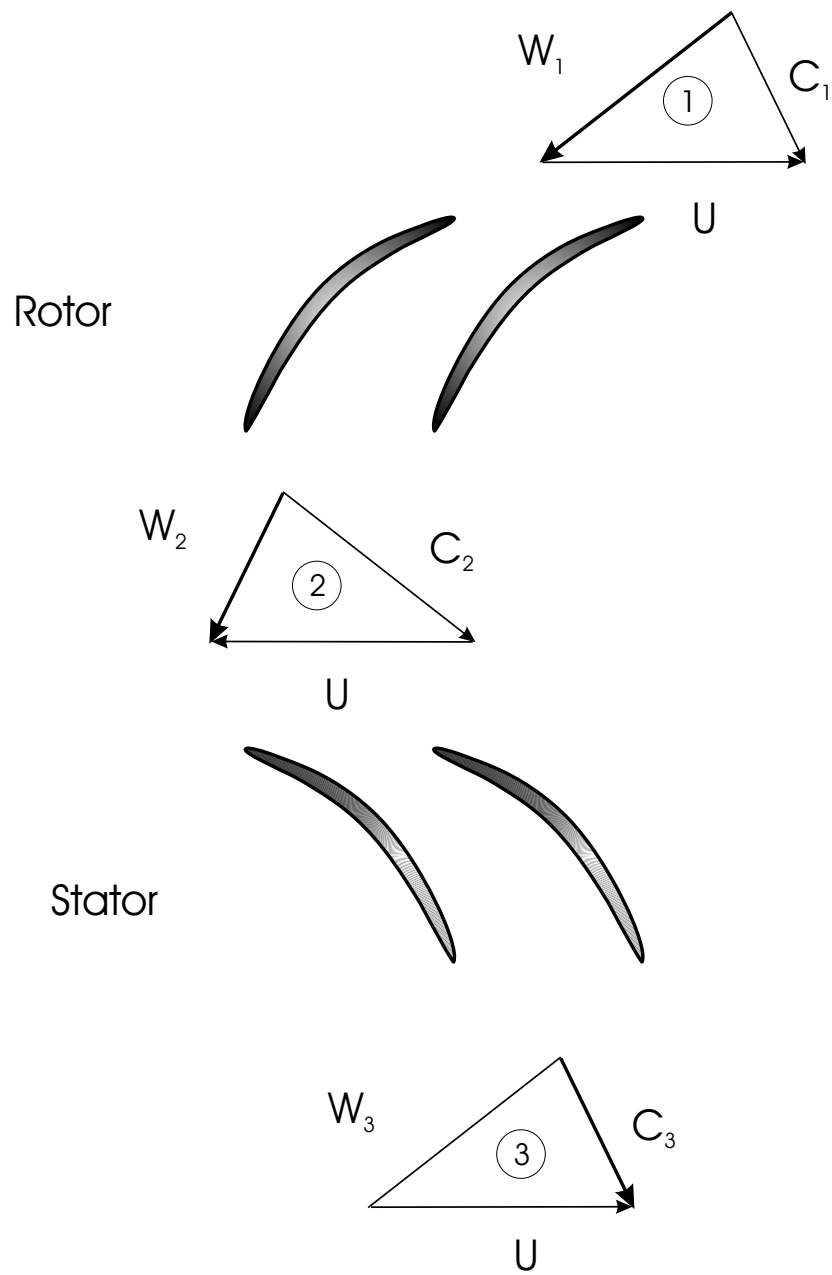


FIG. 3.2: Étage d'un compresseur

par les vitesses dans le repère relatif au rotor. D'autre part, la forme des pales du stator est donnée par les angles α , c'est-à-dire par les vitesses dans le repère absolu, celui des stators.

En général, on essaiera d'avoir au point de design les angles des pales égaux aux angles de l'écoulement ($\alpha_g \approx \alpha$ et $\beta_g \approx \beta$). On distingue l'angle des pales par l'indice g qui signifie géométrique. Il est facile de comprendre que ces angles géométriques ne changent plus une fois que la machine est construite. Ce fait sera utile lors de l'analyse hors-design, plus loin dans le chapitre. Pour l'instant on note que dans la pratique, les angles des pales ne sont pas exactement ceux de l'écoulement, mais sont proches. Cependant, les pales sont toujours dessinées à partir des triangles de vitesses et non l'inverse.

3.2 Le triangle normal

Quoique la vitesse axiale ainsi que la vitesse périphérique du rotor peuvent varier entre l'entrée et la sortie du rotor, dans la plupart des cas d'analyse des turbomachines axiales on assumera que la vitesse périphérique du rotor demeure constante et que la composante axiale de la vitesse reste aussi constante entre l'entrée et la sortie des aubages. Cette hypothèse est valable si les changements d'aire et de masse volumique entre l'entrée et la sortie sont petits, ou bien si $\rho A = \text{cte.}$, puisque dans l'expression $\dot{m} = \rho_1 C_{1x} A_1 = \rho_2 C_{2x} A_2$, les termes en ρ et A , s'annulent. Donc :

$$C_{1x} = C_{2x} = C_x = \text{cte.}$$

Aussi, pour une machine axiale avec $U_2 = U_3 = U = \text{cte.}$, l'équation (2.12) devient :

$$-W_e = U(C_{3u} - C_{2u}) \quad (3.1)$$

Cette équation simplifiée indique que pour une *turbine*, avec $c_{3u} \leq c_{2u}$, $W_e > 0$ tandis que pour un *compresseur*, où $c_{3u} \geq c_{2u}$, $W_e < 0$.

Étant donné que la vitesse périphérique est considérée comme une constante, le triangle de vitesse à l'entrée (noté par l'indice 2) et à la sortie (avec l'indice 3) du rotor d'un étage peuvent être superposés et aussi ajouter la forme approximative des pales. Cette configuration, illustrée sur la figure 3.3 reçoit le nom de *triangle normal de vitesse* et l'étage correspondant stator-rotor,

est appelé *étage normal*. Il s'agit d'un étage *répétitif* pour lequel :

$$\begin{array}{l} C_3 = C_1 \\ \alpha_3 = \alpha_1 \\ C_x = cte. \\ U = cte \end{array} \quad (3.2)$$

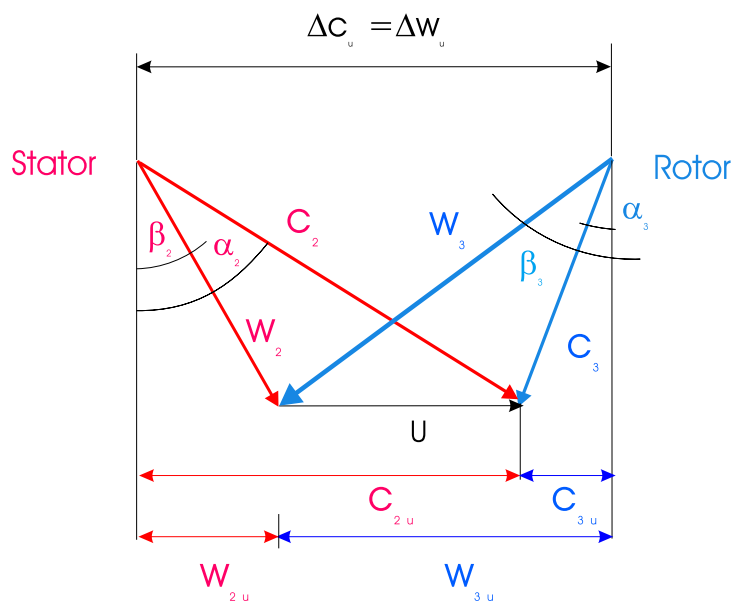


FIG. 3.3: Triangle normal (turbine)

3.3 Caractérisation des triangles de vitesse

Pour effectuer l'analyse d'un étage, on emploie trois coefficients adimensionnels qui permettent la caractérisation des triangles de vitesse. Ceux-ci sont : le coefficient de charge, le coefficient de débit et le degré de réaction.

3.3.1 Le coefficient de charge

Le coefficient de charge ψ , est une mesure de la puissance par unité de masse de l'étage.

$$\Psi = \frac{W_e}{U^2} = \frac{h_{02} - h_{01}}{U^2} = \frac{\Delta h_0}{U^2} = \eta_s \frac{\Delta h_{0s}}{U^2}$$

- Le coefficient Ψ est *positif* pour les turbines et *négatif* pour les compresseurs, pompes et semblables.
- Géométriquement parlant, Ψ correspond à la distance entre les sommets des vitesses absolues et relatives dans le triangle de vitesses.
- Pour les turbines à gaz, $\Psi > 1.5$, indique des pales *fortement chargées*, par contre, $\Psi < 1$ dénote des aubes *faiblement chargées*.
- Pour les compresseurs, $0.3 < \Psi < 0.5$, indique des pales *fortement chargées*, tandis que, $\Psi < 0.3$ indique des aubes *faiblement chargées*.
- Le coefficient de charge est aussi connu parfois comme *Coefficient de température* $\Psi = \Delta h_0/U^2 = C_p \Delta T_0/U^2$.

3.3.2 Le coefficient de débit

Le coefficient de débit ϕ est un paramètre directement proportionnel à la vitesse axiale (ici notée par le symbole C_x) et il est une mesure du débit massique et de la grandeur de l'étage.

$$\Phi = \frac{C_x}{U}$$

pour un gaz idéal :

$$\Phi = \frac{\rho_0 R T_0}{p_0} \frac{C_x}{U} = \frac{\sqrt{R T_0}}{U} \frac{\rho_0 C_x \sqrt{R T_0}}{p_0} = \frac{\sqrt{R T_0}}{U} \overbrace{\frac{m \sqrt{R T_0}}{A p_0}}^F$$

Le coefficient de charge et le coefficient de débit sont des paramètres scalaires qui s'appliquent au triangle de vitesses, mais qui ne permettent pas une caractérisation complète de ce triangle. Par exemple; les deux triangles de vitesse illustrés à la figure 3.4 ont les mêmes coefficients de charge et de débit, mais demeurent différents. Alors, pour spécifier le triangle de vitesse de façon unique, on introduit un troisième coefficient adimensionnel qui est le degré de réaction.

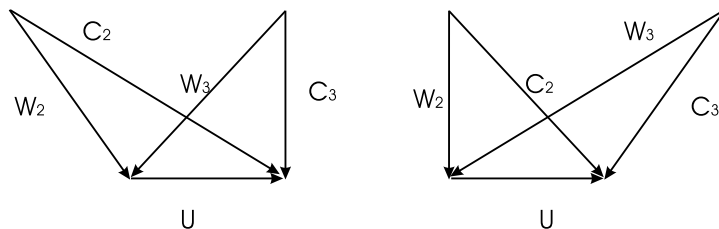


FIG. 3.4: Triangles avec les mêmes ψ et ϕ

3.3.3 Le degré de réaction

Le degré de réaction caractérise la répartition de la détente d'un fluide entre le rotor et le stator. Principalement, le degré de réaction indique la proportion dans laquelle la chute (ou le gain) de pression se distribue entre le rotor et le stator. Toutefois, le transfert d'énergie n'est pas seulement du à la pression mais aussi dépend d'autres forme d'énergie, tel que l'énergie cinétique, par exemple. Donc, une définition plus générale du degré de réaction doit comprendre finalement la notion d'enthalpie. Alors, on le définit comme :

$$R = \frac{\text{Changement d'enthalpie dans le rotor}}{\text{Changement d'enthalpie dans l'étage}}$$

$$R = \frac{\Delta h_{rotor}}{\Delta h_{étage}} = \frac{h_3 - h_2}{h_3 - h_1} \quad (3.3)$$

D'une manière semblable à l'équation d' Euler, le degré de réaction peut être exprimé en termes de la cinématique du problème. Pour l'analyse d'une turbomachine axiale, on applique deux hypothèses fondamentales. La première considère que :

- la vitesse absolue à l'entrée du stator est égale à celle à la sortie du rotor. ($c_1 = c_3$),

on a alors :

$$W_e = h_3 - h_1 = h_{03} - h_{01} = \Delta h_0 = \psi U^2 \quad (3.4)$$

Si on néglige les pertes et le transfert de chaleur dans le stator, le changement d'enthalpie totale dans l'étage correspond au changement d'enthalpie totale dans le rotor. C'est-à-dire :

$$h_{03} - h_{01} = h_{03} - h_{02} = \Delta h_{o(3-2)}$$

$$h_3 + c_3^2/2 - (h_2 + c_2^2/2) = \Delta h_{o(3-2)}$$

$$h_3 - h_2 = \Delta h_{o(3-2)} + c_2^2/2 - c_3^2/2 \quad (3.5)$$

et à partir de (3.3) on trouve :

$$R = \frac{\Delta h_{o(3-2)} + c_2^2/2 - c_3^2/2}{\Delta h_{o(3-2)}} = 1 - \frac{c_3^2/2 - c_2^2/2}{\Delta h_{o(3-2)}}$$

ou encore, si on applique la relation $\Delta h_{o(3-2)} = (U_3 C_{3u} - U_2 C_{2u})$

$$\boxed{R = 1 - \frac{c_3^2/2 - c_2^2/2}{2(U_3 C_{3u} - U_2 C_{2u})}} \quad (3.6)$$

Cette expression est valable tant pour les turbines que pour les compresseurs.

Bien que le travail spécifique peut varier dans le sens radial, la grandeur des aubes est généralement petite par rapport au diamètre du rotor, ce qui permet le choix d'une position de référence moyenne sans introduire une erreur importante. Ainsi, la deuxième hypothèse appliquée considère

– l'équation écrite pour un rayon moyen où $U_2 = U_3 = U$.

Cette hypothèse, complétée avec des relations géométriques, permet la simplification de l'expression du degré de réaction. Notamment par l'intermédiaire de la formule :

$$C^2 = C_x^2 + C_u^2$$

Ainsi, avec $C_x = cte$

$$R = 1 - \frac{C_{3u}^2 - C_{2u}^2}{2U(C_{3u} - C_{2u})}$$

et finalement

$$\boxed{R = 1 - \frac{C_{3u} + C_{2u}}{2U}} \quad (3.7)$$

Graphiquement, on peut interpréter le degré de réaction comme illustré sur la figure 3.5. C'est donc la position médiane des vecteurs de vitesse qui caractérise le degré de réaction.

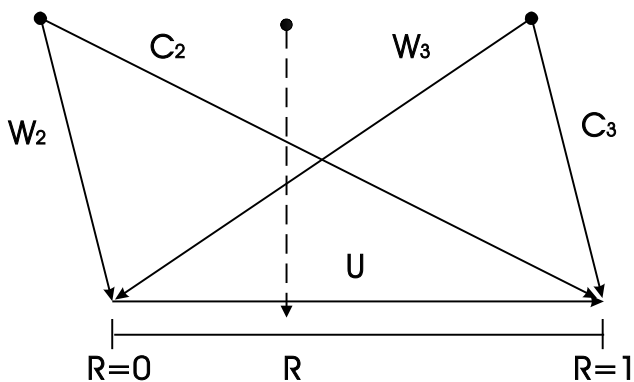


FIG. 3.5: Interprétation graphique du degré de réaction

Plusieurs autres formules intéressantes utilisant le degré de réaction (Eq.3.7) ont été trouvés avec l'introduction de l'équation d'Euler.

$$(C_{3u} - C_{2u}) = \frac{\Delta h_{o(3-2)}}{U} = \psi U$$

par exemple, à partir de l'équation pour la rothalpie (Eq.2.13)

$$h_2 + \frac{1}{2}W_2^2 = h_3 + \frac{1}{2}W_3^2$$

on a $h_2 - h_3 = W_3^2/2 - W_2^2/2 = cte.$ et

$$R = \frac{W_3^2 - W_2^2}{2\psi U^2} = \frac{(W_3 + W_2)(W_3 - W_2)}{2U(W_3 + W_2)} = \frac{(W_3 - W_2)}{2U} \quad (3.8)$$

3.4 Turbines et degré de réaction

Dans une turbine axiale à gaz, la chute de pression est élevée et pour effectuer une transition lisse le long de l'étage, la hauteur des pales des stators et rotors augmente selon la direction de l'écoulement. La figure (3.6) illustre la configuration d'une étage d'une turbine axiale dans le plan $x - r$, tandis que la figure (3.7) montre l'étage et le triangle de vitesses dans le plan $r - \theta$.

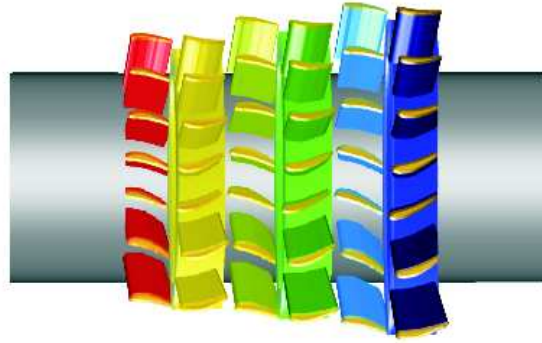


FIG. 3.6: Vue (x, r) d'une turbine axiale

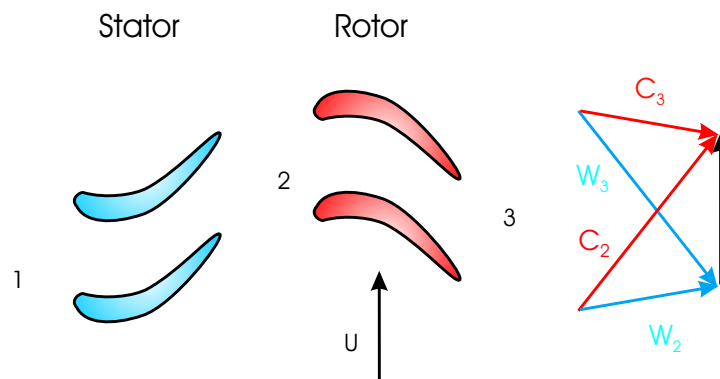
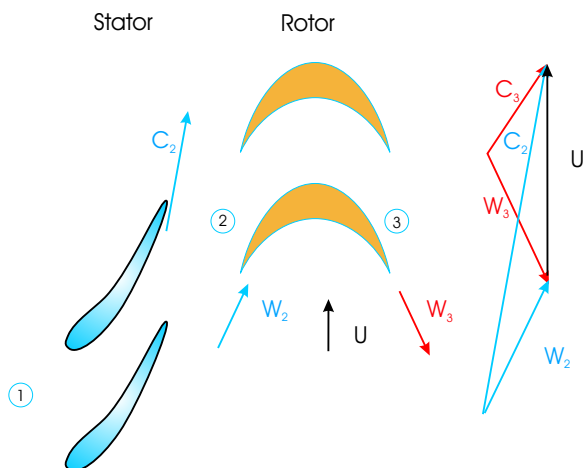


FIG. 3.7: Aubage et triangle de vitesses d'une turbine axiale

Essentiellement, il y a deux types de configurations pour effectuer la détente dans un étage. L'étage d'impulsion, dans lequel l'expansion a lieu dans le stator seulement, et l'étage de réaction où une partie de l'expansion s'effectue dans le stator et une partie dans le rotor. Les figures (3.8) et (3.9) illustrent ces deux cas respectivement.



Étage d'une Turbine à impulsion; $W_2=W_3$

FIG. 3.8: Étage d'une turbine à impulsion

À la section 3.3.3 on a trouvé des formules générales du degré de réaction pour les turbines et les compresseurs. Dans la suite, on regardera des résultats des expressions variées associés au degré de réaction d'une turbine.

3.4.1 Expressions pour le degré de réaction

Pour les turbines axiales, les expressions les plus importantes reliant les angles de l'écoulement, le coefficient de charge, le coefficient de débit et le degré de réaction sont :

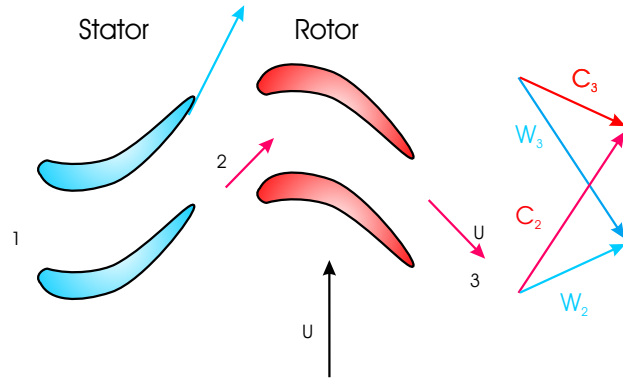


FIG. 3.9: Étage d'une turbine à réaction

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_{3u}}{U} &= R - 1 + \frac{\psi}{2} \\ \frac{C_{2u}}{U} &= 1 - R + \frac{\psi}{2} \\ \frac{W_{3u}}{U} &= 1 - \frac{C_{3u}}{U} = \frac{\psi}{2} + R \\ \frac{W_{2u}}{U} &= 1 - \frac{C_{2u}}{U} = \frac{\psi}{2} - R \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Ces relations peuvent être combinées pour exprimer le module des vitesses absolues et relatives à l'entrée et à la sortie du rotor. Par exemple :

$$\frac{C_3}{U} = \sqrt{\left(\frac{C_{3u}}{U}\right)^2 + \left(\frac{C_{3x}}{U}\right)^2} = \sqrt{\phi^2 + \left(R - 1 + \frac{\psi}{2}\right)^2} \quad (3.10)$$

Alors, pour une turbine les formules pour l'ensemble de vitesses à l'échelle à l'entrée et à la sortie du rotor sont exprimées en fonction des paramètres caractéristiques ϕ , ψ et R comme suit ;

$$\begin{array}{cc}
 \frac{C_3}{U} = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} + R - 1\right)^2} & \frac{C_2}{U} = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} - R + 1\right)^2} \\
 \frac{W_3}{U} = \sqrt{\phi^2 + \left(R + \frac{\psi}{2}\right)^2} & \frac{W_2}{U} = \sqrt{\phi^2 + \left(\frac{\psi}{2} - R\right)^2}
 \end{array}
 \tag{3.11}$$

Les relations précédentes peuvent être manipulées pour trouver une série d'expressions pratiques entre les angles de l'écoulement et les variables adimensionnelles ψ , ϕ et R comme suit :

$$\begin{array}{cc}
 \alpha_3 = \operatorname{artan}\left(\frac{R - 1 + \psi/2}{\phi}\right) & \alpha_2 = \operatorname{artan}\left(\frac{1 - R + \psi/2}{\phi}\right) \\
 \beta_3 = \operatorname{artan}\left(\frac{\psi/2 + R}{\phi}\right) & \beta_2 = \operatorname{artan}\left(\frac{\psi/2 - R}{\phi}\right)
 \end{array}
 \tag{3.12}$$

L'ensemble de formules (3.9) , (3.11) ou (3.12) peuvent être retenues visuellement sous la forme d'un triangle de vitesses adimensionnel où l'on retrouve l'interprétation cinématique (géométrique) des coefficients de charge et de débit et celle du degré de réaction (Fig.3.10)

Pour effectuer l'analyse d'un étage de réaction on a développé trois cas avec 100, 50 et 0% de degré de réaction. On considère toujours que la vitesse axiale demeure constante.

3.5 Les triangles de vitesse spéciaux

Le degré de réaction est très important en turbomachines et on lui accorde une visibilité particulière. Ainsi, nous allons voir quelques triangles de vitesse spéciaux en fonction de leur degré de réaction. Dans la suite on se concentre sur le cas des turbines.

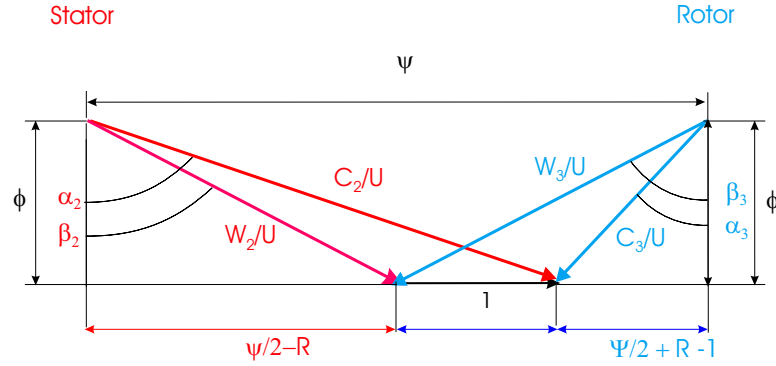


FIG. 3.10: Diagramme adimensionnel de vitesses pour une turbine

3.5.1 Degré de réaction de 100 %, $R = 1$

D'après la formule du degré de réaction (3.7), on trouve que lorsque $R = 1$, $C_2 = C_3$. Dans ce cas, seulement le stator dirige l'écoulement et toute la variation d'enthalpie se produit dans le rotor (3.3). Cette variation est donnée par :

$$W = U(C_{3u} - C_{2u}) = U(C_{3u} + |C_{2u}|) = 2UC_2 \sin \alpha_2$$

Selon cette expression le coefficient de charge est :

$$\psi = \frac{W}{U^2} = 2 \frac{C_2}{U} \sin \alpha_2 = 2 \frac{C_m}{U} \operatorname{tg} \alpha_2 = 2\phi \frac{C_2}{U} \sin \alpha_2$$

$$\boxed{\psi = 2\phi \frac{C_2}{U} \sin \alpha_2}$$

Dans ce cas, le rendement total-à-statique de l'étage est :

$$\eta_{ts} = \frac{W_e}{h_1 - h_3} = \frac{W_e}{h_1 - h_{o3} + c_3^2/2}$$

Cette dernière expression indique que pour maximiser le rendement, soit on maximise le travail spécifique, soit on minimise l'énergie cinétique $c_3^2/2$. Théoriquement, ceci est atteint lorsque $C_3 = 0$. Mais, comme $C_3 = C_2$, et d'après l'Eq.(3.1), le travail est aussi zéro. Par contre, si on augmente la vitesse U on fait augmenter le travail. Mais, au fur et à mesure que U tend vers l'infini, les coefficients de charge et de débit s'annulent. Ainsi, ce cas ne

s'utilise pas en pratique. La figure (3.11) illustre un exemple de triangle de vitesse ayant un degré de réaction de 100%.

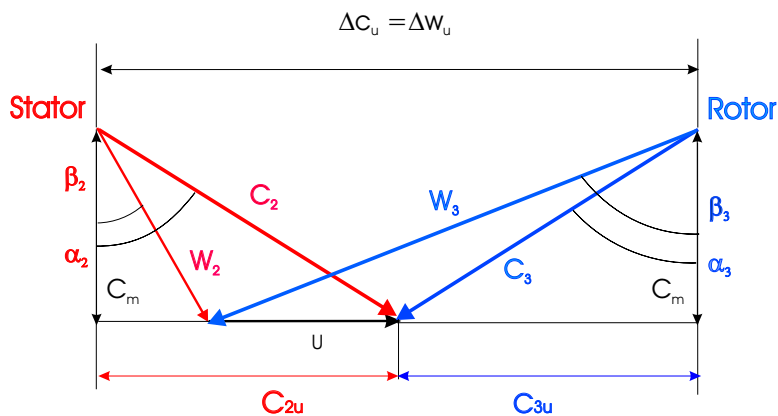


FIG. 3.11: Triangle de vitesse avec $R = 1$

3.5.2 Degré de réaction de 50 %, $R = 0.5$

Pour ce cas, le triangle de vitesse est symétrique. Si $R = 0.5$, d'après la formule :

$$R = 0.5 + \frac{\phi}{2}(\tan\beta_3 - \tan\alpha_2)$$

$\beta_3 = \alpha_2$, donc $C_2 = W_3$. C'est-à-dire que la vitesse de sortie du stator et du rotor sont égales.

Maintenant, le travail spécifique est donné par

$$W = U(C_{3u} - C_{2u}) = U(C_{3u} + |C_{2u}|) = U(W_3 \sin\beta_3 - U + C_2 \sin\alpha_2)$$

mais $C_2 \sin\alpha_2 = W_3 \sin\beta_3$, alors

$$W = U(2C_2 \sin\alpha_2 - U)$$

Ainsi le coefficient de charge prend la forme :

$$\psi = \frac{2C_2}{U} \sin\alpha_2 - 1 = \frac{2C_m}{U} \tan\alpha_2 - 1 = 2\phi \tan\alpha_2 - 1$$

$$\psi = 2\phi \tan \alpha_2 - 1$$

Si l'angle α_2 et la vitesse absolue à l'entrée C_2 demeurent constants, la valeur optimale de U est trouvée en dérivant W par rapport à cette vitesse. Ceci mène à :

$$U_{opt} = C_2 \sin \alpha_2 \quad \text{et} \quad \psi_{opt} = 1$$

La figure (3.12) illustre un triangle de vitesse symétrique correspondant à un cas avec un degré de réaction de 50%.

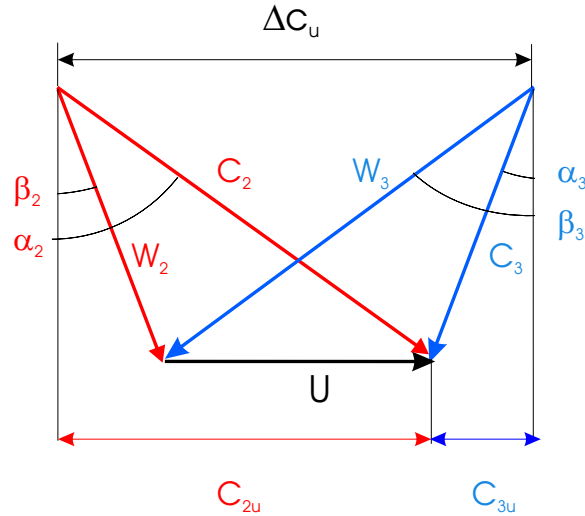


FIG. 3.12: Triangle de vitesse avec $R = 0.5$

3.5.3 Degré de réaction nul, $R = 0$

Si $R = 0$, d'après l'Eq.3.8 on trouve $W_2 = W_3$, $\beta_2 = \beta_3$ et le travail spécifique est donné par

$$\begin{aligned} W &= U(C_{3u} - C_{2u}) = U(|C_{3u}| + C_{2u}) \\ &= U(C_m \tan \beta_3 + C_m \tan \beta_2) = 2u C_m \tan \beta_2 \\ &= 2U(C_2 \sin \alpha_2 - U) \end{aligned}$$

Pour ce cas :

$$\psi = \frac{2C_2}{U}(\sin\alpha_2 - 1) = \frac{2C_m}{U}(\tan\alpha_2 - 1) = 2(\phi\tan\alpha_2 - 1)$$

$$\boxed{\psi = 2(\phi\tan\alpha_2 - 1)}$$

Encore une fois, si α_2 et C_2 sont des constantes :

$$U_{opt} = \frac{C_2 \sin\alpha_2}{2} \quad \text{et} \quad \psi_{opt} = 2$$

Un exemple de triangle de vitesse avec $R = 0$ est montré sur la figure (3.13).

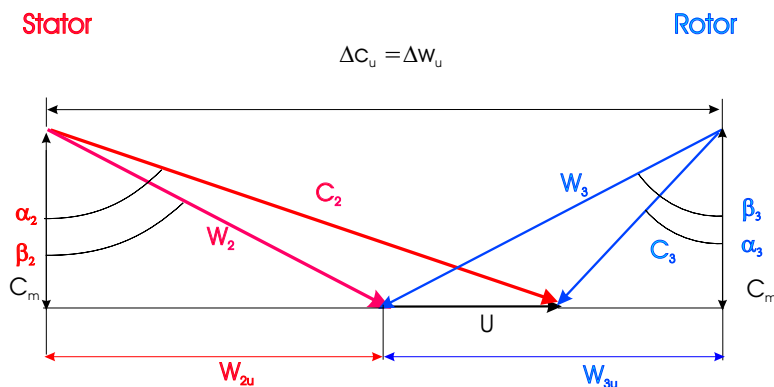


FIG. 3.13: Triangle de vitesse avec $R = 0$

Remarque

- Lorsqu'il s'agit d'une turbine, un degré de réaction nul indique que l'écoulement est accéléré dans le stator et seulement dévié à vitesse constante dans le rotor. Pour la cas d'un compresseur, $R = 0$ implique que l'augmentation de pression s'effectue dans le stator seulement.
- Pour un étage de réaction avec $R = 0$, l'enthalpie ne change pas dans le rotor. Cet étage ne correspond pas exactement à un étage d'impulsion dans lequel la pression ne change pas dans le rotor. Cependant pour le cas idéal isentropique, l'étage avec $R = 0$ est exactement égale à un étage d'impulsion.
- Selon la définition du degré de réaction, l'étage d'impulsion a un degré de réaction légèrement négatif dans le cas d'un écoulement réel à cause d'une augmentation d'enthalpie due aux effets de friction. On ne doit surtout pas interpréter cette augmentation d'enthalpie comme une violation de la première loi.

3.6 Les compresseurs axiaux

L'idée d'utiliser une machine axiale comme compresseur est aussi vieille que l'utilisation en mode turbine. Cependant le rendement des premiers compresseurs axiaux était très faible, de l'ordre de 40%. Il n'est donc pas surprenant que les compresseurs centrifuges qui avaient un rendement de 70 à 80% aient longtemps dominé. De nos jours, la plupart des compresseurs axiaux fonctionnent avec des écoulements subsoniques. Cependant, les compresseurs utilisés en aéronautique sont souvent transsoniques, où une partie de l'écoulement relatif aux pales du rotor est supersonique. La configuration générale d'un compresseur axial est représentée à la figure 3.14.

On remarque que pour la plupart des compresseurs axiaux :

- Le rayon moyen est presque constant ;
- La vitesse axiale est maintenue constante par le changement de section de passage.

On note que par convention, on définit un étage d'un compresseur axial comme un rotor suivi d'un stator. On remarque également la présence des aubes directrices à l'entrée qui sont parfois utilisés et qui ne font pas partie des étages proprement dits. Le rôle de ces aubes directrices est alors de préparer l'écoulement pour le premier rotor.

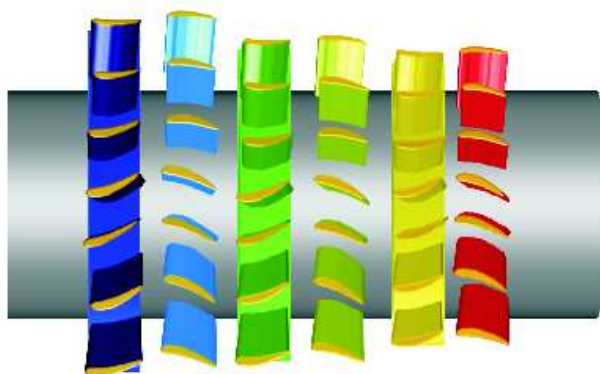


FIG. 3.14: Vue (x, r) d'un compresseur axial

A première vue, il semblerait qu'un compresseur axial pourrait être construit en inversant le sens de l'écoulement dans une turbine axiale. Cependant, il existe des différences fondamentales entre ces deux arrangements. Dans le cas des pales de turbines, la pression baisse au travers des rotors et stators, et la vitesse augmente. Dans le cas des pales de compresseurs, la pression augmente au travers des rotors et stators et la vitesse diminue. Il est connu qu'une décélération, ou diffusion, d'un fluide doit se faire à un taux faible si on veut éviter les pertes dues aux décollements. Donc, on devra faire beaucoup plus attention aux détails du design des pales et on devra se contenter d'un taux de compression faible si on veut une bonne efficacité. Ainsi, les compresseurs axiaux sont des machines comportant un grand nombre d'étages

Pour ces machines on peut également trouver des formules analogues à celles présentées pour les turbines reliant les coefficients adimensionnels ϕ , ψ et R . Ces formules sont pour les composantes périphériques des vitesses absolues et relatives

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_{2u}}{U} &= 1 - R + \frac{\psi}{2} \\ \frac{C_{1u}}{U} &= 1 - R - \frac{\psi}{2} \\ \frac{W_{2u}}{U} &= 1 - \frac{C_{2u}}{U} = R - \frac{\psi}{2} \\ \frac{W_{1u}}{U} &= 1 - \frac{C_{1u}}{U} = R + \frac{\psi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

pour les vitesses absolues et relatives

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{C_2}{U} &= \sqrt{\phi^2 + \left(1 - R + \frac{\psi}{2}\right)^2} & \frac{C_1}{U} &= \sqrt{\phi^2 + \left(1 - R - \frac{\psi}{2}\right)^2} \\ \frac{W_2}{U} &= \sqrt{\phi^2 + \left(R - \frac{\psi}{2}\right)^2} & \frac{W_1}{U} &= \sqrt{\phi^2 + \left(R + \frac{\psi}{2}\right)^2} \end{aligned}} \quad (3.14)$$

et pour les angles de l'écoulement :

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_2 &= \operatorname{artan} \left(\frac{1 - R + \psi/2}{\phi} \right) & \alpha_1 &= \operatorname{artan} \left(\frac{1 - R - \psi/2}{\phi} \right) \\ \beta_2 &= \operatorname{artan} \left(\frac{R - \psi/2}{\phi} \right) & \beta_1 &= \operatorname{artan} \left(\frac{R + \psi/2}{\phi} \right) \end{aligned}} \quad (3.15)$$

On note que le degré de réaction fournit la fraction de travail spécifique associée à l'augmentation d'enthalpie spécifique. Lorsque l'écoulement est incompressible, on peut employer la définition alternative :

$$R = \frac{(p_1 - p_2)/\rho}{W_e}$$

avec $W_e = h_{01} - h_{02}$

Bien que le degré de réaction optimal pour les compresseurs se situe aux alentours de $R = 0.5$, l'analyse d'un étage normal (la vitesse axiale demeure constante) doit être aussi général que celui pour les turbines et en particulier on s'intéresse encore aux cas avec 100, 50 et 0% de degré de réaction.

Compte tenu de la similitude dans l'analyse des triangles de vitesse spéciaux pour les turbines et les compresseurs, le développement pour ces derniers ne sera pas effectué. Néanmoins, on concentre les résultats de relations entre le degré de réaction et le coefficient de débit ϕ et le coefficient de charge ψ sous la forme graphique montré à la figure (3.15)

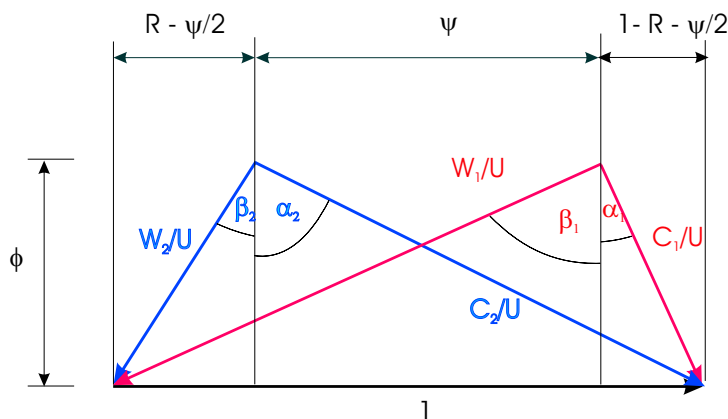


FIG. 3.15: Diagramme adimensionnel de vitesses pour un compresseur

3.7 Analyse du Rendement

3.7.1 Choix des coefficients de charge et de débit et du degré de réaction

Le choix des paramètres ψ et ϕ doit être fait en fonction d'optimiser le rendement mais en tenant compte des autres contraintes propres à l'application.

Le rendement d'un étage de turbine peut être relié aux pertes dues à la friction lors du passage de l'écoulement dans les stators et dans les rotors. Pour des grilles d'aubes bien dessinées, des corrélations peuvent être employées

pour déterminer les pertes par friction et ainsi conduire à une prédiction du rendement.

Pour les turbines à gaz industrielles stationnaires, on peut augmenter davantage η_s en ayant une turbine avec plus d'étages et une plus grande dimension. Pour les turbines en propulsion aéronautique, on doit sacrifier de la performance pour réduire la taille et le poids de la turbomachine.

