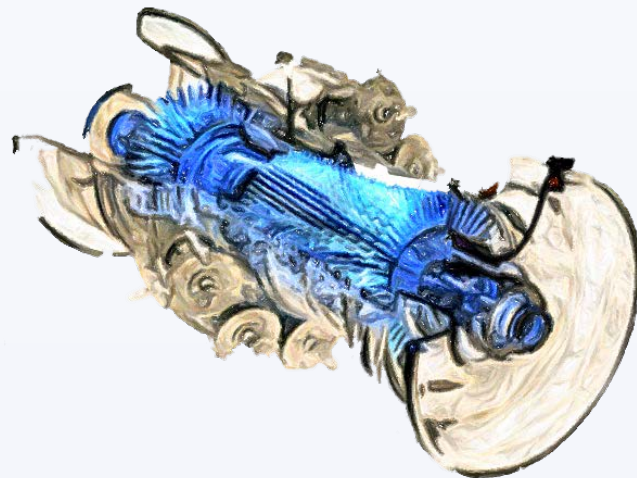
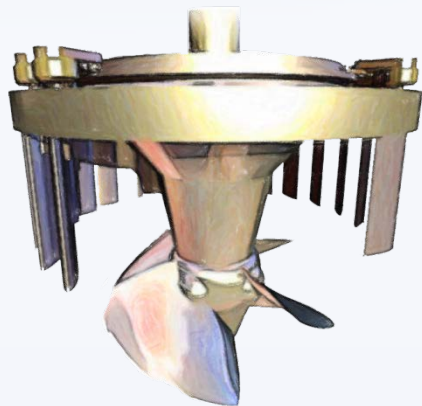
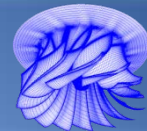


# Turbomachines



**NRJ EN ROTATION**



# Révision: Thermo+ Mécaflu

# OBJECTIFS

- Rappeler les lois de conservation
- Introduire l'équation d'Euler pour les turbomachines
- Présenter le lien entre l'équation d'Euler et l'équation de l'énergie
- Faire un rappel du premier et du second principe de la thermodynamique

# OBJECTIFS

- Revoir quelques éléments de la dynamique des gaz
- Rappeler les processus thermodynamiques dans le diagramme h-s (enthalpie-entropie)
- Présenter des formules pour le calcul des rendements total-à-total et polytropique dans une turbomachine



# Les principes de conservation



**Dans un système isolé, la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, sont conservés au cours du temps.**

**Accumulation + Bilan du Flux=Sources**

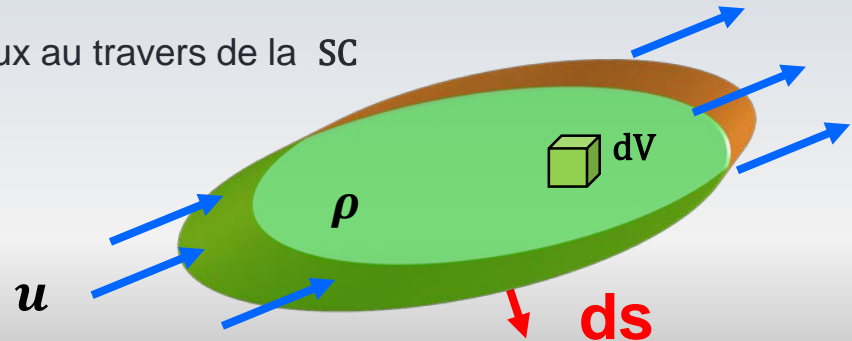
# Conservation de la masse

Pour un volume de contrôle fixe  $VC$ , avec  $\vec{u}$ , étant la vitesse de l'écoulement,  $\rho$  la masse volumique et  $dV$  et  $dS$  le volume et la surface infinitésimal, respectivement, la conservation de la masse s'écrit:

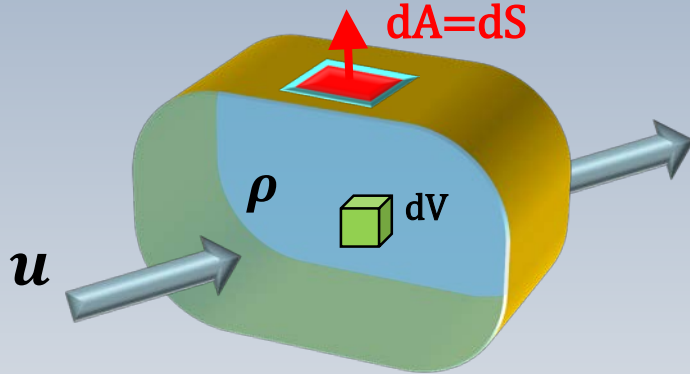
$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

Variation dans le VC

Flux au travers de la SC



# Accumulation = Bilan du flux

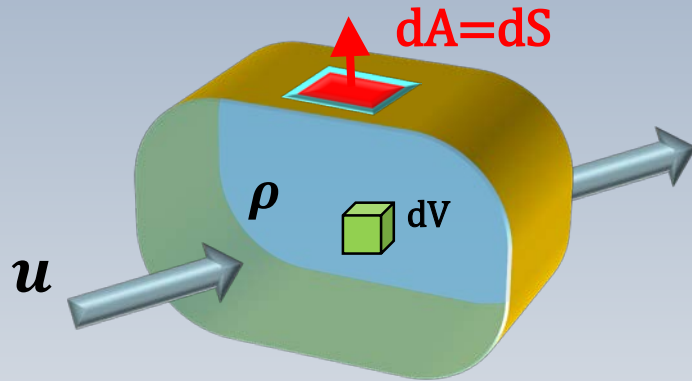


Flux massique traversant la surface

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = - \int_{SC} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

Accumulation dans le volume dans le temps

# État stationnaire 1D



$$-\int_1^2 \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2$$

Flux massique traversant la surface

1D

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = - \int_{SC} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

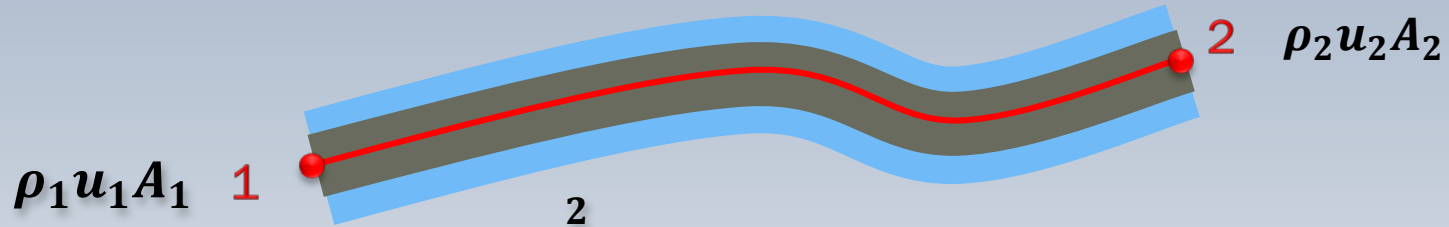
Accumulation dans le volume dans le temps

0

Régime permanent

# État 1D Stationnaire

Cons. de la masse



$$\rho_1 u_1 A_1 \quad 1$$

$$2 \quad \rho_2 u_2 A_2$$

$$\int_1^2 \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \rho_2 u_2 A_2 - \rho_1 u_1 A_1 = 0$$

$$\dot{m} = \rho_2 u_2 A_2 = \rho_1 u_1 A_1$$

# Conservation de la Q.de M.

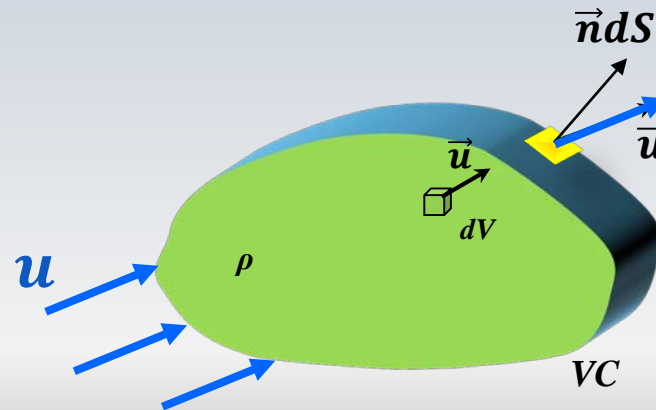
Quantité de Mouvement

$$\sum \vec{F}_{VC} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

Forces exercées  
sur le VC

Variation de la Q.de M  
dans le VC

Flux de la Q. de M.  
au travers la SC



# État 1D Stationnaire

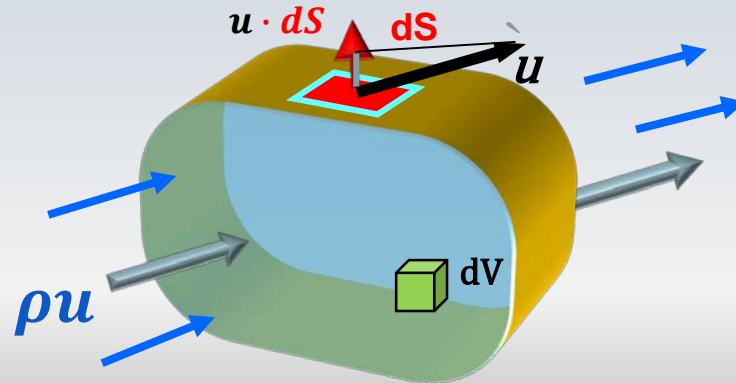
## Quantité de Mouvement

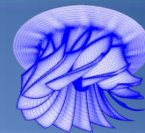
Flux de la Q. de Mouv..

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \sum \vec{F}_{VC}$$

Variation de la Q. de mouvement dans le volume

Forces de corps et de surface





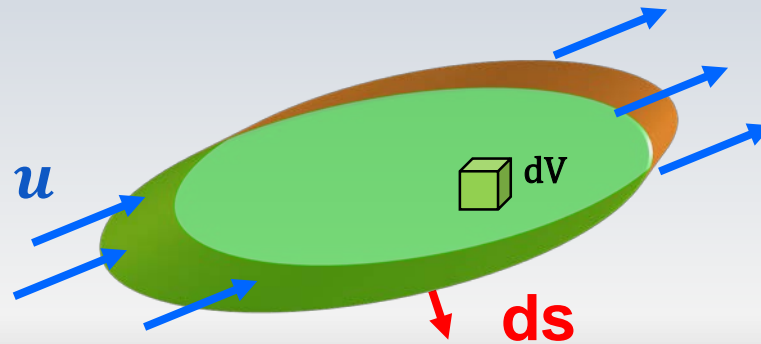
# L'équation d'Euler



# Moment de la Q.de M.

Moment angulaire

$$M = \frac{d}{dt} \int_{VC} \mathbf{r} \times \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \mathbf{r} \times \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

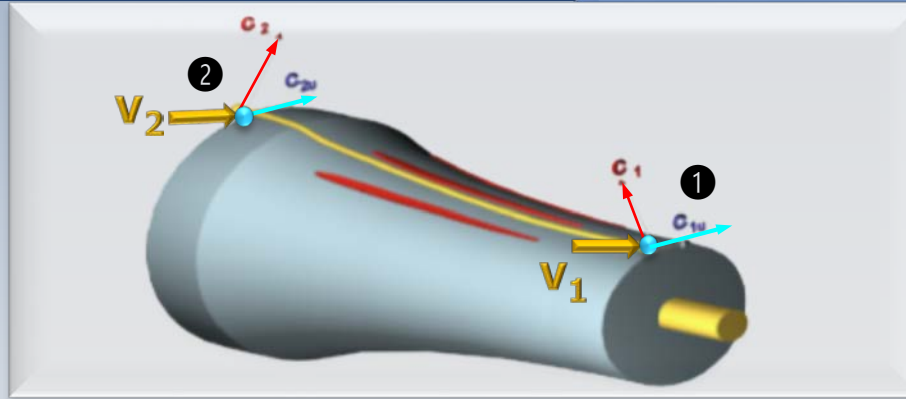


# 1D Stationnaire

Moment angulaire

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} r \times \rho \vec{u} dV = 0$$

Régime permanent



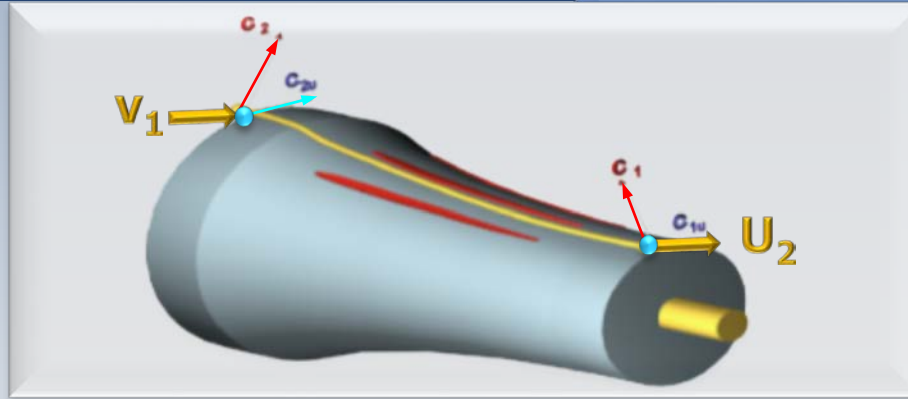
1D

$$M = \int_1^2 r \times \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = (r_2 \times u_2) \underbrace{\rho_2 u_2 A_2}_{\dot{m}} - (r_1 \times u_1) \underbrace{\rho_1 u_1 A_1}_{\dot{m}}$$

$$\dot{m} = \rho_2 u_2 A_2 = \rho_1 u_1 A_1$$

# 1D Stationnaire

Moment angulaire



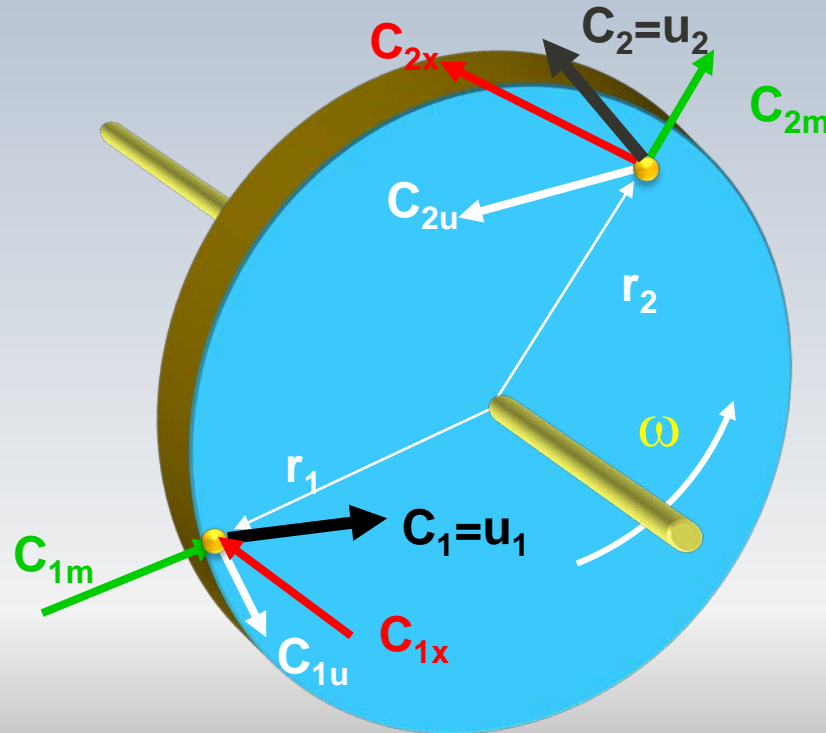
$$M = \dot{m}(r_2 \times u_2 - r_1 \times u_1)$$

$$\dot{m} = \rho_2 u_2 A_2 = \rho_1 u_1 A_1$$

# Écoulement 1D Stationnaire

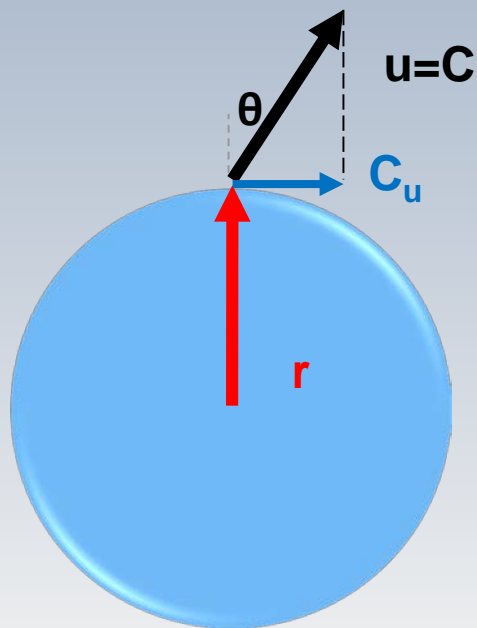
Moment angulaire

$$M = \dot{m} (r_2 \times u_2 - r_1 \times u_1)$$



# $r \times u$

Moment angulaire



$$\mathbf{r} \times \mathbf{u} = r c_u$$

$$c_u = c \sin \theta$$



# Nomenclature

$C_u$ : composante *tangentielle* de la vitesse absolue  $C$  projetée dans la direction de  $U$