3.7.2 Considérations théoriques et empiriques

Les coefficients ψ , ϕ et R , utilisés pour caractériser les turbomachines, peuvent et doivent être employés pour la conception d'une machine à haut rendement. Si on parle de rendement on dit pertes. Mais, dans le type d'analyse globale que l'on pratique, des équations ou modèles mathématiques avancés (les équations de Navier-Stokes) sont hors contexte et les irréversibilités sont caractérisés à l'aide de *coefficients de pertes*.

Un type de coefficient de perte très répandu exprime les pertes en fonction de la chute de pression totale. Notamment :

$$K = \frac{P_{02} - P_{01}}{\rho U^2 / 2}$$

Dans cette définition, les états 1 et 2 sont génériques ainsi que la vitesse U . Autrement dit, elle s'applique aussi bien au stator qu'au rotor. Dans le cas du rotor, la pression de stagnation est définie par rapport à un repère en rotation. Dans ce cas donc, on parle d'une pression de stagnation relative. Plus spécifiquement, pour une vitesse de référence à la sortie du stator C_2 et une vitesse de référence à la sortie du rotor W_3 , les coefficients de pertes peuvent s'écrire :

$$K_S = \frac{\Delta P_{0S}}{\rho C_2^2 / 2} \quad K_R = \frac{\Delta P_{0R}}{\rho W_3^2 / 2} \quad (3.16)$$

Avec cette définition de perte, on peut maintenant décrire le *rendement total-à-total* d'une manière alternative. Pour une *turbine* on a :

$$\eta_{tt} = \frac{\Delta h_0}{\Delta h_0 + \Delta h_{0p}} = \frac{1}{1 + \Delta h_{0p} / \Delta h_0}$$

où Δh_0 indique la variation d'enthalpie totale réelle et Δh_{0p} la perte énergétique. Selon une analyse de R.I. Lewis, sous l'approximation d'un processus presque isentropique, cette perte d'enthalpie peut être approchée par :

$$\Delta h_{0p} \simeq \frac{\Delta P_{op}}{\rho}$$

Puisque la perte de pression se produit dans le stator et dans le rotor, alors :

$$\Delta P_{op} = \Delta P_{ops} + \Delta P_{opr},$$

de sorte que le rendement totale-à-totale devient :

$$\eta_{tt} = \frac{1}{1 + (\Delta P_{ops} + \Delta P_{opr})/\rho\Delta h_0}$$

lorsqu'on introduit la formule (3.16) pour les pertes dans le stator et dans le rotor on trouve :

$$\eta_{tt} = \frac{1}{1 + (K_S C_2^2/2 + K_R W_3^2/2)/\Delta h_0}$$

Finalement, si on utilise le coefficient, $\psi = \Delta h_0/U^2$, on arrive à :

$$\boxed{\eta_{tt} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\psi} \left[K_S \frac{C_2^2}{U^2} + K_R \frac{W_3^2}{U^2} \right]}} \quad (3.17)$$

Cette équation pour le rendement totale-à-totale, peut s'exprimer au moyen de paramètres adimensionnels ψ , ϕ et R , à l'aide des expressions données par (3.14). Le résultat est :

$$\boxed{\eta_{tt} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\psi} \left[K_S(\phi^2 + (\psi/2 + 1 - R)^2) + K_R(\phi^2 + (\psi/2 + R)^2) \right]}} \quad (3.18)$$

3.7.3 Corrélations

Pour 'caler' les coefficients de pertes, S.F. Smith a construit en 1965 un modèle sur la base d'importants tests effectués sur 70 turbines. Chaque turbine a été étudié pour un certain intervalle de pression, ce qui a permis la construction d'une corrélation entre ψ et ϕ . Pour l'ensemble des turbines analysées, le graphique montrant ψ en fonction de ϕ ont donné lieu à des contours d'un même rendement. Ces formes indiquent qu'il existe un point de rendement optimal pour une paire de coefficients ψ et ϕ .

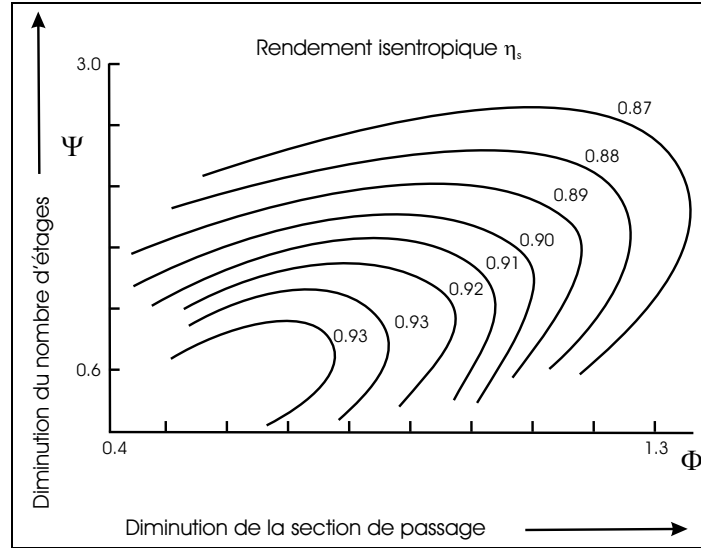


FIG. 3.16: Carte de Smith pour les turbines axiales

Plus tard, les résultats de Smith ont été analysés par R.I. Lewis à la lumière de l'Eq.3.18. Par exemple, pour une turbine avec $R = 0.5$ et $K_S = K_R$ on a :

$$\eta_{tt} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\psi} \left[(\phi^2 + \frac{1}{4}(\psi + 1)^2) K_S \right]} \quad (3.19)$$

Cette équation indique que pour obtenir un bon rendement on peut :

- Considérer que les pertes sont indépendantes de ϕ et ψ
- Imposer $K_S, K_R = 1$ et ajuster les paramètres ϕ et ψ pour optimiser le rendement .
- Opérer sur la forme du profil pour minimiser les pertes.

Afin de trouver une équation pour un ϕ optimal lorsque $R = 0.5$, Lewis trouve le minimum de l'expression :

$$f_L = \frac{1}{\psi} \left[\phi^2 + \frac{1}{4}(\psi + 1)^2 \right] \quad (3.20)$$

pour obtenir :

$$\psi_{opt} = \sqrt{4\phi^2 + 1} \quad (3.21)$$

Dans le cadre général les relations sont :

$$\begin{aligned}
 f_L &= \frac{1}{2\psi} [K_S(\phi^2 + (\psi/2 + 1 - R)^2) + K_R(\phi^2 + (\psi/2 + R)^2)] \\
 \psi_{opt} &= 2\sqrt{\phi^2 + \frac{1}{2} + R(R - 1)}
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

3.8 Grille d'aubes

L'écoulement dans une turbomachine est instationnaire tridimensionnel et visqueux et le calcul du champ des paramètres physiques (vitesse, pression température, etc) de ce phénomène requiert de la résolution des équations de Navier-Stokes par voie numérique. Cependant, avant de consacrer des ressources informatiques importantes à une telle étude, on effectue des simplifications au niveau de la physique ainsi que de la géométrie. On note que malgré l'envergure de ces simplifications, ce modèle a été le mécanisme de conception d'une multitude d'appareils tout le long du siècle dernier et continue encore à être appliqué.

D'un point de vue géométrique, on définit une surface à un rayon moyen comme représentative du problème. En d'autres mots, on remplace une surface d'écoulement par une surface cylindrique. Cette surface cylindrique est par la suite développée dans le plan pour donner lieu à une série d'aubes. Cet ensemble linéaire d'aubes bidimensionnels reçoit le nom de *grille d'aubes*. Afin de caractériser un grille d'aubes, on utilise la nomenclature suivante (Fig.) :

- β = *angle d'écoulement*; l'angle entre la vitesse relative W et l'axe de rotation de la grille
 β_b = *angle du profil*; l'angle entre la ligne de squelette (ligne moyenne du profil) et l'axe de rotation de la grille.
 θ = *angle de courbure* = $\beta_{b2} - \beta_{b1}$; l'angle entre les lignes tangentes aux extrémités de la ligne de squelette et l'axe de rotation de la grille.
 i = *angle d'incidence* = $\beta_1 - \beta_{b1}$; écart entre l'angle d'écoulement et l'angle du profil au bord d'attaque.
 δ = *angle de déviation* = $\beta_{b2} - \beta_2$; écart entre l'angle du profil et l'angle de l'écoulement au bord de fuite.
 ε = *angle de déflexion* = $\beta_2 - \beta_1$; correspond à l'angle duquel l'écoulement est tourné entre le bord d'attaque et le bord de fuite.
 ξ = *angle de calage*; l'angle entre la corde et la direction axiale
 c = *corde du profil*; distance entre le bord d'attaque et le bord de fuite.
 b = *corde axiale* corde projetée seon la direction axiale.
 s = *pas de la grille*; distance entre les aubes

Une fois qu'on a identifié le fluide ainsi que les conditions thermodynamiques et cinématiques d'opération (pression, température, vitesse de rotation, etc) d'une turbomachine, on étudie l'évolution du diagramme de vitesses en fonction des paramètres adimensionnels tel que ψ , ϕ et R et finalement, on s'attaque au calcul des aubages qui produiront des écoulements ayant les angles décrits par les triangles de vitesses. Cette dernière étape implique le calcul de la grandeur et la forme des pales ainsi que l'espacement entre elles.

Parmi les paramètres les plus importants caractérisant l'aubage, on distingue la *ligne de squelette*, *l'épaisseur*, *l'hauteur* et *le nombre* de pales. Si par exemple on veut réduire l'hauteur des aubes et en même temps garder un débit massique, on devra augmenter le diamètre de la roue. Dans ce cas, on peut se confronter à les limites imposées par les matériaux. Si par contre on augmente la vitesse axiale, pour garder le même débit massique sans modifier l'hauteur des aubes on peut se retrouver avec un nombre de Mach élevé, ce qui peut augmenter les pertes considérablement.

3.8.1 La solidité ou le pas de la grille

Le design d'un étage de turbine axiale passe d'abord par la sélection du triangle des vitesses, ce qui fixe ainsi le coefficient de charge, le coefficient de débit et le degré de réaction de l'étage. En plus de ces paramètres, dans le processus du design on ajoute la notion de solidité. Il s'agit du rapport b/s , qui contrôle l'espacement des pales et donc le nombre de pales dans le périmètre. Dépendant si on considère la corde ou la corde axiale on parle de *la solidité s/c* ou de *la solidité axiale s/b* . La figure 3.17 présente ces différents paramètres.

Dans la figure 3.18, s est le pas et b est la corde axiale des pales. Une faible solidité résultera dans un faible guidage de l'écoulement, avec les dangers de séparation. Une trop forte solidité résultera dans un bon guidage mais des pertes visqueuses importantes seront présentes. La valeur optimale du rapport s/b est ainsi un compromis entre les pertes par décrochage et les pertes par friction. Moins c'est le nombre d'aubes moins sont les pertes visqueuses. mais plus importantes sont les pertes par séparation.

Pour mieux caractériser le problème, Zwiegel en 1945 a développé un critère pour établir un lien entre le coefficient de portance tangentiel L et la solidité axiale s/b . A l'époque de Zwiegel la valeur trouvée pour s/b idéal a été de 0.8. Aujourd'hui ce coefficient peut même dépasser l'unité.

Le développement d'une expression entre le coefficient de portance tangentiel, dans la direction de la vitesse périphérique U , et la solidité utilise l'équation de la quantité de mouvement de la forme suivante :

$$F_u = \dot{m}(W_1 \sin \alpha_1 - W_2 \sin \alpha_2)$$

Le débit massique peut s'exprimer de différents manières. Une d'elles est en fonction des quantités à la station de sortie 2. C'est-à-dire $\dot{m} = \rho_2 C_{m2} s = \rho_2 W_2 \cos \alpha_2 s$. Alors

$$F_u = \rho_2 W_2 \cos \alpha_2 s (W_1 \sin \alpha_1 - W_2 \sin \alpha_2)$$

ou encore :

$$F_u = \rho_2 W_2^2 \cos^2 \alpha_2 s (W_1 \sin \alpha_1 / W_2 \cos \alpha_2 - \tan \alpha_2)$$

mais $C_m = W_1 \cos \alpha_1 = W_2 \cos \alpha_2$, de sorte que :

$$F_u = \rho_2 W_2^2 \cos^2 \alpha_2 s (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2) = \rho_2 C_m^2 s (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)$$

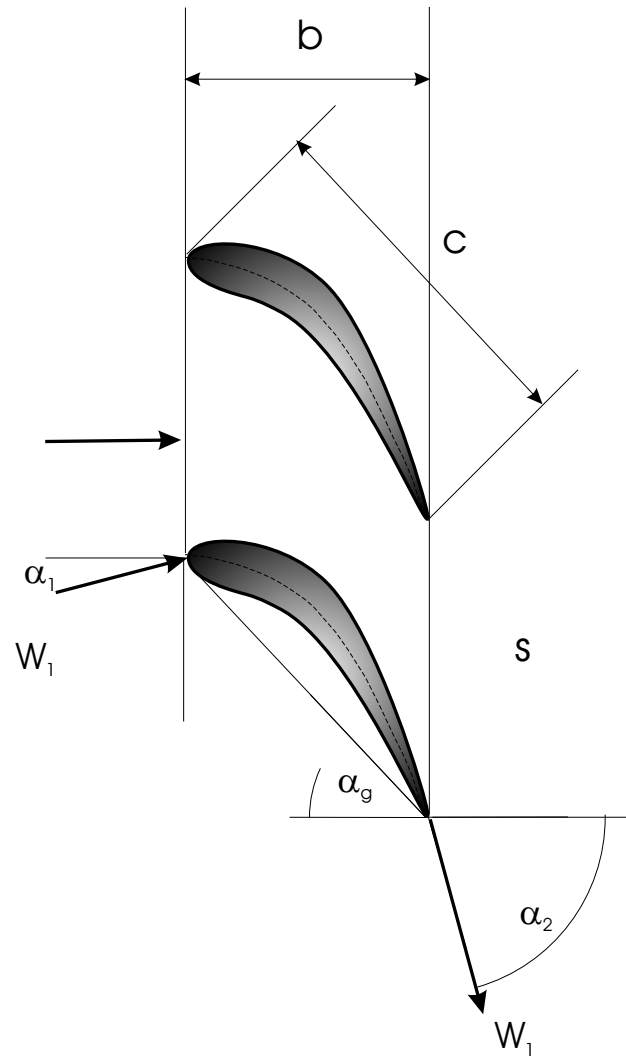


FIG. 3.17: Solidité

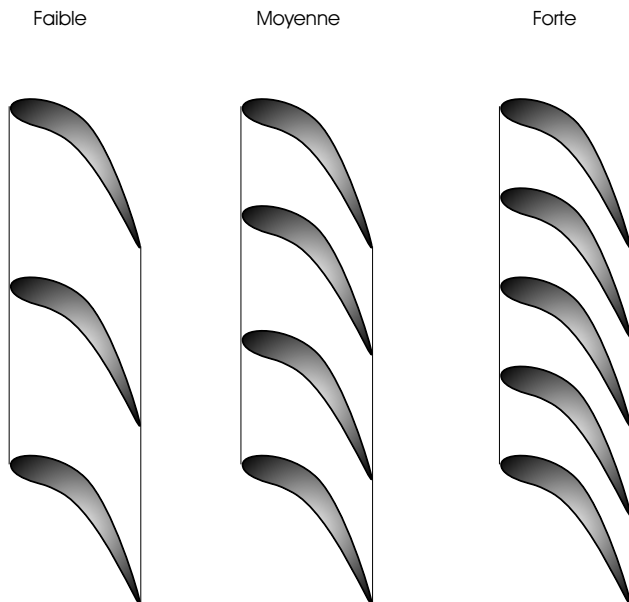


FIG. 3.18: Différentes solidité

Si on exprime cette force par unité de surface (b), on parle donc d'une pression moyenne :

$$P_u = \frac{\rho_2 C_m^2 s (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)}{b}$$

et si cette pression est rendue adimensionnelle par rapport à : $\rho_2 W_2^2 / 2 = \rho_2 C_m^2 / 2 \cos^2 \alpha_2$, on trouve le coefficient de portance tangentielle :

$$C_{Lu} = \frac{\cos^2 \alpha_2 s (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)}{b/2}$$

ce qu'on l'écrit finalement comme :

$$C_{Lu} = 2 \left(\frac{s}{b} \right) \cos^2 \alpha_2 (\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2)$$

3.8.2 Principes généraux sur la forme des pales

Une fois que la corde et la solidité ont été choisis, on doit procéder à la conception de la pale elle même. Ceci implique des spécifications géométriques

d'entrée et de sortie et la forme des profils produisant un minimum de pertes. La forme des pales dans les turbines et compresseurs axiaux est fondamentalement différente parce que la tâche à accomplir par les différentes rangées d'aubes sont également fondamentalement différentes. En général, dans un étage de turbine, les aubes du stator et du rotor agissent comme des tuyères convergentes et l'écoulement y est accéléré. Inversement, dans les étages de compresseur, l'écoulement est décéléré et les stators et rotors agissent comme des diffuseurs. Ces indications dictent la forme générale des pales.

Pour les turbines, la ligne de squelette est souvent décrite par un polynôme de degré 3. Avec une courbe de cette nature il est possible de fixer les angles β_b d'entrée et sortie ainsi que l'angle de calage β_g . Dans une turbine l'écoulement doit être accéléré et cette accélération doit se faire de manière régulière dans le passage interaube. L'art du design est donc le contrôle de l'épaisseur de l'aube superposé à la ligne de squelette pour atteindre cet objectif.

Habituellement la ligne de squelette des compresseurs est une parabole ou un arc de cercle. Les aubes de compresseurs les plus répandues sont ceux de la série *NACA xyyzz*. Le numero *x* indique la position de la pression minimale (0-10), le chiffre *yy* le coefficient de portance ($yy/10$) et le chiffre *zz* l'épaisseur maximale relative ($zz/100$).

Le degré de réaction est aussi une grandeur qui se traduit selon le type d'application, compresseur ou turbine, sur la forme des pales.

Pour le cas des compresseurs, l'expérience a montré que le degré de réaction doit être aux alentours de $R = 0.5$. On explique ceci comme le résultat d'un design qui permet une augmentation graduelle de la pression entre l'entrée et la sortie de l'étage. Si l'augmentation de pression est trop rapide, le risque d'un décrochement de la couche limite augmente aussi. Il est bien connu que le décrochement de l'écoulement entraîne des pertes importantes. Aussi, il a été trouvé qu'un facteur $R = 0.5$ favorise le contrôle des limites pour le nombre de Mach ($M = 0.7 - 0.8$) dans le stator et dans le rotor. Il s'agit de limites au-delà desquels les pertes deviennent inacceptables.

La forme des pales des turbines varie selon qu'il s'agit d'une turbine à vapeur ou d'une turbine à gaz. Pour les premières, le rapport de pression peut être de l'ordre 1000 :1, mais pour une turbine à gaz, la limite de ce rapport est d'environ 10 :1. Dans le cas des turbines à gaz, le degré de réaction est en relation directe avec la température. Ainsi on a intérêt à employer des valeurs tels qui permettent une réduction rapide de la température, surtout

dans les premières étages. Dans ce cas on retrouve fréquemment les valeurs $R = 0.2 - 0.3$

Pales de turbine avec $R = 0$

La forme des pales de turbine utilisant un triangle de vitesse avec un degré de réaction nul est illustrée sur la figure ci-contre :

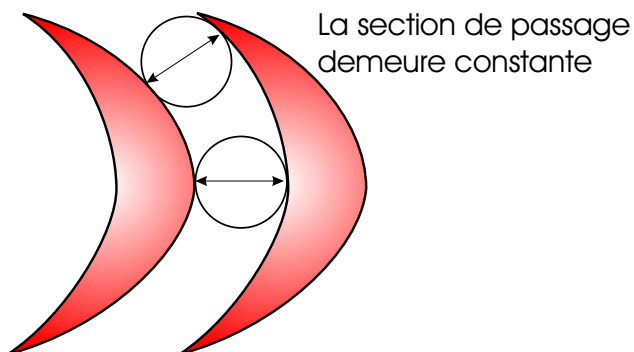


FIG. 3.19: Pales de turbine : $R = 0$

Pales de turbine avec $R = 0.5$

La forme des pales de turbine utilisant un triangle de vitesse symétrique est illustrée sur la figure ci-contre :

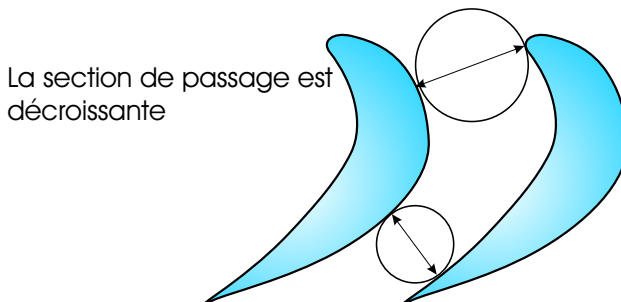


FIG. 3.20: Pales de turbine : $R = 0.5$.

Pales de compresseur avec $R = 0.5$

La forme des pales de compresseur utilisant un triangle de vitesse symétrique est illustrée sur la figure ci-contre :

La section de passage est croissante

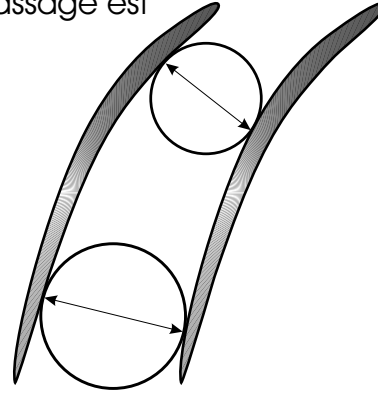


FIG. 3.21: Pales de compresseur : $R = 0.5$.

3.9 Opération hors-design

3.9.1 Caractéristiques

Les turbomachines sont conçues pour fonctionner sous des conditions d'opération spécifiques de vitesse de rotation et de débit massique qu'on définit comme le *point nominal* ou *point de design*. Jusqu'à présent on a supposé que les turbomachines opèrent au point de design, mais elles sont souvent demandées à opérer hors de ce point nominal en raison de facteurs variés, tels que les périodes de démarrage et d'arrêt, par exemple.

Malgré cet inconvénient, tant que l'on opère dans une région proche du point de design, il est possible de faire certaines hypothèses sur l'écoulement qui permettront de dégager les caractéristiques du comportement hors-design.

Une machine est conçue pour qu'il y ait un accord de quasi égalité entre les angles de l'écoulement et les angles des pales. Ainsi, dans des conditions hors-design, β_1 sera possiblement différent de β_{1g} , c'est-à-dire que l'angle d'incidence de l'écoulement sur les pales du rotor ne coïncidera pas avec celui calculée pour le point nominal. Si l'écart est trop fort, l'écoulement pourrait alors se retrouver dans une position de décollement par rapport aux pales. Cependant, dans des conditions légèrement hors-design (sans décrochage fort), l'angle β_2 sera passablement égal à β_{2g} puisque l'écoulement aura tendance à se réaligner dans la direction géométrique des pales.

3.9.2 Compresseur en mode hors-design

On sait que lors d'opérations d'accélération et de décélération, par exemple, un compresseur est appelé à fonctionner dans des conditions éloignées du point de design. Ces situations indiquent que le compresseur doit pouvoir opérer dans une plage acceptable de variations de la vitesse de rotation et des conditions d'entrée du fluide. Néanmoins, il y a des régions d'opération qui lui sont néfastes et qui peuvent conduire à des dommages très importants au niveau des aubes. Pour obtenir un premier estimé du comportement hors-design, on considère que les angles de fuite de l'écoulement demeurent constants dans une région d'opération proche du point nominal. Dans ce cas, le coefficient de charge est donné par :

$$\psi = 1 - \phi(\tan\alpha_1 + \tan\beta_2)$$

Cette équation théorique, pour laquelle on a considéré que les angles α_1 et β_2 sont constants, indique que le coefficient de charge augmente au fur et à mesure que le coefficient de débit diminue. Dans la réalité, cette courbe est modifiée par les pertes et elle n'est pas une droite mais plutôt de forme parabolique. La figure 3.22 illustre la variation théorique de ψ en fonction de ϕ et la compare à une variation typique obtenue par des essais expérimentaux.

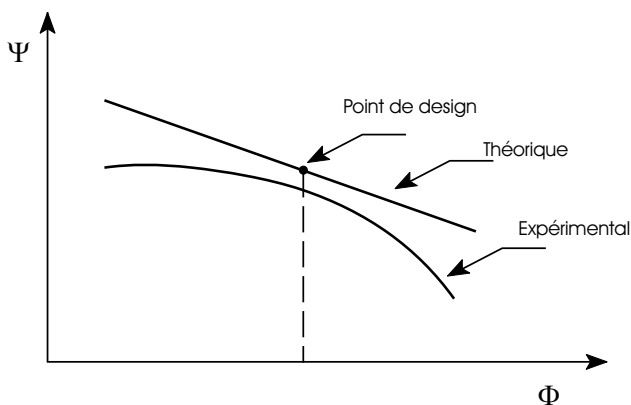


FIG. 3.22: Comportement hors-design d'un compresseur

Sur la courbe expérimentale (inférieure), on distingue nettement le point nominal. Une réduction de ϕ implique une variation de l'angle d'incidence et éventuellement mène à un décrochage incipient de l'écoulement à une position

noté par ϕ_d . Lorsque ϕ continue à augmenter le décrochage devient de plus en plus sévère jusqu'à ce que l'écoulement atteinte un seuil à partir duquel le rendement tombe fortement.

Puisque l'expérience indique que la relation entre ψ et ϕ n'est pas linéaire en pratique, les angles du fluide changeront alors par rapport à ceux du point nominal. Une approche pour palier à cette difficulté et l'utilisation d'un stator à angle variable s'inclinant par rapport à la direction axiale ce qui augmente l'angle α_1 et diminue le débit massique (C_m diminue).

Effets tridimensionnels

À cause du développement des couches limites sur le moyeu et le carter, on retrouve rapidement des profils de vitesse s'éloignant du profil plat et la vitesse axiale n'est pas constante selon l'hauteur des pales. Cet effet est aussi une influence importante sur la distribution de vitesse entre le premier et le dernier étage d'un compresseur multiétage. La figure 3.23, illustre de manière très approximative la différents profils de vitesse du premier au du dernier étage d'un compresseur multiétage.

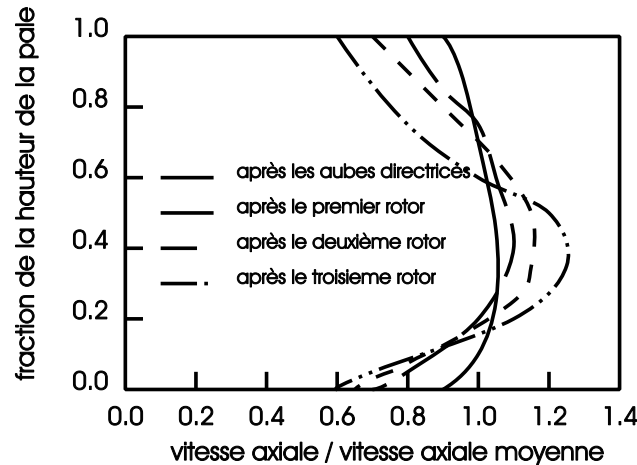


FIG. 3.23: Profils de vitesses d'un compresseur axial

À l'aide de l'équation :

$$W_e = U[(U - C_m \tan \alpha_1) - C_m \tan \beta_2] = U[U - C_m (\tan \alpha_1 + \tan \beta_2)]$$

et en considérant que les angles α_1 et β_2 demeurent constants, on voit qu'une diminution de la composante C_m , avec $U = cte$, entraîne une augmentation

du travail spécifique W_e . Cette augmentation du travail produit à son tour une augmentation de la masse volumique qui quitte le premier étage. Il s'agit donc d'un effet additionnel qui produit une diminution encore plus forte de la vitesse C_m dans le deuxième étage. Naturellement, cet effet augmente le long des étages de sorte qu'une réduction modérée de C_m , dans le premier étage peut causer une condition d'opération fortement hors-design pour le dernier étage. La figure 3.24 montre dans la région du rayon moyen l'effet d'une opération hors-design.

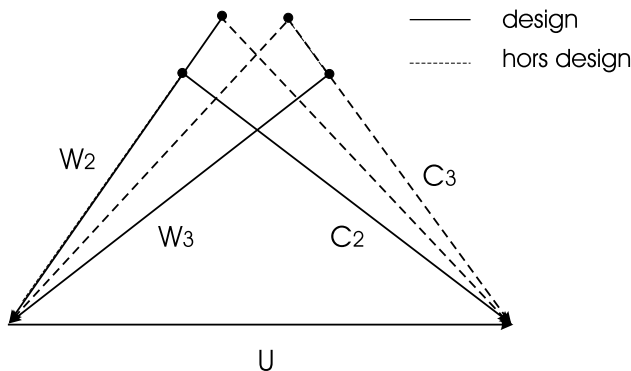


FIG. 3.24: Profil de vitesse et opération hors-design

Pour des conditions hors design, le travail réel fait sur le fluide sera donc plus faible que celui prédit par le triangle des vitesses initial $(\Delta C_u)_{reel} < (\Delta C_u)_{design}$. Cet effet est très important pour les compresseurs axiaux et causera des écarts importants par rapport au design selon le triangle des vitesses. Pour tenir compte de façon globale de l'impacte de la forme du profil de vitesse sur la diminution du travail spécifique, il est courant d'introduire un facteur inférieur à l'unité noté par le symbole λ (*Work Done Factor*). Ainsi, pour les compresseurs axiaux, la relation entre l'équation de l'énergie et l'équation d'Euler pour les turbomachines est modifiée comme suit :

$$\Delta h_0 = \lambda U C_m (\tan \beta_1 - \tan \beta_2)$$

Le coefficient λ dépend du nombre d'étages du compresseur. Dans un design préliminaire et s'il manque d'autres données, on pourra utiliser le graphe de Howell (figure 3.25) qui représente un "Work Done Factor" moyen à appliquer à tous les étages. Tel qu'illustré, il montre un comportement asymptotique dans le sens croissant des étages.

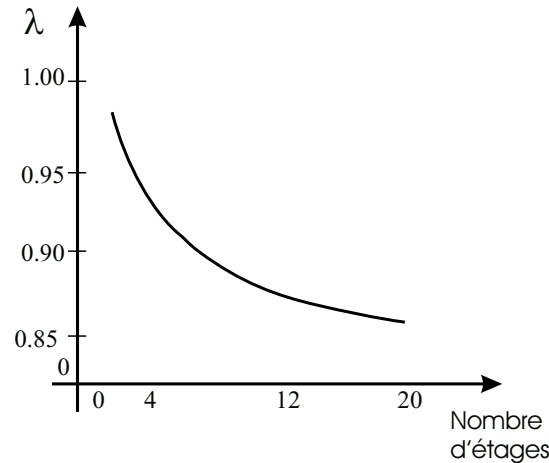


FIG. 3.25: Diagramme de Howell

On note qu'on ne doit pas confondre le coefficient λ avec la notion de rendement. Il s'agit plutôt d'un facteur de correction qui affecte le travail qui peut être fait réellement sur le fluide pour un triangle de vitesses donné. Une fois le travail déterminé, la notion de rendement s'applique normalement pour relier les variations de pression et de température.

3.9.3 Turbine en mode hors-design

Une turbine à gaz opère avec un compresseur et une chambre de combustion et les paramètres de design de la turbine telles que le rapport de pression et le débit massique sont fonction de ces deux autres composantes. Le débit massique circulant par la turbine, par exemple, ce n'est que le débit fourni par le compresseur plus une faible quantité provenant de l'apport de combustible. Pour cette raison, certains aspects liés aux conditions hors-design pour une turbine à gaz seront plutôt regardés au chapitre (6) où on regarde la performance hors-design de la turbine à gaz dans son ensemble en fonction de la performance hors-design des composantes.

Résumé

Pour les turbines et les compresseurs :

- Les angles d'incidence de l'écoulement sur les pales des stators et rotors

peuvent différer des angles d'incidence géométriques ;

- Les angles de fuite de l'écoulement sont généralement les mêmes que les angles de fuite géométriques même en opération hors-design, sauf s'il y a décrochage prononcé.
- L'équation adimensionnelle d'Euler pour les turbomachines en fonction des angles β_2 et α_1 est : $\psi = 1 - \phi(\tan\alpha_1 - \tan\beta_2)$

3.10 Diffusion de l'écoulement

On appelle diffusion tout ralentissement du fluide dans un étage. Ce phénomène est étroitement liée à la performance des compresseurs (pompes), pour lesquels on obtient un gain en pression par une décélération de l'écoulement dans l'étage. Cependant, ce ralentissement est limité par le décrochement de l'écoulement du profil.

Afin de quantifier ce phénomène, on introduit le *rapport de diffusion* définie en fonction des vitesses d'entrée et de sortie de la grille d'aubes. On vérifie toujours la diffusion dans les repères se déplaçant avec la grille d'aubes considérée. Ainsi, pour un stator, la diffusion sera mesurée par le rapport des vitesses absolues C entre la sortie et l'entrée du stator. Pour un rotor, la diffusion sera mesurée par le rapport des vitesses relatives W entre la sortie et l'entrée du rotor. Pour ce dernier, ce rapport ou *nombre de Haller* est donnée par :

$$H_u = \frac{W_2}{W_1}$$

et à partir des formules (3.14), on trouve :

$$H_u = \frac{\sqrt{\phi^2 + \left(R - \frac{\psi}{2}\right)^2}}{\sqrt{\phi^2 + \left(R + \frac{\psi}{2}\right)^2}}$$

D'après l'expérience, pour les compresseurs axiaux la limite pour l'acceptation de pertes, est $H_u = \frac{W_2}{W_1} > 0.7$. Ce seuil impose alors une restriction quant à un rapport de pression $P_{02}/P_1 \simeq 1.25$.

Ce fait permet de justifier à posteriori le besoin de plusieurs étages pour obtenir des rapports de pressions plus élevés. Aussi, sous l'hypothèse d'étages répétitifs (tous égaux), pour un rapport de pression total r_{tot} voulue et pour un rapport de pression par étage r_{etg} limité par la diffusion, le nombre d'étages N est estimée par :

$$N = \frac{\ln(r_{tot})}{\ln(r_{etg})}$$

Dans une turbine on doit éviter à tout prix la diffusion dans les grilles d'aubes, autant dans les stators que dans les rotors. La raison est que le rendement d'un processus de diffusion est toujours plus faible que celui d'un processus d'accélération ou de vitesse constante. Ainsi, comme une turbine a un rapport de pression supérieur à l'unité, on pourra éliminer la diffusion ; ce qui est impossible pour un compresseur. Ceci fixe des limites pour le degré de réaction devant être employé pour une turbine. Ainsi, pour :

$$R = 0, \quad |W_2| = |W_3|$$

et pour :

$$R < 0, \quad |W_3| < |W_2|$$

On assiste donc à de la diffusion dans le rotor. D'un autre côté, pour :

$$R = 1, \quad |C_2| = |C_3|$$

et pour :

$$R > 1, \quad |C_2| < |C_3|$$

On assiste alors à de la diffusion dans le stator.

Donc, pour une turbine on doit avoir : $0 \leq R \leq 1$ afin d'éviter la diffusion dans les rotors et les stators. Pour les compresseurs, on ne peut pas éviter la diffusion mais on devra la contrôler.

3.10.1 Exemples

Exemple 3.2

Une turbine axiale utilise un stator et un rotor tel que montrés sur le croquis ci-dessous :

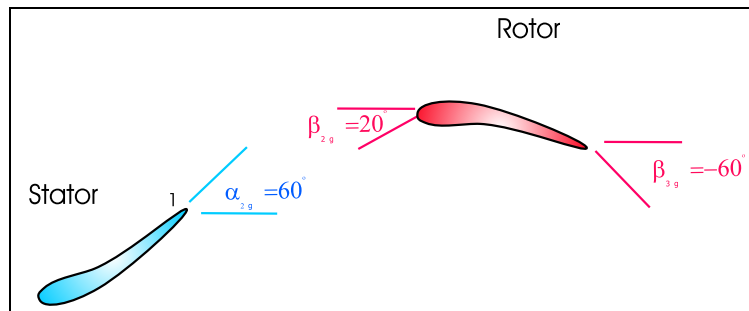


FIG. 3.26: Exemple2.2 a)

En supposant que le rayon moyen est constant ainsi que la vitesse axiale pour l'étage, déterminez la valeur des coefficients de débit et de charge ainsi que le degré de réaction lorsque les angles de l'écoulement correspondent aux angles géométriques des pales.

Solution

Le triangle des vitesses aura l'aspect suivant :

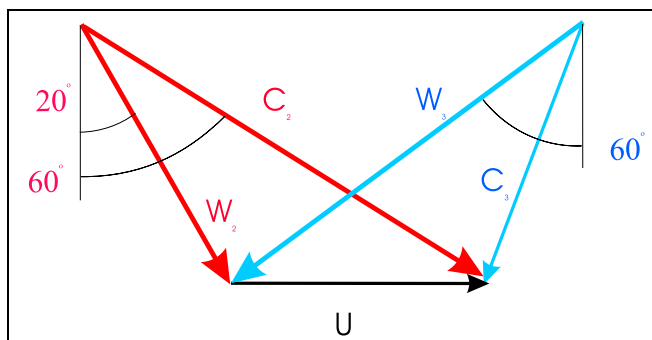


FIG. 3.27: Exemple2.2 a)

On en déduit que :

$$\begin{aligned} C_{2u} &= C_x \tan 60^\circ \\ W_{2u} &= C_x \tan 20^\circ \\ C_{3u} &= C_x \tan (-20^\circ) \\ W_{2u} &= C_{2u} - U \end{aligned}$$

On peut alors calculer le coefficient de débit selon

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{C_x}{U} = \frac{C_x}{C_{2u} - W_{2u}} \\ &= \frac{C_x}{C_x \tan 60^\circ - C_x \tan 20^\circ} \\ &= 0.731 \end{aligned}$$

Le coefficient de charge est donné par :

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{C_{2u} - C_{3u}}{U} = \frac{C_x \tan 60^\circ - C_x \tan(-20^\circ)}{C_x \tan 60^\circ - C_x \tan 20^\circ} \\ \psi &= 1.532 \end{aligned}$$

et le degré de réaction est :

$$\begin{aligned} R &= 1 - \frac{C_{2u} + C_{3u}}{2U} \\ &= 1 - \frac{C_x \tan 60^\circ + C_x \tan(-20^\circ)}{2(C_x \tan 60^\circ - C_x \tan 20^\circ)} \\ R &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemple 3.3

Une turbine à gaz axiale à un étage opère avec des vitesses purement axiales à l'entrée et à la sortie. À la sortie des stators, l'écoulement fait un angle de 70° par rapport à la direction axiale. La pression totale et la température totale en entrée sont respectivement 311 kPa et 850°C . La pression statique à la sortie est de 100 kPa. Le rendement total-à-statique est estimée à $\eta_{ts} = 0.87$ et la vitesse tangentielle du rotor au rayon moyen est de 500 m/s.

En supposant une vitesse axiale constante au travers de l'étage et en utilisant un gaz parfait

avec $\gamma = 1.33$, $c_p = 1.148 \frac{kJ}{kgK}$ déterminez :

- le travail spécifique produit par la turbine ;
- le nombre de Mach de l'écoulement à la sortie des stators ;
- la vitesse axiale ;
- le rendement isentropique ;
- le degré de réaction de l'étage.

Note L'indice ss est comparable à celui utilisé pour indiquer un changement isentropique entre deux états 1 et 3 pour le cas d'un compresseur (Fig. 2.8)

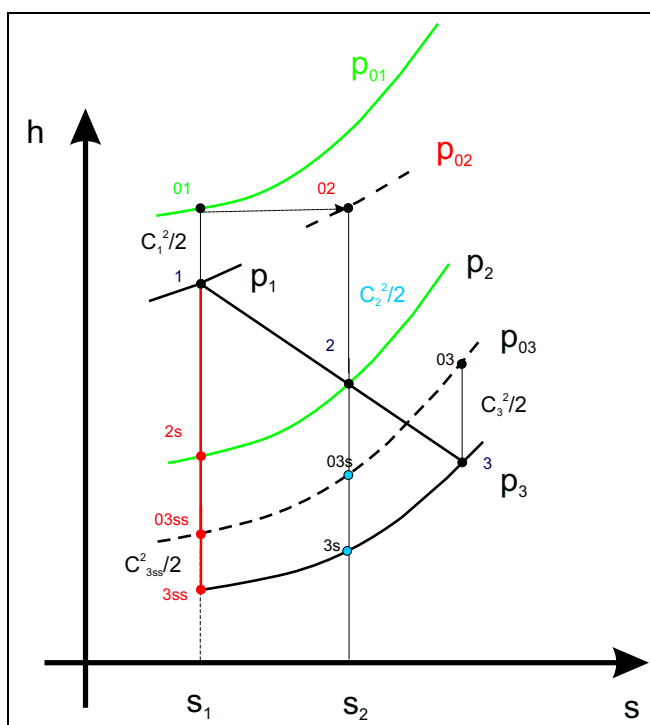


FIG. 3.28: Exemple 3.3

Solution

Turbomachines

a) Le rendement total-à-statique s'écrit :

$$\eta_{ts} = \frac{h_{01} - h_{03}}{h_{01} - h_{3ss}}$$

or :

$$\frac{h_{3ss}}{h_{01}} = \frac{c_p T_{3ss}}{c_p T_{01}} = \left(\frac{P_3}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{W}}{\dot{m}} &= \eta_{ts} c_p T_{01} \left(1 - \left(\frac{P_3}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \\ &= (0.87)(1.148 \text{ kJ/kg}) \left(1 - \left(\frac{100}{311} \right)^{\frac{0.33}{1.33}} \right) \\ &= 275.2 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

b) L'équation d'Euler pour les turbomachines et l'équation de l'énergie donnent :

$$\dot{W} \dot{m} = h_{02} - h_{03} = U(C_{2u} - C_{3u})$$

et comme $C_{3u} = 0$, alors :

$$C_{2u} = \frac{1}{U} \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = 550 \text{ m/s}$$

$$C_2 = \frac{C_{2u}}{\sin 70^\circ} = 586 \text{ m/s}$$

De plus, au travers du stator, on a :

$$h_{01} = h_{02} = h_2 + \frac{1}{2} C_2^2$$

$$c_p T_{01} = c_p T_2 + \frac{1}{2} C_2^2$$

Donc,

$$T_2 = 973 \text{ K}$$

$$M_2 = C_2 \sqrt{\gamma R T_2} = 0.96$$

c) La vitesse axiale C_x est :

$$C_x = \sqrt{C_2^2 - C_{2u}^2} = 200 \text{ m/s}$$

d) Le rendement isentropique est donné par :

$$\eta_s = \frac{h_{01} - h_{03}}{h_{01} - h_{03ss}} = \frac{\dot{W}/\dot{m}}{h_{01} - h_{03ss}}$$

or :

$$\eta_{ts} = \frac{h_{01} - h_{03}}{h_{01} - h_{3ss}} = 0.87$$

en supposant que :

$$h_{03ss} \simeq h_{3ss} + \frac{1}{2}C_3^2 \quad \text{si} \quad C_3^2 \simeq C_{3ss}^2$$

on peut obtenir

$$\frac{1}{\eta_s} = \frac{1}{\eta_{ts}} - \frac{C_3^2}{2\dot{W}/\dot{m}}$$

alors $\eta_s = 0.93$

Le rendement isentropique peut aussi être calculé de la manière suivante :

$$h_{03} = h_{01} - \frac{\dot{W}}{\dot{m}}$$

$$c_p T_{03} = c_p T_{01} - \frac{\dot{W}}{\dot{m}}$$

$$T_{03} = 883.3 \text{ K}$$

De plus,

$$h_3 = h_{03} - \frac{1}{2}C_3^2$$

$$c_p T_3 = c_p T_{03} - \frac{1}{2}C_3^2$$

$$T_3 = 865.8 \text{ K}$$

$$\frac{T_{03}}{T_3} = \left(\frac{P_{03}}{P_3} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

$$P_{03} = 108.37 \text{ kPa}$$

et comme :

$$\frac{h_{03ss}}{h_{01}} = \left(\frac{P_{03}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

$$h_{03ss} = 92.5 \text{ kJ/kg}$$

$$\eta_s = 0.93$$

e) Le degré de réaction R est donné par :

$$R = 1 - \left(\frac{C_{u3} + C_{u2}}{2U} \right)$$

On a déjà obtenu :

$$C_{3u} = 0, \quad C_{2u} = 550 \text{ m/s}, \quad U = 500 \text{ m/s}$$

donc, $R = 0.45$

Exemple 3.4

Le premier étage d'un compresseur axial de 3 étages reçoit de l'air avec une vitesse de 100 m/s, une pression statique de 100 kPa et une température statique de 15°C.

Les caractéristiques suivantes peuvent être assumées :

- vitesse axiale constante,
- déflexion de l'écoulement de 25° (dans le repère absolu) à chaque rotor,
- écoulement purement axial à l'entrée de chaque rotor,
- rayon moyen $r_m = 0.2 \text{ m}$
- hauteur des pales du 1er rotor $h = 1 \text{ cm}$,
- vitesse de rotation $N = 8000 \text{ rpm}$,
- rendement polytropique $\eta_p = 0.9$,

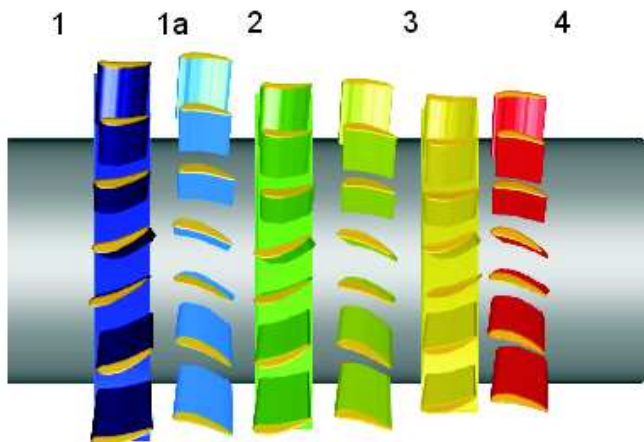


FIG. 3.29: Exemple 3.4

- gaz parfait $\gamma = 1.4$
- $R = 287 \text{ J/kgK}$

Calculez :

- a) Le rapport de pression totale de chaque étage et du compresseur,
- b) La puissance requise par le compresseur,
- c) La hauteur des pales à la sortie du dernier stator ;

Solution

a) Chaque étage du compresseur comprend un rotor et un stator. Le rotor fournit une énergie au fluide qui tourne de 25° dans le repère absolu.

Par l'équation d'Euler pour les turbomachines, l'énergie fournie au fluide est donnée par :

$$h_{02} - h_{01} = U(C_{1ua} - C_{1u})$$

mais $C_{1u} = 0$

donc :

$$h_{02} - h_{01} = UC_{1ua}$$

or,

$$U = r_m \Omega = 167.55 \text{ m/s}$$

$$C_{1ua} = C_x \tan 25^\circ = 46.63 \text{ m/s}$$

donc :

$$h_{02} - h_{01} = 167.55 \times 46.63 = 7822.3 \text{ (m/s)}^2$$

L'enthalpie totale à l'entrée du premier étage est :

$$\begin{aligned} h_{01} &= h_1 + \frac{1}{2}C^2 \\ &= c_p T_1 + \frac{1}{2}C^2 \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT_1 + \frac{1}{2}C^2 \\ &= \frac{1.4}{0.4} \left(287 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}} \right) \times 288 \text{K} + \frac{1}{2}(100 \text{m/s})^2 \\ h_{01} &= 294.3 \times 10^3 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} h_{02} &= h_{01} + 7822.3 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ h_{02} &= 302118.3 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Or, pour un gaz parfait :

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{h_{02}}{h_{01}}$$

et en utilisant la transformation polytrophique :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{\eta_p \gamma}{\gamma - 1}}$$

on a :

$$\begin{aligned} \frac{h_{02}}{h_{01}} &= \frac{T_{02}}{T_{01}} = 1.026 \\ \frac{p_{02}}{p_{01}} &= (1.026)^{\frac{0.9 \times 1.4}{0.4}} = 1.084 \end{aligned}$$

Pour les étages 2 et 3 puisque la vitesse axiale et la déflexion de l'écoulement sont constants, on aura :

$$h_{03} - h_{02} = h_{02} - h_{01}$$

donc :

$$h_{03} = h_{02} + 7822.3 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$h_{03} = 309940 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

et :

$$\frac{h_{03}}{h_{02}} = 1.026$$

d'où :

$$\frac{T_{03}}{T_{02}} \simeq \frac{T_{04}}{T_{03}} \simeq \frac{T_{02}}{T_{01}} = 1.026$$

Par conséquent, le rapport de pression totale au travers du compresseur est :

$$\frac{p_{04}}{p_{01}} \simeq \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{3\eta_p\gamma}{\gamma-1}} = 1.27$$

b) Le travail spécifique requis par le compresseur est donné par :

$$-\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = h_{04} - h_{01} = 3 (h_{02} - h_{01})$$

où :

$$\dot{m} = \rho AC = \rho_1 A_1 C_1$$

Or, à l'entrée :

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{287 \times 288} = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$A_1 = 2\pi r_m h = 2\pi(.2)(.01) = 0.0125 \text{ m}^2$$

donc :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho_1 A_1 C_1 \\ \dot{m} &= 1.2 \times 0.0125 \times 100 \\ \dot{m} &= 1.5 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

Alors la puissance est :

$$\dot{W} = (1.5kg/s) \times 3 \times -7822.3 = -35.2kW$$

c) À la sortie du dernier stator on a :

$$T_{04} = (1.026)^3 T_{01} = 1.08 T_{01}$$

$$P_{04} = (1.084)^3 P_{01} = 1.273 P_{01}$$

mais à l'entrée on a :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\gamma R T_1} = 340m/s \\ C_1 &= 100m/s \end{aligned}$$

donc,

$$M_1 = \frac{C_1}{a_1} = \frac{100}{340} = 0.294$$

avec les tables d'écoulements compressibles ($\gamma = 1.4$) on obtient :

$$\frac{P}{P_{01}} = 0.942 \quad \text{et} \quad \frac{T}{T_{01}} = 0.983$$

donc,

$$P_{01} = 106.1kPa \quad \text{et} \quad T_{01} = 293K$$

Par conséquent :

$$T_{04} = 316.4K \quad \text{et} \quad P_{04} = 135kPa$$

à partir de l'équation de l'énergie on a :

$$h_{04} = h_4 + \frac{1}{2} C_4^2$$

$$c_p T_{04} = c_p T_4 + \frac{1}{2} C_4^2$$

$$T_4 = T_{04} - \frac{1}{2c_p} C_4^2 \quad \text{avec} \quad C_4 = C_1 = 100m/s$$

Donc,

$$T_4 = 311.4K$$

alors,

$$a_4 = \sqrt{\gamma r T_4} = 353.72m/s$$

et

$$M_4 = \frac{V_4}{a_4} = 0.2827$$

Avec les tables d'écoulements compressibles, on a :

$$\frac{P}{P_{04}} = 0.944 \quad \text{et} \quad P_4 = 127.4kPa$$

donc,

$$\rho_4 = \frac{P_4}{RT_4} = 1.487 Kg/m^3$$

la section de passage à la sortie est de :

$$A_4 = \frac{\dot{m}}{\rho_4 C_4} = 0.01m^2$$

et la hauteur des pales à la sortie est de :

$$h_4 = \frac{A_4}{2\pi r_m} = .008m$$

Exemple 3.5

Une pompe hydraulique axiale à 1 étage doit être construite pour pomper de l'eau à un débit de $\dot{Q} = 80 l/s$ à une tête $H = 150 m$. On désire utiliser une configuration *stator-rotor* qui aura un coefficient de charge $\psi = -0.4$, un coefficient de débit $\phi = 0.4$, et une vitesse purement axiale à l'entrée du stator et à la sortie du rotor.. En supposant que le rendement hydraulique de cette pompe sera de $\eta_H = 0.85$,

- a) calculez la vitesse tangentielle U du rotor au rayon moyen ;
- b) tracez le triangle des vitesses et calculez le module des vitesses et les rapports de diffusion ;

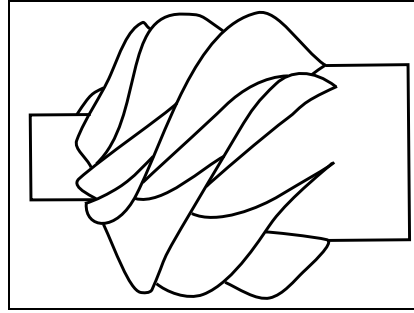


FIG. 3.30: Rotor de la pompe axiale ; exemple 3.5

c) calculez le degré de réaction

Solution

a) Pour une pompe hydraulique, le travail spécifique minimal est donné par :

$$-\left(\frac{\dot{W}}{\dot{m}}\right)_{min} = g(H_2 - H_1) = g(150 \text{ m})$$

Le travail réel à fournir à la pompe est donc :

$$\left(\frac{\dot{W}}{\dot{m}}\right)_{réel} = \frac{(\dot{W}/\dot{m})_{min}}{\eta_H} = \frac{-g(150)}{0.85} = -1730.6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Par l'équation d'Euler pour les turbomachines, on a :

$$\left(\frac{\dot{W}}{\dot{m}}\right)_{réel} = U(C_{2u} - C_{1u})$$

Le coefficient de charge est :

$$\psi = \frac{\Delta C_u}{U} = \frac{C_{1u} - C_{2u}}{U} = -0.4$$

mais comme $C_{2u} = 0$, alors $C_{1u} = -0.4U$

et :

$$\left(\frac{\dot{W}}{\dot{m}}\right)_{\text{réel}} = U(-0.4U) = -1730.6 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Donc ;

$$U = 65.78 \text{ m/s}$$

b) Le triangle des vitesses illustré ci-dessous :

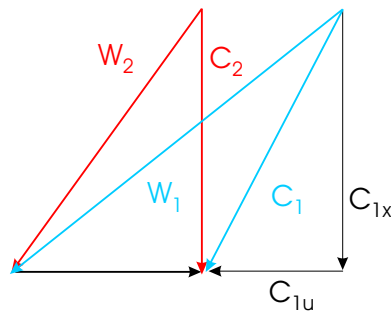


FIG. 3.31: Exemple 3.5

Au niveau du rotor, le rapport des vitesses est :

$$w_1 = \sqrt{(0.4U)^2 + (1.4U)^2} = 95.78 \text{ m/s}$$

$$w_2 = \sqrt{(0.4U)^2 + U^2} = 70.87 \text{ m/s}$$

$$\frac{w_2}{w_1} = 0.74$$

Au niveau du stator, le rapport des vitesses est :

$$C_0 = 0.4U$$

$$C_1 = \sqrt{(0.4U)^2 + (0.4U)^2} = 0.56U$$

$$\frac{C_1}{C_0} = 1.41$$

c) Le degré de réaction est donné par :

$$R = 1 - \frac{C_{u1} + C_{u2}}{2U}$$

$$R = 1 - \frac{(-0.4U + 0)}{2U}$$

$$R = 1.2$$

Remarque : Un degré de réaction supérieur à 1 indique une baisse d'enthalpie statique dans les stators, associée à une hausse de vitesse.

Exemple 3.6

Un compresseur axial multi-étages a les caractéristiques suivantes :

- température d'entrée $T_{01} = 293$ K,
- vitesse tangentielle de rotation au rayon moyen $U = 275$ m/s,

et pour chaque étage, on a :

- coefficient de débit $\phi = 0.5$,
- coefficient de charge $\psi = 0.3$,
- degré de réaction $R = 0.5$.

Si le rendement polytropique de chaque étage est $\eta_p = 88\%$ et que l'on veut un rapport de pression $P_{0_{sortie}}/P_{0_{entrée}} = 5$, trouvez :

- a) le nombre d'étages requis,
- b) les angles des écoulements.

Utilisez $c_p = 1.005$ kJ/kgK et $\gamma = 1.4$

Solution

a) Pour chaque étage, on a un ΔT_0 donné par (en utilisant $\psi = 0.3$)

$$\Delta T_{0_{étage}} = \frac{\psi U^2}{c_p} = 22.5 \text{ K}$$

et au total entre l'entrée et la sortie on a :

$$\frac{T_{0sortie}}{T_{0entrée}} = \left(\frac{P_{0sortie}}{P_{0entrée}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\eta_p \gamma}} = (5)^{\frac{0.4}{0.88 \times 1.4}} = 1.6863$$

d'où :

$$\begin{aligned} T_{0sortie} &= 494.1 \\ \Delta T_{0total} &= 201.1 \end{aligned}$$

alors le nombre d'étages requis est :

$$N = \frac{201.1}{22.5} = 8.9$$

ce qui nécessite 9 étages. Alors, on aura :

$$\Delta T_{0étage} = \frac{201.1}{9} = 22.4 \text{ K}$$

$$\psi = \frac{c_p 22.4}{U^2} = 0.298$$

b) Pour $R = 0.5$, le triangle de vitesse est symétrique $\alpha_1 = -\beta_2$ et $\alpha_2 = -\beta_1$

$$\tan \alpha_1 = \frac{0.351U}{0.5U} = 0.702$$

$$\alpha_1 = 35.1^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{0.649U}{0.5U} = 1.3$$

$$\alpha_2 = 52.4^\circ$$

Exemple 3.7

Un compresseur opère avec des étages semblables qui ont les caractéristiques suivantes :

$$RW = \frac{W_2}{W_1} = 0.72 \quad R = 0.5 \quad \phi = 0.56$$

Quel est le coefficient de charge ψ de chaque étage ?

Solution

Le rapport de diffusion est égal à :

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\psi}{2} - R\right)^2 + \phi^2}{\left(\frac{\psi}{2} + R\right)^2 + \phi^2} = RW^2 = RW_2$$

et le développement de cette équation conduit à la forme de second degré

$$\frac{\psi^2}{4} - \psi R (1 + RW_2) + (\phi^2 + R^2)((1 - RW_2)) = 0$$

et en résolvant pour $\frac{W_2}{W_1} = 0.72$ on obtient les deux racines suivantes :

$$\psi_1 = 5.735, \quad \psi_2 = 0.387$$

La racine à utiliser est de toute évidence $\psi_2 = 0.38$

Exemple 3.8

Un compresseur axial multi-étages doit être conçu avec des étages semblables ayant les caractéristiques suivantes :

$$\begin{array}{llll} \frac{P_{0\text{sortie}}}{P_{0\text{entrée}}} = 4.0 & R = 0.5 & \eta_p = 0.9 & \\ T_{01} = 288 \text{ K} & N = 250 \text{ rev/sec} & r_m = 0.17 \text{ m} & \\ P_{01} = 1.01 \text{ bar} & C_x = 150 \text{ m/s} & = \text{constante} & \end{array}$$

De plus, on désire un rapport de diffusion $\frac{W_2}{W_1} \geq 0.72$ et on tiendra compte du coefficient λ donné dans le tableau ci-dessous pour chacun des étages.

Work Done Factor λ	Étage
0.98	1
0.93	2
0.88	3
0.83	4 et plus

- a) calculer le nombre d'étages requis ;
- b) déterminer les angles du triangle des vitesses ;
- c) déterminer l'angle des aubes directrices à l'entrée

Solution

a) La variation de température totale au travers du compresseur est donnée par :

$$\frac{T_{0\text{sortie}}}{T_{0\text{entrée}}} = \left(\frac{P_{0\text{sortie}}}{P_{0\text{entrée}}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\eta_p \gamma}} = (4)^{\frac{0.4}{0.9 \times 1.4}} = 1.55$$

d'où :

$$\begin{aligned} T_{0\text{sortie}} &= 447.2 \\ \Delta T_{0\text{total}} &= 447.2 - 288 = 159.2 \text{ K} \end{aligned}$$

Le triangle de vitesse pour $R = \frac{1}{2}$ est symétrique et a l'allure suivante :

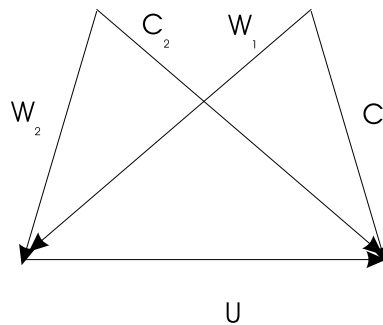


FIG. 3.32: Exemple 3.8

Le coefficient de débit $\phi = \frac{C_x}{U}$ peut être facilement calculé. En effet,

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{C_x}{U} = \frac{C_x}{N(\text{rev/sec}) * 2\pi r_m} \\ &= \frac{150}{250 \cdot 2 \pi \cdot 0.17} \\ &= 0.56\end{aligned}$$

Pour respecter le rapport de diffusion $\frac{W_2}{W_1} \geq 0.72$ il faut se limiter à $-\psi \leq 0.387$ (voir exemple précédent). Ainsi, en choisissant $\psi = 0.387$ on a :

$$\frac{h_{01} - h_{02}}{U^2} = \psi = 0.387$$

$$T_{01} - T_{02} = \frac{(-.38)(267^2)}{1005}$$

$$\Delta T_{0\text{étage}} = 26.95K$$

L'incrément réel de température totale sera plus petit à cause du *Work Done Factor*. Ainsi, le nombre minimum d'étages (sans tenir compte du λ) sera :

$$\frac{\Delta T_{0\text{total}}}{\Delta T_{0\text{étage}}} = \frac{159.2}{26.95} = 5.9$$

Il est probable que 6 étages ne soient pas suffisants pour obtenir un $-\psi \leq 0.38$. Pour chaque étage,

$$h_{02} - h_{01} = -\lambda U \Delta C_u$$

$$T_{02} - T_{01} = \frac{-\lambda U^2 \psi}{c_p}$$

Pour 7 étages :

$$159.2 = \frac{-U^2 \psi}{1005} (0.98 + 0.93 + 0.88 + 4 \times 0.83)$$

$$-\psi = 0.367 < 0.387$$

On vérifie maintenant pour 6 étages

$$159.2 = \frac{-U^2\psi}{1005} (0.98 + 0.93 + 0.88 + 3 \times 0.83)$$

$$-\psi = 0.425 > 0.38$$

b) Le triangle des vitesses requis a donc les caractéristiques suivantes :

$$R = 0.5, \quad \phi = 0.56 \quad \text{et} \quad \psi = 0.367$$

c) Les angles des pales sont :

$$\tan\beta_2 = \frac{-0.3165U}{0.56U} = -0.565$$

$$-\beta_2 = \alpha_1 = 29.47^\circ$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{.6835U}{0.56U} = 1.22$$

$$-\beta_1 = \alpha_2 = 50.67^\circ$$

d) L'angle de fuite des aubes directrices est :

$$\alpha_0 = 29.47^\circ$$

3.10.2 Exercices

Exercice 3.1

Dans une turbine à vapeur à réaction Parsons, les pales du rotor sont identiques aux pales du stator, mais les angles sont mesurés dans des directions opposées. Les angles α_2 et β_3 sont respectivement de 70° et -70° par rapport à la direction axiale. La vitesse de sortie de la vapeur au niveau des pales du stator est $C_2 = 160$ m/s, la vitesse périphérique des pales est $U = 152.5$ m/s et la vitesse axiale C_x est constante. Déterminez le travail spécifique du rotor d'un étage de la turbine.

Réponse : $\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = 22.7 \frac{kJ}{kg}$

Exercice 3.2

Les valeurs de pression mesurées à différents points d'un étage de turbine ayant un degré de réaction $R = 0$, sont données dans le tableau ci-dessous :

Pression totale (kPa)	Pression statique (kPa)
entrée stator 414	sortie stator 207
sortie stator 400	sortie rotor 200

La vitesse périphérique des pales est $U = 291$ m/s, la température totale d'entrée $T_{01} = 1100$ K et l'angle d'écoulement à la sortie du stator est $\alpha_2 = 70^\circ$. En supposant que la valeur et la direction de la vitesse à l'entrée et à la sortie de l'étage sont les mêmes, déterminez le rendement isentropique de l'étage. Considérez un gaz parfait avec $c_p = 1148$ J/kg°C et $\gamma = 1.333$.

Réponse : $\eta_s = 0.91$

Exercice 3.3

Une turbine axiale opère avec C_x constant et la vitesse absolue de l'écoulement à l'entrée et à la sortie de l'étage est dans la direction axiale. Le coefficient de débit est de $\phi = 0.6$. Les gaz quittent les pales du stator avec un angle de 68.2° par rapport à la direction axiale. Calculez :

- le coefficient de charge ;
- les angles relatifs de l'écoulement à l'entrée et à la sortie du rotor ;
- le degré de réaction ;

Réponse : a) $\psi = 1.5$ b) 39.9° et 59° c) $R = 0.25$

Exercice 3.4

Un étage de turbine axiale (stator-rotor) est conçu avec un degré de réaction $R = 0.5$, un coefficient de débit $\phi = 0.466$ et une vitesse axiale $c_x = 200$ m/s constante dans l'étage. La vitesse est purement axiale en sortie du rotor.

- a) Estimez le travail spécifique de cet étage de turbine au point de design ;
 b) En supposant la même vitesse axiale mais en réduisant de 20% la vitesse de rotation du rotor, estimez de nouveau le travail spécifique.

Réponse : a) 184 kJ/kg b) 176.6 KJ/kg

Exercice 3.5

Un compresseur axial de 3 étages a un rapport de pression totale de 2.0. Ce compresseur reçoit de l'air à $T_{0\cdot1} = 20^\circ C$ et $P_{01} = 1 \text{ atm}$. En estimant que le rendement polytropique est de $\eta_p = 0.9$ pour chaque étage et que les 3 étages font le même travail, déterminez les températures et les pressions totales entre chacun des étages. Déterminez également le rendement isentropique du compresseur.

Réponse : $\eta_s = 0.89$

étage	$T_0(^{\circ}C)$	P_0 (atm)
entrée	20	1
entre 1 et 2	44.03	1.2818
entre 2 et 3	68.06	1.6135
sortie	92.1	2.0

Exercice 3.6

Un compresseur axial doit fournir 50 kg/s d'air à une pression totale d'au moins 500 kPa. À l'entrée des aubes directrices, la pression totale est 100 kPa et la température totale est $23^\circ C$. À cet endroit les diamètres internes et externes sont respectivement 0.436 m et 0.728 m. Au niveau du rayon moyen, qui est constant pour tous les étages, le degré de réaction est $R = 0.5$, et l'angle de l'écoulement à la sortie du stator est 22° pour tous les étages. La vitesse de rotation du rotor est 8000 rev/min. Déterminez le nombre d'étages identiques requis en supposant un rendement polytropique $\eta_p = 0.89$, une vitesse axiale constante et un work-done-factor selon le graphe de Howell. Calculez ensuite le nombre de De Haller.

Réponse : 10 étages, $W_2/W_1 = 0.785$.

Exercice 3.7

Certaines données obtenues expérimentalement montrent que la limite d'efficacité d'un étage de compresseur axial est atteinte lorsqu'on a :

- un nombre de Mach relatif de 0.7 ;
- un coefficient de débit de 0.5 ;
- un angle relatif de l'écoulement à la sortie du rotor de $\beta_2 = -30^\circ$ par rapport à la direction axiale ;
- un degré de réaction de 0.5.

Trouvez l'incrément maximal de température totale qui pourrait être obtenu au niveau du premier étage d'un compresseur qui opère sous les conditions ci-dessus avec une température totale d'entrée de l'air égale à 289 K. Considérez une vitesse axiale constante à travers l'étage.

Note : Le nombre de Mach relatif à l'entrée du rotor est défini par $M_{r1} = w_1 / \sqrt{\gamma RT_1}$

Réponse : 30.6°C

Exercice 3.8

Un compresseur axial composé d'étages identiques ayant un degré de réaction $R = 0.5$ possède un angle de sortie de l'écoulement relatif aux pales de $\beta_2 = -30^\circ$. Le coefficient de débit, $\phi = 0.5$, est constant pour tous les étages. l'entrée du premier étage, la température totale est $T_{01} = 278K$, la pression totale $P_{01} = 101.3kPa$, la pression statique $P_1 = 87.3kPa$ et la surface annulaire de passage de l'écoulement est de $0.372m^2$. Déterminez la vitesse axiale et le débit. Déterminez aussi la puissance à fournir à l'arbre pour faire fonctionner le compresseur dans ces conditions en supposant qu'il a 6 étages et un rendement mécanique de 0.99.

Réponse : $C_x = 132.5 \text{ m/s}$ $\dot{m} = 56.1 \text{ kg/s}$ $\dot{W} = - 10.1 \text{ MW}$

Exercice 3.9

Un compresseur axial a un degré de réaction $R = 0.6$, un coefficient de débit $\phi = 0.5$ et un coefficient de charge $\psi = 0.35$. Si l'angle de sortie

de l'écoulement pour chaque rangée de pales demeure constant lorsque le débit est diminué, déterminez le degré de réaction de l'étage et le coefficient de charge lorsque la vitesse axiale est réduite de 10% à vitesse de rotation constante. Dessinez les triangles de vitesse pour les 2 conditions.

Réponse : $R = 0.59$ $\psi = 0.415$

Chapitre 4

Turbomachines radiales

Les turbomachines radiales représentent l'un des deux cas le plus fréquents qu'on trouve dans le domaine des turbomachines. A la différence des machines axiales, dans les turbomachines radiales, l'écoulement a lieu dans un plan normal à l'axe de rotation. Pour les pompes et les compresseurs (soufflantes) cet écoulement s'établit à partir de l'oeil du rotor vers la périphérie, tandis que pour les turbines, le fluide pénètre par la périphérie et sort par le centre.

4.1 Compresseurs

On utilise les compresseurs radiaux ou centrifuges lorsqu'on cherche un rapport de pression élevée avec un faible débit volumique. La limitation du rapport de pression vient maintenant de contraintes mécaniques et des matériaux plutôt que de l'écoulement.

Essentiellement, un compresseur centrifuge est composée d'un rotor, d'une section divergente et d'un collecteur ou *volute*. Le fluide entre par le centre du rotor appelé *l'oeil* ou section d'induction, est accéléré dans le rotor et le quitte par sa périphérie. Par la suite, il passe par une section divergente où l'augmentation de la surface de passage produit un ralentissement de l'écoulement. Dans cette partie, appelé *le diffuseur* l'énergie cinétique est transformée en pression statique.

La figure 4.1 illustre un rotor type d'un compresseur centrifuge et à la figure 4.2 on note les dimensions principales. Elles sont respectivement, le diamètre inférieur et supérieur de l'oeil D_{io} et D_{so} , le diamètre à la sortie du rotor D_2 et l'épaisseur des pales à la sortie b_2

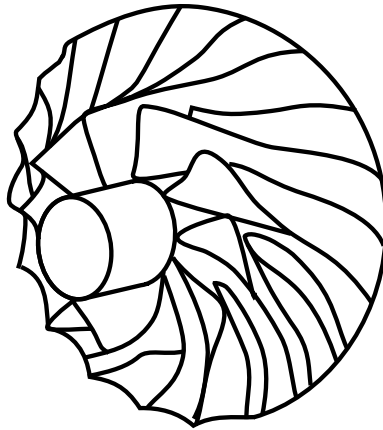


FIG. 4.1: Rotor centrifuge

4.1.1 Transfert d'énergie

Dans une turbomachine, le travail spécifique idéal est décrit par l'équation d'Euler :

$$W_e = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1) = \Delta h_{0s} \quad (4.1)$$

Cette expression peut être exprimée différemment à l'aide de la relation trigonométrique des cosinus appliquée au triangle de vitesses :

$$C^2 + U^2 - 2U \underbrace{C \cos \bar{\alpha}}_{c_u} = W^2$$

Alors

$$W_e = \underbrace{\frac{C_2^2 - C_1^2}{2}}_I + \underbrace{\frac{U_2^2 - U_1^2}{2}}_{II} + \underbrace{\frac{W_1^2 - W_2^2}{2}}_{III}$$

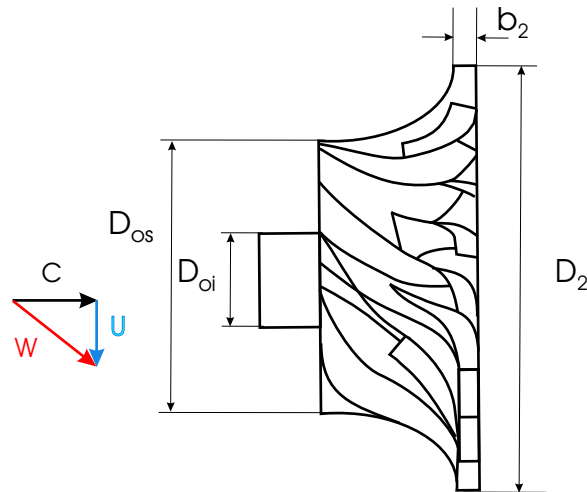


FIG. 4.2: Dimensions d'un rotor centrifuge

On voit que dans le compresseur centrifuge, le travail est principalement fourni au fluide par l'augmentation de la vitesse périphérique et en deuxième lieu par le ralentissement de la vitesse relative. La vitesse absolue résultante est très élevée à la sortie et pour palier à cet inconvénient, on ajoute des éléments de diffusion.

Le premier terme indique la variation d'énergie cinétique du fluide lors de son passage dans le rotor, le deuxième peut être interprétée comme la variation d'énergie due aux forces centrifuges qui induisent un mouvement de rotation du fluide autour du rotor et le troisième, la diminution d'énergie cinétique relative qui est transformée en un gain de 'tête statique'.

Pour faciliter l'étude des compresseurs radiaux, on applique l'hypothèse d'un écoulement sans prérotation à l'entrée, c'est-à-dire : $C_{1u} = 0$, ($\alpha_1 = 0^\circ$), d'où on obtient l'équation simplifiée :

$$W_e = C_{2u}U_2 \quad (4.2)$$

4.1.2 Déviation et facteur de glissement

Pour l'analyse du compresseur centrifuge, on applique une théorie unidimensionnelle au travers de l'équation d'Euler. En particulier, on considère un profil de vitesses moyen à la sortie du rotor et un nombre infini d'aubes.

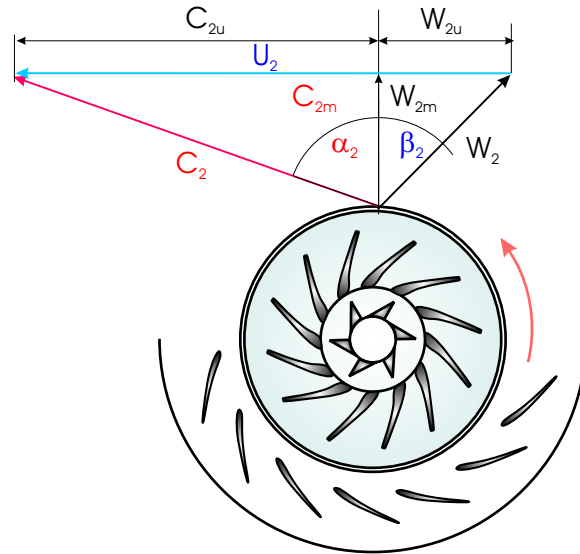


FIG. 4.3: Vitesses pour une machine radiale

Cependant, l'écoulement n'est pas uniforme à la sortie du rotor à cause du nombre finie d'aubes, d'une subséquente circulation du fluide entre les pales, de la déviation par l'épaisseur de l'aube à la sortie, et du phénomène de décollement.

La figure 4.4 donne une idée de l'influence de la variation de l'angle du fluide par rapport (en bleu) à l'angle de l'aube (en rouge). On peut noter que dans les deux cas, la vitesse radiale (C_{2m}) demeure constante parce qu'elle est fonction du débit et de l'aire disponible.

Afin d'incorporer la relation entre les angles du fluide et les angles de l'aube, on introduit le *facteur de glissement*. Initialement, le facteur de glissement a été définie comme le rapport entre la vitesse tangentielle qui suit l'écoulement (bleu) et l'idéale qui suit l'aube (rouge). Notamment :

$$\sigma_s = \frac{C_{2uf}}{C_{2ua}} \quad (4.3)$$

Puisque idéalement la vitesse de sortie devrait coïncider avec la vitesse de périphérique, on a opté pour la définition :

$$\sigma_s = \frac{C_{2uf}}{U_2} \quad (4.4)$$

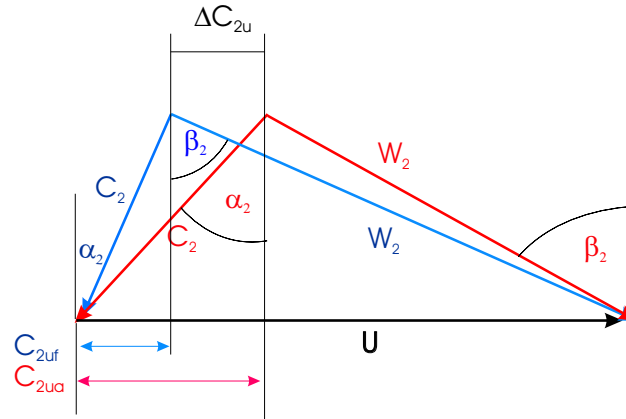


FIG. 4.4: Effet du glissement

L'obtention de formules pour le facteur de glissement a demandé de nombreux essais et plusieurs corrélations ont été analysées. Les trois relations les plus utilisées sont celles de Wiesner, Stanitz, et Stodola :

$$\sigma_s = 1 - \frac{\sqrt{\cos \beta_{2a}}}{Z^{0.7}} \quad \text{Wiesner}$$

$$\sigma_s = 1 - \frac{0.63\pi/Z}{1 - (C_2 m/U_2) \tan \beta_{2a}} \quad \text{Stanitz}$$

$$\sigma_s = 1 - \frac{\pi/Z \cos \beta_{2a}}{1 - (C_2 m/U_2) \tan \beta_{2a}} \quad \text{Stodola}$$

Dans ces expressions, le symbole Z indique le nombre de pales. On constate que le facteur de glissement s'approche de l'unité au fur et à mesure que le nombre d'aubes tend vers l'infini. La formule de Stanitz donne de bons résultats lorsque les pales sont radiales ($\beta = 0^\circ$) et elle devient :

$$\sigma_s = 1 - \frac{2}{Z}$$

Lorsque cette formule est utilisée conjointement avec les Éqs.(4.2) et (4.4), elle permet de redéfinir le travail spécifique comme :

$$W_e = \sigma_s U_2^2, \quad (4.5)$$

de sorte que le coefficient de température (de charge) : $\psi = C_p \Delta T_0 / U^2$ devient :

$$\psi = \frac{C_p \Delta T_0}{\sigma_s U^2} \quad (4.6)$$

- Le facteur de glissement est une correction qui limite la capacité d'un compresseur dans des conditions idéales ou réelles. Plus cette quantité se rapproche de l'unité, mieux est le design.
- Le coefficient de température quantifie l'augmentation de travail nécessaire pour vaincre les pertes par friction. On ne doit pas s'étonner par le fait que la température dans la réalité soit plus élevée que la température idéale.
- Les coefficient de charge et de température sont inter-reliés avec le rendement par l'équation :

$$\boxed{\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \left[1 + \frac{\eta(T_{02} - T_{01})}{T_{01}} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} = \left[1 + \frac{\eta \psi \sigma_s U^2}{C_p T_{01}} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}} \quad (4.7)$$

Les pertes

Le produit $\Delta h = \eta \psi \sigma$ concentre les pertes dans un compresseur. Les sources les plus importantes sont les pertes par *incidence* et par *frottement* dans le rotor et dans le diffuseur. Plus précisément, on trouve les pertes de frottement sur le disque, pertes de recirculation, pertes dues au jeu annulaire et les pertes par diffusion. Pour chaque type de perte, des formules empiriques ont été développées.