$C_x$ : composante *axiale* de la vitesse

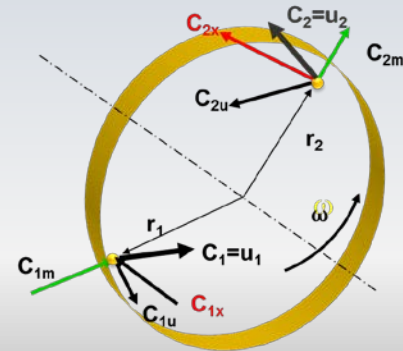
$C_m$ : composante *méridionale* de la vitesse absolue  $C$  projetée dans la direction normale à  $U$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{u} = r c_u$$

$$M = \dot{m} (r_2 \times u_2 - r_1 \times u_1) \quad \Rightarrow \quad M = \dot{m} (c_{2u} r_2 - c_{1u} r_1)$$

$$U = r \omega$$

$U$ : vitesse *tangentielle* de la roue



# Nomenclature

$C_u$ : composante *tangentielle* de la vitesse absolue  $C$  projetée dans la direction de  $U$

$C_x$ : composante *axiale* de la vitesse

$C_m$ : composante *méridionale* de la vitesse absolue  $C$  projetée dans la direction normale à  $U$

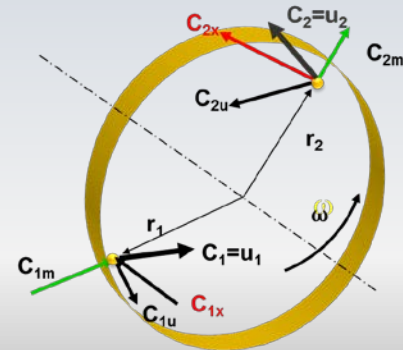
$$\mathbf{r} \times \mathbf{u} = r c_u$$

$$\dot{W} = \dot{m} \omega (c_{2u} r_2 - c_{1u} r_1)$$

$$= \dot{m} (c_{2u} U_2 - c_{1u} U r_1)$$

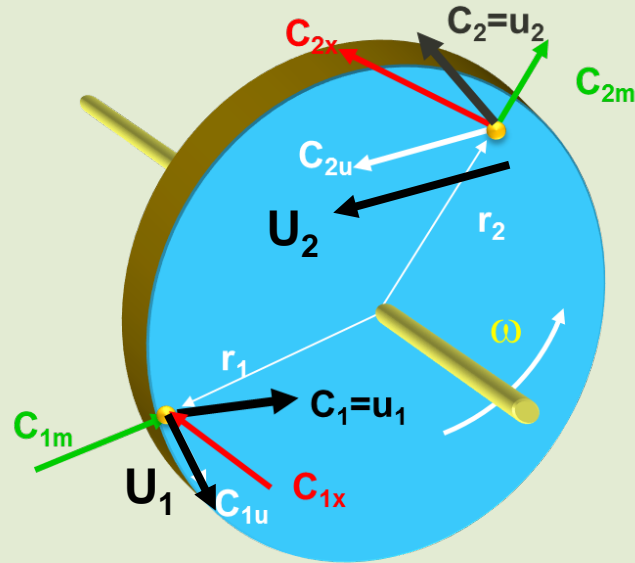
$$U = r \omega$$

$U$ : vitesse *tangentielle* de la roue



# Équation d'Euler

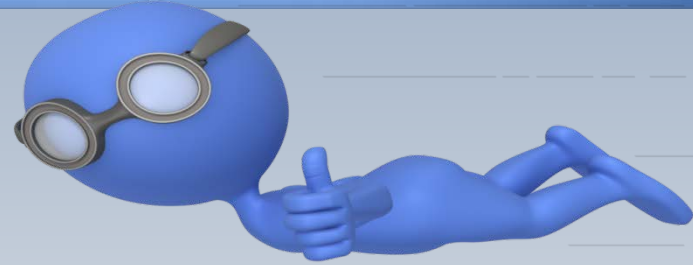
$$\dot{W} = \dot{m}(c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$





# Travail Spécifique

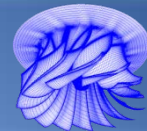
$$E = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1)$$



$$H = \frac{(C_{2u}U_2 - C_{1u}U_1)}{g}$$

Équation transformée pour les machines hydrauliques pour obtenir une “tête” en mètres  
g:accélération gravitationnelle

Dans une turbomachine on utilise la notion de **travail spécifique**. Celle-ci correspond à la puissance référée au débit massique circulant par la machine. Les unités sont  $J/kg = m^2/s^2$



# La formule d'Euler et l'équation de l'énergie

# Énergie

Accumulation + Flux d'énergie totale = Chaleur - Travail

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV + \int_S (\rho e + p) v \cdot dS = \dot{Q} - \dot{W}$$

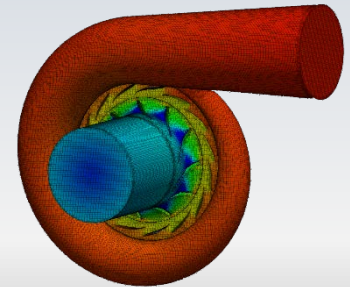
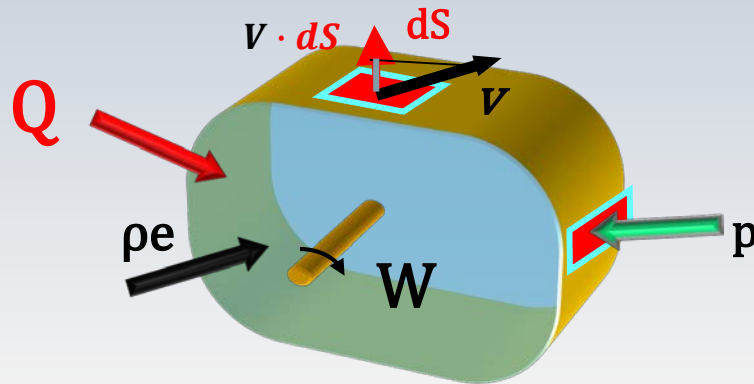
$$e = \left( \underset{\text{I}}{u} + \underset{\text{C}}{v^2/2} + \underset{\text{P}}{gz} \right)$$

$u$ : énergie interne

$v$ : vitesse

$z$ : hauteur

$p$ : pression



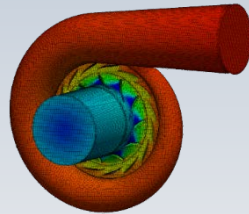
# Énergie: 1D état stationnaire

Accumulation + Flux d'énergie totale = Chaleur - Travail

$$e = (u + v^2/2 + gz) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV + \int_S (\rho e + p) v \cdot dS = \dot{Q} - \dot{W}$$

~~0~~                      ~~1-D~~                      ~~≈ 0~~

*état stationnaire*



# Énergie: 1D état stationnaire

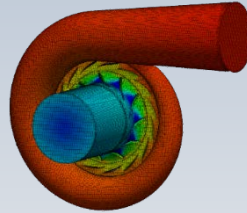
$$e = (u + v^2/2 + gz) \quad \int_S (\rho e + p) v \cdot dS = -\dot{W}$$

1-D



$$= (\rho v A e + p v A \rho / \rho)_2 - (\rho v A e + p v A \rho / \rho)_1 = -\dot{W}$$

$$\dot{m} = \rho_2 v_2 A_2 = \rho_1 v_1 A_1$$



# Énergie

$$(\rho v A e + p v A \rho / \rho)_2 - (\rho v A e + p v A \rho / \rho)_1 = -\dot{W}$$

$$\dot{m} \left( e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right)_2 - \dot{m} \left( e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right)_1 = -\dot{W}$$

$$\dot{m} \left[ \left( h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) - \left( h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) \right] = -\dot{W}$$

$$\dot{m} = \rho_2 v_2 A_2 = \rho_1 v_1 A_1$$

$$e = \left( u + V^2/2 + gz \right)$$

$$h = \left( u + p/\rho \right)$$

$$\Delta z \approx 0$$

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

$$\dot{m}(h_{02} - h_{01}) = \dot{W}$$

*Soudainement*, on se place du point de vue du fluide et on considère que l'énergie  $\dot{W}$  est positive si le fluide augmente son niveau énergétique lors du passage par le rotor.

# Équation fondamentale

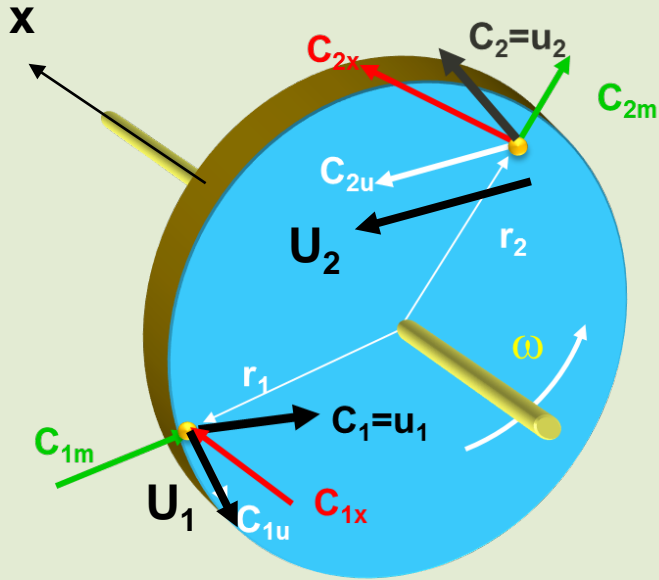
Énergie

Euler

$$(h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$



# Équations 1D à l'état stationnaire



$$\dot{W} = \dot{m}(c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

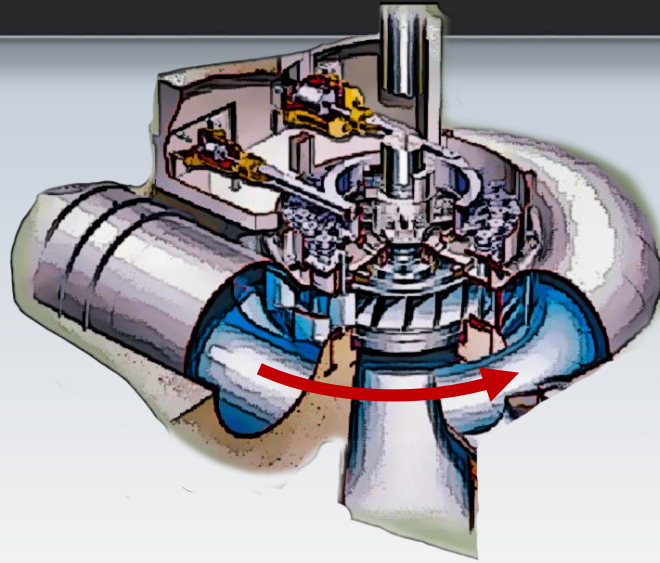
$$(h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

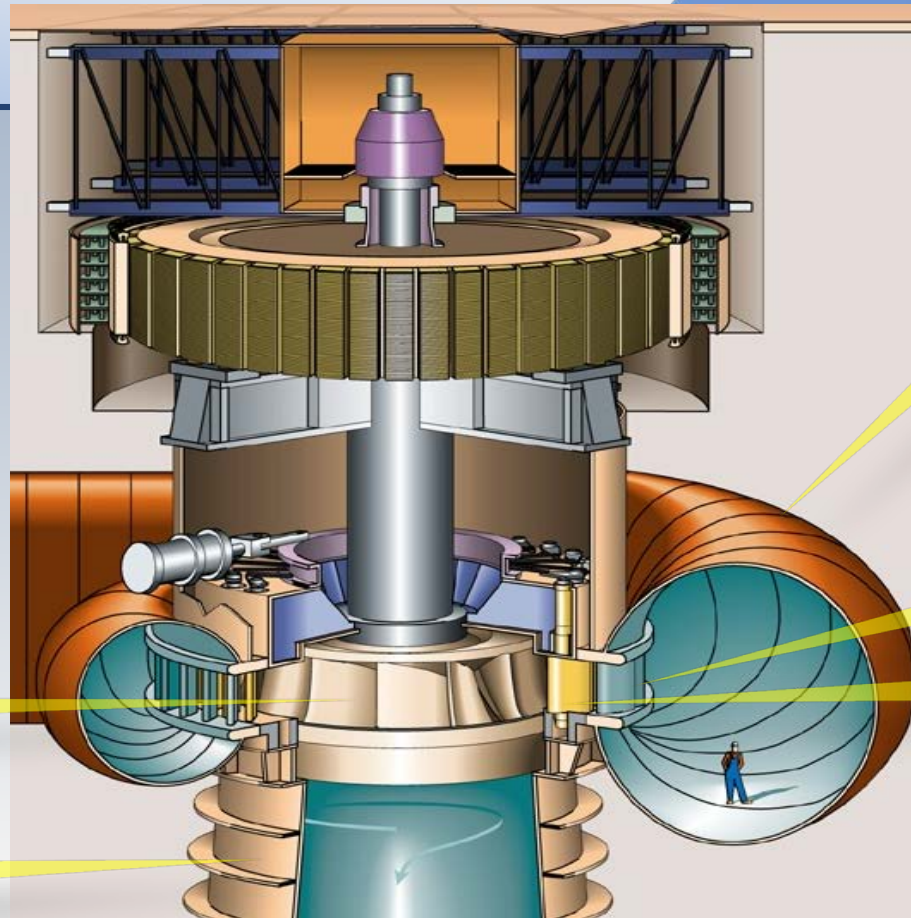
$$\dot{m} = \rho_1 c_{1x} A_1 = \rho_2 c_{2x} A_2$$

Dans cette formule, on considère que les aires d'entrée et de sortie sont dans un plan normal à l'axe des  $x$



Dans les turbines à LG3, le débit volumique est de  $Q=272 \text{ m}^3/\text{s}$ . Le rayon intérieur des avant-directrices est  $r_i=3.8\text{m}$  et la hauteur des pales est  $b_o=1.4 \text{ m}$ . Calculez la vitesse de l'écoulement à la sortie des directrices si l'angle de sortie de ces pales est de  $\theta=30^\circ$  par rapport à la direction radiale. La masse volumique est  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$





Bâche spirale

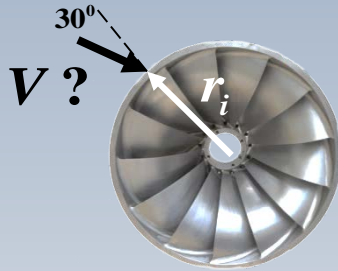
Avant-Distributeur,  
Avant-Directrices

Directrices

Roue

Aspirateur

$$Q = 272 \text{ m}^3/\text{s}, r_i = 3.8\text{m}, b_0 = 1.4 \text{ m}, \theta = 30^\circ, \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$



$$\dot{m} = \int_{SC} \rho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \rho u A$$

$$\dot{m} = \rho v_r (2\pi r b_0) = \rho Q$$

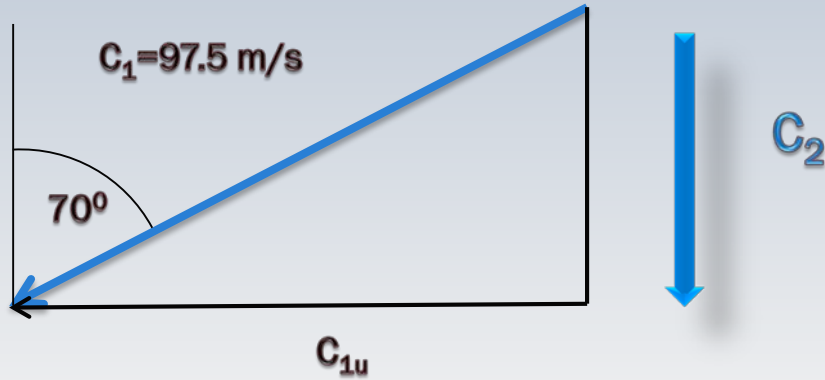
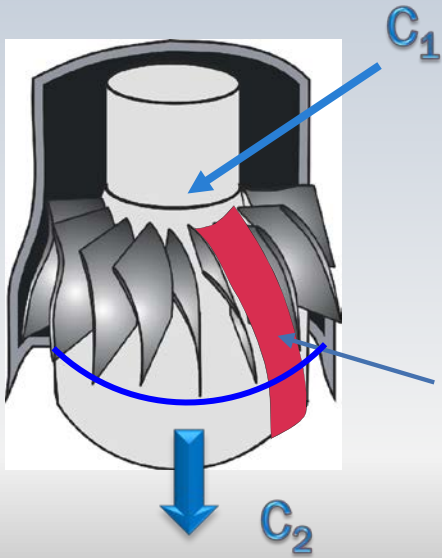
$v_r$ : vitesse radiale



$$v_r = 8.14 \text{ m/s}$$

$$V = \frac{v_r}{\cos \theta} = \frac{8.14}{0.866} = 9.40 \text{ m/s}$$

Calculez la puissance générée par une turbine dans laquelle le débit massique est  $\dot{m} = 6\text{ kg/s}$  et la vitesse à l'entrée est  $c_1 = 97.5\text{ m/s}$  formant un angle de  $70^\circ$  par rapport à la direction axiale. On considère que la vitesse à la sortie des aubes du rotor est sans rotation (elle n'a pas de composante périphérique). La turbine tourne à  $n = 10000\text{ rpm}$  et elle a un diamètre moyen  $d = 1\text{ m}$ .