4.1.3 L'inclinaison des pales

Le comportement d'une machine radiale est nettement affecté par l'angle physique (ou de construction) β_{2g} à la sortie des aubes. Pour un compresseur radial, les profils peuvent être :

- Courbés en arrière ($\beta_{2g} < 0$ ou $\bar{\beta} < 90^\circ$); fournissent les meilleurs rendements.
- Radiales ($\beta_{2g} = 0$ ou $\bar{\beta} = 90^\circ$); idéales du point de vue de la résistance mécanique.

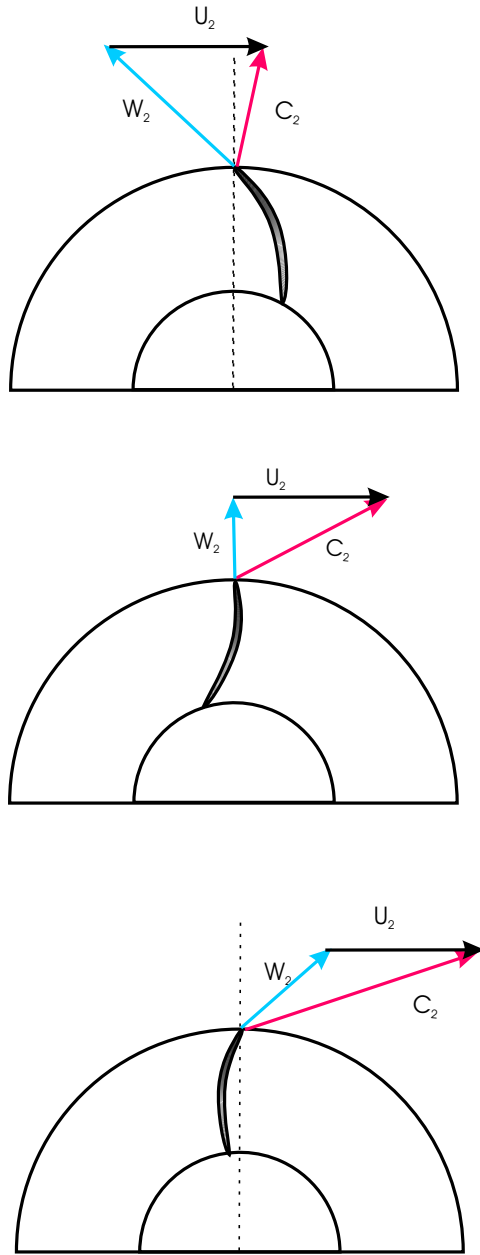


FIG. 4.5: Effet de l'angle des pales

- Courbées en avant ($\beta_{2g} > 0$ ou $\bar{\beta} > 90^\circ$); employés pour des grands débits.

La première forme entraîne des vitesses C_2 relativement faibles, mais elle permet des meilleurs rendements. Les pales radiales se prêtent mieux aux contraintes mécaniques permettant des vitesses de rotation élevées. Elles sont employées dans des petits rotors pour des rapport de pression élevés. Les aubes courbées en avant produisent une grande vitesse absolue à la sortie, ainsi cette configuration exige l'emploi d'un diffuseur. Elles sont utilisés pour de grands débits massiques et de rapports de pression faibles (ventilateurs). Afin d'examiner l'effet de l'angle des pales à la sortie du rotor par rapport à l'augmentation de pression on reprend l'Eq.(2.12) en considérant l'écoulement d'un gaz idéal avec $C_p = cte$ et sans prérotation à l'entrée, c'est-à-dire, avec $C_{1u} = 0$. Alors :

$$C_p(T_{02} - T_{01}) = C_{2u}U_2$$

Si on divise cette équation par $C_p T_{01}$ et qu'on introduit le relations $a_{01} = \sqrt{\gamma R T_{01}}$ et $C_p = \gamma R / (\gamma - 1)$, on trouve :

$$\frac{T_{02} - T_{01}}{T_{01}} = (\gamma - 1) \left(\frac{U_2}{a_{01}} \right)^2 \frac{C_{2u}}{U_2}$$

Finalement, d'après le triangle de vitesses on a $C_{2u} = U_2 - W_{2m} \tan \beta_2$, donc :

$$\frac{T_{02} - T_{01}}{T_{01}} = (\gamma - 1) \left(\frac{U_2}{a_{01}} \right)^2 \left(1 - \frac{W_{2m}}{U_2} \tan \beta_2 \right) \quad (4.8)$$

Puisque $W_{2m} = \dot{m} / (2\pi r_2 b_2 \rho_2)$, cette expression établie que la température croît avec l'augmentation du débit massique pour les profils courbés en arrière ($\beta_2 < 0$), demeure constante pour les profils radials ($\beta_2 = 0$) et décroît pour les aubes courbés en avant ($\beta_2 > 0$) (figure).

Maintenant on peut regarder l'influence des angles sur le rapport de pression. La relation entre le rapport de pression et la variation de température est donnée par l'équation (4.7), alors

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[1 + \sigma \eta (\gamma - 1) \left(\frac{U_2}{a_{01}} \right)^2 \left(1 - \frac{W_{2m}}{U_2} \tan \beta_2 \right) \right]^{\gamma / (\gamma - 1)} \quad (4.9)$$

La figure nnn, illustre la variation du taux de compression en fonction de la vitesse périphérique à l'échelle U_2/a_{01} .

Relations compactes

Ayant les données $T_{01}, P_{01}, C_p(cte), P_{02}$ et η_p , l'équation d'Euler peut s'écrire comme :

$$C_p T_{01} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right) = (c_{2u} U_2 - c_{1u} U_1)$$

d'où

$$(c_{2u} U_2 - c_{1u} U_1) = C_p T_{01} \left[\left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{R/(C_p \eta_p)} - 1 \right]$$

On note que cette formule est mieux adaptée pour les compresseurs puisqu'elle fait référence à un rapport de pression.

Pour les compresseurs centrifuges on estime $C_{1u} = 0$ et pour établir une relation entre U_2 et C_{2u} on utilise le facteur de glissement. La formule la plus simple est celle de Wiesner, c'est-à-dire :

$$\sigma_s = 1 - \frac{\sqrt{\cos \beta_{2a}}}{Z^{0.7}} = \frac{C_{2uf}}{C_{2ua}}$$

À partir du triangle de vitesses montrant le glissement on déduit :

$$\begin{aligned} \tan \beta_{2a} &= \frac{U_2 - C_{2ua}}{C_{m2}}, & \tan \alpha_{2f} &= \frac{C_{2uf}}{C_{m2}} \\ \frac{\tan \beta_{2a}}{\tan \alpha_{2f}} &= \frac{U_2}{C_{2uf}} - \frac{1}{\sigma_s} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{U_2}{C_{2uf}} = \left(\frac{\tan \beta_{2a}}{\tan \alpha_{2f}} + \frac{1}{\sigma_s} \right)^{-1}$$

Équation non linéaire de la masse

$$\dot{m} = \rho v A = \frac{P}{RT} V A = \frac{P}{\gamma RT} \gamma V A = \frac{P}{\gamma RT} \gamma a M A$$

$$\dot{m} = \frac{P}{\gamma RT} \gamma \sqrt{\gamma RT} M A = \frac{P}{\sqrt{\gamma RT}} \gamma M A$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT}}{PA} = M\sqrt{\gamma}$$

Normalement on connaît les conditions de stagnation au lieu des conditions statiques, dans cas, avec l'utilisation des relations :

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 = 1 + \frac{M^2}{2(C_p/R - 1)} \\ \frac{P_0}{P} &= \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left[1 + \frac{M^2}{2(C_p/R - 1)} \right]^{(\frac{C_p}{R})} \end{aligned} \quad (4.10)$$

on trouve

$$\boxed{\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0 A} = M\sqrt{\gamma} \left[1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right]^{-\frac{(\gamma + 1)}{2(\gamma - 1)}}$$

Finalement, si on introduit les Eqs.(4.10), on peut écrire :

$$\boxed{\frac{C}{\sqrt{RT_0}} = \sqrt{2 \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1} \right]}}$$

On remarque qu'à partir des équations Eqs.(4.10) on déduit :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \left[1 + \frac{M^2}{2(C_p/R - 1)} \right]^{(\frac{C_p}{R} - 1)}$$

4.1.4 Les diffuseurs

La vitesse de l'écoulement à la sortie du rotor d'un compresseur (ou d'une pompe centrifuge) est élevée, ce qui se traduit par une forme énergétique non voulue puisque l'objectif est l'augmentation de l'énergie de pression et pas l'énergie cinétique. Alors, pour convertir une partie de l'énergie cinétique à la sortie sous la forme de pression, l'écoulement est ralenti à l'aide d'organes appelées diffuseurs. On distingue deux types.

Les diffuseurs sans ailette

Un diffuseur sans ailettes est simplement une conduite annulaire pour laquelle on utilise le principe de conservation de l'impulsion angulaire afin de diminuer la vitesse de l'écoulement et ainsi faire augmenter la pression. En effet, comme dans le diffuseur aucun travail n'est fait, le couple sera nul en première approximation. C'est-à-dire :

$$M_A = \dot{m}(r_2 C_{2u} - r_1 C_{2u}) \simeq 0$$

donc, $rC_u = \Gamma = \text{constante}$.

Si les indices 1 et 2 indiquent l'entrée et la sortie du rotor et que l'indice 3 dénote un point dans le diffuseur, on peut écrire :

$$r_1 C_{1u} = r_2 C_{2u} = r_3 C_{3u} = r C_u = \Gamma \quad (4.11)$$

d'où

$$C_{3u} = \frac{r_2}{r_3} C_{2u}$$

De plus, le principe de conservation de la masse permet d'établir l'équation suivante pour un rayon quelconque :

$$\dot{m} = \rho A C_m = 2\pi r b \rho C_m$$

où b , indique la largeur du diffuseur. Donc,

$$C_m = \frac{r_2 b_2 \rho_2 C_{m2}}{r b \rho}$$

En général $C_u \gg C_m$, donc $\frac{C_3}{C_2} \approx \frac{r_2}{r_3}$ et par conséquent, il faut un grand rapport $\frac{r_3}{r_2}$ pour effectuer une diffusion importante. Finalement on ajoute que pour un écoulement incompressible ($\rho = \text{cte}$) l'angle diffuseur peut être calculé par le rapport

$$\tan \alpha_3 = \frac{C_{2u}}{C_{2m}}$$

Ces diffuseurs sont volumineux mais leur coût est avantageux.

Les diffuseurs à ailettes

Bien que peu couteux, le diffuseur sans ailettes utilise un espace radial important pour obtenir la diffusion voulue. Alors, si la réduction d'espace est jugé importante, on pourra utiliser des ailettes dans le diffuseur. Essentiellement ce type de diffuseur est constitué d'une couronne où l'on dispose des ailettes profilées. La figure 4.6 illustre ce genre de diffuseur.

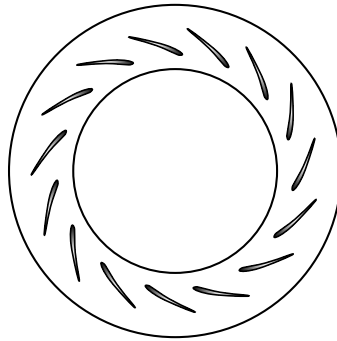


FIG. 4.6: Diffuseur à ailettes

Les ailettes forcent l'écoulement à diverger plus rapidement qu'il ne l'aurait fait librement. Ceci conduit à un appareil plus petit avec un rendement supérieur au diffuseur sans ailettes (Fig.3.6), mais la plage d'opération à haut rendement est plus restreinte puisque le décrochement se produit plus tôt pour des faibles débits (Fig.3.6). Autrement dit, on doit contrôler soigneusement la diffusion pour empêcher les pertes par décollement massif. Normalement, le nombre d'ailettes est plus faible que le nombre de pales du rotor. La forme des ailettes est variée, par contre, on conservera toujours un espace libre entre le bout du rotor et les ailettes. Les fonctions de l'espace libre sont multiples :

- Réduire les gradients de pression selon θ ;
- Uniformiser l'écoulement ;
- Réduire le nombre de Mach arrivant sur les ailettes.

La volute

La volute doit collecter le fluide à la sortie du diffuseur pour le diriger vers la sortie. Dans la volute, on a toujours, en première approximation, la

conservation de l'impulsion angulaire (4.11) :

$$rC_u = \text{constante} = \Gamma$$

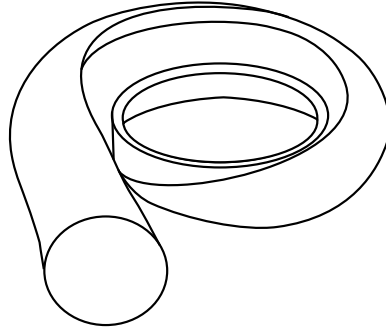


FIG. 4.7: Volute

Si la pression est uniforme tout autour du rotor, le débit sera distribué de façon égale selon :

$$Q_\theta = Q \frac{\theta}{2\pi} \quad (4.12)$$

où Q = débit total et Q_θ est le débit qui passe par la périphérie du rotor décrite par l'angle θ tel qu'illustré sur la figure 4.7. D'autre part, à une section θ donnée le débit différentiel est décrit par par :

$$dQ_\theta = bC_m dr = \frac{\Gamma}{2\pi r} b dr$$

Alors on a :

$$Q_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{r_2}^R \frac{b}{r} \quad (4.13)$$

Lorsque la forme de la volute est donnée ($b = b(r)$), tel qu'illustré sur la figure 3.8, les équations (4.12) et (4.13) donnent la taille de la volute, ($R = R(\theta)$) pour tout R (à la section voulue).

Phénomène de pompage

Une caractéristique particulière des compresseurs est l'apparition d'une plage d'opération où l'écoulement devient oscillatoire. Cette instabilité violente dans laquelle l'écoulement est renversé (refoulement) et se redresse avec une fréquence de quelques cycles par seconde reçoit le nom de *pompage*. Ce phénomène est attribué à des conditions d'opération en régime de décollement (des faibles débits) ce qui entraîne une forte chute de pression dans le compresseur. Cette chute n'est pas suivie à la même vitesse par le système ce qui à son tour engendre un revirement de l'écoulement vers la zone de plus faible pression dans le compresseur. Par la suite, la pression dans le système devient plus faible que dans le compresseur et l'écoulement change encore de direction et ainsi le cycle continue. Pour chaque vitesse de rotation, on trouve un point d'instabilité et la jonction de tous ces points établie une frontière appelée la *ligne de pompage*.

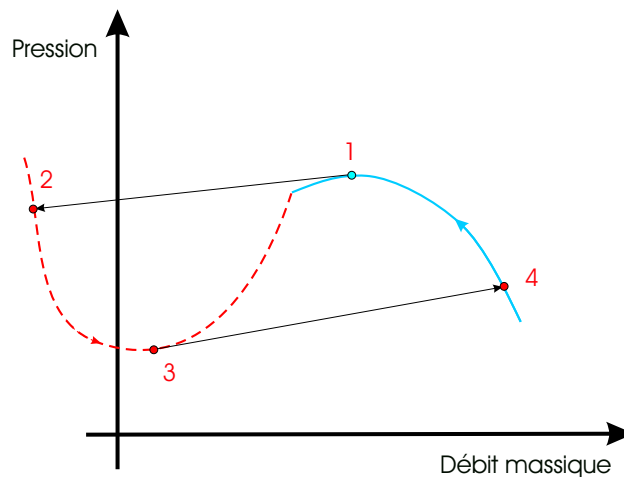


FIG. 4.8: Cycle de pompage

4.2 Pompes centrifuges

Les pompes centrifuges fonctionnent d'une manière similaire aux compresseurs radiaux. Cependant, pour ces machines l'énergie spécifique donnée par l'équation d'Euler s'exprime plutôt par unité de poids au lieu d'une énergie

par unité de masse. De cette façon on parle d'une *hauteur de charge (ou tête)* puisque cette variable possède les dimensions d'une distance. Ainsi, pour les pompes l'équation d'Euler est celle donnée par (2.8), soit :

$$H_{idéal} = \frac{(C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1)}{g}$$

On peut remarquer que la tête idéale pour une pompe, décrite par l'hauteur de la colonne de liquide, *ne dépend pas* du type de fluide puisque la masse volumique n'intervient pas dans cette équation.

De la même façon que pour un compresseur centrifuge, on peut considérer que l'écoulement à l'entrée de la pompe n'a pas de prérotation, ou encore, que la vitesse absolue est radiale à l'entrée ($\bar{\alpha} = 90^\circ$ et $(C_{1u} = 0)$). Ainsi l'équation d'Euler pour les pompes devient :

$$H_{idéal} = \frac{C_{2u}U_2}{g} \quad (4.14)$$

Dans cette formule l'indice 2 indique la sortie du rotor et que C_{2u} indique la projection de la vitesse absolue selon la direction de la vitesse périphérique U_2 . La figure 4.9 montre l'allure d'un rotor de pompe centrifuge.

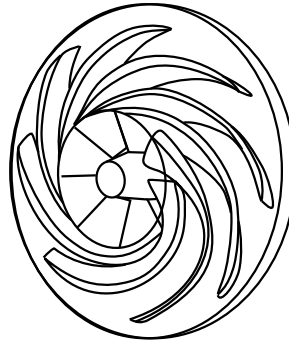


FIG. 4.9: Rotor de pompe centrifuge

4.2.1 Caractéristiques et degré de réaction

L'équation (4.14) n'est pas commode pour les calculs puisqu'elle ne contient pas le débit volumétrique Q et non plus aucune donnée géométrique. Par

conséquent, on transforme cette équation de sorte que ces paramètres se retrouvent explicitement dans des formules analytiques. À partir du triangle de vitesse à la sortie du rotor on a :

$$C_{2u} = U_2 - W_{2u} = U_2 - C_{2m} \tan \beta_2 \quad (4.15)$$

et l'expression (4.14) devient :

$$H_{idéal} = \frac{(U_2 - C_{m2} \tan \beta_2) U_2}{g} \quad (4.16)$$

Si on applique maintenant la définition du débit volumétrique, on peut écrire :

$$Q = 2\pi r_2 b_2 C_{2m}$$

où b_2 indique l'épaisseur de l'aube à la sortie du rotor. Alors, l'équation (4.14) devient :

$$H_{idéal} = \frac{U_2}{g} \left(U_2 - \frac{Q}{2\pi r_2 b_2} \tan \beta_2 \right) \quad (4.17)$$

De manière plus universelle, avec l'introduction du coefficient de charge idéal $\psi = gH_{idéal}/U^2$ et du coefficient de débit C_{2m}/U_2 elle s'exprime :

$$\boxed{\psi_{idéal} = (1 - \phi_2 \tan \beta_2)} \quad (4.18)$$

Cette équation permet de regarder trois cas typiques de la charge adimensionnel de la pompe centrifuge idéale en relation avec le débit adimensionnel et l'angle de sortie.

- si $\beta_2 < 0$, il s'agit d'une droite dont la pente est négative (incliné vers le bas) et $\psi_{idéal}$ diminue avec ϕ_2
- si $\beta_2 = 0$, il s'agit d'une droite ayant une pente nulle (droite parallèle à l'axe des x) et $\psi_{idéal}$ ne dépend pas de ϕ_2
- si $\beta_2 > 0$, il s'agit d'une droite dont la pente est positive (incliné vers le haut) et $\psi_{idéal}$ augmente avec ϕ_2

On constate qu'un aube courbé en avant ($\beta_2 > 0$) est théoriquement le plus avantageux, puisque pour un même débit on obtient l'hauteur de charge la plus grande. Mais, l'expérience montre que ceci entraîne un faible rendement. Un aube radial ($\beta_2 = 0$) est plus solide, est légèrement plus efficace, mais le

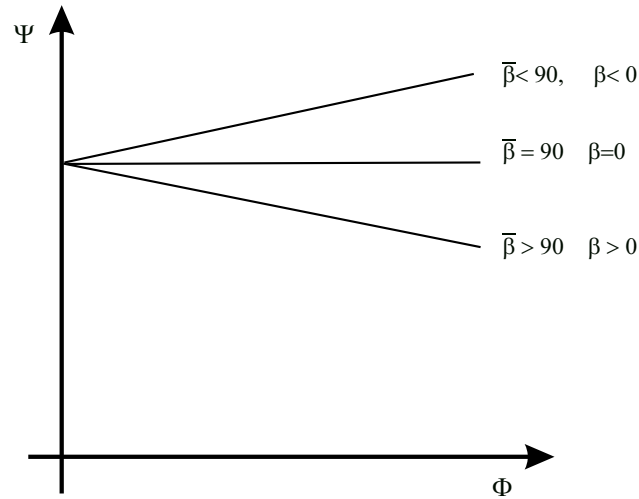


FIG. 4.10: Effet de l'angle des pales

rendement demeure encore faible. Ainsi, l'aubage le plus avantageux est celui courbé en arrière ($\beta_2 < 0$).

Ces trois cas de la caractéristique de la pompe centrifuge idéale sont illustrés à la Fig.4.10 et les respectifs schémas des triangles de vitesses sont montrés à la Fig.4.5.

Pour comprendre la relation entre le rendement et l'angle β on fait appel à la notion de degré de réaction. Pour une pompe, le degré de réaction peut être obtenu en considérant l'énergie spécifique, $H_{idéal}$, donnée par :

$$H_{idéal} = \underbrace{\frac{C_2^2 - C_1^2}{2g}}_I + \underbrace{\frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}}_{II} + \underbrace{(Z_2 - Z_1)}_{III}$$

Mais, la variation d'énergie potentielle (*III*) au travers de la pompe est négligeable par rapport aux variations d'énergie de pression et d'énergie cinétique. Alors la formule précédente devient :

$$H_{idéal} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g}$$

D'autre part,

$$C_2^2 - C_1^2 = C_{2u}^2 - C_{1u}^2 + C_{2m}^2 - C_{1m}^2$$

et si on tient compte que le terme $C_{2m}^2 - C_{1m}^2$ est faible par rapport à $C_{2u}^2 - C_{1u}^2$ et puisque $C_{1u} \approx 0$, on trouve :

$$C_2^2 - C_1^2 \approx C_{2u}^2$$

et par la suite :

$$H_{idéal} = \frac{C_{2u}^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$$

Maintenant on regarde le degré de réaction, R , comme le rapport entre l'énergie de pression $\Delta p/\rho g = (p_2 - p_1)/\rho g$ et l'énergie idéale, ce qui donne :

$$R = \frac{\Delta p/\rho g}{H_{idéal}} = 1 - \frac{C_{2u}^2}{2gH_{idéal}}$$

et une fois qu'on substitue la formule (4.14) on a :

$$\frac{\Delta p/\rho g}{H_{idéal}} = 1 - \frac{C_{2u}}{2U_2}$$

Finalement lorsqu'on introduit l'expression (4.15) on arrive à :

$$\frac{\Delta p/\rho g}{H_{idéal}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{C_{2m} \tan \beta_2}{U_2} \right)$$

Cette relation indique qu'un plus grand rapport C_{2m}/U_2 et un plus grand angle β_2 , conduit

'à un plus grand degré de réaction. Dans le cas contraire, lorsque β_2 diminue c'est la partie liée à l'énergie cinétique qui devient de plus en plus importante dans la génération de l'hauteur de charge. Mais l'énergie cinétique est fonction de la vitesse à la sortie du rotor et plus grande est C_2 , plus importantes sont les pertes et le rendement chute. Alors, l'utilisation d'aubes courbés en avant n'est pas avantageuse.

Comme dernière remarque, on note que d'après l'équation (4.3), on a :

$$\sigma_s = \frac{C_{2uf}}{C_{2ua}} = \frac{U_2 - C_{2m} \tan \beta_{f2}}{U_2 - C_{2m} \tan \beta_{a2}} = \frac{1 - \phi_2 \tan \beta_{f2}}{1 - \phi_2 \tan \beta_{a2}}$$

de sorte qu'en tenant compte du glissement, on peut écrire l'équation (4.18) en fonction de l'angle physique des aubes β_{2a} . Alors :

$$\boxed{\psi_{idéal} = \sigma_s (1 - \phi_2 \tan \beta_{2a})} \quad (4.19)$$

On observe que malgré que le facteur de glissement a pour effet une réduction de l'énergie ajoutée au fluide, il n'est *pas un rendement* puisque il n'est pas reliée à une transformation énergétique.

4.2.2 Point d'opération pour les pompes et le système hydraulique

Tel que pour une pompe, le comportement du système hydraulique (valves, tuyauterie, etc), peut aussi être représenté sur un diagramme $H - Q$. Cette courbe correspond approximativement à une quadratique dont l'origine se trouve au point de coordonnées $(H_{st}, 0)$, où H_{st} indique la tête statique ou la différence de niveau du liquide entre un réservoir supérieur et un inférieur lorsque l'écoulement est nul.

Le point d'opération de ce système hydraulique et d'une pompe est défini par l'intersection de la courbe du système et de la courbe de performance de la pompe. Si le point d'opération de la pompe et celui du circuit hydraulique ne coïncident pas, on a une perte donnée par la différence de têtes respectives.

La variation du point de travail par rapport à une modification de la vitesse de rotation ou bien par rapport à un changement de l'ouverture d'une valve du réseau hydraulique est reporté au chapitre suivant.

4.3 Turbines Hydrauliques

Les turbines hydrauliques représentent le coeur des aménagements hydroélectriques puisqu'elles assurent la transformation de l'énergie hydraulique en énergie mécanique. Selon la façon dont la transformation a lieu, on les classifie en turbines d'action ou de réaction.

Dans une *turbine d'action*, la chute de pression est faite dans les composantes stationnaires (tuyères ou buses). Il n'y a pas de variation de pression dans le rotor et seule l'énergie cinétique est transformée en énergie mécanique. La turbine Pelton, développée par l'américain L.A. Pelton est l'exemple caractéristique des turbines d'action.

Dans une *turbine de réaction*, une partie de l'énergie disponible sous la forme de pression est transformée en énergie mécanique dans le rotor. Les deux turbines hydrauliques de réaction les plus répandues sont la turbine Francis (J.B. Francis, USA) et la turbine Kaplan brevetée par l'autrichien V. Kaplan. Dans ces deux machines, une partie de l'énergie cinétique est aussi transformée en énergie mécanique dans la roue.

Les turbines Pelton, Francis et Kaplan sont les plus utilisées dans les installations hydroélectriques dans le monde. Un quatrième type est la turbine 'bulbe' ('Straflo', Straight Flow) développée par la compagnie Escher-Wyss en Suisse. Il s'agit d'une variante de la turbine Kaplan ayant les composantes électriques à l'intérieur de la partie immergée.

Bien que le rotor est l'élément fondamental, d'une turbine hydraulique il existe des composantes auxiliaires qui contribuent à la transformation énergétique. Pour les turbines de réaction, on trouve un canal, qu'on appelle *la bêche spirale*, pour assurer une distribution uniforme de l'eau sur la périphérie de la roue. Le débit d'eau (et la puissance générée) est par la suite contrôlé par les *aubes directrices* et finalement, après la roue, on trouve une conduite divergente pour permettre un gain en pression et ainsi améliorer le rendement de la machine. Ce diffuseur est connu comme *l'aspirateur*.

La Turbine Pelton

Cette turbine doit son nom à Lester Allan Pelton (1829-1908) qui en cherchant de l'or en Californie, a conçu une roue avec des cuillères périphériques, que l'on appelle augets, pour utiliser l'énergie cinétique provenant d'un jet d'eau sortant d'un tuyau. Par sa structure, la turbine Pelton est alors une machine *radiale*. Dans les turbines modernes, le jet est créé par un injecteur

dont le débit est réglé grâce à un pointeau qui se déplace. Une turbine peut posséder de 1 à 6 injecteurs. La figure 4.11 schématise une turbine Pelton. La turbine Pelton est une turbomachine à *impulsion* dans laquelle l'écoulement d'eau transfère l'énergie cinétique au rotor tandis que la pression demeure constante entre l'entrée et la sortie des pales. Elle est employée lorsque le rapport entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique est grand. Donc, on l'utilise pour des grandes hauteurs (500 – 1000 m) et des débits relativement faibles.

Dans le système métrique pratique, la vitesse spécifique se situe entre 10 et 60 tandis que pour le système anglais elle est de 2 à 12. La *vitesse spécifique adimensionnelle* indique un domaine d'application dans l'intervalle $0.03 \leq N_s \leq 0.15$.

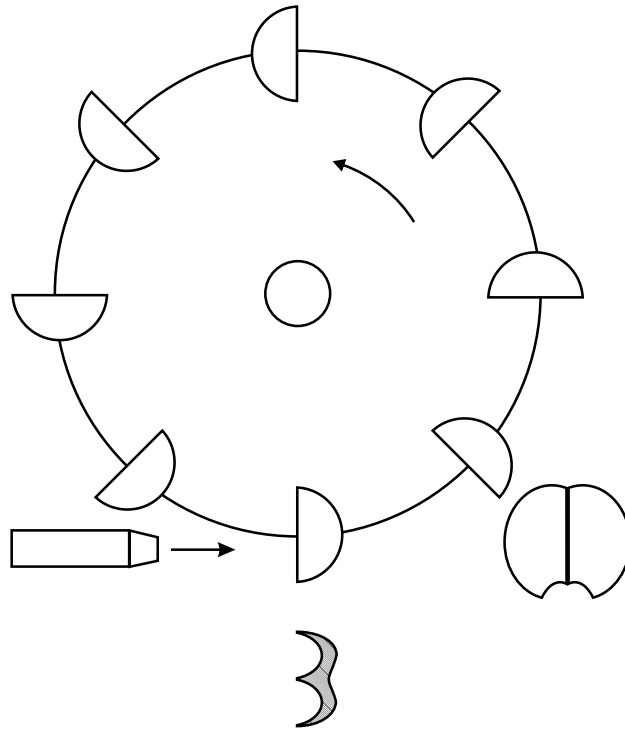


FIG. 4.11: Turbine Pelton

Pour les turbines, les relations décrivant l'énergie spécifique sont semblables à celles développées pour les pompes. Notamment on a :

$$H_{idéal} = \frac{(c_{1u}U_1 - c_{2u}U_2)}{g}$$

ou encore après l'application de la relation trigonométrique des cosinus :

$$H_{idéal} = \frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} \quad (4.20)$$

Puisque pour une turbine de type Pelton $U_1 = U_2 = U$ et que dans l'absence de pertes $W_1 = W_2 = W = V_{jet} - U$, alors :

$$H_{idéal} = \frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} \quad (4.21)$$

A partir du triangle de vitesses, on a la relation géométrique :

$$W^2 + U^2 - 2UW \cos \bar{\beta}_2 = C_2^2$$

et puisque $\bar{\beta}_1 = 0$

$$(W + U)^2 = C_1^2$$

de sorte que

$$\boxed{H_{idéal} = \frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} = \frac{UW(1 + \cos \bar{\beta}_2)}{g}} \quad (4.22)$$

Si dans la formule (4.22) on remplace $U = R\omega$ et $W = V_{jet} - R\omega$, avec R le rayon de la roue, ω la vitesse de rotation et V_{jet} la vitesse du jet, on obtient l'énergie spécifique réelle produite par la turbine. C'est-à-dire :

$$H_{idéal} = \frac{(R\omega)(V_{jet} - R\omega)((1 + \cos \bar{\beta}_2))}{g} \quad (4.23)$$

Cette expression indique l'énergie spécifique transférée par une turbine Pelton en fonction de l'angle β_2 à la sortie de l'auget mobile. Afin d'obtenir la relation optimale entre la vitesse de rotation de la roue ω et la vitesse du jet V_{jet} on calcule :

$$\frac{dH_{idéal}}{d\omega} = 2r\omega - V_{jet} = 0$$

$$\boxed{\frac{V_{jet}}{r\omega} = \frac{V_{jet}}{U} = 2} \quad (4.24)$$

ou encore

$$\frac{U + W}{U} = 1 + \frac{W}{U} = 2 \quad (4.25)$$

c'est-à-dire

$$\frac{W}{U} = 1 \quad (4.26)$$

Finalement, la puissance spécifique idéale maximale est donnée par :

$$\boxed{H_{idéal} = \frac{U^2(1 + \cos\bar{\beta}_2)}{g}} \quad (4.27)$$

On constate que la puissance est une fonction de l'angle de sortie et qu'elle est maximale pour $\bar{\beta}_2 = 0^\circ$, c'est-à-dire pour un écoulement tangentiel à la roue. Toutefois, en pratique on utilise $\bar{\beta}_2 = 15^\circ$, pour éviter le problème d'interférence entre les jets entrants et sortants. On remarque que l'angle $\bar{\beta}_2$ est mesuré par rapport à la direction tangentielle au lieu de le mesurer par rapport à la direction radiale.

Le rendement hydraulique théorique de la turbine Pelton est une fonction de vitesse du jet. En effet, en supposant des pertes négligeables dans les conduits d'amenée, on a :

$$V_{jet}^2 = gH_{idéal}$$

où $gH_{idéal}$ correspond à l'énergie disponible. Alors, le rendement peut s'exprimer comme :

$$\eta = \frac{H_{réelle}}{H_{idéal}} = \frac{2(R\omega)(V_{jet} - R\omega)(1 + \cos\bar{\beta}_2)}{V_{jet}^2}$$

Cette relation est illustrée sur la figure 6.5 et où elle y est comparée au résultat de mesures expérimentales typiques sur de telles turbines.

La Turbine Francis

Cette machine doit son nom à James B. Francis (1815-1892) anglais d'origine, qui a poursuivie sa carrière aux États Unis en apportant des modifications importantes aux travaux de Hoewd (1838) et Boyden. La turbine Francis est une turbomachine *mixte* et *à réaction* dans laquelle l'écoulement pénètre radialement par la périphérie et sort par le centre. Cette machine est

très versatile et on la retrouve dans des applications ayant de petites chutes (30 m) ainsi que des grandes chutes (500 m) avec des débits entre 10 et 200 m^3/s . La plage pour la *vitesse spécifique adimensionnelle* des turbines Francis est $0.15 \leq N_s \leq 0.7s$. La vitesse spécifique dimensionnelle est entre 55 à 440 pour le système métrique et de 12 à 100, pour le système anglais.

La figure 4.12 illustre les principales composantes d'une turbine Francis. L'eau est distribuée uniformément sur la circonférence de la roue par une volute que l'on appelle *la bêche spirale*. De cette volute, l'eau passe par le distributeur ou l'on trouve une couronne d'aubes nommés les *avant-directrices*. Il s'agit des pales non-orientables qui fournissent une pré-rotation à l'écoulement. Par la suite, l'écoulement passe par une série d'aubes orientables servant à contrôler le débit ainsi que le transfert d'énergie dans la turbine lorsque la demande varie. Ceux-ci reçoivent le nom d'*aubes directrices*. L'eau quitte ces éléments passe par le rotor ou elle cède de l'énergie et finalement passe par le *diffuseur* qui joue le rôle d'aspirateur.

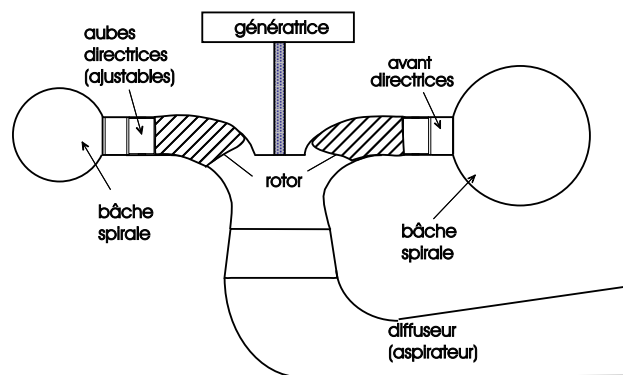


FIG. 4.12: Composantes d'une turbine Francis

L'aspirateur est une conduite à section variable qui est partie intégrale des machines hydrauliques à réaction ayant essentiellement deux fonctions. La première est celle de permettre l'installation de la turbine sur le niveau de décharge, sans pourtant perdre l'énergie disponible dans l'hauteur de charge. Ceci est obtenue grâce à une compensation par une pression réduite à l'entrée du diffuseur. La deuxième fonction est celle de diminuer les pertes au moyen d'une transition graduelle de la section du diffuseur avec une section de sortie plus grande que celle à l'entrée. Ainsi le diffuseur ralentit l'écoulement sans séparation en même temps qu'on réussit à obtenir une pression plus

faible à la sortie du rotor qu'elle l'aurait été sans le diffuseur. Étant donnée que le travail spécifique que l'on peut extraire d'une turbine est donnée par :

$$W_e = \frac{(P_1 - P_2)}{\rho} + \frac{C_1^2 - C_2^2}{2} + (Z_1 - Z_2)$$

on peut voir qu'une plus faible pression P_2 conduit à un plus grand travail obtenu.

Tel que pour l'ensemble des turbomachines, l'expression qui caractérise l'énergie par unité de poids (ayant des dimensions d'une longueur) d'une turbine Francis est l'équation (4.20). Pour ces turbines on utilise la définition suivante pour le degré de réaction R :

$$R = \frac{\frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}}{H_{idéal}} \quad (4.28)$$

Cette quantité est comprise entre zéro et un et fréquemment prend des valeurs autour de 0.5.

La Turbine Kaplan

La turbine Kaplan est une machine à *réaction* du type *axial* qui doit son nom à l'ingénieur autrichien Victor Kaplan (1876-1934) qui a enseigné à l'Université Technique de Brno en République Tchèque. Les éléments principaux d'une turbine Kaplan sont semblables à ceux d'une turbine Francis, soit, une bêche spirale, un distributeur avec des aubes directrices, un rotor et finalement un diffuseur. Celui-ci est essentiellement une conduite conique qui permet de récupérer la composante axiale de la vitesse sous la forme de pression. La figure 4.13 montre les principales composantes d'une turbine Kaplan.

L'innovation de Kaplan sur les turbines existantes, a été celle de corriger le pas en fonction de la puissance demandée. Pour ce faire, la roue comporte des *pales réglables* qui changent leur angle pour s'adapter ainsi à un débit variable.

La vitesse spécifique est élevée, puisqu'étant une machine axiale, le débit est grand et la charge relativement faible. Notamment, les turbines Kaplan sont utilisés pour les basses chutes de moins de 50 m. La vitesse spécifique adimensionnelle varie entre $N_s = 0.7$ et $N_s = 2.0$. Dans le système métrique

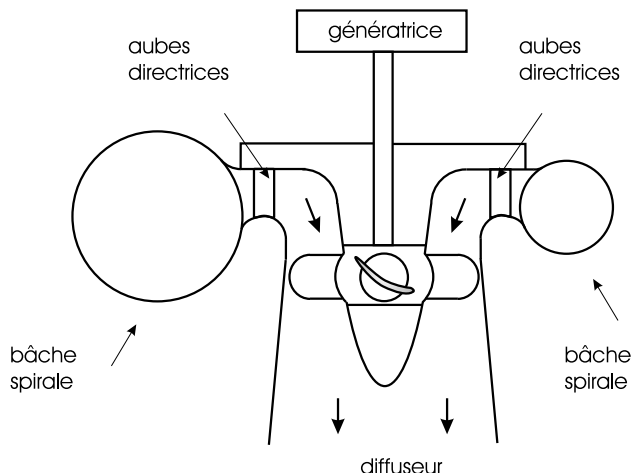


FIG. 4.13: Composantes d'une turbine Kaplan

pratique, la vitesse spécifique varie, approximativement de $\bar{N}_s = 300$ à $\bar{N}_s = 1100$ ce qui équivaut à $\bar{N}_s = 70$ à $\bar{N}_s = 250$ dans le système anglais.

L'écoulement dans ce type de turbines est axial de sorte que la vitesse périphérique à l'entrée et à la sortie du rotor est essentiellement la même ($U_1 \sim U_2$). Ainsi, l'équation (4.20) devient :

$$H_{idéal} = \frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} \quad (4.29)$$

et le degré de réaction définie par (4.28) devient

$$R = \frac{1}{\frac{C_1^2 - C_2^2}{W_2^2 - W_1^2} + 1} \quad (4.30)$$

Une variante de la turbine Kaplan est la *turbine Hélice* dont la roue à des aubes fixes. Bien que ceci est un clair avantage du point de vue du coût, l'efficacité de cette machine est très sensible aux variations de débit et la plage de puissance avec un bon rendement est beaucoup plus étroite.

4.3.1 Exemples

Exemple 4.1

Un compresseur centrifuge a les spécifications suivantes :

- pales radiales à la sortie $\beta_{2g} = 0^\circ$
- vitesse de rotation $N = 290 \text{ rev/sec}$
- nombre de pales $Z = 20$
- diamètre maximal du rotor $d_r = 0.5 \text{ m}$
- diamètre interne de l'oeil $d_i = 0.15 \text{ m}$
- diamètre externe de l'oeil $d_e = 0.30 \text{ m}$
- débit $\dot{m} = 9 \text{ kg/s}$
- température totale à l'entrée $T_{01} = 295\text{K}$
- pression totale à l'entrée $P_{01} = 1.1\text{bar}$
- vitesse purement axiale à l'entrée.

Utiliser de l'air avec $\gamma = 1.4$ et $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$

Calculez :

- a) Le rapport de pression et la puissance requise en supposant un rendement isentropique du rotor égale à $\eta_s = 0.85$.
- b) L'angle d'inclinaison des pales du rotor à la base et à l'extrémité de l'oeil.
- c) La largeur des pales du rotor dans le plan de sortie, en choisissant une vitesse radiale $C_{r2} = C_{x1}$.

Solution

a) Premièrement, on calcule la vitesse tangentielle du rotor dans le plan de sortie

$$U_2 = \pi d_r N$$

$$U_2 = \pi(0.5\text{m})(290\text{rev/sec}) = 455.5 \text{ m/s}$$

Ensuite, on peut déterminer le gain de température totale

$$\Delta h_0 = c_p(T_{02} - T_{01}) = U_2 C_{2u}$$

mais :

$$\sigma = \frac{C_{2u}}{C_{2g}} = \frac{C_{2u}}{U_2} = 1 - \frac{2}{Z} = 0.9$$

alors :

$$C_{2u} = 0.9U_2$$

$$T_{02} - T_{01} = \frac{U_2^2(0.9)}{c_p} = 185.8 \text{ K}$$

De plus,

$$\eta_s = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{P_{02}}{P_{01}} &= \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{P_{02}}{P_{01}} &= \left[\frac{T_{01} + \eta_s(T_{02} - T_{01})}{T_{01}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{P_{02}}{P_{01}} &= 4.48 \end{aligned}$$

La puissance requise est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{m} \Delta h_0 \\ \dot{W} &= 1.68 \text{ MWatts} \end{aligned}$$

b) Pour déterminer les angles à l'entrée, on doit connaître la vitesse axiale afin de construire le triangle de vitesse. On doit donc calculer le nombre de Mach en utilisant :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}}{A_1} &= P_0 \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}} M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2M^2} \right)^{-\left(\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}\right)} \\ A_1 &= \frac{\pi(d_e^2 - d_i^2)}{4} = 0.053 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

On obtient donc une équation pour le nombre de Mach :

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_0}}{A_1 P_0} = 0.0265$$

et par interpolation dans la Table A.1, ou par voie numérique, on obtient $M \approx 0.42$. Alors :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M^2 \right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}} = 0.917$$

$$\rho_{01} = \frac{P_{01}}{RT_{01}} = 1.30 \text{ kg/m}^3$$

d'où :

$$\rho_1 = (0.917) (1.30 \text{ kg/m}^3) = 1.19 \text{ kg/m}^3$$

En utilisant l'équation de continuité en 1, on a :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho_1 A_1 V_1 = 9 \text{ kg/s} \\ C_1 &= 142.5 \text{ m/sec} \end{aligned}$$

Maintenant, on peut calculer les angles à l'entrée du rotor :

À la base de l'oeil :

$$U_i = \pi(0.15) (290) = 136.5 \text{ m/s}$$

$$\tan \beta_i = \frac{136.5}{142.5}$$

$$\beta_i = 43.7^\circ$$

À l'extrémité de l'oeil :

$$U_e = \pi(0.30) (290) = 273 \text{ m/s}$$

$$\tan \beta_e = \frac{273}{142.5}$$

$$\beta_e = 62.4^\circ$$

c) À la sortie du rotor, on connaît le débit et les conditions totales T_{02} , P_{02} et on connaît le module de la vitesse tangentielle C_{2u} .

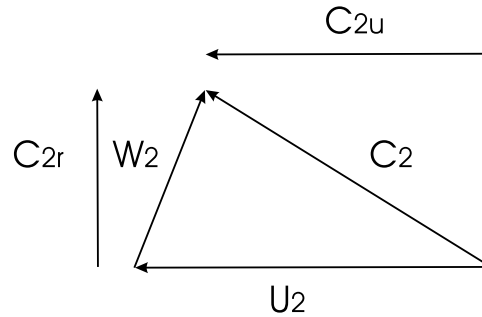


FIG. 4.14: Exemple 4.1

En effet, d'après le triangle des vitesses à la sortie on a :

$$\dot{m} = \rho_2 C_{2r} A_2 = 9 \text{ kg/s}$$

$$C_2 = (C_{2u}^2 + C_{2r}^2)^{1/2}$$

De ce fait, les inconnues sont : C_{2r} , ρ_2 et A_2 .

D'après les données : $C_{2r} = C_{1x} = 142.5 \text{ m/s}$, alors :

$$C_2 = (410^2 + 142.5^2)^{1/2} = 434 \text{ m/s}$$

$$c_p T_{02} = c_p T_2 + \frac{1}{2} C_2^2$$

d'où :

$$T_2 = 387.3 \text{ K}, \quad \frac{T_2}{T_{02}} = 0.8$$

et :

$$\frac{P_2}{P_{02}} = \left(\frac{T_2}{T_{02}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.458$$

d'où :

$$P_2 = 2.26 \text{ bar}$$

Donc,

$$\rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = 2.03 \text{ kg/m}^3$$

et avec :

$$A_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 C_{2r}} = 0.031 \text{ m}^2$$

on obtient :

$$b_2 = A_2 \pi d_2 = 0.02m$$

4.3.2 Exercices

Exercice 4.1

De l'air entre dans un compresseur centrifuge avec une vitesse axiale $C_x = 100$ m/s, une température totale $T_0 = 288$ K et une pression totale $P_0 = 101.3$ kPa. À la sortie du rotor, l'angle relatif de l'écoulement mesuré à partir de la direction radiale est 26.6° , la composante radiale de la vitesse est 120 m/s et la vitesse tangentielle des pales est de 500 m/s. Le débit d'air est 2.5 kg/s

- Déterminez la puissance requise pour comprimer l'air si le rendement mécanique est $\eta_m = 0.95$.
- Si le rapport des rayons à l'entrée du compresseur est 0.3, trouvez le diamètre externe en entrée.
- Déterminez le rapport des pressions totales entre l'entrée du compresseur et la sortie du diffuseur pour un rendement isentropique global de 80%.

Réponse

$$\dot{W} = -579 \text{ kW}; D_e = 172 \text{ mm}; r_p = 5.27$$

Exercice 4.2

Un compresseur centrifuge ayant des pales radiales à la sortie du rotor reçoit de l'air à une température totale $T_0 = 288$ K et une pression totale $P_0 = 101.3$ kPa. La vitesse de rotation à l'extrémité des pales du rotor est de 366 m/s. Déterminez la vitesse absolue ainsi que le nombre de Mach de l'écoulement à la sortie des pales du rotor lorsque la composante radiale de la vitesse à la sortie est 30.5 m/s et que le coefficient de glissement est de 0.9. En considérant que l'aire vue par l'écoulement à la sortie du rotor est $0.1m^2$ et que le rendement isentropique du rotor est de 90%, déterminez le débit massique.

Réponse

$$M = 0.875; \dot{m} = 5.61 \text{ kg/s}$$

Exercice 4.3

Un compresseur centrifuge a un rotor avec 21 pales qui sont radiales à la sortie et un diffuseur avec ailettes. À l'entrée la pression totale est 100 kPa et la température totale 300 K.

- a) Si le débit est de 2.3 kg/s, la vitesse de rotation à l'extrémité des pales de 500 m/s et le rendement mécanique de 96%, déterminez la puissance requise pour comprimer l'air.
- b) Déterminez les pressions totales et statiques à la sortie du diffuseur si la vitesse à cette position est de 100 m/s et le rendement isentropique entre l'entrée du compresseur et la sortie du diffuseur est de $\eta_s = 0.82$.

Réponse

a) $\dot{W} = -542.5 \text{ kW}$ b) $P_{02} = 536 \text{ kPa}$ et $P_2 = 519 \text{ kPa}$

Exercice 4.4

Un compresseur centrifuge possède 30 pales radiales en sortie et le rotor reçoit l'air sans prérotation. La vitesse tangentielle des pales à la sortie du rotor est de 500 m/s. Estimez le rapport de pression si le compresseur reçoit de l'air à $P_0 = 1 \text{ atm}$, $T_0 = 25^\circ\text{C}$ en supposant un rendement isentropique $\eta_s = 0.7$. Recommencez le calcul pour $\eta_s = 0.85$.

Réponse

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = 4.59, \quad \frac{P_2}{P_1} = 5.92$$

Exercice 4.5

Un diffuseur sans ailette de largeur constante reçoit de l'air à un nombre de Mach $M = 1.4$ et à un angle de 75° par rapport à la direction radiale. Estimez le rapport de pression de ce diffuseur si son rapport de rayon est de 1.5.

Réponse

$$\frac{P_2}{P_1} = 2.0$$

Exercice 4.6

On désire dessiner un compresseur pour une turbine à gaz qui a les caractéristiques globales suivantes :

$$\frac{P_{0C}}{P_{0A}} = 6.0, \quad T_{0A} = 288K, \quad P_{0A} = 1.01 \text{ bar}, \quad \dot{m} = 3kg/s$$

On suggère un compresseur axial multi-étages suivi d'un compresseur centrifuge (voir figure).

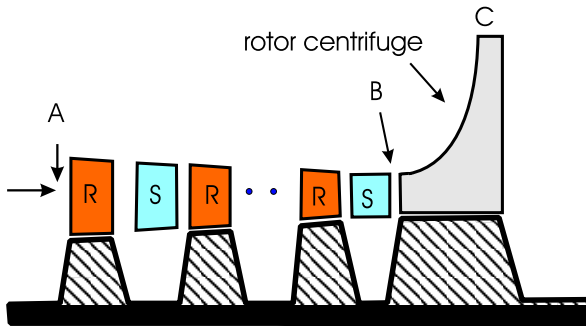


FIG. 4.15: Exemple 4.6

Par simplicité, on désire un design avec une vitesse purement axiale à l'entrée du compresseur axial et à l'entrée du compresseur centrifuge. Il n'y a pas d'aubes directrices et le rotor centrifuge possède des pales radiales à la sortie.

- le rayon moyen des étages axiaux est fixé à $r_m = 10 \text{ cm}$
- le rayon externe du rotor du compresseur centrifuge est fixé à $r_r = 15 \text{ cm}$
- la vitesse axiale à l'entrée est fixée à $C_{xA} = 125 \text{ m/s}$
- la vitesse radiale à la sortie est fixée à $C_{rC} = 125 \text{ m/s}$

Vous devez compléter ce design en utilisant :

- un rapport de pression du compresseur axial $\frac{P_{0B}}{P_{0A}} = 2.0$

- une diffusion contrôlée dans les étages axiaux telle que le nombre de De Haller soit ≥ 0.72
- le coefficient de travail effectif des étages axiaux donné sur le tableau ci-dessous

Work Done Factor	Numéro de l'étage
0.98	1
0.93	2
0.88	3
0.83	4 et plus

- le rendement isentropique du rotor du compresseur centrifuge $\eta_s = 0.8$
- le nombre de pales du compresseur centrifuge $Z = 25$
- le rendement polytropique des étages axiaux $\eta_p = 0.9$
- des étages axiaux semblables
- un gaz parfait $\gamma = 1.4$, $R = 287 \text{ J/kgK}$, $c_p = 1005 \text{ J/kgK}$

Calculez :

- la vitesse de rotation du compresseur en rpm ;
- la hauteur des pales à l'entrée du compresseur axial ;
- le nombre de Mach relatif à l'extrémité de l'oeil en entrée du rotor du compresseur centrifuge ;
- la largeur des pales à la sortie du rotor du compresseur centrifuge ;
- la puissance requise pour entraîner ce compresseur ;
- le coefficient de charge et le degré de réaction des étages axiaux ;

Dessinez :

- le triangle des vitesses des étages axiaux ;
- le triangle des vitesses à la sortie du rotor du compresseur centrifuge.

Réponse

$$\begin{aligned}
 a) N &= 27056 \text{ rpm} & b) h_A &= 3.34 \text{ cm} & c) M_{rel} &= 0.896 \\
 d) h_C &= 9.77 \text{ mm} & e) \dot{W} &= -712.47 \text{ kW} & f) \psi &= -0.318, \\
 R &= 0.84
 \end{aligned}$$

Chapitre 5

Nombres Adimensionnels

L'étude de la performance d'une turbomachine utilise un nombre important de variables (angles, diamètre, puissance, vitesse de rotation, etc) et l'analyse de l'interaction entre chacune d'elles n'est pas une tâche immédiate. Couramment, on simplifie ce travail par le regroupement des variables autour d'un comportement physique pour engendrer ainsi des paramètres sans dimension. Cette manipulation ne réduit pas seulement le nombre de paramètres en jeu, mais implique aussi que *plusieurs phénomènes du même type peuvent être considérés comme étant un seul mais avec des échelles différentes*.

L'idée primaire liée à l'obtention de paramètres sans dimension est donc la possibilité d'effectuer des calculs qui pourront s'appliquer à l'analyse d'un grand éventail de cas. En effet, une fois qu'on décide sur un certain nombre de paramètres de référence, on peut analyser les résultats par rapport à ces grandeurs caractéristiques.

L'utilisation de nombres adimensionnels pour caractériser le comportement des turbomachines est très utile car ceci facilite l'application de résultats connus d'une machine vers une autre. Cet aspect est très important dans le design étant donné qu'il permet la prédiction du comportement d'une machine grandeur nature à partir d'un modèle réduit. Également, l'information accumulée pour diverses machines peut être extrapolée vers des nouvelles machines en projet.

Fondamentalement, l'organisation des données et la comparaison de turbomachines est effectuée au moyen du concept de similitude. On distingue trois types de similitude :

- Similitude géométrique
- Similitude cinématique
- Similitude dynamique

La *similitude géométrique* est satisfaite lorsque toutes les dimensions d'une machine ont la même proportion avec les dimensions correspondantes d'une deuxième machine. C'est-à-dire, lorsque le rapport entre une longueur l quelconque et une dimension fondamentale, normalement le diamètre D , est une constante tant pour la première machine, qu'on appellera *le modèle*, que pour la deuxième qu'on désignera comme *le prototype*. En langage mathématique ceci s'écrit :

$$\boxed{\left(\frac{l}{D}\right)_m = \left(\frac{l}{D}\right)_p} \quad (5.1)$$

On remarque que dans la condition de similitude géométrique on retrouve aussi les relations entre les angles $\alpha_m = \alpha_p$ et $\beta_m = \beta_p$.

La condition de *similitude cinématique* indique que deux machines sont cinématiquement similaires si le rapport de vitesses dans le modèle et dans le prototype est le même. Par exemple,

$$\left(\frac{W_2}{U}\right)_m = \left(\frac{W_2}{U}\right)_p$$

On note que la similitude cinématique entre deux machines est définie par un même coefficient de débit, soit :

$$\boxed{\phi = \left(\frac{C_m}{U}\right)_m = \left(\frac{C_m}{U}\right)_p} \quad (5.2)$$

Finalement, la *similitude dynamique* entre deux machines est respectée lorsque la force dans l'une garde un rapport constant avec la force correspondante dans l'autre. Lors d'un écoulement, les forces caractéristiques sont les forces d'inertie, les forces de frottement et les forces de pression. L'exemple le plus connu de similitude dynamique est donné par le rapport entre les forces d'inertie, F_i , et les forces de frottement, F_f .

$$\left(\frac{F_i}{F_f}\right)_m = \left(\frac{F_i}{F_f}\right)_p$$

Lorsque les trois conditions de similitude sont satisfaites, on dit qu'il y a une *similitude complète*.

À partir des relations de similitude, plusieurs nombres adimensionnels particuliers au domaine des turbomachines ont été déduits ou reformulés.

Le coefficient de débit ϕ

Ce paramètre est défini comme le rapport entre la vitesse normale à une section de passage et une vitesse caractéristique. Pour une machine axiale la vitesse liée au débit est la vitesse axiale C_x tandis que pour une machine centrifuge, cette vitesse correspond à la vitesse radiale C_m . La vitesse caractéristique est liée à la vitesse de rotation, $UD/2$, à un rayon pré-défini. Alors :

$$\phi = \left(\frac{C_m}{U}\right) = \left(\frac{\dot{m}/\rho A}{ND/2}\right)$$

Si on considère que l'aire est proportionnelle à $D^2/4$ et en éliminant les facteurs numériques, on peut écrire :

$$\boxed{\phi = \left(\frac{\dot{m}}{\rho ND^3}\right)} \quad (5.3)$$

Lorsque le fluide est incompressible, au lieu d'utiliser le débit massique on emploie le débit volumique $Q = \dot{m}/\rho$. Dans ce cas, le coefficient de débit devient :

$$\boxed{\phi = \left(\frac{Q}{ND^3}\right)} \quad (5.4)$$

Le coefficient de charge ψ

Ce nombre adimensionnel, $\psi = W_e/U^2$, est une relation entre le travail spécifique et l'énergie cinétique spécifique de référence. Dans le contexte des machines rotatives on peut le réécrire comme :

$$\boxed{\psi = \left(\frac{W_e}{N^2 D^2} \right)} \quad (5.5)$$

Le coefficient de puissance \bar{P}

Le produit des coefficients de charge ψ (Eq.5.5) et de débit ϕ (Eqs. 5.3 ou 5.4) donne lieu au coefficient de puissance :

$$\boxed{\bar{P} = \left(\frac{\dot{W}}{\rho N^3 D^5} \right) = \psi \phi} \quad (5.6)$$

Dans cette formule, le terme $\dot{W} = \dot{m}W_e$ est considéré comme étant l'énergie réelle, celle du fluide pour le mode pompe ou celle à l'arbre pour le mode turbine. Par contre, si l'expression \dot{W} indique l'énergie idéale il faut introduire le rendement. Dans ce cas :

$$\boxed{\eta \bar{P} = \psi \phi} \quad (5.7)$$

Le nombre de Reynolds R_e

Le nombre de Reynolds est le rapport entre les forces d'inertie et les forces de cisaillement. Le travail utile est celui des forces d'inertie qui produisent le mouvement du fluide tandis que les forces de cisaillement sont les responsables du travail de dissipation. On déduit que si le rapport des forces d'inertie aux forces de cisaillement est le même pour deux machines, leur rendement est aussi le même. Dans le contexte des turbomachines, on écrit le nombre de Reynolds comme :

$$\boxed{R_e = \frac{\rho N D^2}{\mu}} \quad (5.8)$$

où μ indique la viscosité du fluide.

Le nombre de Mach M

Pour un écoulement compressible, la similitude aussi exige que le rapport entre la vitesse de l'écoulement V et la vitesse des perturbations ou vitesse du son doit être une constante. Ce rapport est le nombre de Mach.

$$\boxed{M = \frac{V}{a}} \quad (5.9)$$

où a dénote la vitesse du son.

Finalement, d'après l'expérience les conditions suffisantes pour l'existence d'une similitude complète entre un modèle et un prototype sont :

- Le nombre de Reynolds $R_e = \frac{\rho N D^2}{\mu}$
- Le nombre de Mach $M = \frac{V}{a}$
- Les coefficients ϕ et ψ
- Le rapport d'échelle entre le modèle et le prototype

On remarque que lorsque le nombre de Reynolds correspond à un régime turbulent ($R_e > 10^5$), les forces d'inertie dominent le phénomène et c'est le coefficient de débit qui détermine la similitude.

5.1 Forme particulières

5.1.1 Pompes

Pour une pompe, le travail spécifique est donné par : $W_e = gH$. Dans ce cas, le coefficient de débit est celui-ci donné par l'Éq.(5.4) tandis que le coefficient de charge devient :

$$\boxed{\psi = \left(\frac{gH}{N^2 D^2} \right)} \quad (5.10)$$

Les pompes opèrent avec des fluides considérés comme étant incompressibles et le nombre de Mach est donc inutile. Alors, ce groupe sera égal pour le modèle et le prototype si, en plus d'être géométriquement similaires, pour chaque cas on retrouve le même coefficient de débit et le même nombre de Reynolds. Ceci peut s'exprimer par :

$$\psi = \left(\frac{gH}{N^2 D^2} \right) = f_1 \left(\frac{Q}{N D^3}, \frac{\rho N D^2}{\mu}, \frac{l_i}{D} \right) \quad (5.11)$$

Cette même série de paramètres caractérise le rendement, soit :

$$\eta = f_2 \left(\frac{Q}{N D^3}, \frac{\rho N D^2}{\mu}, \frac{l_i}{D} \right) \quad (5.12)$$

L'expression $\frac{l_i}{D}$, dans les équations (5.11) et (5.12), représente l'ensemble de rapports géométriques qui caractérisent complètement la forme de la pompe. Ce terme se trouve également dans la caractérisation géométrique des ventilateurs, compresseurs, turbines à gaz et turbines hydrauliques.

5.1.2 Ventilateurs

Dans un ventilateur, la vitesse de l'écoulement est faible par rapport à la vitesse du son et l'effet de la compressibilité peut être négligé. Pour ces appareils, la variation d'enthalpie totale coïncide avec le changement de pression de stagnation et on utilise alors la variation, $\Delta P_0/\rho$, pour décrire le travail spécifique au lieu de gH employé pour les pompes. Le coefficient de charge devient donc :

$$\boxed{\psi = \left(\frac{\Delta P_0}{\rho N^2 D^2} \right)} \quad (5.13)$$

Étant donné qu'un ventilateur peut être considéré comme une machine hydraulique, le coefficient de débit est celui donné par l'Éq.(5.4) et les relations (5.11) et (5.12) s'appliquent également. Notamment :

$$\begin{aligned} \psi &= \left(\frac{\Delta P_0}{\rho N^2 D^2} \right) = f_1 \left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho ND^2}{\mu}, \frac{l_i}{D} \right) \\ \eta &= f_2 \left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho ND^2}{\mu}, \frac{l_i}{D} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.1.3 Compresseurs et turbines à gaz

Dans un compresseur la variation de pression de stagnation est élevée, l'écoulement est compressible et les changements de masse volumique sont non négligeables. On doit ainsi récupérer le nombre de Mach, éliminé pour les ventilateurs comme paramètre de similitude. Maintenant, le travail spécifique adimensionnel et le rendement sont définis par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{W_e}{N^2 D^2} \right) &= f_3 \left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho ND^2}{\mu}, \frac{V}{a}, \frac{l_i}{D} \right) \\ \eta &= f_4 \left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho ND^2}{\mu}, \frac{V}{a}, \frac{l_i}{D} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pour les compresseurs, le débit volumique Q n'est pas adéquat et il est approprié de considérer à sa place le débit massique \dot{m} ainsi qu'introduire l'enthalpie totale. Sous l'hypothèse de gaz parfait et pour une machine opérant à nombre de Reynolds élevé (supérieur à 10^5), il est possible de trouver :

$$\begin{aligned} \frac{P_{02}}{P_{01}} &= f_5 \left(\frac{\dot{m} \sqrt{RT_{01}}}{P_{01} D^2}, \frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}, \gamma, \frac{l_i}{D} \right) \\ \eta &= f_6 \left(\frac{\dot{m} \sqrt{RT_{01}}}{P_{01} D^2}, \frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}, \gamma, \frac{l_i}{D} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ces paramètres s'appliquent également pour les turbines à gaz.

5.1.4 Turbines hydrauliques

Tel que pour les pompes, les relations suivantes s'appliquent aux turbines :

$$\psi = \left(\frac{gH}{N^2 D^2} \right) = f \left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho ND^2}{\mu}, \frac{l_i}{D} \right) \quad (5.17)$$

et

$$\eta = f \left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho ND^2}{\mu}, \frac{l_i}{D} \right) \quad (5.18)$$

Pour une turbine, la notion de puissance est plus vitale que pour le cas d'une pompe. Ce paramètre peut être introduit par le changement de variable :

$$Q = \frac{\dot{W}}{\eta_t \rho g H}$$

de sorte que, si on néglige l'influence du nombre de Reynolds, on peut écrire :

$$\left(\frac{gH}{N^2 D^2} \right) = f \left(\frac{1}{\eta} \frac{\dot{W}}{\rho D^2 (gH)^{3/2}} \frac{(gH)^{1/2}}{ND}, \frac{l_i}{D} \right) \quad (5.19)$$

et

$$\eta_t = f \left(\frac{1}{\eta_t} \frac{\dot{W}}{\rho D^2 (gH)^{3/2}} \frac{(gH)^{1/2}}{ND}, \frac{l_i}{D} \right) \quad (5.20)$$

L'écriture particulière de ces équations permet l'identification des groupes adimensionnels

$$\eta_t, \quad \frac{\dot{W}}{\rho D^2 (gH)^{3/2}}, \quad \frac{ND}{(gH)^{1/2}} \quad (5.21)$$

Étant donné que le regroupement $\frac{ND}{(gH)^{1/2}}$ n'est que l'inverse de $\sqrt{\frac{gH}{N^2 D^2}}$ apparaissant dans l'Eq.(5.19), il existe alors une fonction qui relie ces trois quantités adimensionnelles et la géométrie, soit :

$$F \left(\eta_t, \frac{\dot{W}}{\rho D^2 (gH)^{3/2}}, \frac{ND}{(gH)^{1/2}}, \frac{l_i}{D} \right) = 0 \quad (5.22)$$

5.2 La généralité des courbes caractéristiques

D'un point de vue mathématique le comportement des turbomachines, *incluant des variations dans la géométrie* peut être résumé par l'expression :

$$\boxed{\eta = f(\phi, \psi, M, Re)} \quad (5.23)$$

Cette équation correspond à une *hypersurface* difficilement imaginable dans l'espace heptadimensionnel $(\psi, \phi, \eta, M, Re)$. Heureusement, dans la plupart des turbomachines les forces d'inertie sont largement dominantes par rapport aux forces visqueuses et le nombre de Reynolds peut ainsi être négligé. Malgré ceci, il reste encore quatre autres variables et des simplifications additionnelles sont nécessaires pour faciliter l'application de l'analyse de similitude.

Pour les *écoulements incompressibles*, le nombre de Mach ne s'applique pas. Alors, l'équation (5.23) devient :

$$\boxed{\eta = f(\phi, \psi)} \quad (5.24)$$

ce qui correspond à une surface dans l'espace (ψ, ϕ, η) . La figure 5.1 illustre cette surface et des lignes de $\eta = cte$ projetées sur la plan $\psi - \phi$. Cependant, lorsqu'on considère une famille de *machines géométriquement similaires*, $\psi = f(\phi)$, et on a alors :

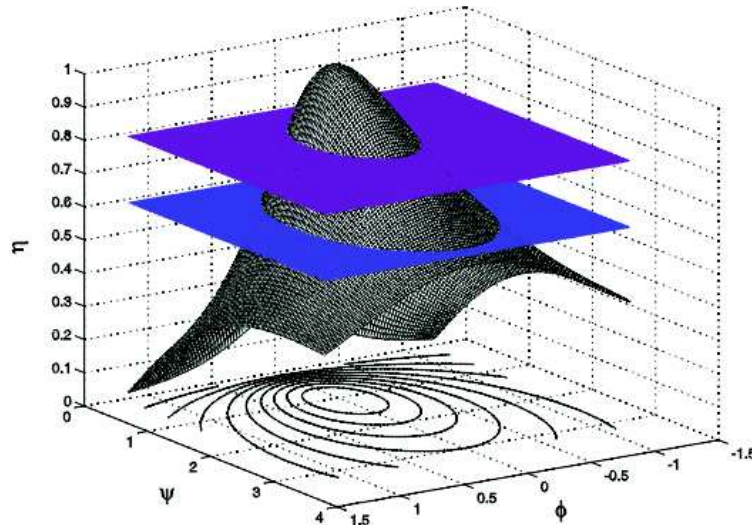


FIG. 5.1: Surface caractéristique $\phi - \psi - \eta$

$$\eta = f(\phi), \quad \text{ou} \quad \eta = f(\psi)$$

On note que pour un ϕ_d de design donné, il existe un seul point de rendement η_d . Cependant, pour un ψ_d il y a deux points correspondant de rendement (fonction biunivoque). Alors, lors du design d'une turbomachine on utilisera la première forme.

Cet aspect montre *la puissance des paramètres adimensionnels de similitude* pour l'analyse de la performance des turbomachines. Par contre, dans l'industrie, l'information empirique accumulée au long des années est gardée sous forme dimensionnelle ayant des caractéristiques particulières pour chaque type de machine. Pour les pompes centrifuges, par exemple, les paramètres d'intérêt, sont le débit Q , la charge H et le rendement η . Sous forme gra-

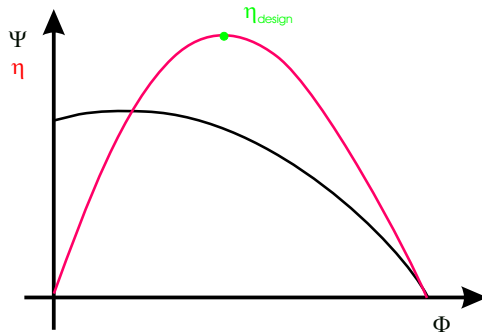


FIG. 5.2: Courbe caractéristique $\phi - \psi$

phique, ces variables donnent lieu à une surface dans l'espace tridimensionnel Q, H, η .

Compte tenu de la difficulté inhérente pour l'utilisation de cette information, pour une pompe avec un diamètre et une vitesse de rotation donnés, on construit la courbe de performance $Q - H$. Celle-ci peut être interprétée comme la projection de la surface dans le plan $Q - H$ pour une vitesse de rotation donnée. À cette représentation, on superpose des courbes de niveaux de rendement et pour compléter, on ajoute plusieurs courbes $Q - H$ soit pour différentes vitesses de rotation ($D = \text{cte.}$), soit pour différents diamètres ($N = \text{cte.}$).

Une forme alternative, employée pour les pompes et les ventilateurs, est la représentation des courbes $Q - H$ et $\eta - H$ sur la même figure d'où on peut identifier le rendement maximal et ainsi la paire (Q_d, H_d) correspondant au point de design (Figure xex).

Pour les compresseurs, la variation de masse volumique ρ est importante et l'expression (5.23) pour des *machines géométriquement similaires* ($\psi = f(\phi)$) avec $\gamma = \text{cte.}$ devient :

$$\eta = f(\phi, \psi) \quad \text{ou} \quad M = f(\phi, \psi) \quad (5.25)$$

Pour les compresseurs et les turbines à gaz opérant avec un gaz parfait, on peut trouver les formes équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}} &= f\left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{01}D^2}, \frac{P_{02}}{P_{01}}\right) \\ \eta &= f\left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{10}D^2}, \frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}\right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ces équations représentent deux surfaces dans l'espace $\left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{10}D^2}, \frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta\right)$ et $\left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{10}D^2}, \frac{P_{02}}{P_{01}}, \frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}\right)$ respectivement. Pour fins d'analyse, ces formes sont réduites à des projections de isocontours de $\eta = cte.$ et de $\frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}} = cte.$

sur le plan $\left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{10}D^2}, \frac{P_{02}}{P_{01}}\right)$. Autrement dit, on illustre une série de courbes d'un même rendement et plusieurs courbes de performance pour différents $\frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}$ sur le même diagramme $\left(\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{10}^2}, \frac{P_{02}}{P_{01}}\right)$.

Les courbes caractéristiques des compresseurs présentent des éléments nouveaux. D'une part le *blocage sonique* et d'autre part le *pompage*.

Le blocage sonique se produit lorsque \dot{m} est suffisamment grand et que la vitesse de l'écoulement dans une section du passage interaube atteint la vitesse du son. À partir de ce point, le débit massique ne continue plus à augmenter avec une variation dans le rapport de pression et les courbes caractéristiques, pour des différentes vitesses de rotation, deviennent verticales.

Le pompage est un phénomène d'instabilité cyclique caractérisé par une forte chute du rapport de pression dans les régions de débit massique faible. L'apparition du pompage est attribué au décrochage du fluide de l'aube. Lorsqu'on rejoint les points d'instabilité pour des vitesses de rotation différentes, on génère la *ligne de pompage*. (Fig.5.3)

Pour les turbines à gaz, la représentation la plus employée des paramètres caractéristiques utilise la même forme que pour les compresseurs, c'est-à-dire un ensemble de courbes, $\frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{10}^2}$ versus $\frac{P_{o2}}{P_{o1}}$ pour différents nombres de

Mach, $\frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}$. Pour les turbines on rencontre aussi le blocage sonique où toutes les courbes pour les divers nombres de Mach se rejoignent.(Figure)

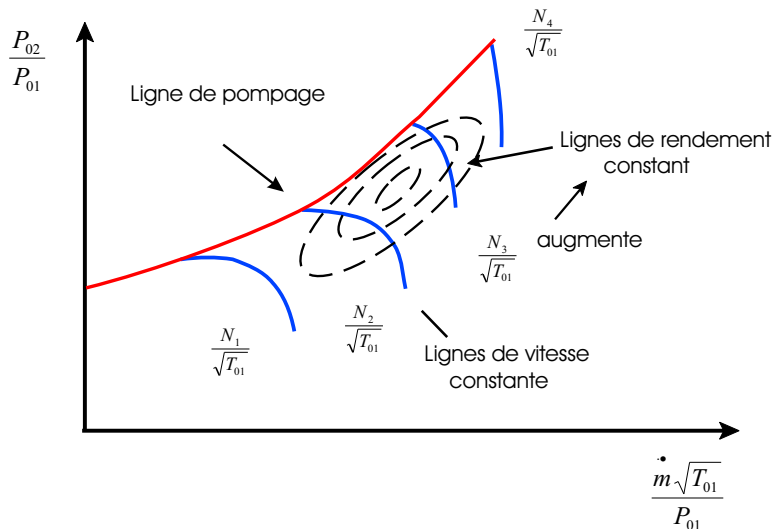


FIG. 5.3: Courbe caractéristique d'un compresseur

Le comportement des turbines hydrauliques peut être concentré dans la formule (5.24), puisque ces machines disposent d'éléments de régulation tels que l'ouverture et la fermeture des aubes directrices, pour une turbine Francis, ou même l'orientation des pales du rotor, pour une turbine de type Kaplan. En d'autres mots, il s'agit de machines à géométrie variable.

Les fonctions qui relient les trois quantités η , $\frac{\dot{W}_e}{\rho D^2 (gH)^{3/2}}$, $\frac{ND}{(gH)^{1/2}}$ et la géométrie, $\frac{l}{D}$, sont celles données par les équations (5.17) et (5.18). Pour une géométrie particulière (fixe) elles peuvent se regrouper comme

$$F\left(\eta_t, \frac{\dot{W}_e}{\rho D^2 (gH)^{3/2}}, \frac{ND}{(gH)^{1/2}}\right) = 0 \quad \text{où} \quad \eta = f\left(\frac{ND}{(H)^{1/2}}, \frac{\dot{W}_e}{D^2 (H)^{3/2}}\right) \quad (5.27)$$

tandis que pour un rendement spécifique elles deviennent

$$F\left(l/D, \frac{\dot{W}_e}{\rho D^2 (gH)^{3/2}}, \frac{ND}{(gH)^{1/2}}\right) = 0 \quad \text{où} \quad \frac{l}{D} = f\left(\frac{ND}{(H)^{1/2}}, \frac{\dot{W}_e}{D^2 (H)^{3/2}}\right) \quad (5.28)$$

Ces groupes peuvent encore être interprétés comme deux surfaces distinctes dans l'espace tridimensionnel, ce qui permet de visualiser les liens entre ces quantités. Cependant, la méthodologie classique pour la caractérisation des turbines hydrauliques utilise plutôt une représentation bidimensionnelle paramétrique. Celle-ci comprend la projection de surfaces de niveau de $\eta = cte$, pour la première équation, et $l/D = cte.$, pour la deuxième équation, sur le plan $\frac{\dot{W}_e}{D^2(H)^{3/2}}, \frac{ND}{(H)^{1/2}}$. On note que les paramètres ρ et g , ont été considérés comme constants et ainsi éliminés. Finalement, on remarque que :

$$\frac{\dot{W}_e}{\rho D^2 (gH)^{3/2}} = \frac{\eta_t \rho g Q H}{\rho D^2 (gH)^{3/2}} = \frac{\eta_t Q}{\rho D^2 (gH)^{1/2}}$$

et puisque le rendement est aussi fonction de $ND/(gH)^{1/2}$, alors on découvre les formes alternatives

$$\eta = f \left(\frac{ND}{(H)^{1/2}}, \frac{Q}{D^2(H)^{1/2}} \right) \quad \text{et} \quad \frac{l}{D} = f \left(\frac{ND}{(H)^{1/2}}, \frac{Q}{D^2(H)^{1/2}} \right) \quad (5.29)$$

Les équations (5.27)(5.28) ou (5.29) constituent la base de la représentation des caractéristiques des turbines hydrauliques. Pour ce faire, on représente (en 2 dimensions) le rendement et les variations de la géométrie sous la forme de courbes de niveau en fonction du coefficient $\frac{ND}{(H)^{1/2}}$ (en abscisse en $m(rpm)/m^{1/2}$ ou $pi(rpm)/pi^{1/2}$) et des paramètres $\frac{\dot{W}_e}{D^2(H)^{3/2}}$ ($kW/m^2m^{3/2}$ ou $hp/pi^2pi^{3/2}$) ou $\frac{Q}{D^2(H)^{1/2}}$ ($(l/s)/m^2m^{1/2}$ ou $(pi^3/s)/pi^2pi^{1/2}$) sur l'axe des ordonnées. L'ensemble de courbes de niveau du rendement est appelé *colline de rendement*.

Pour les turbines Francis, les courbes de niveau concernant la géométrie correspondent à différentes ouvertures (l'angle α) des aubes directrices du distributeur. L'analyse des turbines Kaplan est plus complexe puisqu'elles permettent aussi la variation de l'inclinaison des pales du rotor (l'angle β), ce qui implique *deux variables géométriques*. Dans ce cas, la représentation graphique implique de fixer l'un des deux angles, disons α , et de faire varier l'autre, β . De cette façon, on peut produire une série de diagrammes

pour plusieurs α . Ainsi on dessine les deux familles de courbes de niveau géométriques conjointement avec les isocontours pour le rendement.