Puissance ?

$$\dot{m} = 6 \text{ kg/s}, \theta = 70^\circ, n = 10000 \text{ rpm}, d = 1 \text{ m}, c_1 = 97.5 \text{ m/s}$$

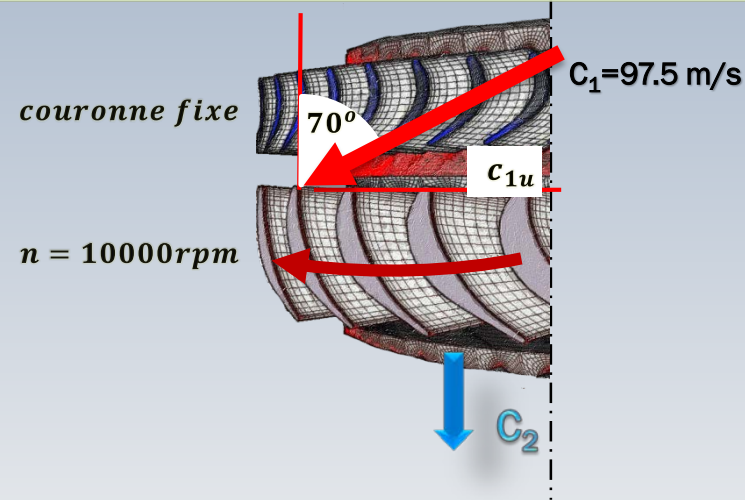
$$E = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (c_{2u} U_2 - c_{1u} U_1)$$

$$c_{1u} = c_1 \cos 20^\circ = 91.6 \text{ m/s}$$

$$U_2 = U_1 = U = \pi d n / 60 = 523.6 \text{ m/s}$$

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = -523.6 \times 91.6 = -47961.6 (\text{m}^2 / \text{s}^2)$$

$$\dot{W} = -6 (\text{kg/s}) \times 47961.6 (\text{m}^2 / \text{s}^2) = -0.2877 \text{ MW}$$



# Thermodynamique

# Frederick Soddy



Les lois de la thermodynamique contrôlent la montée et la chute des systèmes politiques, la liberté ou la soumission des peuples, les mouvements de l'industrie et du commerce, les origines de la richesse et de la pauvreté, et le bien-être de la race humaine.

FREDERICK SODDY  
(Prix Nobel 1921)

En 1900 il a réalisé un séjour à McGill et a collaboré avec Ernest Rutherford.

# Premier et second principes

Le premier principe concerne le caractère conservatif de l'énergie

Le second principe regarde **la qualité** de l'énergie



# La Mafia de la Thermo

- **Première loi: On ne peut pas gagner** (on ne peut pas obtenir plus de ce qu'on investit )
- **Deuxième loi: On ne peut pas sortir kif-kif** (on ne peut pas récupérer tout ce qu'on investit)
- **Troisième loi: On ne peut pas quitter le jeu!** (L'entropie augmente tout le temps!)



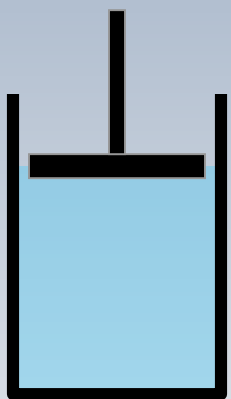
# Systeme et convention de signe

$Q > 0$



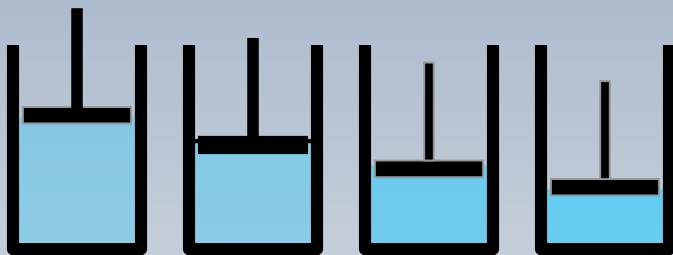
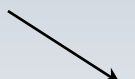
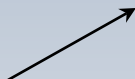
$W > 0$

# Réel/quasi-statique

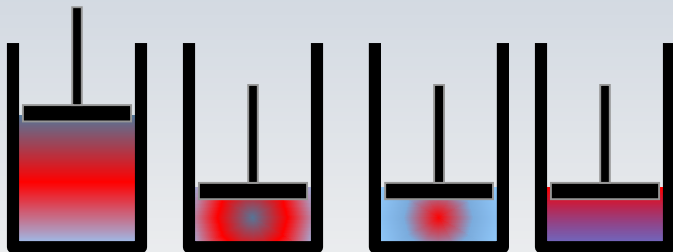


A

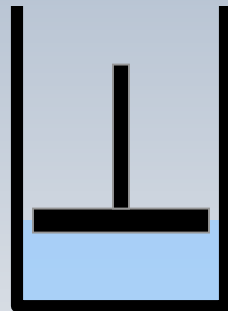
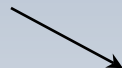
État initial



processus quasi-statique  
(compression très-très lente)

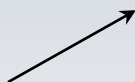


processus réel  
(compression rapide)

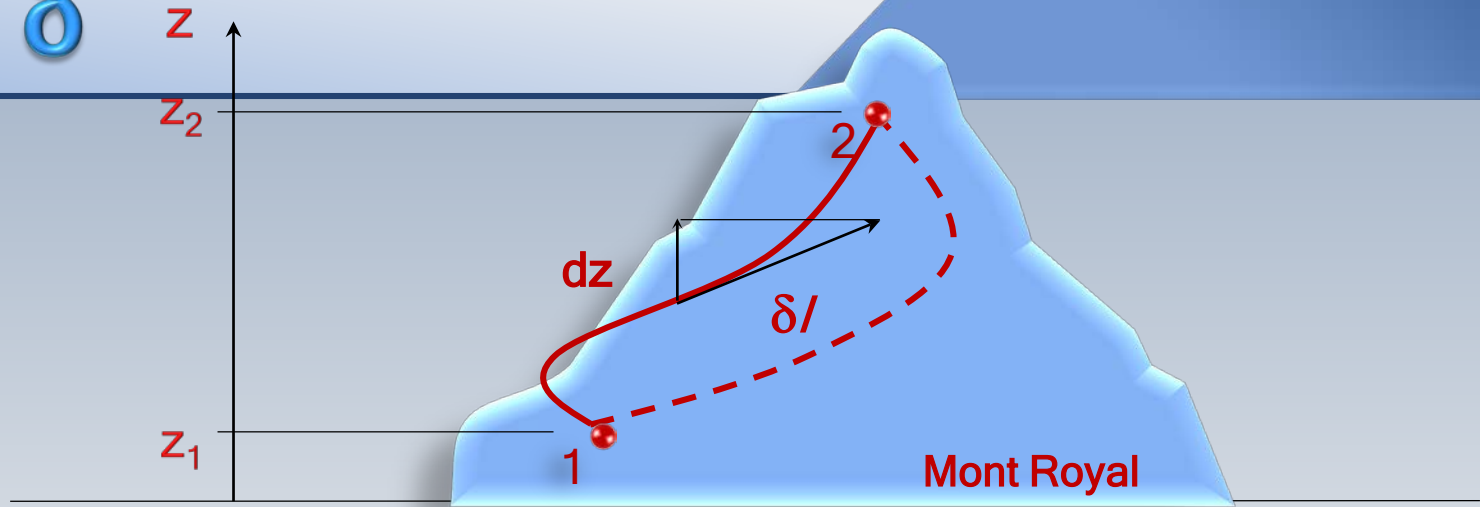


B

État final



# d vs. $\delta$



$$\int_1^2 \delta l = L$$

$$\oint \delta l \neq 0$$

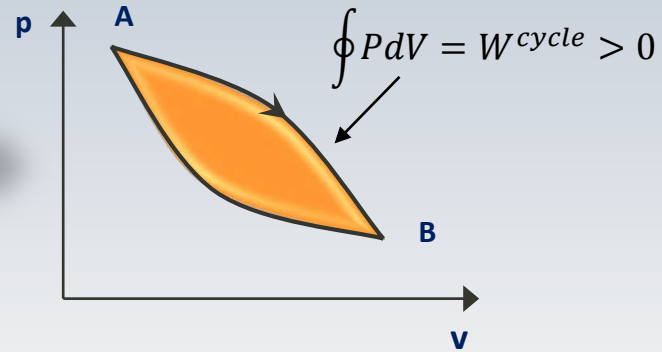
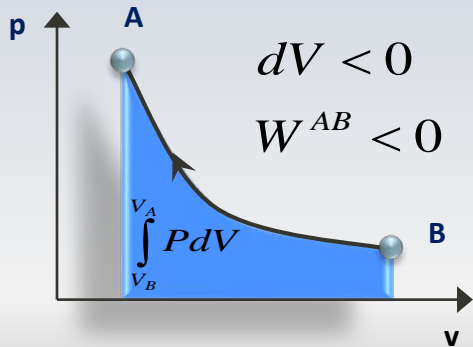
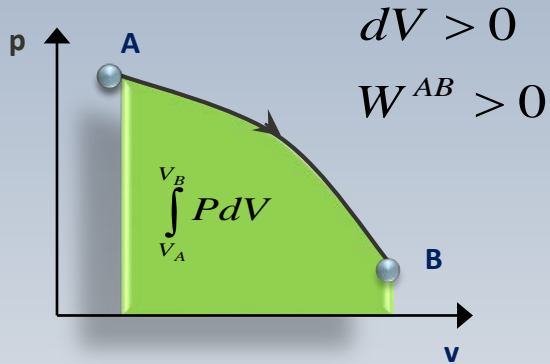
$\delta l$  dépend du chemin suivi  
entre les états 1 et 2

$$\int_1^2 dz = z_2 - z_1$$

$$\oint dz = 0$$

$dz$  est indépendante du chemin suivi  
entre les états 1 et 2

# Travail de compression et cycle

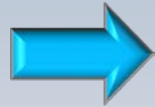


# Cycle: premier principe

$$U_I = U_F$$

Puisque les états I et F sont identiques,  
l'énergie interne  $U$  est la même

$$\Delta U = 0$$



$$\Delta U = Q - W$$

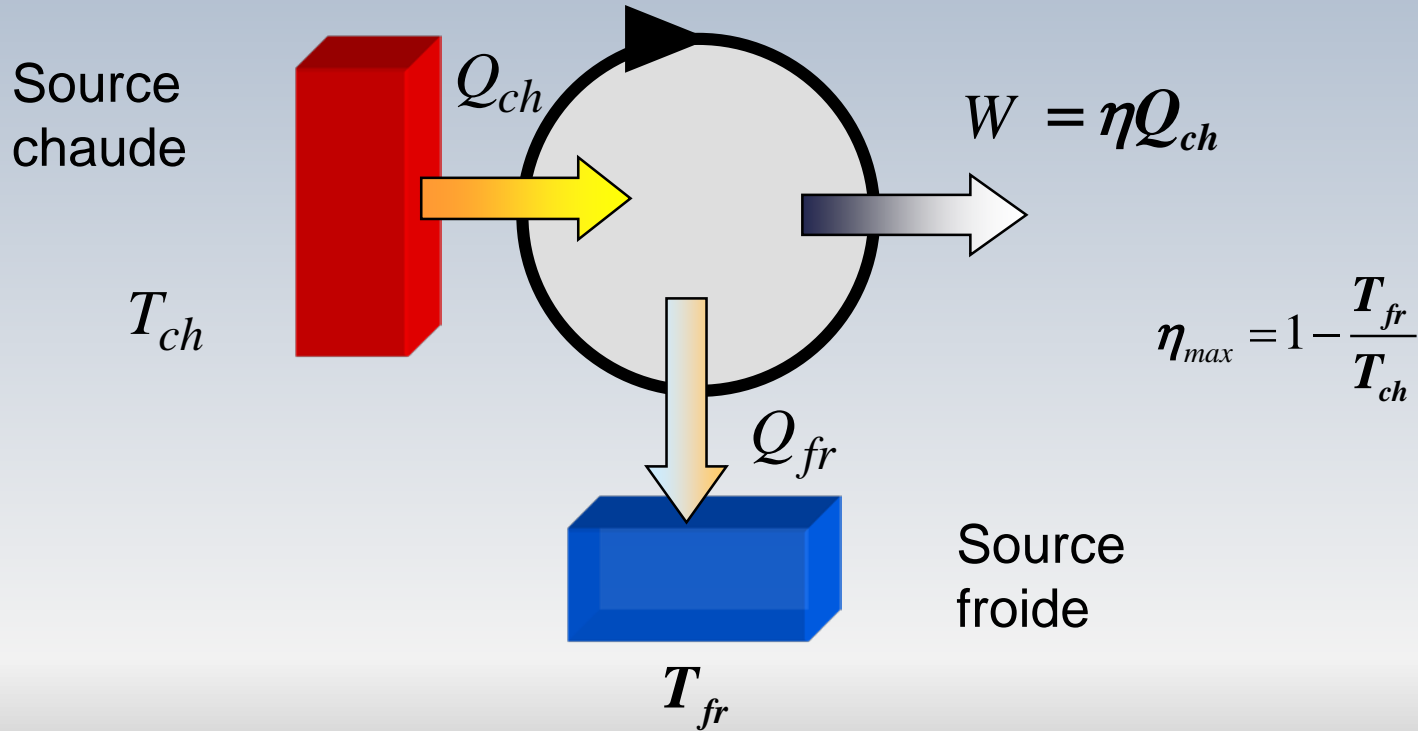


$$Q = W$$

On ne peut  
pas gagner

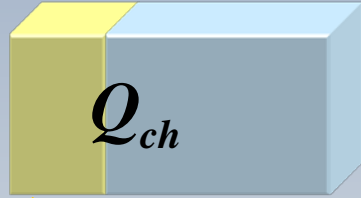


# Cycle: second principe



# Alors...

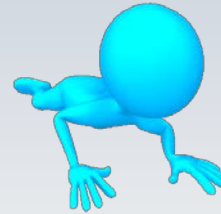
On ne peut pas récupérer tout ce qu'on a investi



Convertible

Non convertible

$$W \leq \left( 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}} \right) Q_{ch}$$



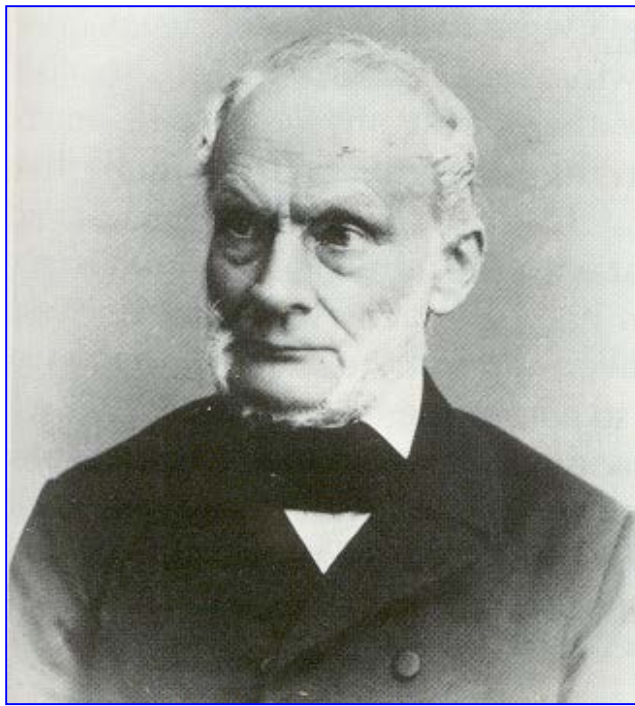
Énergie utile

Énergie dégradée



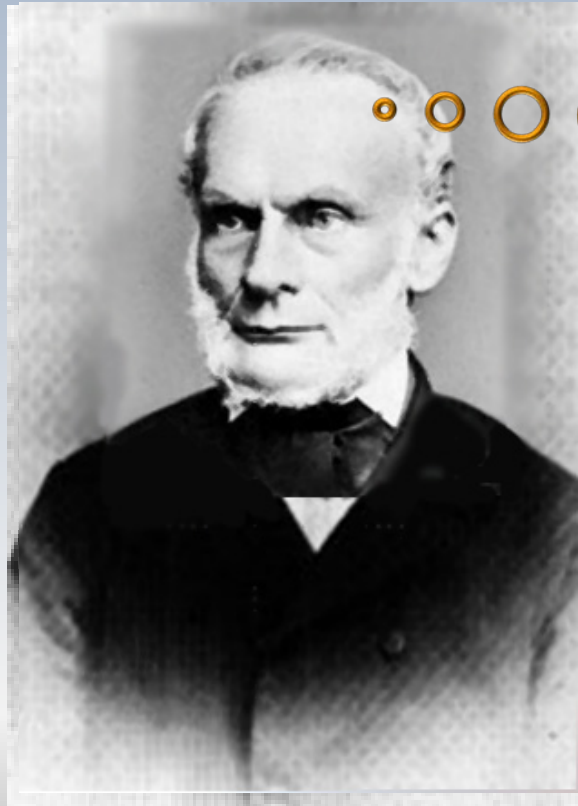


C  
L  
A  
U  
S  
I  
U  
S



*“Je propose de nommer la magnitude  $S$  l'entropie du corps, du mot grec pour transformation. J'ai intentionnellement formé le mot entropie de manière à être aussi proche que possible du mot énergie, puisque ces deux quantités... sont intimement liées ”*