5.3 Vitesse spécifique et diamètre spécifique

Plusieurs paramètres adimensionnels peuvent être déduits soit par combinaisons de coefficients déjà existants, soit à partir du théorème de Buckingham. Les deux groupes adimensionnels les plus importants pour la sélection d'une turbomachine sont les paramètres de forme : *le diamètre spécifique et la vitesse spécifique*. En éliminant la vitesse N des équations (5.4) et (5.5) on trouve le diamètre spécifique :

$$D_s = \left(\frac{DW_e^{1/4}}{Q^{1/2}} \right)$$

et en général :

$$\boxed{D_s = \left(\frac{\psi^{1/4}}{\phi^{1/2}} \right)} \quad (5.30)$$

Également, si on élimine le diamètre des groupes adimensionnels (5.4) et (5.5) on obtient la vitesse spécifique :

$$N_s = \left(\frac{NQ^{1/2}}{W_e^{3/4}} \right) \quad (5.31)$$

ou encore

$$\boxed{N_s = \left(\frac{\phi^{1/2}}{\psi^{3/4}} \right)} \quad (5.32)$$

On note que l'importance des équations (5.30) et (5.32) réside dans le fait qu'elles permettent le calcul d'un diamètre et d'une vitesse de rotation *compatibles* avec une charge ψ et un débit ϕ donnés.

5.3.1 Pompes et turbines hydrauliques

Pour les pompes et les turbines hydrauliques, la vitesse spécifique et le diamètre spécifique deviennent, respectivement :

$$N_s = \frac{NQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \quad (5.33)$$

et

$$D_s = \frac{D(gH)^{1/4}}{Q^{1/2}} \quad (5.34)$$

Pour le cas des pompes, la vitesse spécifique caractérise la capacité à générer une certaine hauteur de charge tout en assurant un débit déterminé. Pour un débit et une vitesse angulaire donnés, la hauteur de charge diminue avec l'augmentation de N_s . Par contre, pour une hauteur et une vitesse angulaire données le débit croît lorsque N_s augmente.

Le vitesse spécifique est étroitement liée au type de rotor. En effet, si N_s est faible, la hauteur de charge H est élevée, ce qui s'obtient avec un grand rapport D_2/D_1 , le diamètre à la sortie sur le diamètre à l'entrée. Un rapport D_2/D_1 élevé indique une machine radiale. Au fur et à mesure que la vitesse spécifique augmente le rapport D_2/D_1 diminue et l'écoulement s'allonge de plus en plus vers la direction axiale. À la limite, lorsque $D_2/D_1 = 1$, la pompe est complètement axiale.

Comme pour les pompes, pour une turbine hydraulique $\dot{W} = \eta\rho gQH$. Mais si au lieu du débit Q , on introduit un *débit idéal ou équivalent* ($\eta = 100\%$)

$Q_{eq} = \frac{\dot{W}}{\rho g H}$, on a alors à partir de l'équation (5.33)

$$N_s = \left(\frac{N \left(\frac{\dot{W}}{\rho g H} \right)^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \right) \quad (5.35)$$

L'expression précédente est adimensionnelle, cependant en pratique on élimine les constantes ρ et g ce qui donne lieu à une quantité ayant des dimensions. Notamment :

$$\bar{N}_s = \frac{N\dot{W}^{1/2}}{(H)^{5/4}} \quad (5.36)$$

Traditionnellement, dans le système anglais la vitesse de rotation est mesurée en *rpm*, la puissance en *hp* et la charge en *pi*, tandis que dans les système

‘métrique pratique’ on mesure ces mêmes quantités en rpm , CV et m , respectivement. En supposant une masse volumique de 1000 kg/m^3 (1.938 slug/pi^3) et une accélération de 9.81 m/s^2 (32.2 pi^2) la relation entre les quantités dimensionnelles et adimensionnelles est :

$$\begin{aligned} \bar{N}_s \left(\frac{rpm \text{ hp}^{1/2}}{(pi)^{5/4}} \right) &= 43.48 N_s \\ \bar{N}_s \left(\frac{rpm \text{ CV}^{1/2}}{(m)^{5/4}} \right) &= 193.3 N_s \end{aligned} \quad (5.37)$$

Vitesse de rotation et débit unitaires

Dans le but de comparer facilement des modèles de grandeurs diverses opérant sous des conditions variées, il est pratique de référer les résultats par rapport à un diamètre D et une charge H unitaires. En fonction de ces valeurs, on a défini une vitesse de rotation unitaire, un débit unitaire, une puissance unitaire et un moment unitaire.

Bien que la notion de grandeur unitaire ait été développée initialement pour les turbines hydrauliques, elle peut s’appliquer à toutes les turbomachines. Par la suite on regarde des formes alternatives de la vitesse spécifique en fonction de paramètres unitaires.

On définit un débit unitaire comme le débit qui devrait circuler dans une turbine avec un rotor ayant un diamètre de $1m$ et pour une charge $1m$ opérant sous des conditions optimales. Également, la vitesse unitaire de rotation est définie comme le nombre de tours auquel devrait tourner une turbine de $1m$ de diamètre pour une charge de $1m$ pour le point de rendement maximal.

Soient, N et H , la vitesse de rotation et la charge de la machine et n_{11} la vitesse unitaire cherchée. Par similitude on a :

$$\frac{n_{11}^2 \times 1^2}{g \times 1} = \frac{N^2 \times D^2}{g \times H} \quad (5.38)$$

alors

$$\boxed{n_{11} = \frac{ND}{\sqrt{H}}} \quad (5.39)$$

De la même manière on définit un débit unitaire Q_{11} à partir de ;

$$\frac{Q_{11}}{n_{11} \times 1^3} = \frac{Q}{N \times D^3} \quad (5.40)$$

d'où

$$Q_{11} = \frac{Q}{D^2 \sqrt{H}} \quad (5.41)$$

Bien qu'on ait déjà défini la vitesse spécifique de manière adimensionnelle (l'Eq.5.34, par exemple), il existe malheureusement d'autres formes *dimensionnelles*. La première est la *vitesse spécifique en fonction du débit*. Elle peut être définie en éliminant le diamètre des équations (5.39) et (5.41) pour obtenir :

$$n_q = n_{11} \sqrt{Q_{11}} \quad (5.42)$$

Si on remplace les expressions pour n_{11} et Q_{11} on retrouve

$$n_q = N Q^{1/2} H^{-3/4} = N_S \quad (5.43)$$

Cette formule correspond à l'Eq.(5.33) sans le facteur $g^{-3/4}$. On voit que malgré son nom, cette forme pour la vitesse spécifique n'a pas les dimensions d'une vitesse angulaire mais $\frac{m^3/s}{s - m^{3/4}}$. Cependant, certains imaginent une constante unitaire

dimensionnelle $K_1 = 1 \left(\frac{m^{3/4}}{m^3/s} \right)$ pour obtenir une quantité ayant les dimensions d'une vitesse de rotation.

La vitesse spécifique a aussi été définie en fonction de la puissance. Alors, pour un même fluide on élimine (ρg) de l'expression $\dot{W} = \rho g Q H$ pour exprimer Q à partir de la relation simplifiée $\dot{W} = Q H$ et elle prend alors la forme :

$$n_s = N \dot{W}^{1/2} H^{-5/4} = N_S \quad (5.44)$$

Malheureusement cette expression est encore dimensionnelle. Traditionnellement on a considéré la puissance en CV ($1CV = 75 \text{ Joule/s}$) et les unités de n_s sont $\frac{rpm \ CV}{m^{5/4}}$. Pour l'eau, avec $\rho g = 1000 kg/m^3$ (dans l'ancien système métrique) et en utilisant l'expression $\dot{W} = \frac{\rho g Q H}{75}$, cette vitesse spécifique prend la forme :

$$n_s = 3.65 N Q^{1/2} H^{-3/4} = 3.65 n_q = 3.65 N_S \quad (5.45)$$

Malgré que cette vitesse spécifique ait été définie en tenant compte la masse volumique de l'eau, souvent le chiffre 3.65 continue à apparaître même s'il s'agit d'autres fluides. On voit alors qu'il est préférable d'utiliser n_q au lieu de n_s .

Finalement, on note que pour une turbomachine quelconque on doit remplacer la charge H par la variation d'enthalpie totale Δh_0 dans toutes les formules précédentes

5.4 Diagramme de Cordier

Le critère le plus important dans la sélection et la conception d'une turbomachine est la vitesse spécifique N_s . En effet, la grandeur de ce paramètre est associée clairement au type de machine. Les faibles valeurs de N_s (0.2-0.5) correspondent à une turbomachine de type radial ou centrifuge, une vitesse N_s moyenne (0.5-3) décrit une machine mixte et pour des valeurs de $N_s > 3$ la turbomachine devient axiale. Cette caractéristique peut s'expliquer de la façon suivante.

Pour une vitesse de rotation donnée, si le débit Q est petit et la charge H et grande, la vitesse spécifique N_s est alors faible. Ceci correspond à une turbomachine radiale puisque cette configuration permet une augmentation importante d'énergie grâce à la variation de la vitesse U . Par contre, si le débit Q est grand et la charge H petite, la vitesse spécifique N_s correspondant est grande. Avec une configuration axiale, la variation d'énergie entre l'entrée et la sortie est faible, mais elle permet le passage d'un débit élevé.

La relation entre la vitesse spécifique et la géométrie du rotor est importante puisque la vitesse spécifique est un critère de similitude développé pour la condition de rendement optimal qui indique que deux turbomachines similaires auront la même vitesse spécifique au point nominal.

Afin de formaliser ces idées, Cordier a compilé les données d'une grande variété de machines axiales et radiales et les a présentés sous la forme d'un graphique où l'on retrouve D_s vs N_s pour le point d'opération optimal (Figure 5.4).

Dans cet abaque, on retrouve, de gauche à droite, les machines axiales ayant des vitesses spécifiques grandes et des petits diamètres spécifiques, les machines mixtes et les machines radiales avec un grand diamètre spécifique et une faible vitesse spécifique.

Le diagramme de Cordier a donc été un pas important pour la sélection et la conception de turbomachines. Il s'agit d'un excellent guide à partir duquel on peut s'appuyer pour sélectionner une turbomachine ou bien pour démarrer la conception d'un nouvel appareil. Étant donné que $N_s = \Phi^{1/2}/\Psi^{3/4}$ et $D_s = \Psi^{1/4}/\Phi^{1/2}$, l'idée originale de Cordier a été transportée sous la forme de Φ vs. Ψ ce qui conduit visuellement à une démarcation encore plus forte entre les différents types de machines.

Les données utilisées dans le diagramme de Cordier ont été appliquées avec une régression et les courbes résultantes ont été tracées en utilisant des échelles log-log (Fig.5.4).

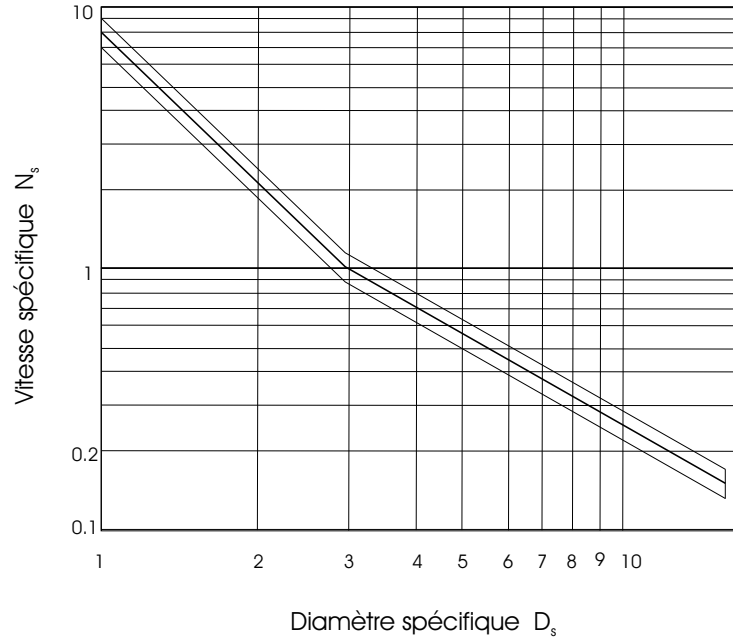


FIG. 5.4: Vitesse spécifique et diamètre spécifique

Les équations trouvées sont :

$$N_s = 9.D_s^{-2.103} \quad (D_s \leq 2.8) \quad (5.46)$$

$$N_s = 3.25D_s^{-1.126} \quad (D_s \geq 2.8)$$

ou encore

$$D_s = 2.84N_s^{-0.476} \quad (N_s \geq 1.0) \quad (5.47)$$

$$D_s = 2.84N_s^{-0.888} \quad (N_s \leq 1.0)$$

Également, une courbe du meilleur rendement possible a été construite en fonction du diamètre spécifique. Mathématiquement cette courbe est décrite par les équations :

$$\eta = 0.149 + 0.625D_s - 0.125D_s^2 \quad (D_s \leq 2.5)$$

$$\eta = 0.864 + 0.0531D_s - 0.0106D_s^2 \quad (2.5 \leq D_s \leq 5) \quad (5.48)$$

$$\eta = 1.1285 - 0.0529D_s \quad (5 \leq D_s \leq 20)$$

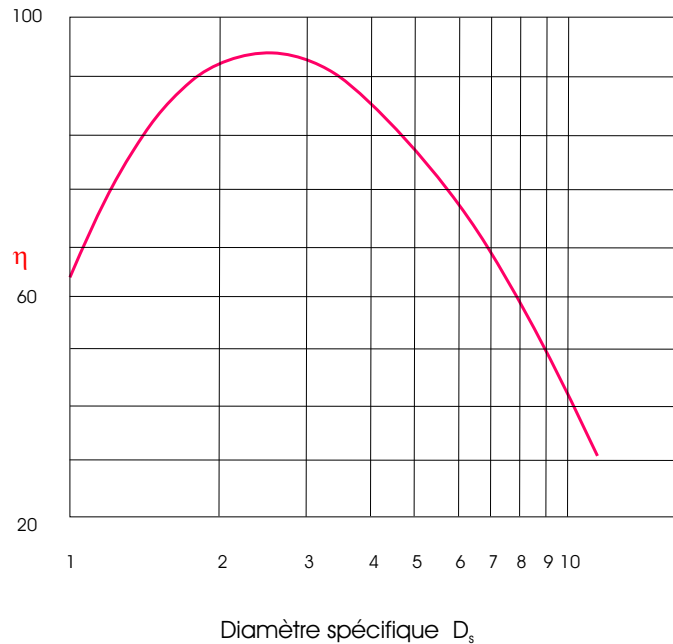


FIG. 5.5: Rendement et diamètre spécifique

5.4.1 Utilisation des nombres adimensionnels

Les nombres adimensionnels sont utiles pour la sélection de turbomachines et pour le design de nouvelles en faisant l'usage des données existantes. On regarde maintenant deux problèmes types.

Nouvelles conditions

On considère le cas d'un ventilateur pour lequel on connaît les paramètres au point de design : D_d , Q_d , N_d , ΔP_{0d} , W_d et ρ_d . On veut maintenant connaître le débit Q , la puissance W , la variation de pression totale ΔP_0 et le rendement η , d'un ventilateur similaire ayant un diamètre D qu'opère à une vitesse de rotation N avec un fluide dont la masse volumique est ρ .

Puisqu'il s'agit de machines similaires, elles devront partager les mêmes nombres adimensionnels ;

$$\begin{aligned}
 \psi &= \left(\frac{\Delta P_{0d}}{\rho_d N_d^2 D_d^2} \right) = \left(\frac{\Delta P_0}{\rho N^2 D^2} \right) \\
 \phi &= \left(\frac{Q_d}{N_d D_d^3} \right) = \left(\frac{Q}{N D^3} \right) \\
 \bar{P} &= \left(\frac{\dot{W}_d}{\rho_d N_d^3 D_d^5} \right) = \left(\frac{\dot{W}}{\rho N^3 D^5} \right)
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Dans chaque relation il n'y a qu'une seule inconnue ; ΔP_0 , Q et W et le calcul est direct puisqu'il s'agit de formules explicites. Quant au rendement, donné par :

$$\eta = \left(\frac{\psi \phi}{\bar{P}} \right) \tag{5.50}$$

doit demeurer le même par définition.

Sélection d'un machine

La tâche est maintenant le calcul de la grandeur D ainsi que la vitesse de rotation d'un ventilateur qui doit faire circuler un gaz ayant une masse volumique ρ_v avec un débit Q_v et une variation de pression ΔP_{ov} . On commence par le choix d'une vitesse spécifique et à partir de la formule (5.33), soit :

$$N_s = \frac{NQ^{1/2}}{(\Delta P_0/\rho)^{3/4}} \tag{5.51}$$

on calcule la vitesse de rotation. Cette quantité est par la suite introduite dans la formule (5.34) :

$$D_s = \frac{D(\Delta P_0/\rho)^{1/4}}{Q^{1/2}} \tag{5.52}$$

pour obtenir le diamètre D en fonction du diamètre spécifique D_s . Dépendant de la valeur de N_s on utilisera l'une des équations (5.47) pour obtenir D_s et ainsi finalement D .

5.4.2 Exemples

Exemple 5.1

Un ventilateur centrifuge opère avec les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= 4.25m^3/sec \\ N &= 1750rev/min \\ H &= 153mm \text{ d'eau}\end{aligned}$$

On désire construire un ventilateur plus grand, avec la même tête H , le même rendement η , mais avec une vitesse de rotation $N = 1440 \text{ rev/min}$. En supposant que l'on peut négliger les effets de Reynolds, quel sera le débit volumique du grand ventilateur ?

Solution

Si on néglige les effets de Reynolds, les performances du premier ventilateur seront données par :

$$\psi = f(\phi) \quad \eta = f(\phi)$$

Donc si η est constant, $\phi = \frac{\dot{Q}}{ND^3} = \text{cte.}$ pour les 2 ventilateurs. Cela implique que $\psi = \text{cte.}$ également pour les 2 ventilateurs. Par conséquent :

$$\frac{gH_1}{(N_1D_1)^2} = \frac{gH_2}{(N_2D_2)^2}$$

et comme on désire $H_1 = H_2$, alors :

$$D_2 = \frac{N_1 D_1}{N_2}$$

De plus, comme $\frac{\dot{Q}_1}{N_1D_1^3} = \frac{\dot{Q}_2}{N_2D_2^3}$, on aura :

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_1 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$$

$$\dot{Q}_2 = 6.28m^3/s$$

Exemple 5.2

Un ventilateur axial encastré de 1.83 m de diamètre doit être conçu pour opérer à $N = 1400 \text{ rev/min}$ à la pression atmosphérique. L'air doit avoir une vitesse en amont de 12.2 m/s.

- a) Dans le but d'évaluer le design, on construit un modèle réduit à une échelle de 1/4 et on fixe la vitesse de rotation N à 4200 rev/min. Quelle devra être la vitesse du fluide pour avoir une similitude dynamique ?
- b) Pour obtenir une similitude complète, on décide de tester le modèle dans un réservoir sous pression. En supposant que la viscosité n'est pas une fonction de la pression, que l'essai est fait à la même température et en supposant que l'air agit comme un gaz parfait, déterminez la pression à laquelle on devra effectuer le test ?

a) Pour une similitude dynamique, on a : $\frac{\dot{Q}}{ND^3} = \text{constante}$

Or, \dot{Q} est proportionnel à $4V D^2$

Donc :

$$\frac{\dot{Q}_1}{N_1 D_1^3} = \frac{\dot{Q}_2}{N_2 D_2^3}$$

$$\frac{V_1 D_1^2}{N_1 D_1^3} = \frac{V_2 D_2^2}{N_2 D_2^3}$$

$$V_2 = \frac{N_2 D_2}{N_1 D_1} V_1 = 9.15 \text{ m/s}$$

b) Pour une similitude complète, on doit avoir : $\frac{\rho_1 N_1 D_1^2}{\mu_1} = \frac{\rho_2 N_2 D_2^2}{\mu_2}$

De plus, $\mu_1 = \mu_2$ car $T_1 = T_2$ et $\mu = f(P)$ et par l'équation des gaz parfaits on a $P = \rho RT$. Donc,

$$P_1 N_1 D_1^2 = P_2 N_2 D_2^2$$

$$P_2 = 5.333 \text{ atm}$$

Exemple 5.3

Un compresseur a été conçu pour opérer aux conditions suivantes :

Reggio, Trépanier

$$\begin{aligned}P_{01} &= 101.3 \text{ kPa} \\T_{01} &= 15^\circ\text{C} \\N &= 4000 \text{ rev/min}\end{aligned}$$

Les conditions de test sont les suivantes : $T'_{01} = 20^\circ\text{C}$, $P'_{01} = 55 \text{ kPa}$

- Déterminez la vitesse de rotation à laquelle on doit effectuer le test pour avoir des conditions de similitude dynamique avec le point de design ?
- Quel sera le débit du compresseur au point de design si on mesure 31.22 kg/s lors du test.

Solution

a) En écoulement compressible, pour avoir une similitude dynamique, on doit avoir le même débit normalisé et la même vitesse de rotation normalisée. Donc,

$$\frac{N}{\sqrt{T_{01}}} = \frac{N'}{\sqrt{T'_{01}}}$$

et :

$$N' = 4035 \text{ rev/min}$$

b) On doit également avoir :

$$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}} = \frac{\dot{m}'\sqrt{T'_{01}}}{P'_{01}}$$

d'où :

$$\dot{m} = 58 \text{ kg/sec}$$

5.4.3 Exercices

Exercice 5.1

Une turbine hydraulique est requise pour un site qui a une tête $H = 16.5\text{m}$. Elle devra produire 27 MW à 93.7 rev/min. On construit un modèle réduit qui devra produire 37.5 kW sous une tête de 4.9m.

- Calculez la vitesse de rotation du modèle réduit ainsi que le rapport d'échelle pour une similitude dynamique.

- b) En supposant un rendement hydraulique de 88% pour le modèle réduit, estimez le débit volumique \dot{Q} y circulant.

Réponse

$$\text{a) } N_2 = 551.18 \text{ rev/min; } \frac{D_2}{D_1} = 0.09264 \quad \text{b) } \dot{Q} = 0.887 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Exercice 5.2

Une pompe hydraulique a été testée à 600 RPM et on a mesuré les performances suivantes :

Tête (H) m	17	18	18	16	14	11	8	5
Débit (Q) l/min	0	35	70	100	120	135	150	170
Rendement (η) %	–	30	61	81	85	80	67	47

En supposant que les effets du nombre de Reynolds sont négligeables, déterminez la vitesse de rotation de la pompe qui donnera un débit de $\dot{Q}=200$ l/min pour une tête de $H = 174$ m. Estimez la puissance requise à cette condition.

Réponse

$$N \approx 825 \text{ rev/min} \quad P \approx 800 \text{ W}$$

Exercice 5.3

Un compresseur destiné à une turbo-soufflante devra opérer à une altitude de 10000 m. À cette altitude, on peut considérer que le gaz est de l'air avec $P = 26.4 \text{ kPa}$, $T = 223 \text{ K}$. Ce compresseur est testé sur un banc d'essai avec $T_{01} = 288 \text{ K}$ et $P_{01} = 101.3 \text{ kPa}$ à l'entrée. On a obtenu du test la carte suivante :

Quel sera le débit et le rendement du compresseur à 10000 m d'altitude, à un rapport de pression totale de 4 et à 6000 rpm si la vitesse de l'avion est de Mach = 0.8 ?

On pourra supposer $\gamma = 1.4$ et $R = 287 \text{ J/kgK}$.

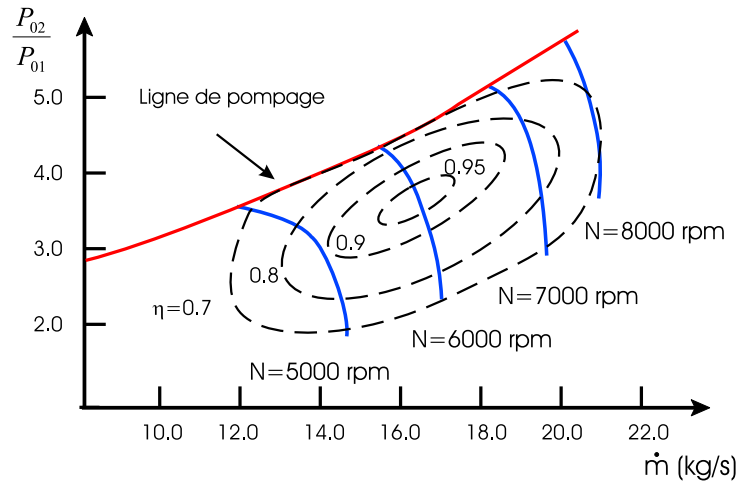


FIG. 5.6: Problème 5.3

Réponse

$$\dot{m} = 7.43 \text{ kg/sec} \quad \eta_s = 0.93$$

Chapitre 6

Le rêve d'Icare : turbines à gaz

Essentiellement, une turbine à gaz est une conduite ouverte aux deux extrémités à l'intérieur de laquelle on trouve 3 éléments : un *compresseur* pour produire une augmentation de la pression de l'air, une ou plusieurs *chambres de combustion* où l'on injecte du combustible et des gaz chauds sont générés et une *turbine* dans laquelle l'énergie thermique est transformée en énergie cinétique de rotation (un arbre tournant). Pour les turbines d'avion, on ajoute une *tuyère de sortie* qui accélère le gaz en utilisant le reste de l'énergie fournie dans la chambre de combustion pour produire un jet à haute vitesse.

On note que la quantité d'air qui circule dans un turbomoteur est énorme. Par exemple, le débit volumique pour le SR-71 Blackbird est de $100,000\pi^3/s$.

La compression

Dans un turbomoteur, le rapport de compression change selon le type d'application. Pour un turbomoteur d'avion, par exemple, la pression peut augmenter de 100 à 200 psi. Par contre, pour des appareils de plus petite taille, tel qu'un turbocompresseur, l'incrément de pression est beaucoup plus modeste, de l'ordre 3 à 30 psi. Pour effectuer la compression, les turbomoteurs des avions commerciaux emploient des compresseurs axiaux à plusieurs étages. Pour des turbomoteurs de taille modérée, on utilise des compresseurs radiaux qui tournent à des vitesses beaucoup plus élevées (jusqu'à 100,000 rpm). Malheureusement, les conditions de similitude indiquent que la grandeur d'un compresseur centrifuge deviendrait excessive pour des grands appareils ce qui élimine leur utilisation dans l'industrie aéronautique.

La combustion

Dans la chambre de combustion, la réaction chimique de combustion ajoute de l'énergie thermique à l'air. Cette apport énergétique augmente la vitesse et la température de l'écoulement mais n'augmente pas la pression par rapport à celle fournie par le compresseur.

L'expansion

Les gaz chauds produits dans la chambre de combustion sont aiguillés vers la turbine où ils circulent entre les pales forçant ainsi la rotation. La différence de niveau énergétique entre le gaz dans le compresseur et la turbine, conduit à une conception différente pour les pales du compresseur et les aubages des turbines.

D'un point de vue mécanique, les turbines peuvent être montées sur le même arbre que le compresseur. Dans certaines conceptions, où l'on veut produire du travail dans un arbre, un rotor additionnel est ajouté pour extraire l'énergie résiduelle.

L'éjection

Dans la tuyère de sortie, l'énergie de pression est transformée en vitesse pour générer une force de poussée.

6.1 Le cycle idéal d'un turbomoteur

Le cycle thermodynamique idéal pour les turbomoteurs est connue sous le nom de *cycle Brayton*. Bien qu'il existe plusieurs variantes pour ce cycle, il est essentiellement le même pour les moteur d'avions, pour ceux des hélicoptères ou pour les unités de génération de puissance. Dans une turbine à gaz, ce cycle opère de façon continue en régime permanent. La figure 6.1 indique les points d'intérêt thermodynamique d'un turbomoteur générique.

La figure 6.2 représente le cycle dans le système de coordonnées $T-s$. Celui-ci peut être décrit de la manière suivante :

Au point d'entrée, l'air se trouve aux conditions thermodynamiques 1 et après le passage par la conduite d'admission il atteint le point 2, qui correspond à l'entrée du compresseur. Dans le compresseur, la pression et la température de l'air augmentent pour se rendre au point 3. Maintenant, l'air entre dans la chambre de combustion où l'on ajoute de la chaleur. Ce processus est représentée par le segment 3-4 où la température et le volume de l'air augmentent. L'air chaud est maintenant dirigé vers la turbine qui alimente le compresseur où la pression et la température diminuent pour arriver au

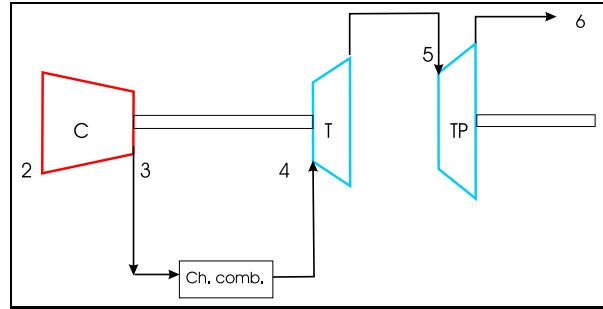


FIG. 6.1: Turbomoteur générique

point 5. Finalement, les gaz passent par la turbine de puissance, le volume augmente encore tandis que la pression et la température diminuent pour atteindre le point 6.

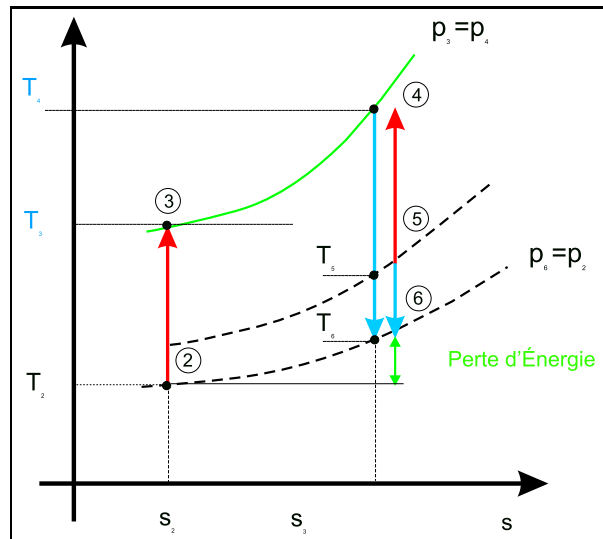


FIG. 6.2: Cycle Brayton

6.1.1 Efficacité idéale

La puissance fournie par le carburant est répartie comme suit :

Reggio, Trépanier

$$\underbrace{\dot{W}}_{\text{Puissance fournie par le carburant}} = \underbrace{\dot{W}}_{\text{Puissance du moteur}} + \underbrace{\dot{m}C_p(T_6 - T_2)}_{\text{Pertes}}$$

$$C_p(T_4 - T_3) = C_p(T_5 - T_6) + C_p(T_6 - T_2)$$

alors, le rendement du cycle, peut être défini comme :

$$\eta = \frac{\text{Puissance du moteur}}{\text{Puissance du carburant}}$$

$$\eta = \frac{\overbrace{C_p(T_4 - T_6)}^{\text{Puissance fournie par les turbines}} - \overbrace{C_p(T_3 - T_2)}^{\text{Puissance consommée par le compresseur}}}{\underbrace{C_p(T_4 - T_3)}_{\text{Puissance du carburant}}}$$

Si on note par $P_r = (P_3/P_2) = (P_4/P_6)$ et en considérant que :

$$\eta_c = \eta_t = 100\% \rightarrow \left(\frac{T_3}{T_2}\right) = \left(\frac{T_4}{T_6}\right) = P_r^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (6.1)$$

Après quelques étapes de manipulation on peut trouver :

$$\boxed{\eta = 1 - \left(\frac{1}{P_r}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}} \quad (6.2)$$

6.1.2 Poussée de propulsion

Un paramètre très important à calculer est la poussée de propulsion. Cette quantité peut être estimée par la variation de la quantité de mouvement avec certaines hypothèses simplificatrices. En particulier on considère que l'écoulement est non perturbé et à l'état permanent et que le fluide est non visqueux (la force de traînée n'existe pas).

La figure 6.3, illustre le volume de contrôle typique que l'on emploie pour décrire l'équation de la poussée. L'analyse est unidimensionnel et les limites à considérer sont l'entrée ① et la sortie ②.

Les forces appliquées sur le volume de contrôle sont la poussée F_p et celles engendrées par les pressions p_a à l'entrée et celle du jet p_j (les gaz n'ont pas

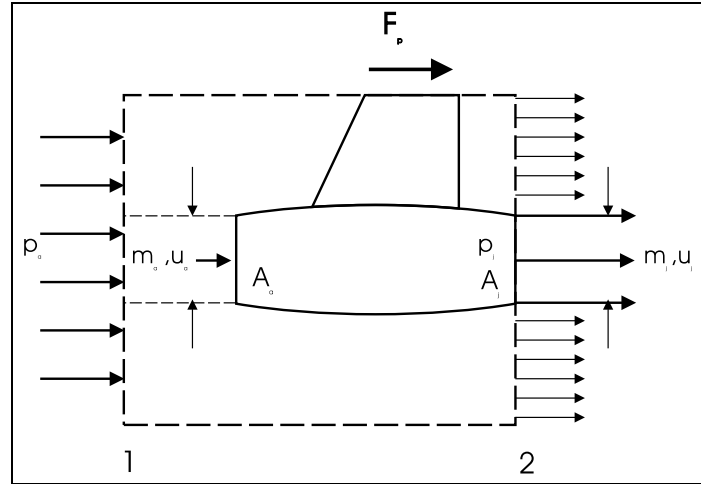


FIG. 6.3: Volume de contrôle et force de poussée

subi une expansion complète) à la sortie. Si on note par A_j l'aire à la sortie du moteur, la sommation des forces est :

$$\sum F = F_p + (p_a - p_j)A_j \quad (6.3)$$

On applique maintenant le principe de la conservation de la quantité de mouvement, soit :

$$\sum F = \int_a^j \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot dS)$$

et puisque l'analyse est unidimensionnel, on peut écrire :

$$\sum F = \rho_j u_j (A_j u_j) - \rho_a u_a (A_a u_a)$$

où u_a , u_j et ρ_a , ρ_j dénotent les vitesse et la masse volumique de l'air à l'entrée et du jet de gaz à la sortie respectivement. Cette expression peut encore s'écrire comme :

$$\sum F = \dot{m}_j u_j - \dot{m}_a u_a$$

Alors, à partir de l'Eq.(6.3) on trouve :

$$F_p = (p_j - p_a)A_j + \dot{m}_j u_j - \dot{m}_a u_a$$

Lorsqu'on introduit le principe de conservation de la masse, $\int \rho \mathbf{u} \cdot dS = 0$, sans tenir compte du débit massique de carburant, on peut simplifier cette équation comme ;

$$\dot{m} = \dot{m}_j = \rho_j u_j A_j = \rho_a u_a A_j = \dot{m}_a$$

et,

$$F_p = (p_j - p_a)A_j + \dot{m}(u_j - u_a) \quad (6.4)$$

où \dot{m} indique le débit massique. Si on considère le débit massique de carburant, m_f , on a : $m_j = m_a + m_f$ ou encore

$$m_j = (1 + f)m_a$$

avec $f = \dot{m}_f / \dot{m}_a =$ débit massique de carburant/débit massique d'air. Ainsi

$$\boxed{F = \dot{m}_a[(1 + f)u_j - u_a] + (p_j - p_a)A_j,} \quad (6.5)$$

étant donnée que le rapport f est faible, il est souvent négligé et on emploie l'expression décrite par l'Eq.(6.4).

Rendement de propulsion

Ce paramètre, aussi appelé efficience propulsive, est défini comme le rapport entre la puissance de propulsion et la puissance dépensée. Pour simplifier davantage, on considère que l'expansion des gaz est totale, soit $p_j = p_a$. Dans ce cas, la poussée définie par l'Eq.(6.4 se réduit à : $F_p = \dot{m}(u_j - u_a)$ et la puissance de propulsion est alors donnée par :

$$F_p u_a = \dot{m}(u_j - u_a)u_a$$

D'autre part, la puissance non utilisée du jet est définie par la différence d'énergie cinétique, soit $\dot{m}(u_j - u_a)^2/2$. L'efficacité de propulsion est donc donnée par :

$$\boxed{\eta_p = \frac{\dot{m}(u_j - u_a)u_a}{\dot{m}((u_j - u_a)u_a + (u_j - u_a)^2/2)} = \frac{2}{1 + (u_j/u_a)}} \quad (6.6)$$

D'après cette équation, on constate que :

- le rendement de propulsion dépend de l'efficacité de la tuyère de sortie qui contrôle la vitesse u_j
- si $u_j/u_a = 1$, le rendement est de 100%. Malheureusement, pour cette condition la poussée est nulle.
- on trouve une poussée maximale lorsque $u_a = 0$, mais le rendement est zéro.
- si on note que l'équation de la poussée peut être reformulée comme :

$$F_p = \dot{m}u_a(u_j/u_a - 1), \quad (6.7)$$

on s'aperçoit que le ratio u_j/u_a ne doit pas être diminué trop sans pénaliser la poussée. Ce compromis indique qu'il y a une souplesse pour dériver divers types de moteurs.