# Rudolf Clausius: 1865



L'entropie ne peut  
que croître au  
cours du temps

$$dS = \delta Q/T$$



BIBLIOTHÈQUE DES PROFESSIONS INDUSTRIELLES ET AGRICOLES  
SÉRIE B, N° 2.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR

PAR

R. CLAUDIUS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE WURZBOURG  
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT

Traduite de l'allemand

PAR F. FOLIE

Docteur ès sciences, professeur à l'École industrielle et Répétiteur  
à l'École des Mines de Liège.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE, INDUSTRIELLE ET AGRICOLE

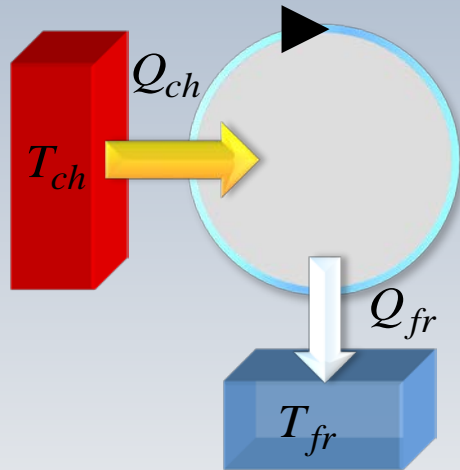
EUGÈNE LACROIX, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ DES INGÉNIEURS CIVILS

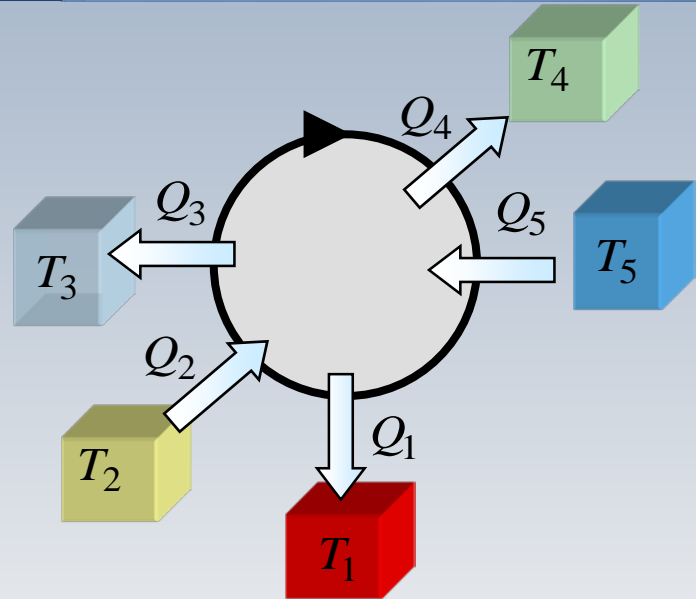
QUAI MALAQUAIS

1868

# L'inégalité de Clausius

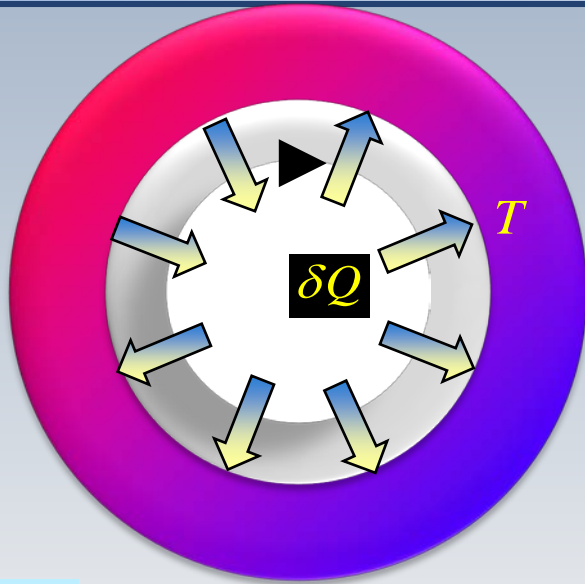


$$\frac{Q_{fr}}{T_{fr}} + \frac{Q_{ch}}{T_{ch}} \leq 0$$



$$\sum_{i=1}^5 \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

# Systeme continu



$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T}$$

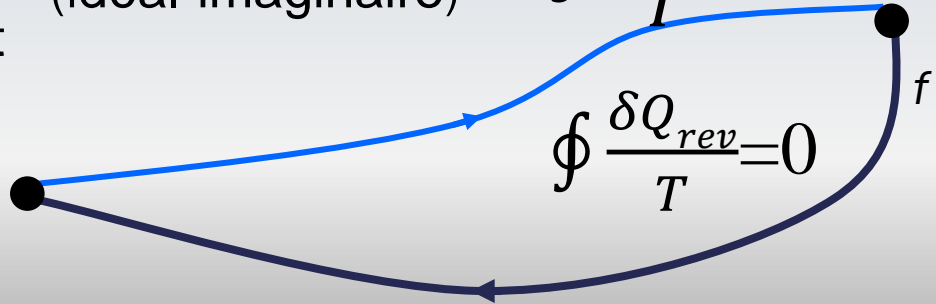
Cycle irréversible  
(réel)

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$

Cycle réversible  
(idéal-imaginaire)

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

$\int_i^f \frac{\delta Q_{rev}}{T}$  Processus **indépendant**  
du chemin suivi

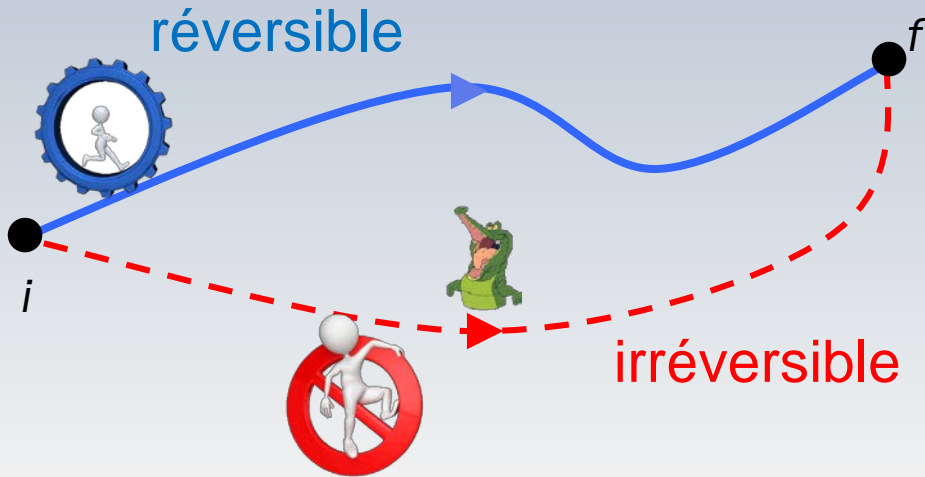


# La notion d'entropie

L'intégrale

$$\int_i^f \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T}$$

est indépendante du chemin



$$S(f) - S(i) \equiv \int_i^f \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T}$$

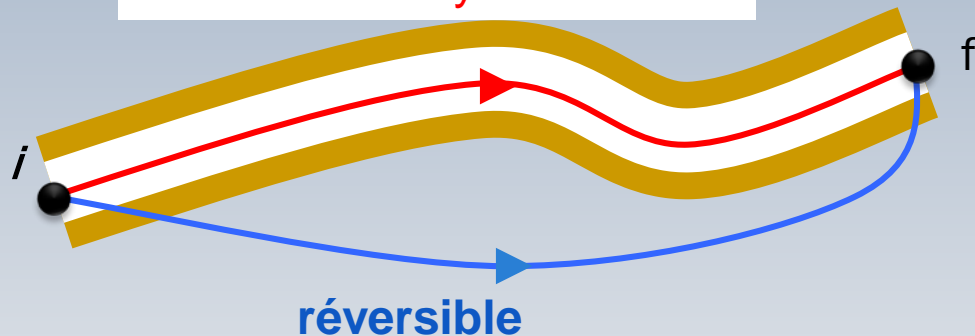


$$S(f) - S(i) \not\equiv \int_i^f \frac{\delta Q_{\text{irr}}}{T}$$



# Croissance de l'entropie

Irréversible + système isolé



$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

$$\int_i^f \frac{\delta Q_{irr}}{T} - \int_i^f \frac{\delta Q_{rev}}{T} \leq 0$$

$$S(f) - S(i) = \int_i^f \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

$$S(i) - S(f) + \int_i^f \frac{\delta Q_{irr}}{T} \leq 0$$

$\delta Q_{irr} = 0$  (système isolé)

$$S(f) \geq S(i)$$

L'entropie augmente tout le temps!



# La notion d'entropie

Il existe une fonction qui ne peut **jamais décroître** dans un **système isolé**. Cette fonction est **l'entropie  $S$**

La variation de l'entropie  $\Delta S$  est donnée par

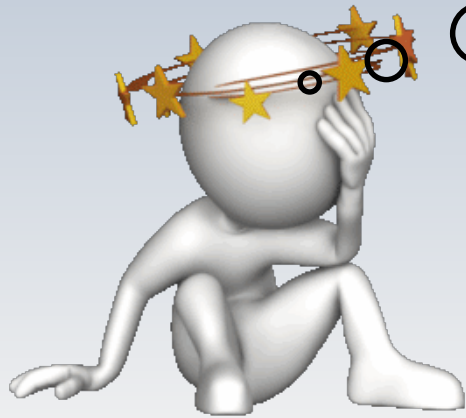
$$\Delta S = S(f) - S(i) = \int_i^f \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$



où  $Q_{rev}$  est la chaleur échangée de manière réversible et  $T$  est la température à laquelle l'échange se produit.



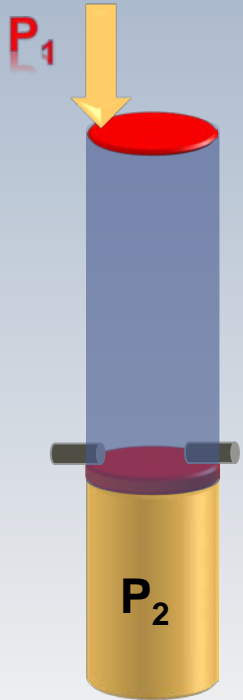
# Notions abstraites?



Réversible,  
Irréversible  
Entropie ?

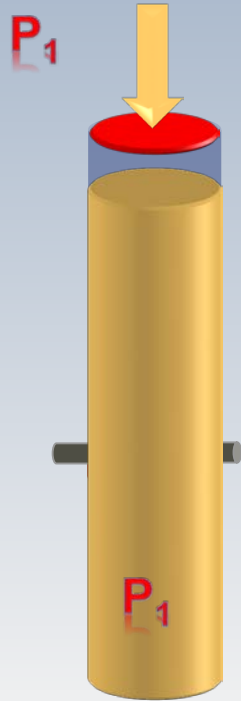


# Transformation irréversible

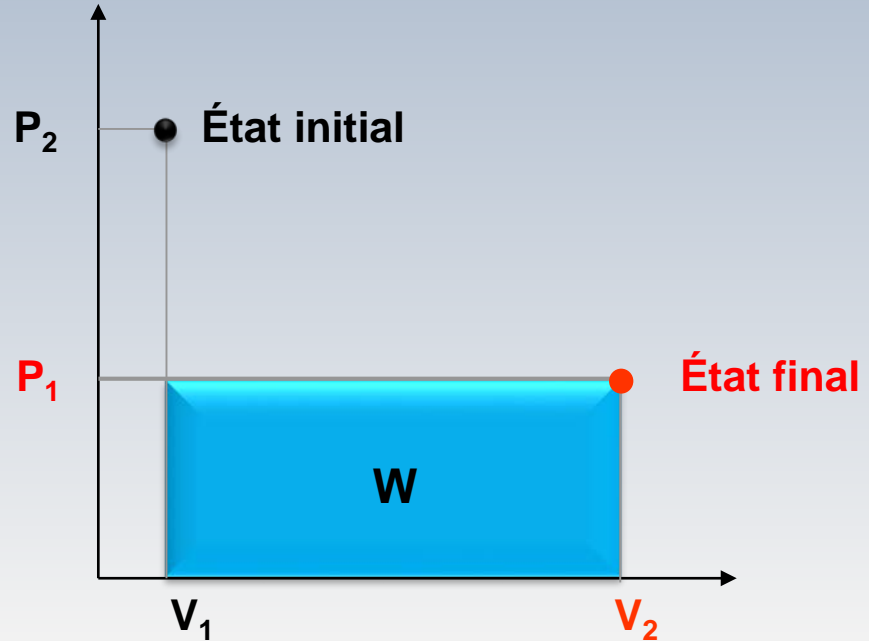


État initial

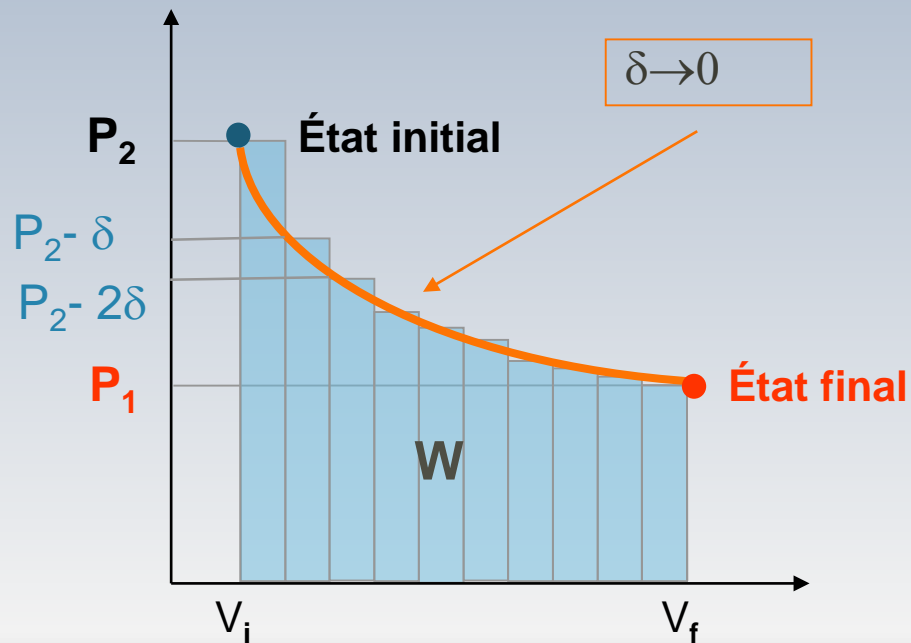
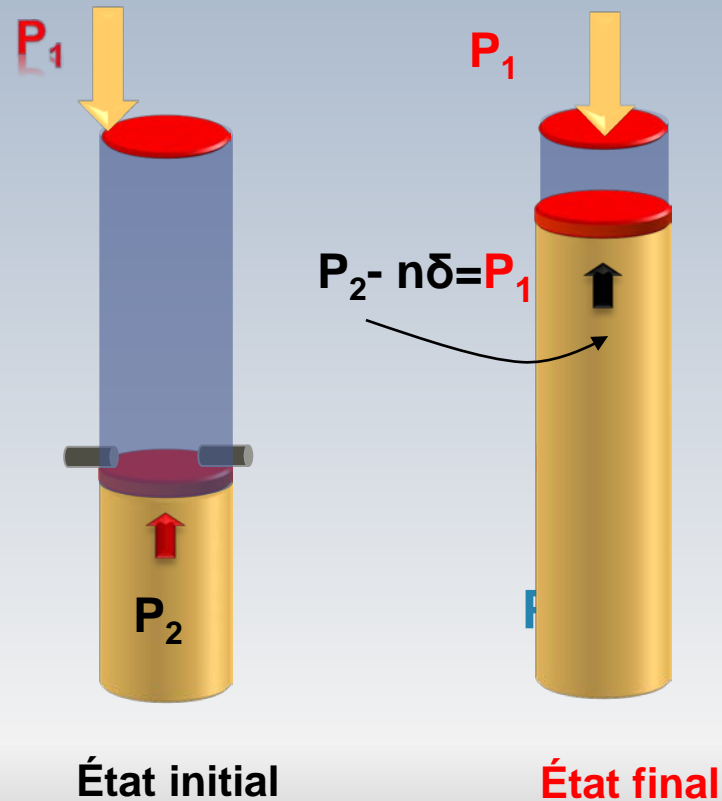
$$P_2 > P_1$$



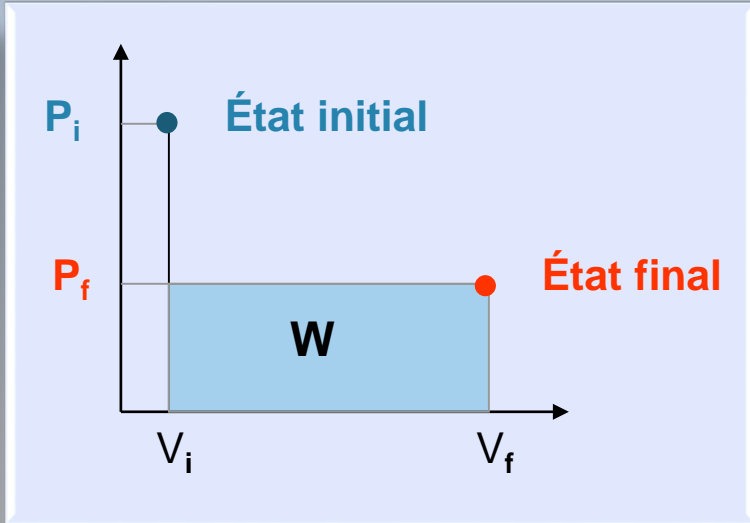
État final



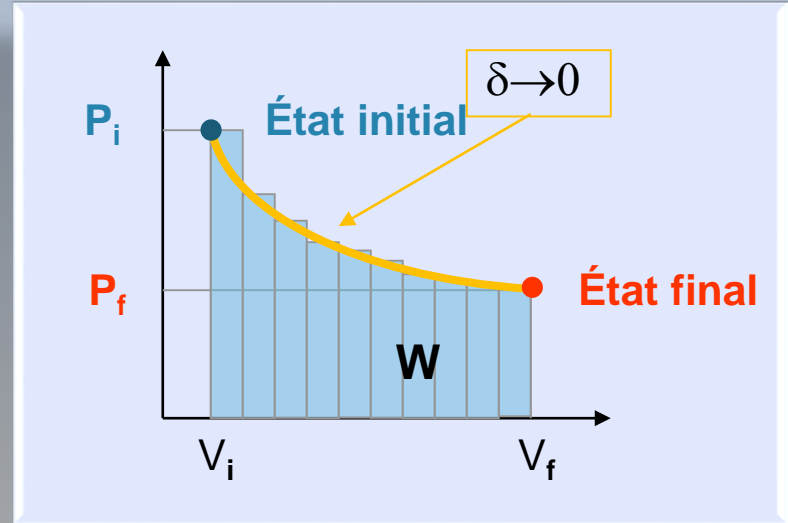
# Transformation réversible



# Réelle et idéale



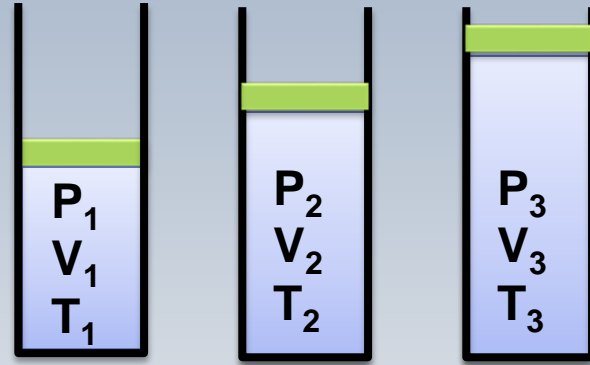
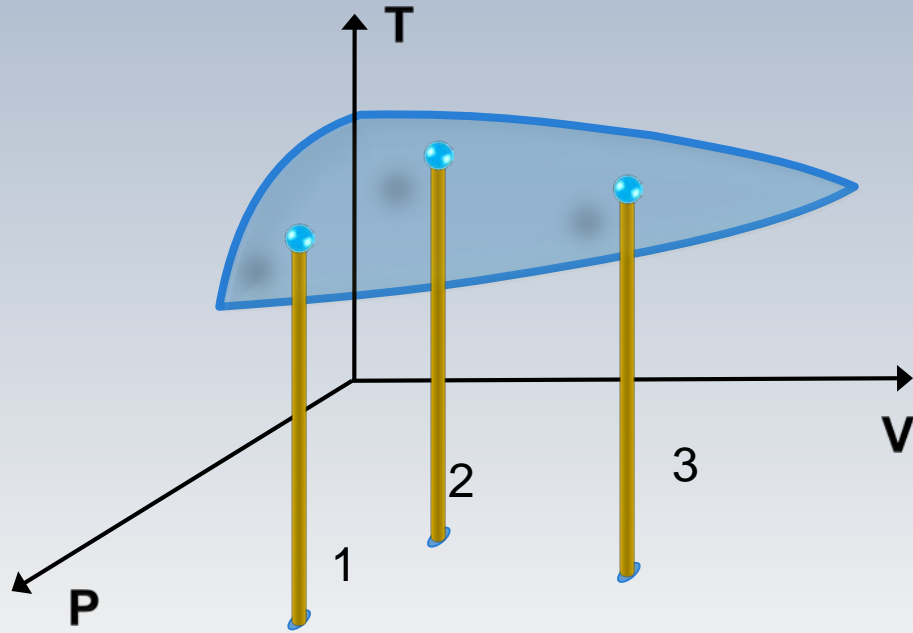
Irréversible



Réversible

La **qualité** de la transformation est différente: **Le travail produit est maximal** pour une transformation **réversible**

# Surface d'état



Ensemble de points à l'équilibre dans "l'univers thermodynamique"

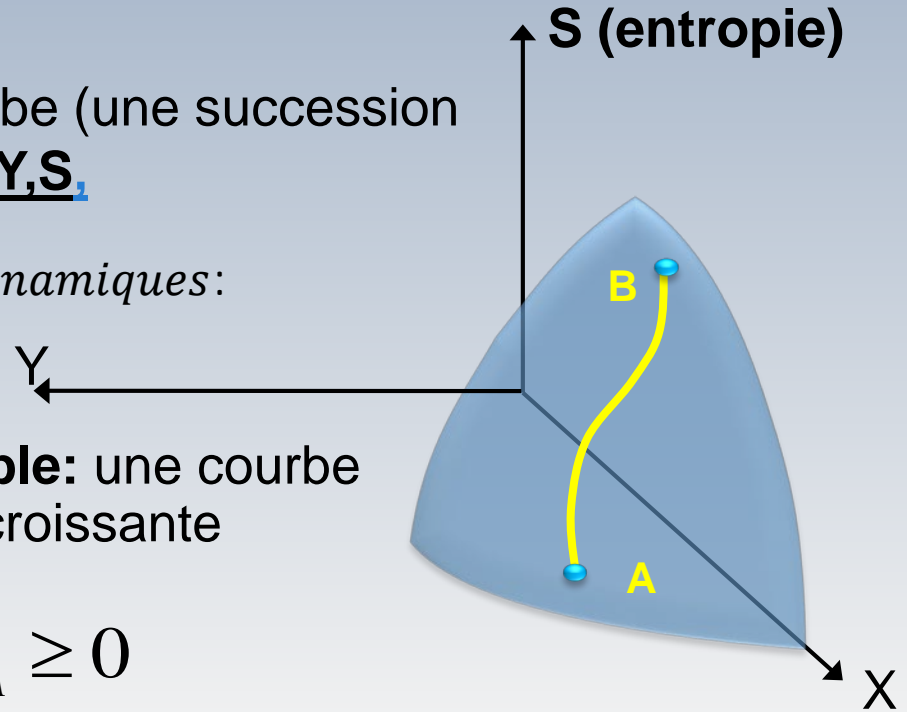
# Processus

Processus **quasi-statique**: une courbe (une succession d'états d'équilibre) **sur la surface X,Y,S**,

*(x, y) indiquent des variables thermodynamiques:*  
(pression, température, enthalpie, etc.,)

Processus **quasi-statique irréversible**: une courbe sur la surface, qui a lieu à entropie croissante

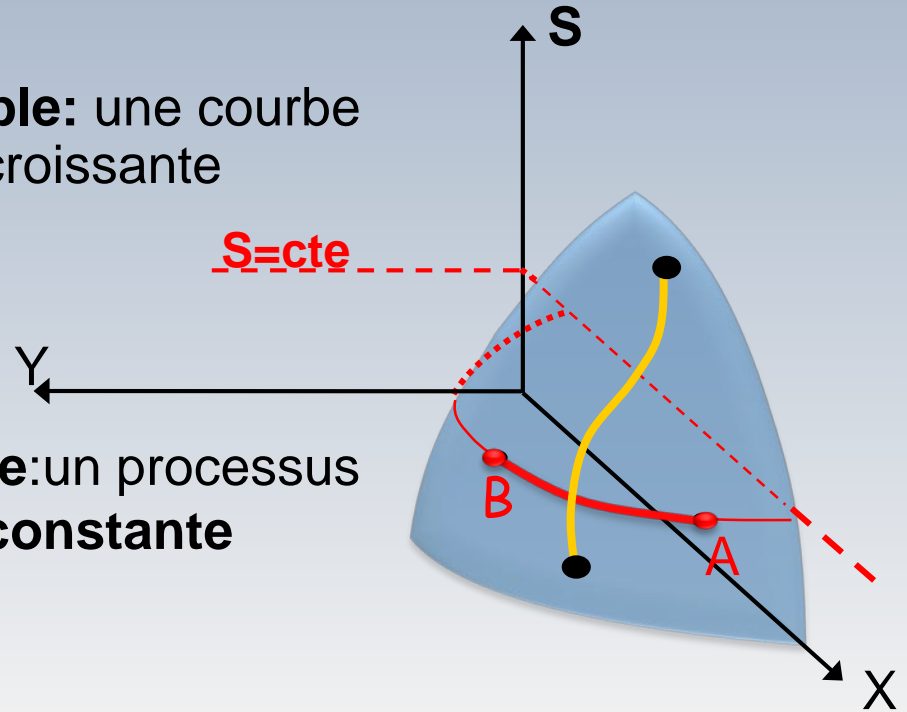
$$S_B - S_A \geq 0$$



# Processus

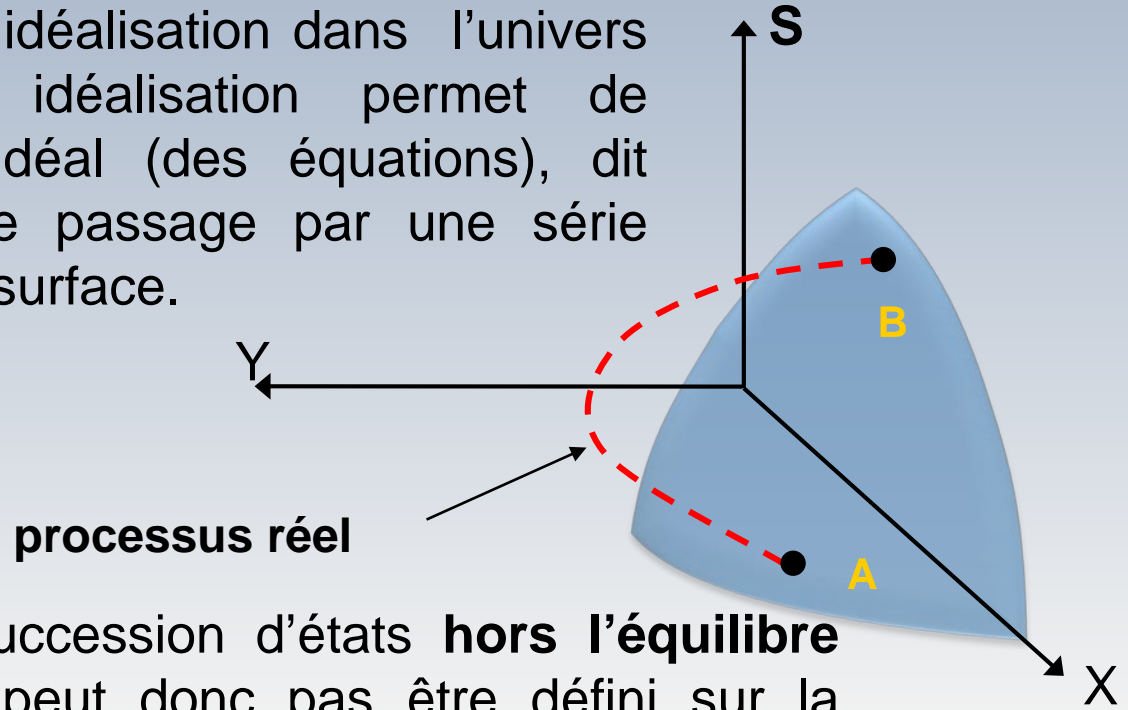
Processus **quasi-statique irréversible**: une courbe sur la surface, qui a lieu à entropie croissante

Processus **quasi-statique réversible**: un processus quasi-statique qui a lieu à **entropie constante**



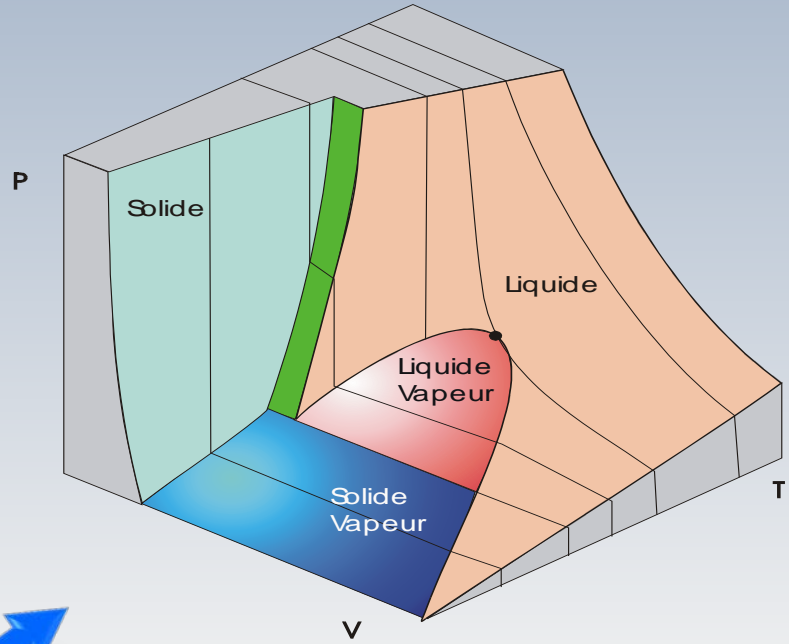
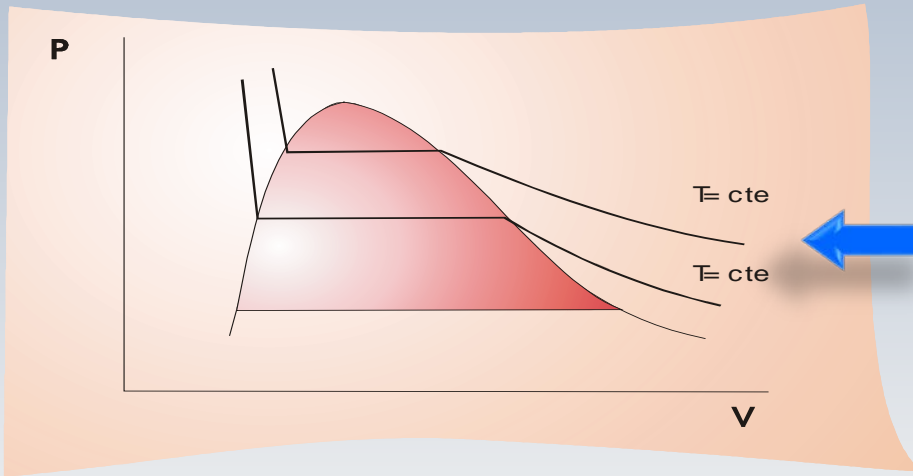
# Processus réel

La **surface d'état** est une idéalisation dans l'univers thermodynamique. Cette idéalisation permet de concevoir un processus idéal (des équations), dit quasi-statique, décrivant le passage par une série d'états d'équilibre sur cette surface.



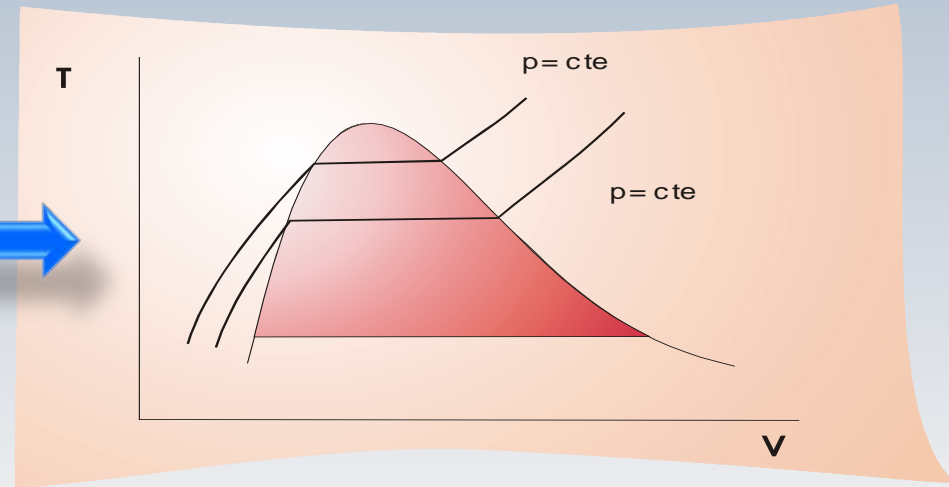
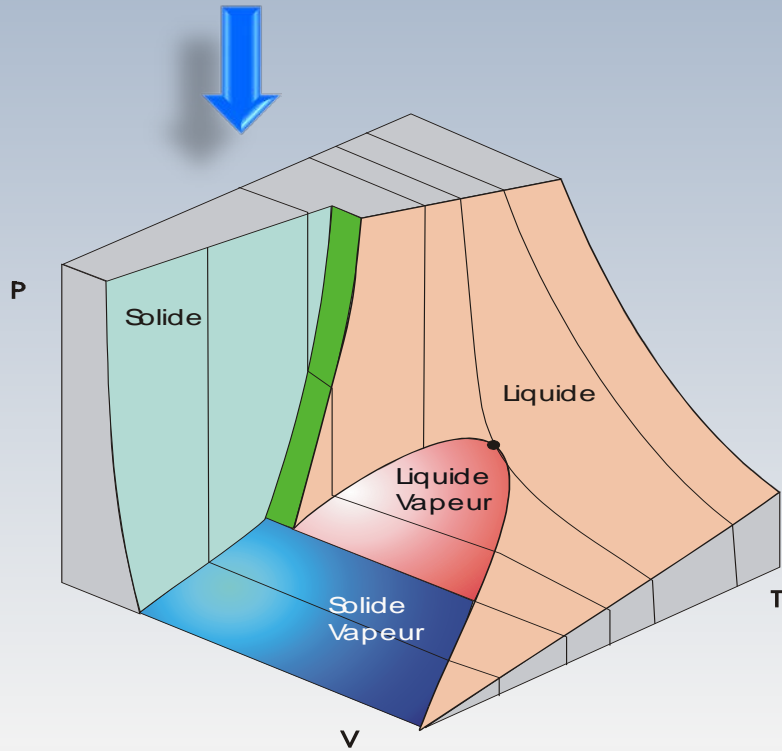
Un **processus réel** est succession d'états **hors l'équilibre thermodynamique**. Il ne peut donc pas être défini sur la surface d'état et **on ne connaît pas des équations** pour le décrire.