Par exemple, pour augmenter le rendement de propulsion on a développé les turboréacteurs à double flux ou turbo-soufflantes dans lesquels une partie de l'air passe par l'extérieur du coeur du moteur pour rejoindre le jet de propulsion à la sortie. En plus d'augmenter le rendement, cette configuration permet une diminution du bruit de décollage. Si on note l'indice inférieur s les propriétés, vitesse, u , débit massique \dot{m} , pression, p etc, de l'air dans la partie extérieure du moteur et par l'indice c , pour les propriétés dans le coeur du moteur, il est possible de trouver les expressions : pour la poussée,

$$F = (\dot{m}_c + \dot{m}_f)u_c - \dot{m}_c u_a + \dot{m}_s(u_s - u_a) + (p_s - p_a)A_s + (p_c - p_a)A_c \quad (6.8)$$

et pour le rendement de propulsion :

$$\eta_p = 2 \frac{(u_c/u_a - 1) + \dot{m}_e/\dot{m}_i(u_s/u_a - 1)}{(u_c^2/u_a^2 - 1) + \dot{m}_s/\dot{m}_c(u_s^2/u_a^2 - 1)} \quad (6.9)$$

Afin d'effectuer une analyse simplifiée et rapide du type de moteur à employer en fonction du rapport u_j/u_a , on considère celui-ci comme étant une constante, autrement dit

$$u_j = u_a$$

Puisque $u_j/u_a = \text{cte}$, l'Eq.6.7 permet d'écrire $F_p = f(\dot{m}, u_a)$. Alors, pour une poussée donnée on a :

$$\dot{m} = f\left(\frac{1}{u_a}\right)$$

À partir de ces deux dernières équations, on a construit le tableau guide suivant :

u_a	u_j	\dot{m}	moteur optimale
faible	faible	élevée	turbopropulseur
moyen	moyen	moyen	turbosoufflante
élevée	élevée	faible	turboréacté

Consommation spécifique de carburant

Le rendement de propulsion est une mesure de l'efficacité avec laquelle le moteur est employé pour entraîner le déplacement d'un avion. Cependant, ce rendement n'est pas exactement une mesure de la conversion énergétique à partir du combustible. C'est ainsi que dans le monde des concepteurs, on décrit l'efficacité énergétique d'un turbomoteur en fonction de la *Consommation Spécifique de Carburant* (**S**pecific **F**uel **C**onsumption). Ce paramètre est définie comme :

$$SFC = \frac{\dot{m}_f}{\dot{W}} = \frac{\text{Débit de Carburant}}{\text{Puissance}} \quad (6.10)$$

Dans le système anglais, les unités pratiques du débit de carburant \dot{m} sont (lb/hre), et \dot{W} (Hp), tandis que dans le système SI, les unités sont \dot{m}_f (kg/hre) et \dot{W} (kW). Ainsi les unités du SFC sont données en ($lb/hre Hp$) et ($kg/kW hre$). Pour obtenir des relations plus directes encore, on introduit des facteurs de conversion. En particulier on a :

$$SFC = \frac{2545\dot{m}_f(lb/hre)}{\dot{W}(Hp)} = \left(\frac{lb}{BTU} \right)$$

Lorsqu'on utilise une consommation de carburant en kg/hre et la puissance \dot{W} en kW , la SFC en $kg/kW hre$ est donnée simplement par :

$$SFC = \frac{\dot{m}_f(kg/hre)}{\dot{W}(kW)} = \left(\frac{kg}{kW h} \right)$$

Souvent, la consommation spécifique est définie en fonction du rapport $f = m_f/m_a$ (combustible/air) et de la *Puissance Spécifique* $\dot{W}_s = \text{Puissance}/\text{Débit massique d'air}$ comme :

$$\boxed{SFC = \frac{f}{\dot{W}_s}} \quad (6.11)$$

Dans le système SI, on mesure la consommation de carburant en kg/hre et la puissance spécifique \dot{W}_s en kW par kg/s d'air. Ainsi, la SFC en $kg/kW hre$ est donnée par

$$SFC = \frac{3600(s/hre)\dot{m}_f(kg_{cb}/hre)/(kg_{air}/hre)}{\dot{W}_s(kW)/(kg_{air}/s)} = \frac{3600 f}{\dot{W}_s/(kW s)/kg} = \frac{kg_{air}}{kW h}$$

En ce qui concerne le rendement, on peut aussi établir une relation pratique entre la consommation spécifique du carburant et le débit massique en introduisant le pouvoir calorifique inférieur (**L**ow **H**eating **V**alue). Alors, pour le système anglais on a :

$$\eta = \frac{\overbrace{\dot{W}}^{BTU/hre}}{\underbrace{\dot{m}_f}_{lb/hre} \underbrace{LHV}_{BTU/lb}}$$

et en introduisant la relation pour le SFC on peut trouver :

$$\eta = \frac{2545}{SFC(HP) LHV(BTU/lb)}$$

Également, pour le système SI on a :

$$\eta = \frac{3600}{SFC(kg/kW h) LHV(kJ/kg)}$$

Fréquemment, on utilise la valeur $LHV=18400 \text{ BTU/lb} = 42798 \text{ kJ/kg}$, de sorte que les équations antérieures deviennent :

$$\boxed{\eta = \frac{0.138}{SFC(lb/hre)/HP}}$$

et

$$\boxed{\eta = \frac{0.0841}{SFC(kg/s)/kW}}$$

Puisqu'on connaît l'expression pour l'efficacité thermique idéale, on peut trouver la consommation spécifique idéale en comparant ces dernières formules avec l'équation (6.2), c'est-à-dire :

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{P_r}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{0.138}{\underbrace{SFC}_{Syst.\text{anglais}}} = \frac{0.0841}{\underbrace{SFC}_{Syst.\text{Int.}}} \quad (6.12)$$

$$\boxed{SFC \left(\frac{lb}{BTU}\right) = \frac{0.138}{1 - (P_r)^{(1-\gamma)/\gamma}}, \quad SFC \left(\frac{kg}{kWhre}\right) = \frac{0.0841}{1 - (P_r)^{(1-\gamma)/\gamma}}} \quad (6.13)$$

Consommation spécifique basée sur la poussée

Pour les turboréactés (turbojets) et turbosoufflantes (turbofans) qui génèrent une poussée (thrust) plutôt qu'une puissance sur un arbre, la consommation spécifique peut être définie sur la *poussée spécifique* F_s ($N\ s/kg, lbf\ s/lbm$) au lieu de la puissance spécifique \dot{W}_s . En d'autres mots, on définit une consommation par rapport à une force. Pour distinguer cette définition de poussée spécifique de la précédente, on suivra la notation TSFC (**T**hrust **S**pecific **F**uel **C**onsumption). Dans ce cas la relation est donnée par :

$$\boxed{TSFC = \frac{m_f}{F_p} = \frac{m_f/m_a}{F_p/m_a} = \frac{f}{F_{ps}}} \quad (6.14)$$

Lorsque l'expansion dans la tuyère de sortie est complète, l'Eq.(6.14) devient

$$\boxed{TSFC = \frac{f}{(1+f)u_j - u_a}} \quad (6.15)$$

où f est le rapport combustible/air.

Pour trouver une relation entre la SFC et la TSFC il suffit de comparer les équations (6.11) et (6.14) pour obtenir

$$\boxed{TSFC = \frac{SFC W_s}{F_s} = \frac{SFC W}{F}} \quad (6.16)$$

Puissance Disponible

$$\dot{W} = \dot{m}C_p(T_5 - T_6)$$

$$\dot{W} = \dot{m}C_p(T_4 - T_6) - \dot{m}C_p(T_3 - T_2)$$

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = C_p((T_4 - T_6) - (T_3 - T_2))$$

et si on introduit l'Eq.6.1 on trouve :

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}T_2} = C_p \frac{T_4}{T_2} \left[1 - \left(\frac{1}{P_r} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] - C_p \left[P_r^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

Dans l'industrie aéronautique on utilise des paramètre référés à des conditions standards au niveau de la mer. Ceux-ci sont :

$$\delta = \frac{P_{\text{ambient}}(\text{psia})}{14.7} = \frac{P_{\text{ambient}}(\text{kPa})}{101.3} \quad \theta = \frac{T_{\text{ambient}}(R)}{519} = \frac{T_{\text{ambient}}(K)}{288}$$

Si on remplace $T_2 = 519\theta$ on peut écrire :

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}\theta} = C_p \frac{T_4}{\theta} \left[1 - \left(\frac{1}{P_r} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] - C_p(519) \left[P_r^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

Pour inclure l'effet de la compressibilité on utilise un débit corrigé et une puissance corrigée. Notamment :

$$\boxed{\dot{m}_c = \frac{\dot{m}\sqrt{\theta}}{\delta} \quad \dot{W}_c = \frac{\dot{W}}{\delta\sqrt{\theta}}}$$

Alors :

$$\frac{\dot{W}_c}{\dot{m}_c} = C_p \frac{T_4}{\theta} \left[1 - \left(\frac{1}{P_r} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] - C_p(519) \left[P_r^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

En pratique, dans les système anglais, on mesure la puissance en HP plutôt que (BTU/sec) et on applique une chaleur spécifique moyenne $C_p \simeq 0.27(\text{BTU}/\text{lb}^\circ R)$, ce qui mène à l'équation pratique :

$$\boxed{\frac{\dot{W}_c(HP)}{\dot{m}_c} = 0.382 \left[\frac{T_4}{\theta} \left(1 - P_r^{(1-\gamma)/\gamma} \right) - 519 \left(P_r^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right) \right]}$$

- La *puissance spécifique* dépend du rapport de pression et de la température maximale T_4/θ .
- La température maximale a une plus forte influence sur la puissance spécifique que le rapport de pression.
- Pour une puissance spécifique donnée, plus grande est la température, plus petit est le débit massique, ce qui mène à un moteur moins volumineux.

6.1.3 Performance du cycle d'un turbomoteur

Lors de l'analyse thermodynamique du cycle d'un turbomoteur on s'intéresse principalement à la température d'entrée pour la turbine et au rapport de compression du compresseur. Afin d'élargir la plage d'étude, on effectue plusieurs calculs incluant ces variables. Habituellement, on considère des rendements polytropiques connus et constants pour la turbine et le compresseur et on trace la SFC versus la puissance spécifique ou poussée spécifique pour différents rapports de pression et différentes températures d'entrée pour la turbine. On construit de cette façon une *carte de performance*. En aéronautique, ce genre de calcul est effectué pour différents niveaux d'altitude (Selon la ISA la température chute de 3.2K à tous les 500 m).

A partir des figures xyz et zyx un certain nombre de constatations sont possibles :

- Pour une température constante à l'entrée de la turbine, l'augmentation du rapport de pression entraîne une réduction de la SFC, mais au-delà d'une limite diminue.
- La valeur optimale du rapport de pression augmente au fur et à mesure que la température augmente.
- Pour une même consommation spécifique, la poussée spécifique (la puissance spécifique) augmente avec la température.
- Une faible consommation spécifique implique une économie de carburant.

- Une haute puissance spécifique signifie qu'une puissance donnée est obtenue avec un plus faible débit d'air que si la puissance spécifique était basse. On conclut alors que *plus faible est la puissance spécifique plus petit est le moteur*.
- La température maximale du cycle influence plus fortement la puissance spécifique que la consommation spécifique.

SFC et TSFC

L'analyse qu'on effectue pour un cycle de base peut être étendue pour les turbo-réactés (turbojets) et les turbosoufflantes avec des modifications mineures. D'abord on doit convertir la puissance spécifique en poussée spécifique, parce que pour les moteurs d'aéronefs, la base est la TSFC au lieu de la SFC. La relation entre ces paramètres est non linéaire et souvent on utilise des abaques pour passer d'une quantité à l'autre. Sans doute, la différence la plus importante est le fait que *la SFC diminue avec la température à l'entrée de la turbine*, par contre, *la TSFC augmente avec la température à l'entrée de la turbine*.

Taux de dilution : BPR

Pour les turbosoufflantes, l'analyse inclut des éléments nouveaux à cause de la conception de ce moteur. En effet, une turbosoufflante est fondamentalement un turbojet dans lequel on a remplacé une partie du compresseur d'entrée par une ou plusieurs étages de soufflantes ayant un diamètre plus grand. De cette façon, une partie du flux est déviée et passe à l'extérieur du noyau central. Cette caractéristique est exprimée par le *Taux de Dilution* identifié comme le *BPR* (**ByPassRatio**) qui quantifie ainsi le rapport entre le débit massique passant par la soufflante \dot{m}_s et le débit passant par le noyau central du moteur \dot{m}_c . Alors :

$$BPR = \frac{\dot{m}_s}{\dot{m}_c} \quad (6.17)$$

Ce paramètre permet la caractérisation combinée de deux aspects du moteur : le diamètre externe et la grandeur de la turbine et du compresseur. En effet, pour les turbosoufflantes la poussée spécifique dévient :

$$\frac{F_p}{\dot{m}_C + \dot{m}_S} = \frac{F_p}{\dot{m}_T} \quad (6.18)$$

et puisque $\frac{\dot{m}_T}{\dot{m}_C} = \frac{\dot{m}_C + \dot{m}_S}{\dot{m}_C} = 1 + BPR$, on peut écrire :

$$\frac{F_p}{\dot{m}_C} = (1 + BPR) \frac{F_p}{\dot{m}_T} \quad (6.19)$$

Les rapports $\frac{F_p}{\dot{m}_T}$ et $\frac{F_p}{\dot{m}_C}$ suggèrent des dimensions de la turbosoufflante.

Le premier est proportionnel aux dimensions extérieures tandis que le deuxième l'est avec le dimensions du noyau interne.

6.1.4 Analyse d'un turboréacteur

L'analyse d'un turbomoteur est faite à partir de la vitesse de croisière de l'avion, u , des conditions thermodynamiques de l'air p_a, T_a , du rapport de compression p_{03}/p_{02} et de la température à l'entrée de la turbine T_{04} . La tâche primaire est le calcul du mélange combustible air, f , et la vitesse de sortie u_s pour ainsi obtenir la poussée spécifique et la consommation spécifique de combustible selon la poussée. La figure 6.4 illustre les différents points d'intérêt pour le calcul. Les étapes sont les suivantes :

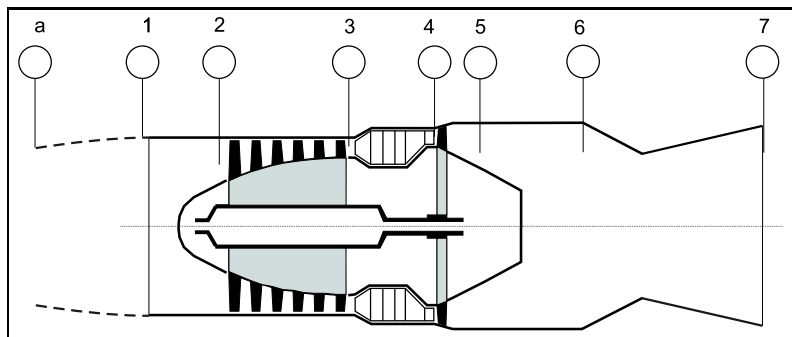


FIG. 6.4: Turboréacteur

1. **Conditions à l'entrée du compresseur.** Avec la vitesse u_a et de la température de l'air T_a , on calcule le nombre de Mach $M = u/\sqrt{\gamma RT_a}$ et par la suite :

$$T_{02} = T_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Après, on calcule la pression à l'aide de l'expression

$$p_{02} = p_a \left(\frac{T_{02}}{T_a} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

2. **Conditions à sortie du compresseur.** Avec le rapport de compression p_r , on calcule la pression à la sortie selon la formule

$$p_{03} = p_{02} p_r$$

et par la suite avec le rendement adiabatique du compresseur, $\eta_c = \frac{h_{03s} - h_{02}}{h_{03} - h_{02}}$:

$$T_{03} = T_{02} \left(1 + \frac{1}{\eta_c} (p_r^{\gamma-1/\gamma} - 1) \right)$$

3. **Rapport de mélange.** En supposant connue la valeur de l'enthalpie h_{04} à la sortie de chambre de combustion, on utilise la forme simplifiée pour l'équation de l'énergie

$$(1 + f)h_{04} = h_{03} + f \times LHV$$

et si on considère $c_p = cte$, on trouve :

$$f = \frac{T_{04}/T_{03} - 1}{LHV/c_p T_{03} - T_{04}/T_{03}}$$

4. **Pression à l'entrée de la turbine** Idéalement, la pression ne change pas dans la chambre de combustion et

$$p_{04} = p_{03}$$

5. **Conditions à la sortie de la turbine de puissance.** Cette turbine doit fournir l'énergie nécessaire pour entraîner le compresseur, alors :

$$\dot{m}_t(h_{04} - h_{05}) = \dot{m}_c(h_{03} - h_{02})$$

Bien que $\dot{m}_t = (1+f)\dot{m}_c$, $f \ll 1$. et souvent on néglige le débit massique de carburant. Dans ce cas,

$$h_{05} = h_{04} - (h_{03} - h_{02})$$

À partir de h_{05} on détermine T_{05} , soit par des tables ou bien par l'approximation $T_{05} = h_{05}/C_p$

6. **Conditions d'entrée de la tuyère.** Sans postcombustion, les conditions au point 6 sont celles du point 5
7. **Conditions de sortie de la tuyère.** Si on considère que le rendement de la tuyère est de 100%, $h_{07} = h_{06}$ et selon l'équation de l'enthalpie totale on a :

$$h_{07} = h_7 + \frac{u_7^2}{2}$$

alors, s'il n'y a pas de blocage sonique :

$$u_7 = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT_{06} \left[1 - \left(\frac{pa}{p_{06}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}$$

6.1.5 Analyse d'une turbosoufflante

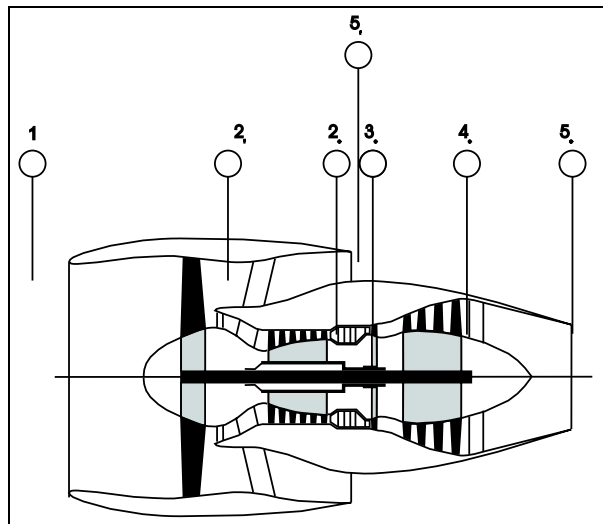


FIG. 6.5: Turbosoufflante

L'analyse d'une turbosoufflante est semblable à celle d'un turboracté avec l'inclusion du taux de dilution. Alors, l'utilisation des Eqs.(6.14) et (6.17) permet d'écrire :

$$TSFC = \frac{f}{(1 + f)u_{jc} + BPRu_{js} - (1 + BPR)u_a} \quad (6.20)$$

1. **Conditions à l'entrée de la soufflante.** L'air à l'entrée de la soufflante passe par la même tuyère d'aspiration que pour le compresseur. Ainsi les conditions en ces deux points d'entrée sont les mêmes. En particulier $p_{02f} = p_{02c}$.

2. **Conditions à sortie de la soufflante.**

$$T_{03f} = T_{02f} \left(1 + \frac{1}{\eta_s} (p_{rs}^{\gamma-1/\gamma} - 1) \right)$$

3. **Conditions de sortie de la tuyère de la soufflante.**

$$u_{6f} = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_{03} \left[1 - \left(\frac{pa}{p_{03}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}$$

4. **Conditions de sortie de turbine de puissance.** Cette turbine doit fournir l'énergie nécessaire pour entraîner le compresseur et la soufflante, alors :

$$\dot{m}_t (h_{04} - h_{05}) = \dot{m}_c (h_{03} - h_{02}) + BPR \dot{m}_c (h_{03f} - h_{02f})$$

avec $\dot{m}_t \approx \dot{m}_c$

$$h_{05} = h_{04} - (h_{03} - h_{02}) + BPR (h_{03f} - h_{02f})$$

$$p_{05} = p_{04} \left[1 - \frac{1}{\eta_t} \left(1 - \frac{T_{05}}{T_{04}} \right) \right]^{(\gamma-1)/\gamma}$$

5. **Conditions de sortie de la tuyère.**

$$u_{6c} = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_{06} \left[1 - \left(\frac{pa}{p_{06c}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}$$

6.1.6 Détermination du SFC pour un turbojet

Déterminer la poussée spécifique et la SFC d'un moteur turbojet opérant au point de design (nominal) à une vitesse de croisière de $270m/s$ et à une altitude de $5000 m$

Paramètre	Compresseur	Turbine
P_r	8	-
T(entrée)	-	1200 K
η_{is}	0.87 -	0.9
η_{en}	0.93	
η_{ty}	0.95	
η_{mc}	0.99	
η_{cb}	0.98	
ΔP	4 % (comp)	

6.2 Production de puissance

Pour la génération de puissance, il existe plusieurs variantes de la turbine à gaz fondamentale. Quelques configurations sont illustrées à la figure 5.7 (à venir). À la base, toutes utilisent le cycle thermodynamique de Brayton.

6.2.1 Le cycle avec surchauffe

Une possibilité pour augmenter le travail spécifique est d'utiliser une surchauffe. Il s'agit d'utiliser une seconde chambre de combustion, située entre les deux turbines. La figure 6.6 illustre un agencement possible.

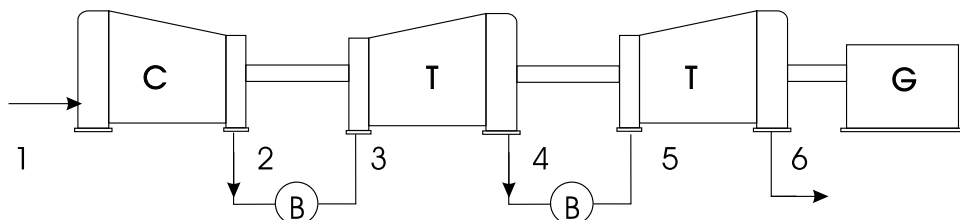


FIG. 6.6: Système avec surchauffe

On choisit normalement $T_{03} = T_{05}$. Dans ce cas, on peut définir de nouveau le rapport de température ϕ comme : $\phi = \frac{T_{03}}{T_{01}} = \frac{T_{05}}{T_{01}}$. Dans le plan $h-s$, le cycle avec surchauffe est tel qu'illustré à la figure 6.7.

La surchauffe permet d'augmenter le travail spécifique car $T_{05} - T_{06} > T_{04} - T_{04}$ tel qu'illustre par la divergence des isobares dans le plan $h-s$.

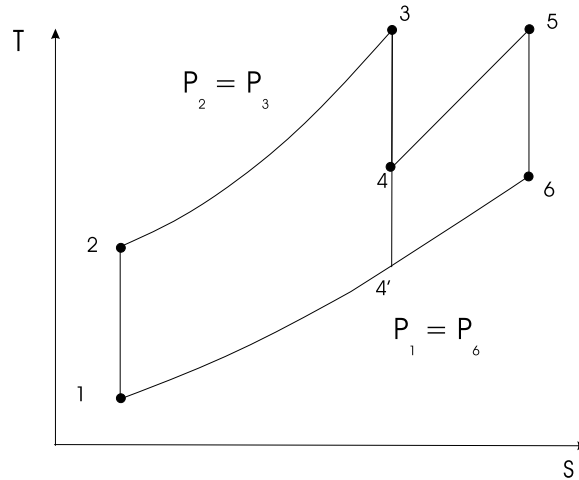


FIG. 6.7: Cycle avec surchauffe

Pour ce cycle, on peut montrer que le travail spécifique est maximal si les rapports de pression sont égaux entre les turbines 1 et 2. (voir l'exercice 5.1)

En posant $\phi = \frac{T_{03}}{T_{01}}$, $r = \frac{P_{02}}{P_{01}}$, $\Delta = r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, $\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{P_{05}}{P_{06}} = \sqrt{\frac{P_{02}}{P_{01}}}$, on a pour le cas optimal :

$$\frac{w}{c_p T_{01}} = 2\phi - \Delta + 1 - \frac{2\phi}{\sqrt{\Delta}}$$

et le rendement thermique devient :

$$\eta_{th} = \frac{2\phi(\sqrt{\Delta} - 1) - \sqrt{\Delta}(\Delta - 1)}{\sqrt{\Delta}(2\phi - \Delta) - \phi}$$

Une comparaison avec le cycle de base montre que le travail spécifique est augmenté mais que le rendement thermique diminue.

6.2.2 Le cycle avec régénération

La façon la plus simple pour augmenter le rendement du cycle de base est d'ajouter un échangeur de chaleur afin de récupérer une partie de l'énergie contenue dans les gaz d'échappement. La figure 6.8 illustre un tel système. L'échangeur est situé entre la sortie du compresseur et le brûleur de façon à préchauffer l'air avant d'y ajouter le carburant.

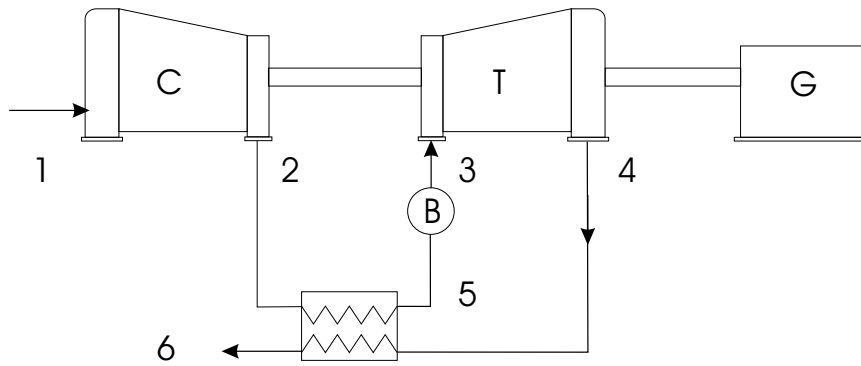


FIG. 6.8: Configuration avec régénération

Dans le plan $h - s$, le cycle idéal avec échangeur de chaleur est reproduit sur la figure 6.9

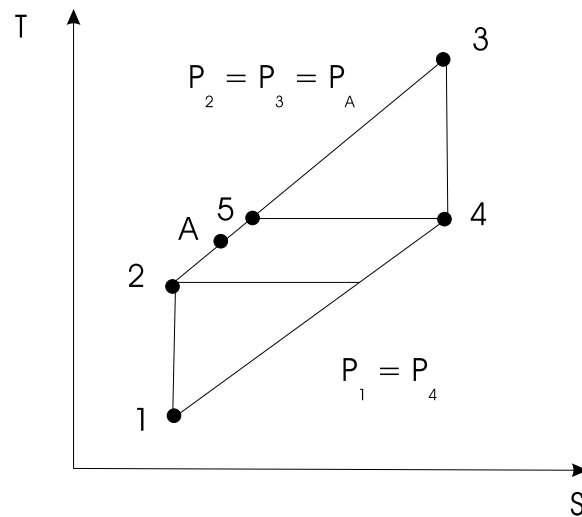


FIG. 6.9: Cycle avec échangeur

Le rendement et le travail spécifique sont respectivement donnés par :

$$\eta_{th} = \frac{c_p(T_{03} - T_{04}) - c_p(T_{02} - T_{01})}{c_p(T_{03} - T_{05})}$$

$$w_{net} = c_p(T_{03} - T_{04}) - c_p(T_{02} - T_{01})$$

Posant de nouveau $r = \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{03}}{P_{04}}$, $\phi = \left(\frac{T_{03}}{T_{01}} \right)$ et $\Delta = r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, le rendement, pour une régénération parfaite, devient

$$\eta_{th} = 1 - \frac{\Delta}{\phi}$$

Cette relation est illustrée sur la figure 6.10.

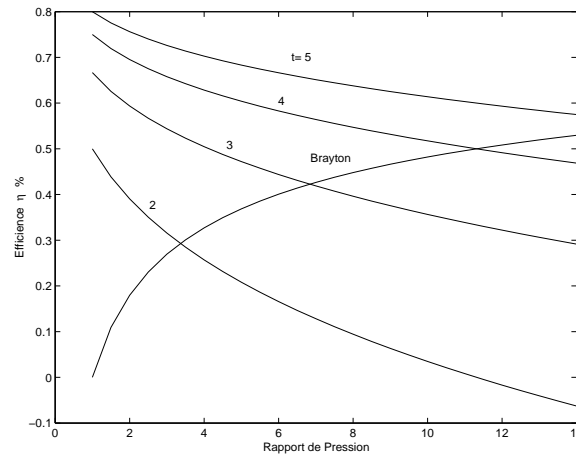


FIG. 6.10: Rendement thermique du cycle idéal avec échangeur de chaleur

Pour un Δ donné, le rendement du cycle est maximal à $r = 1$, mais cela correspond à un travail spécifique nul. Le rendement diminue lorsque r augmente jusqu'à la valeur du cycle de base lorsque $\Delta = r^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}$, à l'endroit où le travail spécifique est maximal.

6.2.3 Le cycle avec refroidissement intermédiaire

On peut réduire le travail requis au compresseur en refroidissant le gaz au cours de la compression. Ceci est illustré sur la figure 6.11.

De façon similaire à la surchauffe, on peut montrer que le travail spécifique sera maximal si les rapports de pression aux deux compresseurs sont égaux, c'est-à-dire si

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02b}}{P_{02a}} = \sqrt{\frac{P_{03}}{P_{04}}}$$

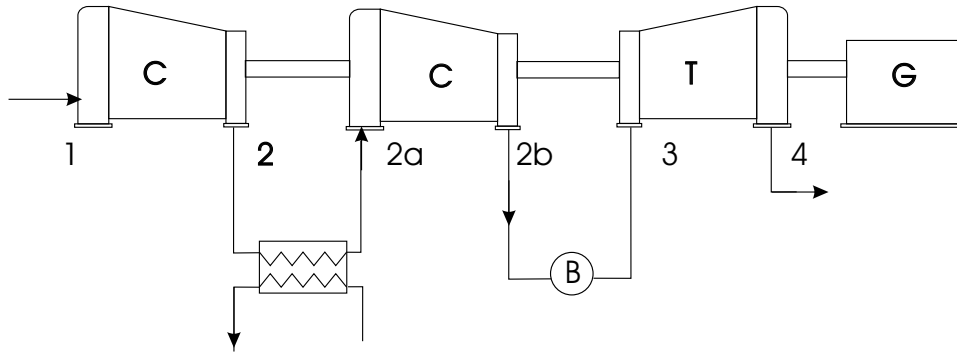


FIG. 6.11: Disposition avec refroidissement

Ce cycle est moins employé que la surchauffe à cause du liquide de refroidissement requis qui rend le système plus encombrant.

6.3 Cycles réels de la turbine à gaz

On peut facilement introduire les effets suivants dans l'analyse :

- rendement polytropique ou isentropique des compresseurs et turbines ;
- pertes de pression dans le brûleur ;
- efficacité des échangeurs (récupérateur ou refroidisseur)

De façon plus complète, on peut analyser le cycle en détail en tenant compte :

- des effets des propriétés variables du gaz ;
- des effets de la combustion et de son efficacité.

6.3.1 Utilisation des c_p variables

Jusqu'à $T \approx 300 - 400$ K, les variations de c_p versus T sont faibles et on a donc l'habitude de supposer c_p constant. Cependant, la chaleur spécifique à pression constante est en générale définie par

$$c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p$$

Pour un gaz idéal, l'enthalpie est une fonction de la température seulement, alors

$$c_p = \frac{dh}{dT}$$

d'où on trouve la définition pour une variation infinitésimale d'enthalpie, soit :

$$dh = c_p dT$$

Alors,

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 c_p dT \quad (6.21)$$

Si $c_p = \text{cte}$, $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$. Par contre, si c_p est variable, on doit garder la forme intégrale donnée par 6.21.

Pour évaluer cette intégrale, on peut utiliser des polynômes d'ordre 4 pour approximer le comportement de c_p en fonction de la température. Typiquement, c_p est exprimé par :

$$c_p = R(a + bT + cT^2 + dT^3 + eT^4)$$

A faute de ces éléments, on peut employer l'approximation élémentaire suivante :

$$h_2 - h_1 \approx \bar{c}_p|_1^2 (T_2 - T_1)$$

où $\bar{c}_p = \frac{c_p(T_2) + c_p(T_1)}{2}$ est le c_p moyen sur l'intervalle. Cette approximation est exacte si c_p varie linéairement entre T_1 et T_2

6.3.2 Variations des propriétés du gaz

La variations des propriétés d'un gaz idéal soumis a des fortes variations de température lors d'un processus, devraient tenir compte de la variaton des chaleurs spécifiques en fonction de la température.

Une première manière d'incorporer cette variation est au moyen de la relation 6.21. Une deuxième façon implique la construction de tables en fonction de paramètres pratiques tel que la température, par exemple. Dans ce

contexte, on utilise l'équation de Gibbs, $Tds = du + pdv$, qui fournit un moyen pour calculer la variation d'entropie.

Pour un gaz idéal, on trouve deux expressions pour la variation d'entropie entre deux états 1-2. Dans la construction de tables, on s'intéresse d'avantage à celle-ci :

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 C_p \frac{dT}{T} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Les transformations adiabatiques et réversibles ou isentropiques, avec $s_2 - s_1 = 0$, sont d'un intérêt particulier. Dans ce cas on a :

$$\int_1^2 C_p \frac{dT}{T} = R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Traditionnellement, l'intégrale $\int_1^2 C_p \frac{dT}{T}$ est noté par $\bar{s}_{T2}^0 - \bar{s}_{T1}^0$, de sorte que :

$$\bar{s}_{T2}^0 - \bar{s}_{T1}^0 = R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

ou encore

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left(\frac{\bar{s}_{T2}^0 - \bar{s}_{T1}^0}{R}\right) = \frac{\exp\left(\frac{\bar{s}_{T2}^0}{R}\right)}{\exp\left(\frac{\bar{s}_{T1}^0}{R}\right)}$$

Le terme $\exp\left(\frac{\bar{s}_{T1}^0}{R}\right)$, a été désigné par p_r . Il n'est que fonction de la température et il a été tabulé conjointement avec la température et l'enthalpie. Alors, on a :

$$\boxed{\frac{p_{r2}}{p_{r1}} = \frac{p_2}{p_1}}$$

Ainsi, une fois que l'on connaît un rapport de pression, on peut trouver l'un des deux p_r et par la suite retrouver dans une table la température et l'enthalpie correspondante.

On note cependant, que l'approximation des valeurs de c_p et γ en fonction de la température est valable jusqu'à ~ 1800 K, seuil au delà duquel la

dissociation deviendra importante et les propriétés seront dépendantes de la pression également. Dans ce cas, la façon la plus correcte de traiter le problème est d'utiliser des tables (informatiques).

Pour le kérosène, on pourra prendre γ et c_p sur les graphes suivants :

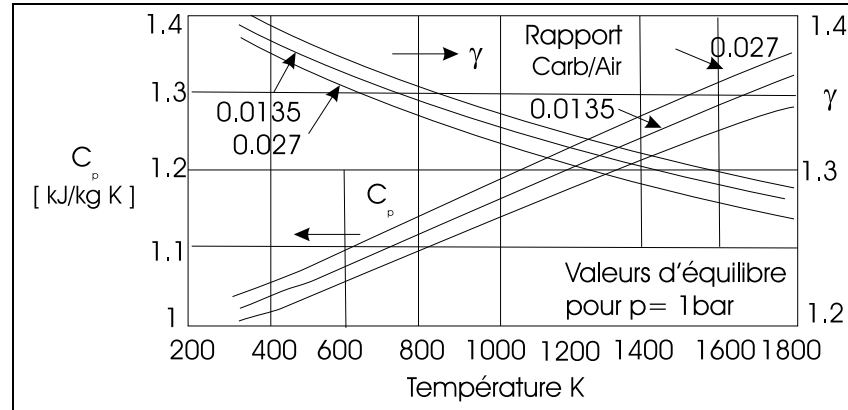


FIG. 6.12: Variation de γ et c_p en fonction de la température

L'utilisation de ces courbes, même simplifiées, conduit à une complexité supplémentaire pour l'évaluation du cycle. Il faut alors faire des itérations à partir d'un estimé initial de T et f pour calculer c_p et γ . Ceci peut être long, bien que pas très difficile et ne vaut pas toujours la peine pour comparer différents cycles.

Pour la prédiction des tendances, on utilise la plupart du temps :

- pour l'air (compresseur) $c_p = 1005 \text{ J/kgK}$; $\gamma = 1.4$
- pour les gaz (turbine) $c_p = 1148 \text{ J/kgK}$; $\gamma = 1.33$

6.3.3 Le brûleur

Dans le brûleur, la température du gaz est élevée de T_{02} à T_{03} . Afin d'optimiser la combustion, on doit doser correctement le rapport carburant/air que l'on définit par

$$f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_{air}}$$

Le problème consiste à déterminer le rapport f requis pour transformer une unité de masse d'air à T_{02} et f unité de masse de carburant à T_{0f} en $(1 + f)$

unités de produits de combustion à T_{03}

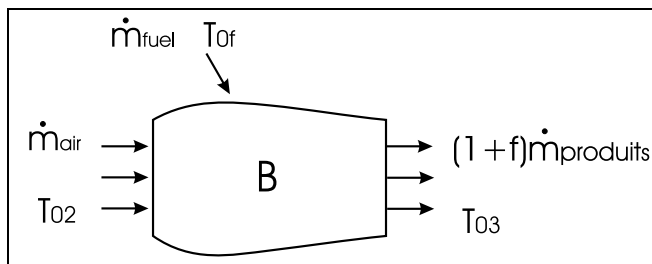


FIG. 6.13: Bilan d'énergie au brûler

L'enthalpie de réaction est définie comme la différence entre l'enthalpie des réactants et des produits à température constante. En utilisant ce concept d'enthalpie de réaction à 298 K, ΔH_{25} , le bilan d'énergie pour la chambre de combustion s'écrit :

$$0 = (1 + f)c_{pg}(T_{03} - 298) + f(\Delta H_{25}) + c_{pa}(298 - T_{02}) + fc_{pf}(298 - T_{0f})$$

c_{pg} : c_p moyen entre T_{03} et 298 K pour le mélange ;

où c_{pa} : c_p moyen entre T_{02} et 298 K pour l'air ;

ΔH_{25} : enthalpie de réaction (on pourra prendre pour la plupart des kérosènes :
 $\Delta H_{25} = -43100$ kJ/kg)

Cette équation est écrite en imaginant que la réaction se fait à la température de référence 298 K, d'où l'introduction des différences $298 - T$.

Le dernier terme, $f c_{pf} (298 - T_{0f})$ est habituellement très petit et sera souvent négligé.

Efficacité de la combustion

Le rapport ainsi déterminé a été calculé pour des conditions idéales de combustion complète. Pour comptabiliser les différentes pertes, on introduit :

$$\eta_b = \frac{f \text{ idéal pour un } \Delta T \text{ donné}}{f \text{ réel pour un } \Delta T \text{ donné}}$$

En général : $\eta_b \simeq 98\%$

La vitesse de propagation de la flamme

On remarque donc que dans la plupart des applications de turbines à gaz, le rapport fuel/air est beaucoup inférieur au rapport stoechiométrique. Dans l'exemple précédent

$$\xi = \frac{f}{f_{stoec}} = \frac{0.01}{0.068} = 0.15.$$

Ceci doit être maintenu pour éviter de trop grandes températures à l'entrée de la turbine. Cependant, cela cause des problèmes de design du combusteur car on doit éviter de mélanger tout l'air avec le fuel car le mélange serait trop pauvre et brûlerait très mal.

En effet, lorsque le rapport fuel/air est en deça du rapport stoechiométrique, la flamme risque de s'éteindre. C'est pourquoi dans les combusteurs modernes, l'air est divisé en plusieurs parties pour faire en sorte d'avoir la combustion dans des conditions les plus optimales.

Une des limites à la vitesse axiale du fluide dans une turbine à gaz (principalement aéronautique) provient de la chambre de combustion. Dans celle-ci, on doit maintenir une combustion dans un jet à haute vitesse et éviter que la flamme ne soit soufflée par l'air. Donc, pour que la combustion puisse être stable, il faut diminuer la vitesse du fluide dans une région proche de celle de la flamme. Ceci implique de décélérer le fluide provenant de l'amont assez brutalement. Cela explique en grande partie les pertes de pression rencontrées dans les combusteurs.

La géométrie du brûleur

Sachant que dans une turbine à gaz

- T_{03} varie avec la puissance demandée
- T_{03} varie avec la quantité de combustible utilisé
- La chambre de combustion devra brûler des grandes quantités de combustibles avec des volumes excessifs d'air, mélanger et brûler le tout dans un écoulement uniforme et continu et avec le moins de pertes possibles.
- Avec le kérosène, on a une faible vitesse de propagation des flammes (même pour un mélange stoechiométrique) c'est-à-dire, si on fait l'allumage au centre de la chambre de combustion, le mélange peut avoir le temps de sortir de la chambre avant que la combustion ne soit terminée.

Le design du brûleur devra donc viser à

- réduire la vitesse de l'écoulement ce qui requiert de grandes sections de passage
- réduire la section de passage pour minimiser la distance à parcourir par la flamme.

Ceci peut être obtenu simultanément dans les designs illustrés sur la figure 6.14. L'écoulement de l'air dans chacune des chambres de combustion aura montrée sur la figure 6.15.