# Surface d'état P-V-T





# Surface d'état P-V-T



# Écoulements compressibles

# Équations des gaz parfaits

$$p = \rho RT$$

$R$  est le rapport entre la constante universelle  $R_u = 8314.3 \text{ J}/(\text{kmol K})$  et la masse moléculaire du gaz  $M$  :  $R = R_u / M$

## Énergie interne $\hat{u}$

$$c_v = \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial T} \right)_v = \frac{d\hat{u}}{dT}$$

$$\hat{u}_2 - \hat{u}_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v dT$$

Gaz parfait:  $\hat{u} = \hat{u}(T)$

# Équations des gaz parfaits

**Enthalpie  $h$**

$$h = \hat{u} + \frac{p}{\rho}$$

$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{dh}{dT}$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT$$

**Relations utiles**

Gaz parfait:  $h = h(T)$

$$c_p - c_v = R; \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}; \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

# Équation Tds (I<sup>er</sup> + II<sup>ème</sup> principe)

Définition d'entropie

$$ds = \frac{\delta q}{T} \quad (\delta q = \delta q_{rev}) \quad \Rightarrow \quad \delta q = T ds$$

le premier principe

$$d\hat{u} = \delta q - p dv$$

s'écrit donc

$$d\hat{u} = T ds - p dv$$



# Équation Tds (I<sup>er</sup> + II<sup>ème</sup> principe)

$$(dh = d\hat{u} + pdv + vdp)$$

$$d\hat{u} = Tds - pdv \quad \Rightarrow \quad dh = Tds + vdp$$

donc,

$$Tds = d\hat{u} + pdv = dh - vdp$$

**C'est une formulation du premier principe en fonction de variables d'état uniquement!**

# Gaz parfait

## Variation d'entropie

Pour un gaz parfait, on peut utiliser les équations  $Tds$  pour exprimer la variation d'entropie en fonction de la température, la pression et/ou le volume. En particulier:

$$dh = c_p dT \quad \Rightarrow \quad Tds = dh - vdp \quad \Leftarrow \quad v = RT/p$$



$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

$$c_p = \text{cnste}$$

# Gaz parfait

## Entropie $s$

( $C_p \cong \text{constante}$  et  $C_v \cong \text{constante}$ )

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right)$$


$c_v = \text{cnste}$



# Gaz parfait

Pour établir des équations pratiques (de rendement), l'hypothèse d'un **écoulement isentropique** est souvent utilisée en dynamique des gaz. Dans ce cas, à  $c_p$  ( $c_v$ )  $\cong$  *cnste*.

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \quad \leftarrow \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$


$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right)_{s=const.} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

**Relation isentropique pour un gaz parfait à  $c_p(c_v) = \text{cste}$ .**

# Gaz parfait, $c_p = \text{cnste.}$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{s=\text{const.}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$



**Processus isentropique**

# Grandeur d'arrêt

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} + \cancel{gz_1} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} + \cancel{gz_2} - \cancel{Q} + \cancel{W_s} \quad \rightarrow \quad h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = cste$$

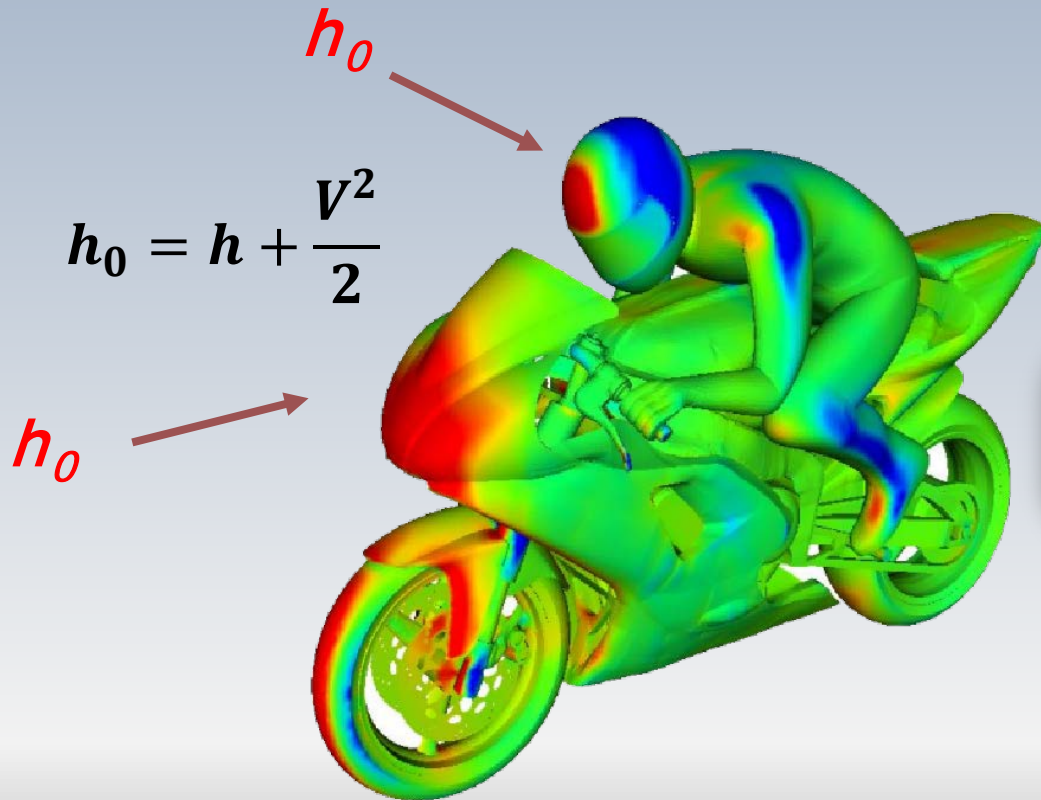
**Grandeur d'arrêt:** on appelle état d'arrêt, total, ou de stagnation, l'état que prend toute variable de l'écoulement si on l'amenait au repos de manière adiabatique et réversible, donc isentropique

On note par  $h_0$  **l'enthalpie d'arrêt, totale, ou de stagnation.** Elle représente la combinaison de l'énergie cinétique avec l'enthalpie

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

L'enthalpie totale se conserve même si l'écoulement est irréversible!

# Enthalpie totale

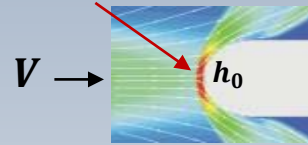


Au cours du processus d'arrêt, l'énergie cinétique est convertie en enthalpie!

# Température totale

Enthalpie totale

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$



Température totale

$$\int_h^{h_0} dh = \int_T^{T_0} c_p dT$$



$$h_0 - h = c_p(T_0 - T)$$

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

La température  $T_0$  reçoit le nom de: stagnation, arrêt, ou totale

# Température totale

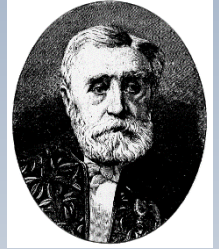
$$h_0 = h + \frac{v^2}{2}$$

$$T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p}$$

On note que ces relations sont **valables pour tout écoulement adiabatique**. Donc, aussi valide dans un écoulement avec génération d'entropie (frottement), du moment qu'il n'y a pas transfert de chaleur.

# Température totale et nombre de Mach

Au 19<sup>ème</sup> siècle, *de Saint Venant* a introduit une formule qui relie la température adimensionnelle  $T_0/T$  au nombre de Mach



Jean Claude Barré  
de Saint-Venant  
1797-1886

$$Ma = \frac{V}{a}$$

$$a = \sqrt{\gamma RT}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$



$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$



$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$$

Équation de Saint-Venant

# Température totale et nombre de Mach

L'équation de J.C. Barré de Saint-Venant est pratique puisqu'elle relie directement la température totale au nombre de Mach en un point de l'écoulement.

Elle permet aussi d'établir des relations pour d'autres variables, telle que la pression et la masse volumique

Ces relations sont trouvées pour des processus isentropiques



# $P_0, \rho_0, T_0 - P, \rho, T:$

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\gamma/\gamma - 1}$$

isentropique ↑

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{1/\gamma - 1}$$

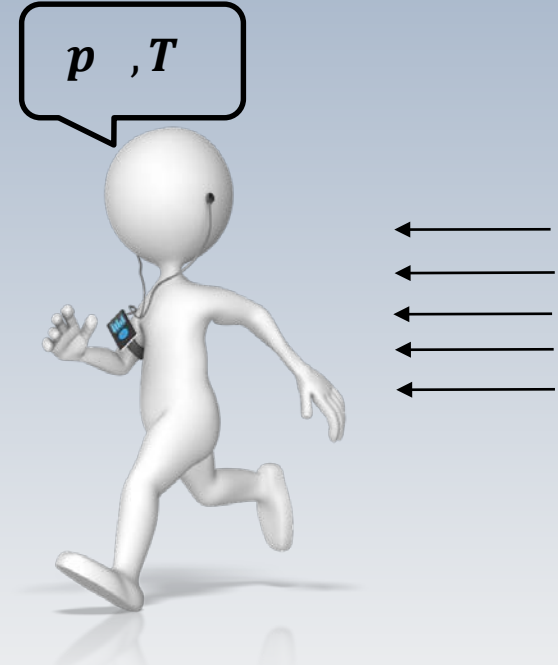
isentropique

isenthalpique

$$\left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right] = \frac{T_0}{T} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma - 1} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\gamma - 1/\gamma}$$

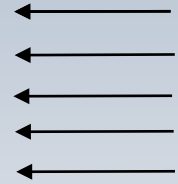
Formule ``trois pour un''

# Conditions statiques $p, \rho, T$



Les conditions **statiques** correspondent à celles qu'on enregistrerait si on se déplaçait à la même vitesse que l'écoulement

# Conditions totales $p_0$ / $\rho_0$ / $T_0$



Les conditions **totales** correspondent à celles qu'on enregistrerait si on arrêta complètement l'écoulement

# Terminologie, résumé

**Pression statique/Température statique ( $p, T$ ):** : lecture de ces quantités dans un fluide, en mouvement ou pas.

**Pression d'arrêt/Température d'arrêt ( $p_0, T_0$ ):** propriétés obtenues lorsqu'un écoulement est ralenti et arrêté de manière isentropique (frottement nul et sans transfert de chaleur ).

Ces variables reçoivent aussi le nom de quantités **totales** de **stagnation** ou d'**arrêt**

Pour un écoulement incompressible  $p_0 = p + V^2/2$ . Le terme  $V^2/2$  reçoit le nom de **pression dynamique**



# Conditions critiques (M=1)

Par définition, les **quantités critiques** correspondent à un point de l'écoulement où la vitesse est sonique, soit **lorsque  $Ma=1$**

Des équations pour les quantités critiques peuvent facilement être établies grâce à la formule "trois pour un" en introduisant  $Ma=1$  dans cette expression:

$$Ma = 1 \rightarrow \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right] = \frac{T_0}{T} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\gamma-1/\gamma}$$

Les quantités critiques seront notées avec un astérisque

# Conditions critiques ( $M=1$ )

$$Ma=1 \quad \longrightarrow \quad T_0 = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right) \quad \longrightarrow \quad T_0 = T^* \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right)$$

$T^*$  température critique

$$\frac{T^*}{T_0} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)$$

$V^*$  vitesse critique

$$V^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} RT_0} = a^*$$

$a^*$  vitesse du son critique

# Conditions critiques (M=1)

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/\gamma-1} \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/\gamma-1} \quad \frac{T^*}{T_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \quad \frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Pour l'air avec  $\gamma=1.4$  on a

$$\frac{p^*}{p_0} = 0.5275, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0.6343, \quad \frac{T^*}{T_0} = 0.8316, \quad \frac{a^*}{a_0} = 0.9119$$

# Débit massique local = f(Mach, $\gamma$ )

Pour un écoulement unidimensionnel isentropique dans un passage, il est pratique d'exprimer **le débit massique  $\dot{m}$**  en fonction du nombre de Mach,

$$\dot{m} = \rho VA = \frac{p}{RT} VA \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \frac{p\gamma}{\gamma RT} VA = \frac{p}{\gamma RT} \gamma \boxed{aMa} A$$

$\downarrow$  (from  $\rho$ )       $\downarrow$  (from  $V$ )

$$\dot{m} = \frac{p}{\gamma RT} \gamma \sqrt{\gamma RT} Ma A = \frac{p}{\sqrt{\gamma RT}} \gamma Ma A \quad \boxed{\dot{m} = \frac{p}{\sqrt{\gamma RT}} \gamma Ma A} \quad \Rightarrow$$

$\downarrow$  (from  $\frac{p}{RT}$ )       $\downarrow$  (from  $a$ )



# Débit massique local = f(Mach, k)

$$\dot{m} = \frac{p}{\sqrt{kRT}} \gamma Ma A \quad \leftarrow \quad 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 = \frac{T_0}{T} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma - 1} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\gamma - 1/\gamma}$$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma \sqrt{\gamma} \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$



- Le débit massique (adimensionnel)  $\dot{m} \sqrt{RT_0} / p_0 A$  à une section donnée est fonction du nombre Mach en ce point. Il est référé aux **conditions de stagnation (ou d'arrêt) qui ne varient pas le long d'un écoulement isentropique**
- Si l'écoulement est **sonique au col** d'un passage, le **débit** massique est alors **maximal**: on dit alors que **l'écoulement est bloqué (choked)**

# Remarque

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = Ma\sqrt{\gamma} \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$



Connaissant le nombre de Mach, on peut trouver facilement le débit. Par contre, si l'on connaît le débit, il faut résoudre une équation non linéaire pour trouver le nombre de Mach

# Blocage sonique (débit max)

Lorsque l'écoulement est bloqué ( $Ma=1$  et  $A = A^*$ ) la formule précédente devient :

$$\dot{m}_{\max} = \rho^* A^* V^* = p_0 A^* \sqrt{\frac{\gamma}{RT_0} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$



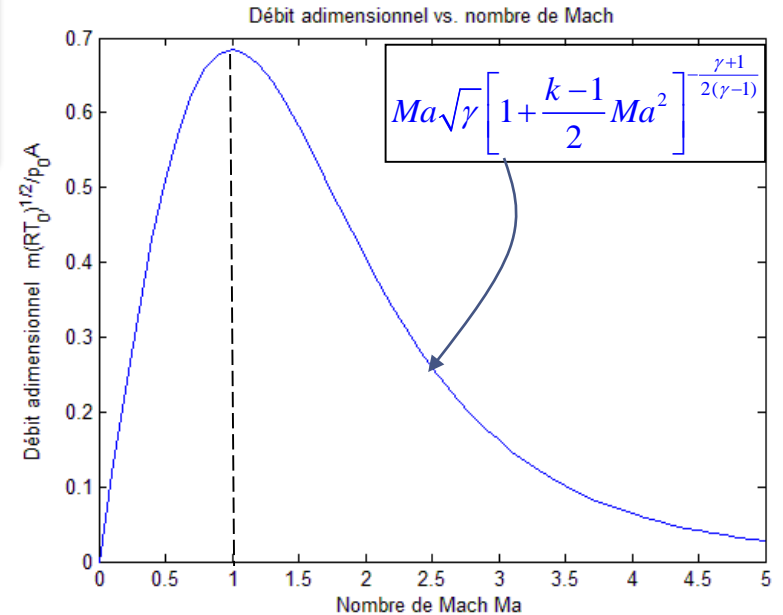
On note que **le débit massique** peut être facilement déterminé en fonction des **conditions de stagnation** ou d'arrêt (indice 0) et de **l'aire critique**  $A^*$

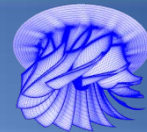
# Débit massique limite (bloqué)

9.04 Écoulement...