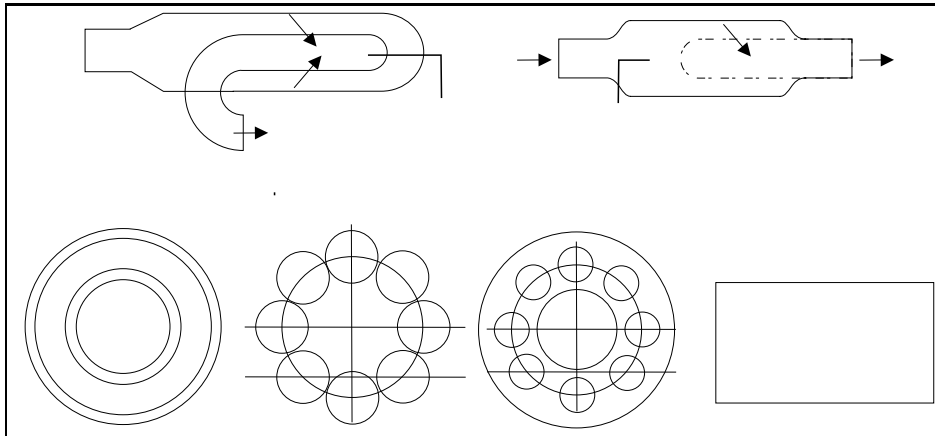


FIG. 6.14: Différents types de brûleurs

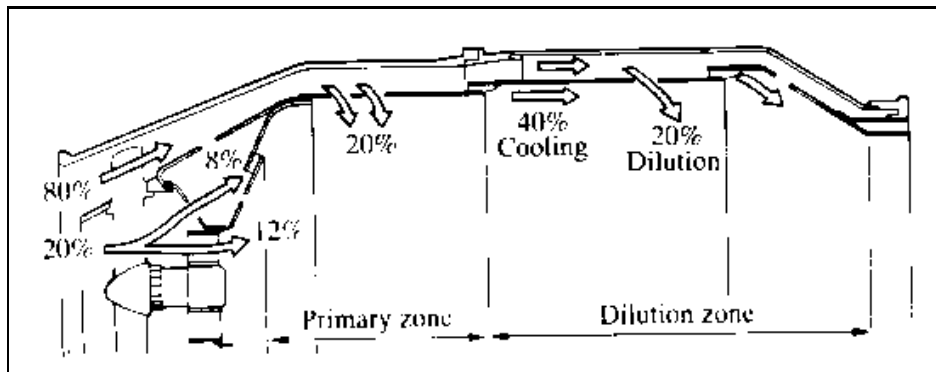


FIG. 6.15: Répartition typique de l'écoulement de l'air dans un brûleur

Les figures 6.16 et 6.17 illustrent deux types de brûleurs.

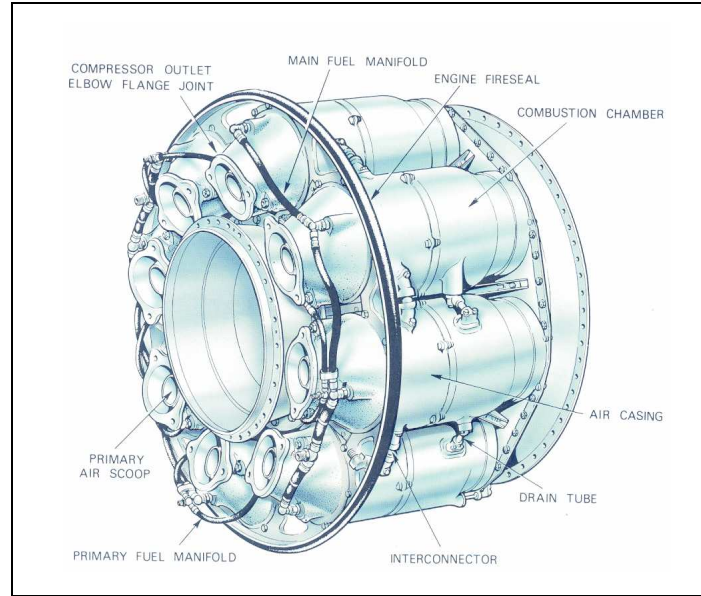


FIG. 6.16: Combusteur de type “Cannular”

6.3.4 La consommation spécifique

Bien que le concept de rendement thermique soit utile pour la comparaison de cycles thermodynamiques, il est plus pratique d'utiliser une mesure de la performance qui inclut le débit de carburant. Ainsi, la performance des turbines à gaz est très souvent exprimée par la consommation spécifique appelée *S.F.C.* pour Specific Fuel Consumption. Celle-ci est définie par :

$$\text{S.F.C.} = \frac{\text{débit de carburant}}{\text{puissance nette}} = \frac{\dot{m}_f}{\dot{W}_{net}}$$

où w_{net} : travail spécifique net

6.3.5 Efficacité des échangeurs de chaleur

Deux technologies principales existent :

- Les récupérateurs de chaleur sont formés de canaux séparés pour les gaz chaud et l'air froid qui y circulent la plupart du temps en sens inverse ou à angle droit.

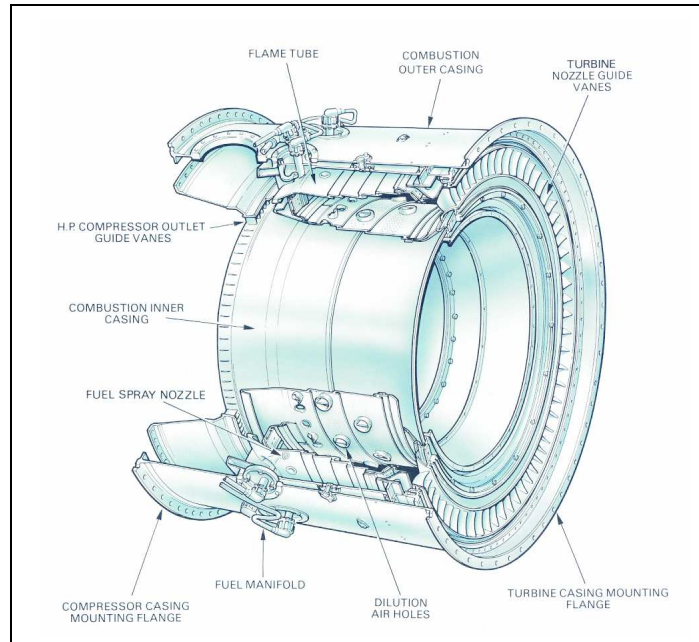


FIG. 6.17: Combusteur Annulaire

- Les régénérateurs proposent plutôt une chambre qui a pour but d'absorber de façon cyclique la chaleur du fluide chaud pour la redonner au fluide froid.

Dans le cas de régénérateurs :

1. les pertes de pression Δp sont plus faibles ;
2. le rendement est plus élevé ;
3. les pertes par fuites sont plus importantes.

Pour définir l'efficacité de l'échangeur de chaleur, considérons d'abord un bilan d'énergie au travers de l'échangeur en utilisant la notation définie à la figure 6.10.

Le bilan d'énergie donne

$$\dot{m}_2 c_{p(25)}(T_{05} - T_{02}) = \dot{m}_4 c_{p(46)}(T_{04} - T_{06})$$

où

$c_{p(25)}$: c_p moyen entre 2 et 5

$c_{p(46)}$: c_p moyen entre 4 et 6

Un échangeur idéal est celui pour lequel $T_{05} = T_{04}$. Ainsi, la quantité maximale de chaleur que l'on peut transférer est :

$$\dot{Q}_{max} = \dot{m}_2 (T_{05idéal} - T_{02}) c_{p(25)}$$

$$\dot{Q}_{max} = \dot{m}_2 (T_{04} - T_{02}) c_{p(24)}$$

Or, le transfert réel est donné par

$$\dot{Q}_{réel} = \dot{m}_2 (T_{05} - T_{02}) c_{p(25)}$$

On définit donc l'efficacité de l'échangeur comme

$$\eta_{HE} = \frac{\dot{Q}_{réel}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{c_{p(25)}(T_{05} - T_{02})}{c_{p(24)}(T_{04} - T_{02})}$$

Cependant, comme $T_{05} \approx T_{04}$, alors $c_{p(25)} \approx c_{p(24)}$. Donc, d'un point de vue pratique, on utilisera la plupart du temps la définition suivante pour l'efficacité de l'échangeur de chaleur.

$$\eta_{HE} = \frac{(T_{05} - T_{02})}{(T_{04} - T_{02})}$$

L'ordre de grandeur de cette efficacité est : $0.7 \leq \eta_{HE} \leq 0.9$

6.3.6 Optimisation des cycles réels

Pour le cycle idéal avec c_p et γ constants, on peut assez facilement calculer la pression pour obtenir soit une *S.F.C.* minimale ou un travail spécifique maximal.

Pour les cas avec c_p et γ variable, on doit optimiser le cycle de façon itérative ou graphique en calculant la *S.F.C.* et le travail spécifique pour plusieurs rapport de pression r . Ceci se fait normalement sur ordinateur. On présente alors les résultats de ces calculs sous une forme graphique, tel qu'illustré à la figure 6.18. Dans cet exemple, un rapport de pression $r = 12$ conduit à maximiser le rendement thermique, donc à minimiser la *S.F.C.* tandis qu'un rapport de pression $r = 16$ conduit à maximiser le travail spécifique.

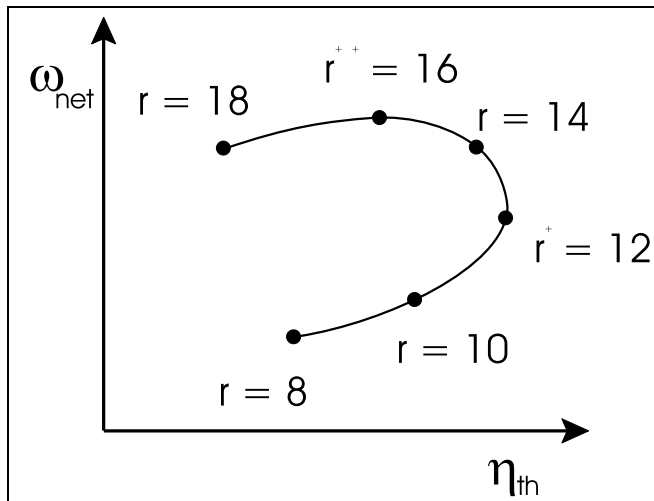


FIG. 6.18: Variation de γ et c_p en fonction de la température

On remarquera en général que pour un rapport t donné, w_{net} et η_{th} atteignent un maximum en fonction de r et le rapport r optimal varie avec $t = \frac{T_{03}}{T_{01}}$. En général, on choisira un rapport de pression situé entre :

$$(P_{02}/P_{01})^+ < r < (P_{02}/P_{01})^{++}$$

On choisit souvent le rapport P_{02}/P_{01} le plus bas pour permettre de diminuer le nombre d'étages requis pour le compresseur.

6.4 La performance hors-design

La plupart des turbomachines doivent opérer sur une plage d'opération où les rapports de pression, les débits et la puissance vont varier.

L'étude des cycles et leur optimisation permet de choisir le point de design, i.e. un rapport de pression, une vitesse de rotation, un débit et une température à l'entrée de la turbine. La performance hors-design de la turbine à gaz dans son ensemble dépend de la performance hors-design des composantes.

6.4.1 Performances hors-design des composantes de turbine à gaz

Pour le compresseur et la turbine la performance est habituellement représentée sous forme de carte de performance. Des exemples de carte de performance ont été présentés au chapitre 4. Voir les figures 4.2 et 4.3, respectivement pour les compresseurs et les turbines.

6.4.2 Mariage des composantes (matching)

L'analyse du mariage des composantes permet de répondre à diverses questions :

- qu'arrive-t-il en terme de puissance et de rendement si la turbine à gaz opère en dehors de son point de design ?
- quel est l'effet du changement des conditions d'entrée sur les performances ?
- quel est l'effet de l'extraction sur les performances ?

L'idée principale du mariage est la suivante :

pour toutes les conditions d'opérations de la turbine à gaz, on doit vérifier certaines compatibilités et contraintes entre les diverses composantes.

Par exemple, pour une turbine à gaz à un seul arbre utilisant le cycle de base et en négligeant certains effets secondaire (débit de fuel, ...) on doit respecter les contraintes suivantes :

- le compresseur et la turbine tournent à la même vitesse de rotation ;
- le débit est égal dans le compresseur et la turbine (en négligeant le débit de carburant et les extractions).

Ainsi, une procédure typique du mariage se résume à :

- sélectionner une ligne $N/\sqrt{T_{01}}$ sur la carte du compresseur ;
- choisir un point sur cette ligne, on obtient : $\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}}$, $\frac{P_{02}}{P_{01}}$, $\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}$, η_c ;
- déterminer le point compatible sur les caractéristiques de la turbine en imposant le même débit et la même vitesse de rotation.

Notez que le rapport de pression de la turbine dépend du brûleur et possiblement d'autres facteurs.

Une fois le point de mariage trouvé, on pourra calculer la performance de la turbine à gaz, c'est-à-dire la *S.F.C.* et la puissance nette à ce point.

Il est possible de tracer la ligne d'opération sur la carte du compresseur si on peut spécifier la façon dont la charge dissipe la puissance. Deux types de charges sont fréquentes :

- en propulsion, une hélice consommera une puissance N^3 ;
- en génération d'électricité, la puissance est dissipée à vitesse de rotation constante.

On pourra également tracer la ligne d'opération si la turbine de puissance ne fait qu'entraîner le compresseur.

6.4.3 Exemples

Exemple 6.1

Une turbine à gaz opère sur le cycle de base avec les conditions suivantes :

$$T_{01} = 288 \text{ K} \quad \text{et} \quad T_{03} = 1400 \text{ K}$$

En faisant l'hypothèse d'un cycle idéal, calculer le rapport de pression $\frac{P_{02}}{P_{01}}$ qui maximise le travail spécifique.

Ensuite, pour ce rapport de pression, calculer le travail spécifique de la turbine, le travail spécifique du compresseur, la chaleur spécifique ajoutée ainsi que le rendement thermique.

Solution :

Le cycle idéal qui maximise le travail spécifique est celui pour lequel :

$$\begin{aligned} T_{02} &= T_{06} \\ T_{02} &= \sqrt{T_{03}T_{01}} \\ T_{02} &= \sqrt{1400 \text{ K} \times 288 \text{ K}} \end{aligned}$$

donc $T_{02} = 635 \text{ K}$

Le rapport de pression qui maximise le travail spécifique est donc donné par :

$$\left[\frac{P_{02}}{P_{01}} \right]^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = \frac{T_{02}}{T_{01}} \quad \text{donc} \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = r = 15,92$$

Le travail spécifique produit de la turbine est alors donné par :

$$\frac{\dot{W}_{34}}{\dot{m}} = c_p(T_{03} - T_{04}) = 768,8 \text{ kJ/kg}$$

Le travail spécifique consommé par le compresseur est alors donné par :

$$\frac{\dot{W}_{12}}{\dot{m}} = c_p(T_{02} - T_{01}) = 348,7 \text{ kJ/kg}$$

La chaleur ajoutée est alors donnée par :

$$\frac{\dot{Q}_{23}}{\dot{m}} = c_p(T_{03} - T_{02}) = 768,8 \text{ kJ/kg}$$

Le rendement thermique peut donc être déterminé selon :

$$\begin{aligned} \eta_{th} &= \frac{w_{net}}{q_{ajoutée}} = \frac{w_{34} - w_{12}}{q_{23}} \\ &= \frac{768,8 - 348,7}{768,8} = 0,56 \end{aligned}$$

Exemple 6.2

Du fuel kérosène est utilisé dans une chambre de combustion qui doit élever la température de l'air de $T_{02} = 758 \text{ K}$ jusqu'à $T_{03} = 1100 \text{ K}$. Calculer le rapport carburant/air f requis en utilisant les c_p moyens : $c_{pa} = 1005 \text{ J/kgK}$, $c_{pg} = 1148 \text{ J/kgK}$ et $T_{0f} = 298 \text{ K}$

Solution

Le bilan d'énergie au brûleur devient

$$(1 + f)(1.148)(1100 - 298) + f(-43\,100) + (1.005)(298 - 758) = 0$$

En isolant, on trouve

$$f = 0,01 = 1\%$$

Exemple 6.3

Calculer le travail spécifique et la consommation spécifique ($S.F.C.$) du cycle avec échangeur de chaleur ayant les caractéristiques suivantes :

Perte de pression au brûleur : $2\%P_{02}$

Perte de pression à l'échangeur : côté air : $3\%P_{02}$ côté gaz : $0,04 \text{ bar}$

Pour le calcul, utilisez les propriétés du gaz suivantes

$$\text{air : } \gamma = 1,4; \quad c_p = 1005 \text{ J/kgK}$$

$$\text{gaz : } \gamma = 1,33; \quad c_p = 1148 \text{ J/kgK}$$

sauf pour le calcul du \dot{m}_f où les propriétés variables devront être utilisées. De plus, tenir compte du \dot{m}_f dans le calcul du travail spécifique.

Solution

Le travail spécifique d'une turbine à gaz est défini par $\dot{W}_{net}/\dot{m}_{air}$. Nous devons calculer la puissance au compresseur et à la turbine pour calculer \dot{W}_{net} . La définition du rendement isentropique est :

$$\eta_{sc} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

et est égale, dans le cas des c_p constant, à

$$\eta_{sc} = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}}$$

Sur le chemin isentropique on a :

$$\frac{T_{02s}}{T_{01}} = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = 1.486$$

Donc,

$$T_{02s} = 427.9K \text{ et } T_{02} - T_{01} = 164.6K$$

Le travail spécifique du compresseur devient donc :

$$\frac{\dot{W}_c}{\dot{m}_c} = \frac{\dot{W}_c}{\dot{m}_{air}} = c_p (T_{02} - T_{01}) = 165.4 \text{ kJ/kg}$$

Pour calculer la turbine, on doit connaître les pressions aux points 3 et 4. La pression en 3 est inférieure à celle en 2 à cause des pertes dans l'échangeur de chaleur et dans le brûleur.

$$P_{03} = P_{02} - (\Delta P_{HE})_{air} - \Delta P_B$$

$$P_{03} = P_{02} (1 - 0.03 - 0.02) = 3.8\text{bars}$$

La pression en 4 est supérieure à celle en 6 à cause des pertes dans l'échangeur de chaleur.

$$P_{04} = P_{06} + (\Delta p_{HE})_{\text{gaz}}$$

$$P_{04} = 1\text{bar} + 0.04\text{bar} = 1.04\text{ bar}$$

Alors,

$$\frac{P_{03}}{P_{04}} = \frac{3.8}{1.04} = 3.65$$

Connaissant le rapport de détente, on peut alors déterminer le changement de température car on connaît le rendement. On obtient

$$T_{03} - T_{04} = \eta_s T_{03} \left[1 - \left(\frac{1}{P_{03}/P_{04}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

$$T_{03} - T_{04} = 265\text{K}$$

d'où le travail spécifique

$$\frac{\dot{W}_T}{\dot{m}_t} = c_{pg}(T_{03} - T_{04}) = 304\text{ kJ/kg}$$

Le travail spécifique de la turbine à gaz est alors calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{W}_{net}}{\dot{m}_{air}} &= \frac{\dot{W}_T - \dot{W}_C/\eta_m}{\dot{m}_{air}} \\ &= \frac{\dot{W}_T}{\dot{m}_{air}} - \frac{\dot{W}_C}{\dot{m}_{air}\eta_m} \\ &= \frac{\dot{W}_T}{\dot{m}_T}(1+f) - \frac{1}{\eta_m} \frac{\dot{W}_C}{\dot{m}_{air}} \end{aligned}$$

mais on ignore f pour le moment. On calculera donc f d'abord.

La $S.F.C.$ dépend de la hausse de température dans le brûleur. On doit donc calculer la température au point 5. Celle-ci dépend de la performance de l'échangeur. On a :

$$\eta_{HE} = \frac{T_{05} - T_{02}}{T_{04} - T_{02}}$$

$$T_{05} = 758\text{K}$$

le brûleur doit donc hausser la température de 758 K à 1 100 K.
Ce cas a été résolu à l'exemple 6.2 On avait alors obtenu le bilan d'énergie au brûleur suivant :

$$(1 + f)(1.148)(1100 - 298) + f(-43100) + 1.005(298 - 758) = 0$$

ce qui donnait $f = 0.01$ avec les c_p constants.
Pour plus de précision, on utilise les c_p variables. Utilisant les corrélations pour les c_p variables, on obtient

$$c_{pg} = \frac{[c_{pg}(f = 0.01, T = 1100) + c_{pg}(f = 0.01, T = 298)]}{2}$$

$$c_{pa} = \frac{c_{pa}(298) + c_{pa}(758)}{2} = 1042 \text{ J/kgK} \quad c_{pg} = 1095 \text{ J/kgK}$$

Le bilan d'énergie devient alors

$$(1 + f)(1.095)(1100 - 298) - f(43100) + f(1.042)(298 - 758) = 0$$

et on obtient alors $f = 0.0094$

L'efficacité de la combustion n'étant pas unitaire, on obtient le rapport fuel/air réel selon :

$$f_{réel} = \frac{f_{idéal}}{\eta_B} = \frac{0.0094}{0.98} = 0.0096$$

On peut maintenant calculer le travail spécifique

$$W_{net} = \frac{\dot{W}_{net}}{\dot{m}_{air}} = 304 \frac{kJ}{kg} \times (1 + 0.096) - \frac{1}{.99} \times 165.4 \frac{kJ}{kg}$$

$$= 139.8 \frac{kJ}{kg}$$

La consommation spécifique peut alors être calculée selon :

$$S.F.C. = \frac{f}{\dot{W}_{net}} = \frac{0.0096}{139.8} \frac{kJ}{kg} = \frac{0.0096}{139.8} \frac{kg}{kW.s}$$

On utilise souvent les unités kg/kW.h pour la S.F.C.. Celle-ci devient alors :

$$S.F.C. = \frac{3600 \times 0.0096}{139.8} \frac{kg}{kW.h} = 0.247 \frac{kg}{kW.h}$$

Exemple 6.4

On désire réaliser un mariage sur une ligne à vitesse constante, en considérant les données suivantes, obtenues à vitesse constante pour le compresseur et la turbine d'une turbine à gaz :

COMPRESSEUR		
$\frac{P_{02}}{P_{01}}$	$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}}$ [kg/s \sqrt{K}] bar	η_c
5.0	329	84
4.5	339	79
4.0	342	75

TURBINE		
$\frac{P_{03}}{P_{04}}$	$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{03}}}{P_{03}}$ [kg/s \sqrt{K}] bar	η_t
5.0	1390	87
4.5	1390	87
4.0	1390	87

Calculer la puissance nette de la turbine à gaz ainsi que la température d'entrée de la turbine pour les 3 rapports de pression données. Utilisez $T_{01} = 288K$; $P_{01} = 1.013$ bars. Le rendement mécanique est estimé à $\eta_m = 0.98$. Les pertes de pression sont négligeables dans le brûleur. Négligez le débit de carburant et prendre $P_{04} = P_{01}$. De plus, utilisez les propriétés suivantes : air. $\gamma = 1.4$, $c_p = 1005 J/kgK$; gaz : $\gamma = 1.33$, $c_p = 1148 J/kgK$.

Solution

Pour chaque rapport de pression, on calculera :

- la température à l'entrée de la turbine ;
- le ΔT_0 du compresseur ;
- le ΔT_0 de la turbine ;
- la puissance nette.

i) Température à l'entrée de la turbine.

Les pertes de pression étant négligeables, on a

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{03}}{P_{04}} = 5.0$$

Pour un rapport de pression $\frac{P_{02}}{P_{01}} = 5.0$, le débit normalisé du compresseur est $\frac{\dot{m}_c \sqrt{T_{01}}}{P_{01}} = 329$

La condition de compatibilité des débits s'écrit pour ce cas $\dot{m}_C = \dot{m}_T$. On obtient alors

$$\frac{\dot{m}_c \sqrt{T_{01}}}{P_{01}} = \frac{\dot{m}_T \sqrt{T_{01}}}{P_{01}} = \frac{\dot{m}_T \sqrt{T_{03}}}{P_{03}} \frac{P_{03}}{P_{01}} \frac{\sqrt{T_{01}}}{\sqrt{T_{03}}} 329 = 139 \times 5 \frac{\sqrt{T_{01}}}{\sqrt{T_{03}}}$$

Ce qui permet de calculer $T_{03} = 1285K$. On voit donc que la condition de compatibilité des débits permet de déterminer la température T_{03} à l'entrée de la turbine.

ii) Le ΔT_0 du compresseur peut être calculé selon

$$\eta_c = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}}$$

$$\begin{aligned} T_{02} - T_{01} &= \left(\frac{T_{01}}{0.84} \right) \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}} - 1 \right) = \left(\frac{T_{01}}{0.84} \right) \left(\frac{P_{02}^\gamma}{P_{01}^\gamma} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{288}{0.84} \right) \left(5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \\ (\Delta T_0)_c &= T_{02} - T_{01} = 200.3' \end{aligned}$$

iii) Le ΔT_0 de la turbine est calculé selon

$$\begin{aligned}
 \eta_c &= \frac{T_{03} - T_{04}}{T_{03} - T_{04s}} \\
 T_{03} - T_{04} &= \eta_s T_{03} \left(1 - \frac{T_{04s}}{T_{03}} \right) \\
 &= 0.87 (1285) \left(1 - \frac{P_{04}}{P_{03}} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \\
 &= 0.87 (1285) \left(1 - \frac{1}{5 \frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right)
 \end{aligned}$$

Donc

$$(\Delta T_0)_T = T_{03} - T_{04} = 368.1K$$

iv) La puissance nette devient

$$\dot{W}_{net} = \dot{m} \left[c_{pg} (\Delta T_0)_T - \frac{c_{pa} (\Delta T_0)_c}{\eta_m} \right]$$

On connaît déjà

$$\frac{\dot{m} \sqrt{T_0} 1}{p_{01}} = 329$$

ce qui permet de calculer le débit $\dot{m} = 19.64kg/s$. Alors,

$$\dot{W}_{net} = (19.64) \left[1.148 (368.1) - \frac{1.005 (200.2)}{0.98} \right] = 4267 kWatts.$$

Pour les 3 points d'opération demandés, on aura :

$\frac{P_{03}}{P_{01}}$	T_{03}	$(\Delta T_0)_C$	$(\Delta T_0)_T$	\dot{m}	\dot{W}_{net}
5.0	1285	2002	3631	1964	4267
45	982	1961	267	2025	2130
40	761	1867	194	204	635

Ces résultats sont illustrés sur la figure suivante.

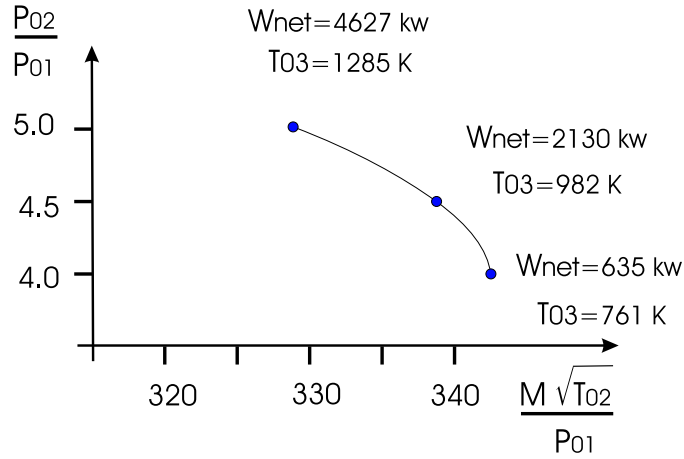


FIG. 6.19: Exemple 6.4

6.4.4 Exercices

Exercice 6.1

Un cycle idéal de turbine à gaz avec resurchauffe est illustré sur la figure suivante :

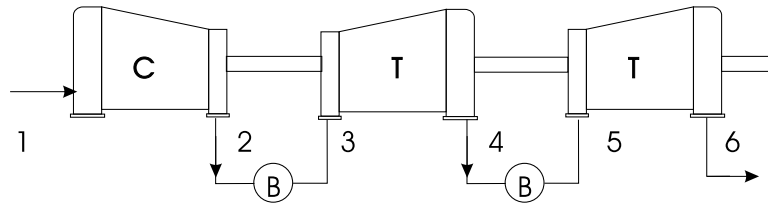


FIG. 6.20: Problème 6.1

En posant que les turbines ont le même rapport de pression, $\frac{P_3}{P_4} = \frac{P_5}{P_6}$ et en posant $T_5 = T_3$, montrez que le travail spécifique maximum est obtenu lorsque

$$r \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{2/3}$$

où $r = \frac{P_2}{P_1}$

Exercice 6.2

On poursuit l'analyse du cycle avec resurchauffe de l'exercice 1 en prenant cette fois-ci des efficacités totale-à-totale de η_c et η_t pour le compresseur et les turbines. Supposer que le rapport de pression est $r = \frac{P_2}{P_1}$ et la pression entre les deux turbines et de XP1.

a) Montrez qu'avec $P_1, T_1, T_3, \eta_c, \eta_t$ et r données, le travail spécifique est maximum lorsque $X = \sqrt{r}$.

b) En conservant $X = \sqrt{r}$, montrez que lorsque r varie, le travail spécifique est maximum pour

$$r^{3/2} = \left(\eta_c \eta_t \frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

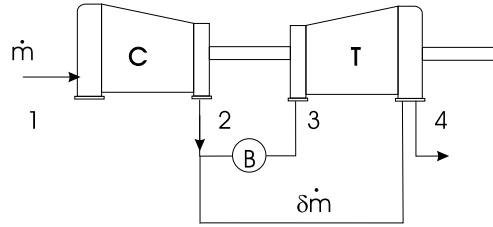
c) Si on ajoute un échangeur de chaleur idéal ($\Delta P = 0$) après le compresseur, montrez que l'efficacité du cycle deviendra

$$\eta = 1 - \frac{T_1 \frac{(\gamma-1)}{r^{2\gamma}} \left[\frac{(\gamma-1)}{r^{2\gamma}} + 1 \right]}{2\eta_c\eta_t T_3}$$

Supposez également un gaz parfait avec chaleurs spécifiques constantes et négligez les pertes de pression dans les combusteurs.

Exercice 6.3

Dans les turbines à gaz, il est possible d'augmenter la température à l'entrée de la turbine si l'on décide de refroidir les pales de la turbine. Pour ce faire, de l'air est extrait à la sortie du compresseur pour circuler dans les pales de la turbine et les refroidir. Considérez la configuration suivante :



$$\begin{aligned} \frac{P_{02}}{P_{01}} &= 20 \\ T_{01} &= 38^\circ\text{C} \\ T_{03} &= 1094^\circ\text{C} \\ P_{04} = P_{01} &= 1 \text{ atm} \\ (\Delta P_0)_{\text{brûleur}} &= 5\% P_{02} \end{aligned}$$

Efficacité polytropique : turbine, $\eta_{pt} = 0.9$, compresseur, $\eta_{pc} = 0.9$

Quel est le pourcentage maximum d'air $\frac{\delta \dot{m}}{\dot{m}_c}$ que l'on peut extraire à la sortie du compresseur (2) si on ne veut pas réduire l'efficacité thermique de plus de 5% par rapport au cycle sans extraction ? ($\eta_{\text{sans extraction}} (\%) = \eta_{\text{avec extraction}} (\%) + 5\%$). Considérez pour le calcul que le débit de carburant est négligeable, que le fluide $\delta \dot{m}$ extrait ne fait aucun travail dans la turbine et utilisez des propriétés constantes pour tout le cycle : $\gamma = 1.4$, $R = 287 \text{ J/kgK}$ et $c_p = 1005 \text{ J/kgK}$.

Rép : $\frac{\delta \dot{m}}{\dot{m}_c} = 5.38\%$

Exercice 6.4

Une génératrice électrique est entraînée par une turbine à gaz dont la turbine libre fournit 20 Mwatts de puissance sur l'arbre. Les paramètres de la turbine à gaz sont les suivants :

Rapport de pression du compresseur	11.0
Efficacité totale-à-totale du compresseur	0.82
Perte de pression dans le combusteur	0.4 bar
Efficacité de la combustion	0.99
Température entrée turbine	1150 K
Efficacité totale-à-totale de la turbine de puissance	0.87
Efficacité totale-à-totale de la turbine libre	0.89
Efficacité mécanique de chaque arbre	0.98
Conditions ambiantes	$T_1 = 288$ K $P_1 = 1$ bar
Air	$\gamma = 1.4, C_p = 1.005$ kJ/kgK
Gaz	$\gamma = 1.333, C_p = 1.148$ kJ/kgK.

Calculez le débit massique et la consommation spécifique (S.F.C.).

Rép : $\dot{m} = 119$ kg/s S.F.C. = 0.31 kg/kWh

Exercice 6.5

Une petite turbine à gaz opérant sur le cycle de base et ayant un seul arbre est utilisée dans un avion gros transport comme turbine auxiliaire. Elle doit fournir une puissance de 200 kwatts sur l'arbre en plus de 1.5 kg/s d'air comprimé qui est extrait en sortie du compresseur.

Les paramètres de la turbine à gaz sont :

Rapport de pression du compresseur	3.8
Efficacité totale-à-totale du compresseur	0.85
Perte de pression dans le combusteur	0.12 bar
Température entrée turbine	1050 K
Efficacité totale-à-totale de la turbine	0.88
Efficacité mécanique du rotor du compresseur	0.99
Efficacité mécanique du rotor de la charge	0.98
Conditions ambiantes	$T_1 = 288$ K $P_1 = 1$ bar
Air	$\gamma = 1.4, C_p = 1.005$ kJ/kgK
Gaz	$\gamma = 1.333, C_p = 1.148$ kJ/kgK.

- a) Calculez le débit total au compresseur.
 b) Calculez la puissance disponible si on extrait aucun air du compresseur.

Rép : a) 4.78 kg/s b) 633 kwatts

Exercice 6.6

Les données suivantes représentent les caractéristiques d'un compresseur et d'une turbine qui doivent être mariées pour former une turbine à gaz à un seul arbre opérant sur le cycle simple à vitesse constante.

COMPRESSEUR		
$\frac{P_{02}}{P_{01}}$	$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}}$	η_C, tt
5	32.9	0.8
4.7	33.8	0.789
4.5	34.3	0.77
	$\frac{kg/s \sqrt{K}}{bar}$	

TURBINE		
$\frac{P_{03}}{P_{04}}$	$\frac{\dot{m}\sqrt{T_{03}}}{P_{03}}$	η_T, tt
5.0	14.2	0.845
4.5	14.2	0.850
4.0	14.2	0.842
	$\frac{kg/s \sqrt{K}}{bar}$	

Les conditions ambiantes sont de $T_{01} = 288 K$ $P_{01} = 1.01 bar$. Utilisez pour l'air $c_p = 1.005 kJ/kgK$, $\gamma = 1.4$ et pour les gaz de combustion $c_p = 1.148 kJ/kgK$, $\gamma = 1.33$. La perte de pression dans le brûleur est de 5% de la pression de sortie du compresseur. Négligez les pertes mécaniques et le débit de carburant

À partir de ces données, estimez la puissance de la turbine à gaz lorsque la température à l'entrée de la turbine est de 1100 K.

Rép : $\dot{W}_{net} = 260 kwatts$

Table A1 $\gamma = 1.4$ $R = 285 J/kgK$				
M	ρ/ρ_0	T/T_0	P/P_0	$\sqrt{\frac{\gamma}{R}} M \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.05	0.9988	0.9995	0.9983	0.0035
0.10	0.9950	0.9980	0.9930	0.0069
0.15	0.9888	0.9955	0.9844	0.0103
0.20	0.9803	0.9921	0.9725	0.0136
0.25	0.9694	0.9877	0.9575	0.0168
0.30	0.9564	0.9823	0.9395	0.0199
0.35	0.9413	0.9761	0.9188	0.0227
0.40	0.9243	0.9690	0.8956	0.0254
0.45	0.9055	0.9611	0.8703	0.0279
0.50	0.8852	0.9524	0.8430	0.0302
0.55	0.8634	0.9430	0.8142	0.0322
0.60	0.8405	0.9328	0.7840	0.0340
0.65	0.8164	0.9221	0.7528	0.0356
0.70	0.7916	0.9107	0.7209	0.0369
0.75	0.7660	0.8989	0.6886	0.0380
0.80	0.7400	0.8865	0.6560	0.0389
0.85	0.7136	0.8737	0.6235	0.0396
0.90	0.6870	0.8606	0.5913	0.0401
0.95	0.6604	0.8471	0.5595	0.0403
1.00	0.6339	0.8333	0.5283	0.0404
1.05	0.6077	0.8193	0.4979	0.0403
1.10	0.5817	0.8052	0.4684	0.0401
1.15	0.5562	0.7908	0.4398	0.0397
1.20	0.5311	0.7764	0.4124	0.0392
1.25	0.5067	0.7619	0.3861	0.0386
1.30	0.4829	0.7474 0	.3609	0.0379
1.35	0.4598	0.7329 0	.3370	0.0371
1.40	0.4374	0.7184 0	.3142	0.0363
1.45	0.4158	0.7040 0	.2927	0.0353
1.50	0.3950	0.6897 0	.2724	0.0344
1.55	0.3750	0.6754 0	.2533	0.0334
1.60	0.3557	0.6614 0	.2353	0.0323
1.65	0.3373	0.6475 0	.2184	0.0313
1.70	0.3197	0.6337 0	.2026	0.0302
1.75	0.3029	0.6202 0	.1878	0.0292
1.80	0.2868	0.6068 0	.1740	0.0281
1.85	0.2715	0.5936 0	.1612	0.0270
1.90	0.2570	0.5807 0	.1492	0.0260
1.95	0.2432	0.5680 0	.1381	0.0250
2.00	0.2300	0.5556 0	.1278	0.0240

Turbomachines

Table A2 $\gamma = 1.33$ $R = 285J/kgK$				
M	ρ/ρ_0	T/T_0	P/P_0	$\sqrt{\frac{T}{R}}M \left[1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.05	0.9988	0.9996	0.9983	0.0034
0.10	0.9950	0.9984	0.9934	0.0068
0.15	0.9888	0.9963	0.9852	0.0101
0.20	0.9803	0.9934	0.9738	0.0133
0.25	0.9694	0.9898	0.9595	0.0165
0.30	0.9563	0.9854	0.9423	0.0195
0.35	0.9412	0.9802	0.9225	0.0223
0.40	0.9241	0.9743	0.9003	0.0249
0.45	0.9052	0.9677	0.8759	0.0274
0.50	0.8847	0.9604	0.8497	0.0296
0.55	0.8628	0.9525	0.8218	0.0316
0.60	0.8396	0.9439	0.7925	0.0334
0.65	0.8153	0.9348	0.7622	0.0350
0.70	0.7901	0.9252	0.7310	0.0363
0.75	0.7642	0.9151	0.6993	0.0375
0.80	0.7377	0.9045	0.6672	0.0383
0.85	0.7109	0.8935	0.6351	0.0390
0.90	0.6838	0.8821	0.6032	0.0395
0.95	0.6566	0.8704	0.5715	0.0398
1.00	0.6295	0.8584	0.5404	0.0398
1.05	0.6026	0.8461	0.5099	0.0398
1.10	0.5760	0.8336	0.4802	0.0395
1.15	0.5498	0.8209	0.4513	0.0391
1.20	0.5241	0.8080	0.4235	0.0386
1.25	0.4990	0.7950	0.3968	0.0380
1.30	0.4746	0.7820	0.3711	0.0373
1.35	0.4508	0.7688	0.3466	0.0365
1.40	0.4278	0.7556	0.3233	0.0356
1.45	0.4056	0.7424	0.3011	0.0346
1.50	0.3841	0.7293	0.2801	0.0336
1.55	0.3636	0.7161	0.2603	0.0326
1.60	0.3438	0.7030	0.2417	0.0315
1.65	0.3249	0.6900	0.2242	0.0304
1.70	0.3068	0.6771	0.2077	0.0293
1.75	0.2896	0.6643	0.1924	0.0282
1.80	0.2731	0.6516	0.1780	0.0271
1.85	0.2575	0.6391	0.1646	0.0260
1.90	0.2427	0.6267	0.1521	0.0249
1.95	0.2286	0.6145	0.1405	0.0239
2.00	0.2153	0.6024	0.1297	0.0228