Pour l'air ( $\gamma=1.4$ ), cette formule devient:

$$\dot{m}_{\max} = 0.6847 \rho_0 \sqrt{RT_0} A^* = \frac{0.6847 p_0}{\sqrt{RT_0}} A^*$$





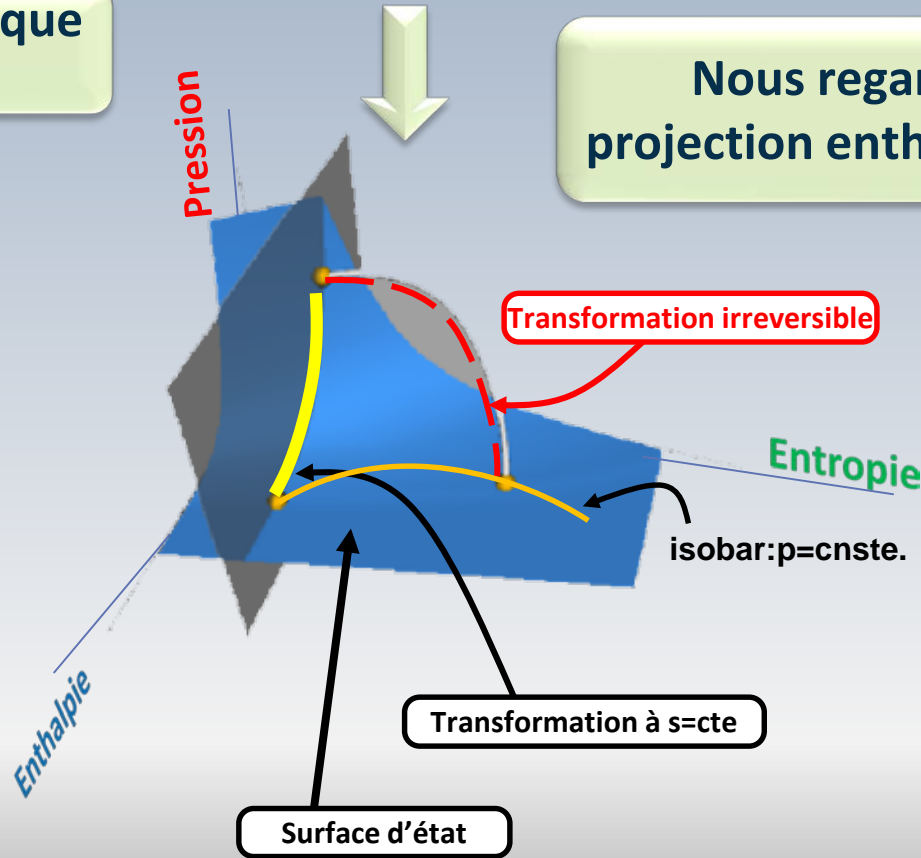
# Le diagramme h-s

# L'espace $h,s,p$

La thermodynamique est 3D



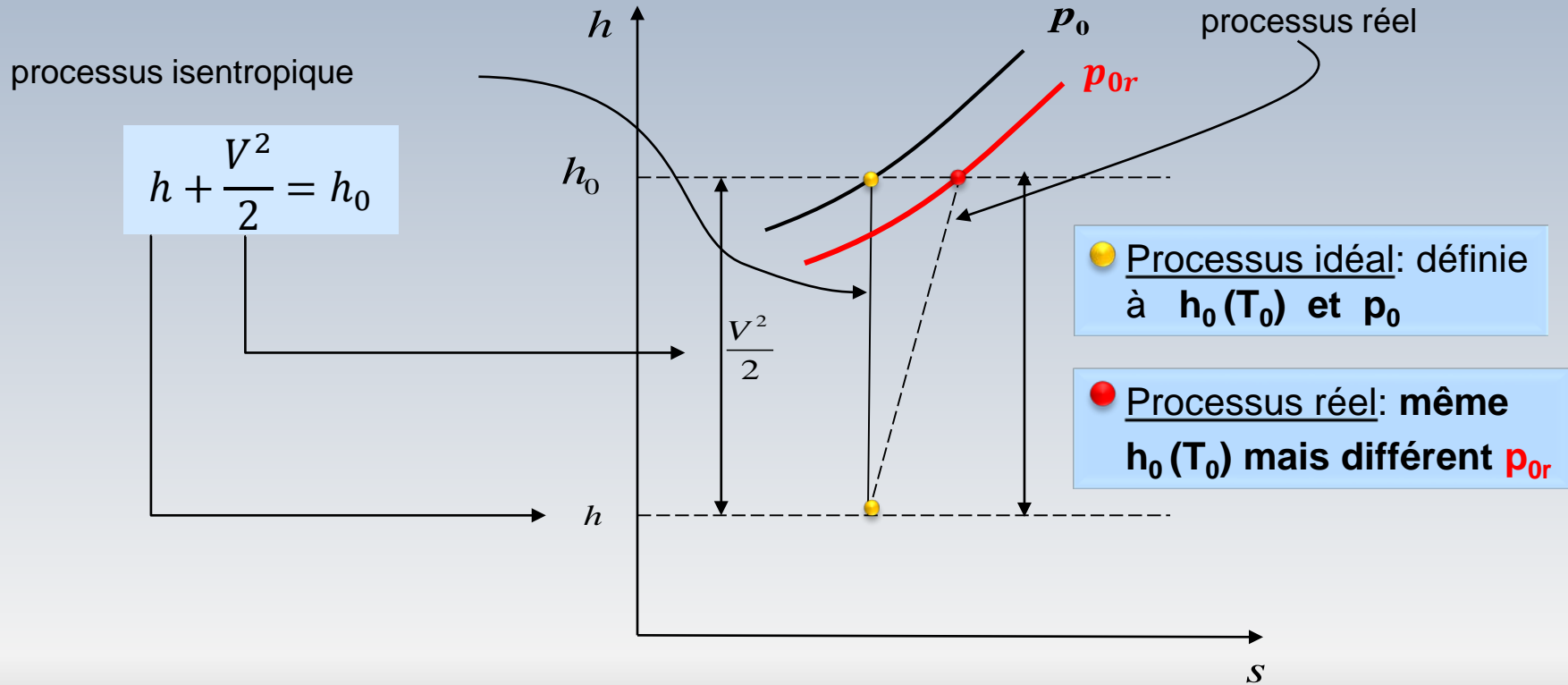
Nous regarderons la projection enthalpie-entropie



# Le diagramme h-s

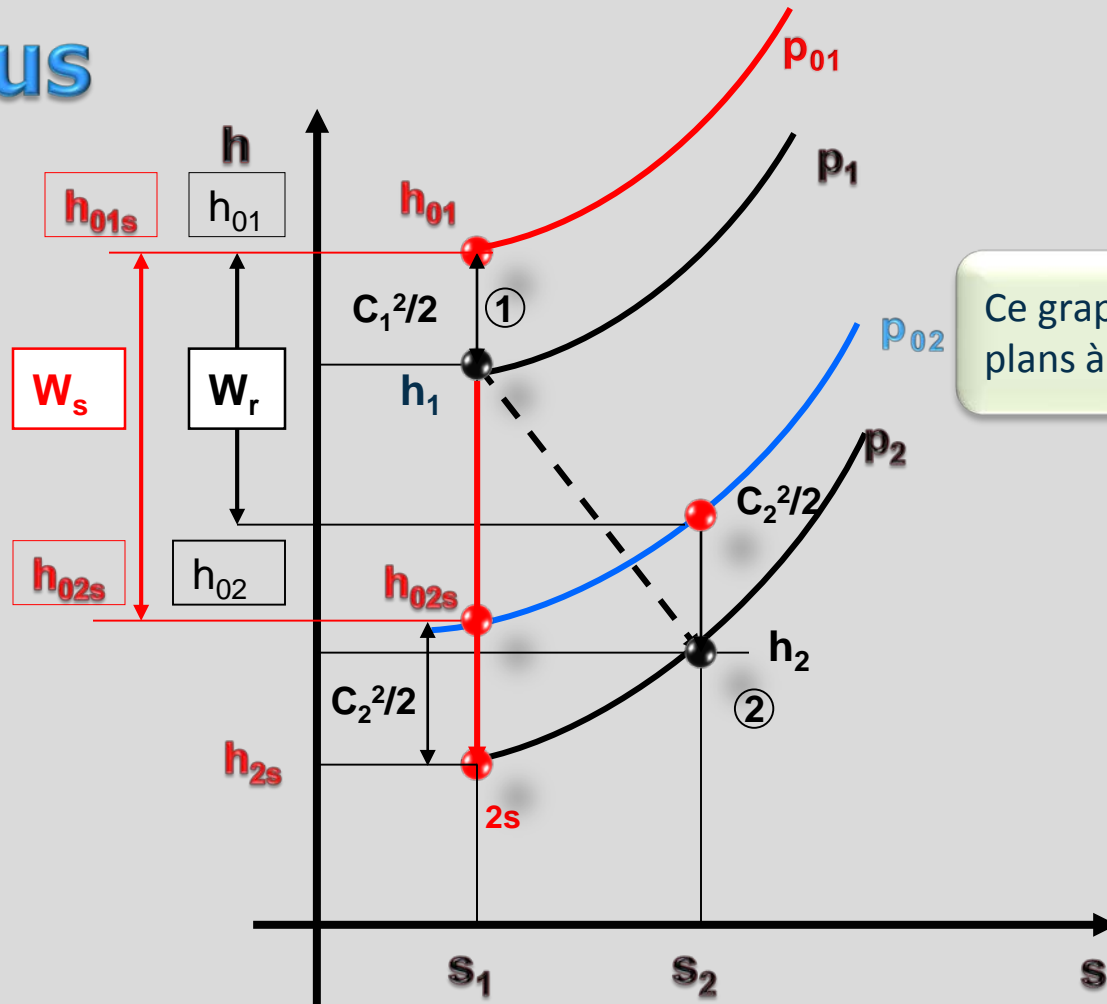
- **Le diagramme h-s** est utilisé pour représenter les transformations dans les turbomachines
- Dans **le plan h-s** on peut facilement visualiser et comparer les variations d'enthalpie entre une transformation réelle et la transformation idéale

# Écoulement: isentropique et adiabatique

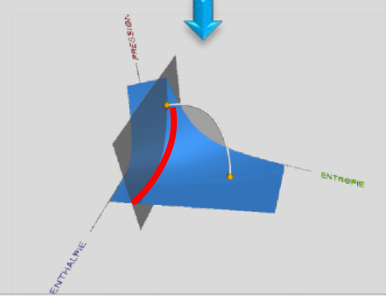




# Processus



Ce graphique  $h-s$  comprend 4 plans à  $p=cnste$ ;  $p_1, p_{01}, p_2, p_{02}$



# Rendement isentropique

## Turbine

$$\eta_s = \frac{\text{travail disponible dans l'arbre}}{\text{énergie théorique du fluide}} = \frac{W_r}{W_s}$$

## Compresseur

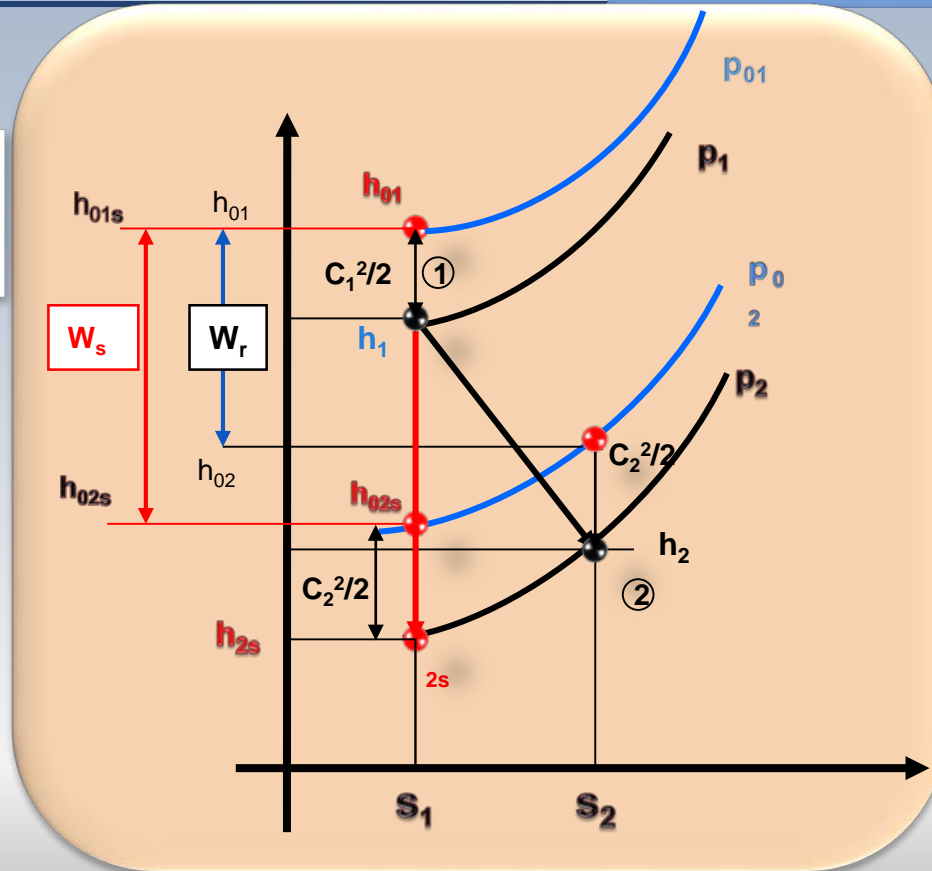
$$\eta_s = \frac{\text{énergie du fluide}}{\text{énergie fourni par l'arbre}} = \frac{W_s}{W_r}$$

# Turbine

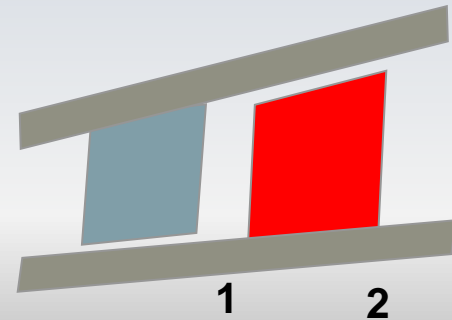
$$W_r = h_{01} - h_{02}$$

$$W_s = h_{01} - h_{02s}$$

$$W_r < W_s$$



$$\eta_{ttT} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$

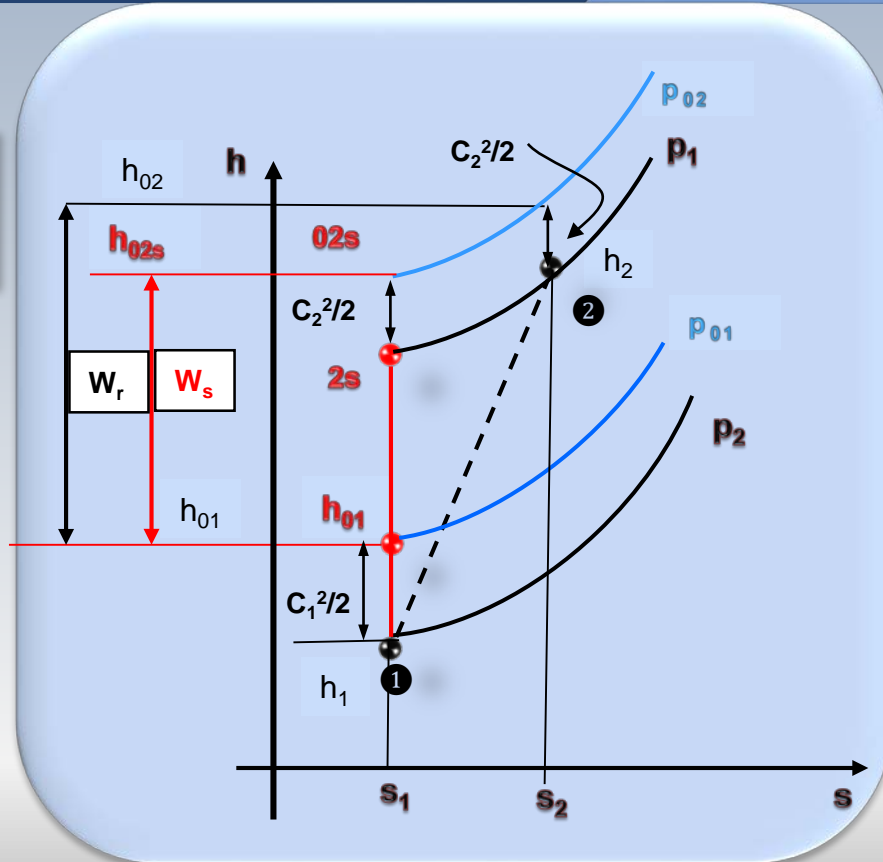


# Compresseur

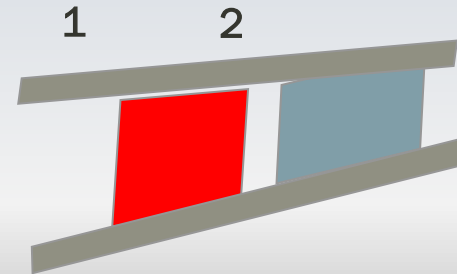
$$W_s = h_{02s} - h_{01}$$

$$W_r = h_{02} - h_{01}$$

$$W_r > W_s$$



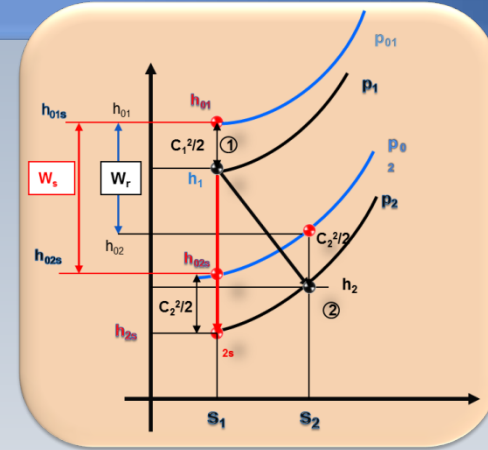
$$\eta_{ttC} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$



# Rendement total-à-total

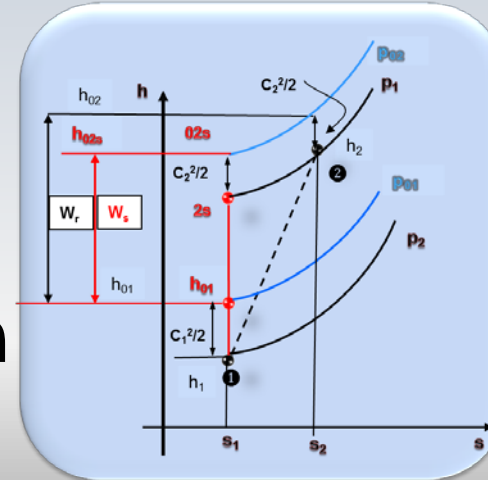
Turbine

$$\eta_{ttT} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$



Compresseur

$$\eta_{ttC} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$



Nous travaillerons avec cette définition

# Total-à-statique et Stat-à-total

**Turbine**

$$\eta_{tt} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{2s}}$$

**Compresseur**

$$\eta_{tt} = \frac{h_{2s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

# Synthèse de formules

## Rendement Turbine

$$\eta_{ttT} = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}}$$

## Débit massique

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = Ma\sqrt{\gamma} \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

## Rend. compresseur

$$\eta_{ttC} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}}$$

## Écoulement isentropique

$$\left[ 1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2 \right] = \frac{T_0}{T} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\gamma-1/\gamma}$$

## Température Totale

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}$$

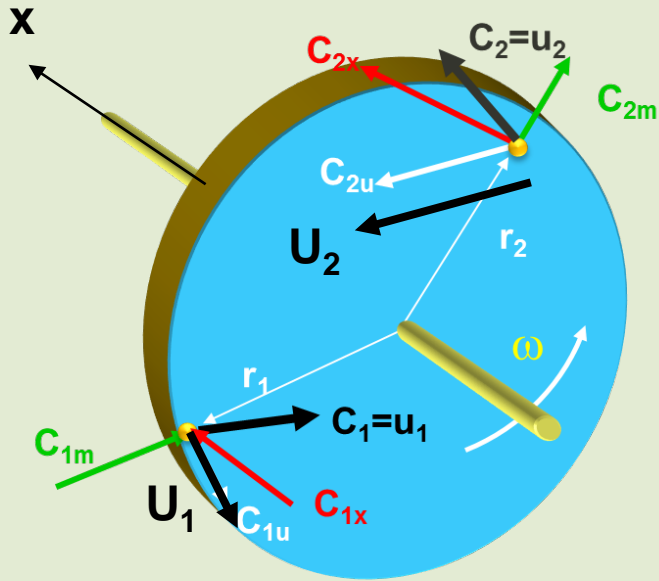
## Processus isentropique

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right)_{s=const.} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

## Gaz parfait

$$p = \rho RT$$

# Équations 1D à l'état stationnaire



$$\dot{W} = \dot{m}(c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

$$(h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1)$$

$$\dot{m} = \rho_1 c_{1x} A_1 = \rho_2 c_{2x} A_2$$

Dans cette formule, on considère que les aires d'entrée et de sortie sont dans un plan normal à l'axe des  $x$

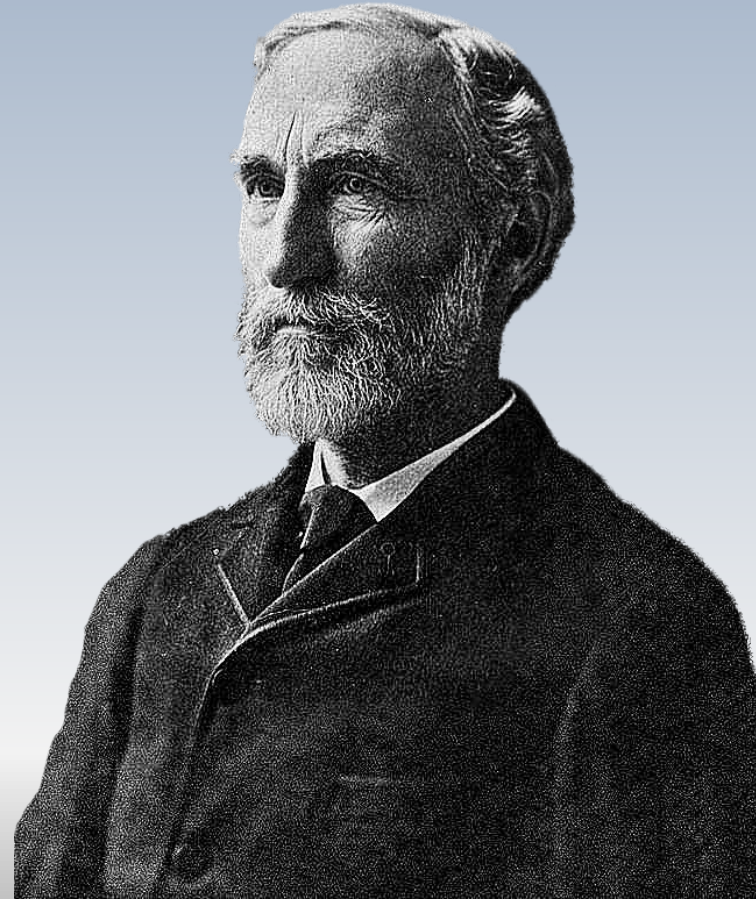


**Rendement polytrophique**

# Travail Polytropique

L'équilibre thermodynamique  
correspond au maximum de  
l'entropie

J. Willard Gibbs



# Relation de Gibbs

Pour une turbomachine (système ouvert) nous pouvons calculer le travail utilisant la relation  $Tds$  de Gibbs.

$$\delta q = Tds = dh - vdp \quad \rightarrow \quad \int_1^2 Tds = h_2 - h_1 - \int_1^2 vdp$$

Une turbomachine (thermique) est considérée comme étant adiabatique ( $\delta q=0$ ) et pour laquelle la variation d'énergie potentielle est négligeable

# Relation de Gibbs et travail

Lorsque  $\delta q = Tds = 0$ , l'intégration de  $Tds = dh - vdp$  entre les états d'arrêt 01 et 02 (entrée et sortie de la machine) conduit à,

$$\delta q = Tds = 0 = dh - vdp \quad \rightarrow \quad \Delta h_0 = h_{02} - h_{01} = \int_{01}^{02} vdp$$

D'autre part, la 1ère loi pour un système ouvert mène à

$$\Delta h_0 = h_{02} - h_{01} = \dot{Q} - \dot{W} / \dot{m} = -W$$

# Travail isentropique

Alors,

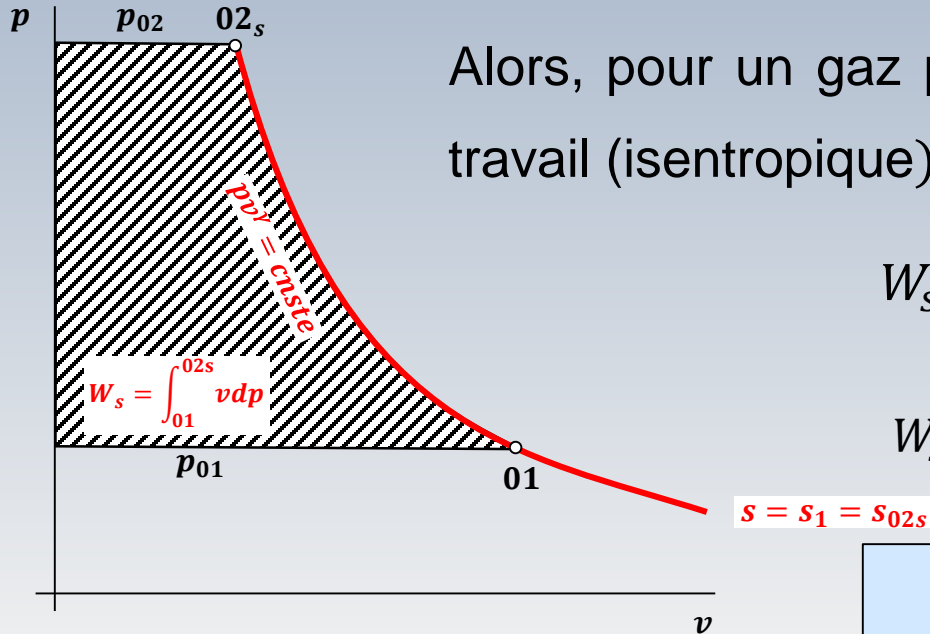
$$W = - \int_{01}^{02} v dp$$

Si le processus, une compression par exemple, est **isentropique** ( $p v^\gamma = \text{cnste}$ ), il est représenté par la ligne 01-02s illustrée dans le plan  $p - v$  sur la figure suivante. Dans ce cas, le travail correspond à la surface hachurée comprise entre l'axe  $p$ , la ligne 01-02s et les isobares  $p_{01}$  et  $p_{02}$

# Travail isentropique

$$\left(\frac{T_{02s}}{T_{01}}\right) = \left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

isentropique



Alors, pour un gaz parfait avec  $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = \text{conste}$ , le travail (isentropique)  $W = - \int_{01}^{02s} v dp$ , devient

$$W_s = h_{02s} - h_{01} = c_p (T_{02s} - T_{01})$$

$$W_s = \frac{\gamma - 1}{\gamma} R T_{01} \left( \left( \frac{T_{02s}}{T_{01}} \right) - 1 \right)$$

$$W_s = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)$$

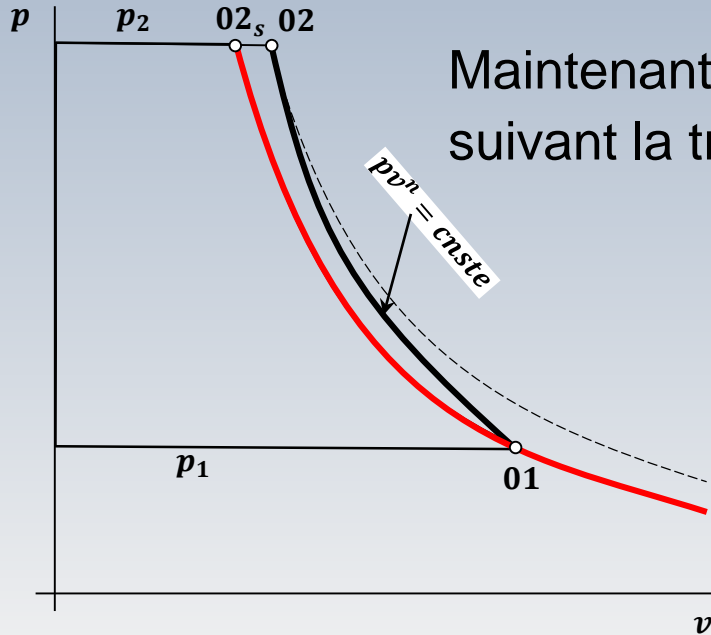
# Travail polytrophique


En réalité, bien que l'on puisse considérer  $\delta q = 0$ , il y aura un accroissement d'entropie produit par le frottement visqueux. Toujours pour le cas d'une compression, on pourra imaginer la transformation réelle représentée par la ligne 01-02.

De manière générale on peut prétendre qu'elle s'effectue de façon *polytrophique* suivant l'équation  $pv^n = \text{cnste}$ .

On note que lors de la transformation on a passé du niveau d'entropie  $s_{01}$  à un niveau supérieur d'entropie  $s_{02}$

# Travail polytropique



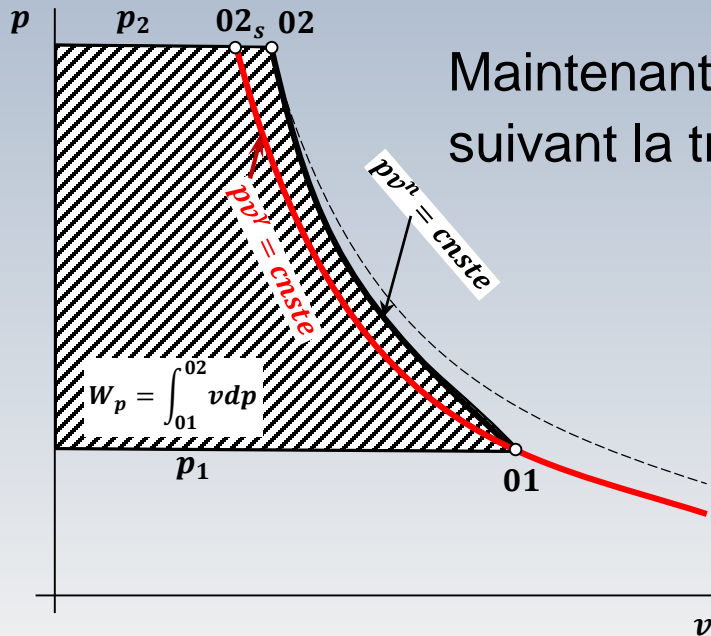
Maintenant, le travail polytropique  $W = \int_{01}^{02} v dp$ ,  
suivant la transformation 01-02 devient 


$$s = s_{02} > s_{01} = s_{02s}$$

$$s = s_{01} = s_{02s}$$



# Travail polytropique



Maintenant, le travail polytropique  $W = \int_{01}^{02} v dp$ ,  
suivant la transformation 01-02 devient 

$$s = s_{02} > s_{01} = s_{02s}$$

$$s = s_{01} = s_{02s}$$

# Travail Polytropique

$$pv^n = \text{cnste.} \quad \longrightarrow \quad W_p = \int_{01}^{02} v dp \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \frac{T_{02}}{T_{01}} = \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \end{array}$$

$$W_p = \frac{n}{n-1} (p_{02} v_{02} - p_{01} v_{01}) = \frac{nR}{n-1} (T_{02} - T_{01})$$

$$W_p = \frac{n}{n-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right)$$

# Travail effectif

polytropique

Pour un gaz parfait avec  $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$  le *travail effectif* entre deux états 01-02 est donné par

$$W_{eff} = c_p(T_{02} - T_{01}) = c_p T_{01} \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right)$$

et si l'on imagine une transformation polytropique décrite par la relation  $T_{02}/T_{01} = (p_{02}/p_{01})^{n-1/n}$  on trouve:

$$W_{eff} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right)$$

# Alors...

$$W_s = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)$$

Isentropique

$$W_{eff} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right)$$

Effectif

$$W_p = \frac{n}{n - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right)$$

Polytropique

# Rendement polytropique

Turbine

Dans le contexte courant, on définit le **rendement polytropique** comme un rapport entre le travail polytropique théorique et le travail effectif.

Alors pour une **turbine**, par la relation  $\eta_p = W_{eff}/W_p$ .



$$\eta_p = \frac{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right)}{\frac{n}{n - 1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right)}$$



$$\eta_p = \frac{(n - 1)/n}{(\gamma - 1)/\gamma}$$

Relation entre le rendement et l'exposant de la polytropique

# Rendement polytropique

Turbine

Pour une **turbine**, le résultat  $\eta_p = \frac{(n-1)/n}{(\gamma-1)/\gamma}$ , permet d'établir une relation entre le rendement isentropique  $\eta_s = W_{eff}/W_s$  et le rendement polytropique  $\eta_p = W_{eff}/W_p$ . Notamment,

$$\frac{\eta_s}{\eta_p} = \frac{\frac{n}{n-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right)}{\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{01}}{\rho_{01}} \left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)}$$



$$\eta_s = \frac{\left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{\eta_p(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)}{\left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)}$$

$$\eta_s > \eta_p \text{ Turbine}$$

# Rendement polytropique

Compresseur

Pour un **compresseur**, on peut obtenir de manière analogue

$$\eta_p = \frac{(\gamma - 1)/\gamma}{(n - 1)/n}$$



Relation entre le rendement et l'exposant de la polytropique



$$\eta_s < \eta_p \text{ Compresseur}$$

$$\eta_s = \frac{\left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right)}{\left( \left( \frac{p_{02}}{p_{01}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma \eta_p} - 1 \right)}$$

Trop des formules!



# Deux rendements?

Pourquoi utilise-t-on deux rendements?






# Deux rendements?

Pour le cas d'un **compresseur**\* l'équation du rendement (isentropique) total-à-total peut s'écrire

$$\eta_{tt} = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \quad \rightarrow \quad \eta_{tt} = T_{01} \left[ \frac{T_{02s}/T_{01} - 1}{T_{02} - T_{01}} \right]$$

$$\eta_{tt} = \frac{T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \left[ (p_{02}/p_{01})^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$


\* L'analyse est similaire pour une turbine;  $c_p = \text{cnste}$ .

# Rapport de pression et $\eta$ isentropique

L'expression précédente indique que le rendement isentropique (total-à-total) dépend du **rapport de pression**.

Alors, la comparaison entre deux machines semblables sur la base du rendement isentropique (total-à-total) est difficile si chacune d'elles opère à un rapport de pression différent.

On note que pour les turbomachines à étages multiples, le rendement isentropique changera au fur et à mesure que le nombre d'étages augmente.

# Rapport de pression et $\eta$ isentropique

Par opposition au rendement isentropique, **le rendement polytropique est similaire** (au point de design), pour des turbomachines qui opèrent à des rapports de pression différents. Cet indice, moins dépendant du nombre d'étages, est donc utilisé pour définir la qualité d'une machine.

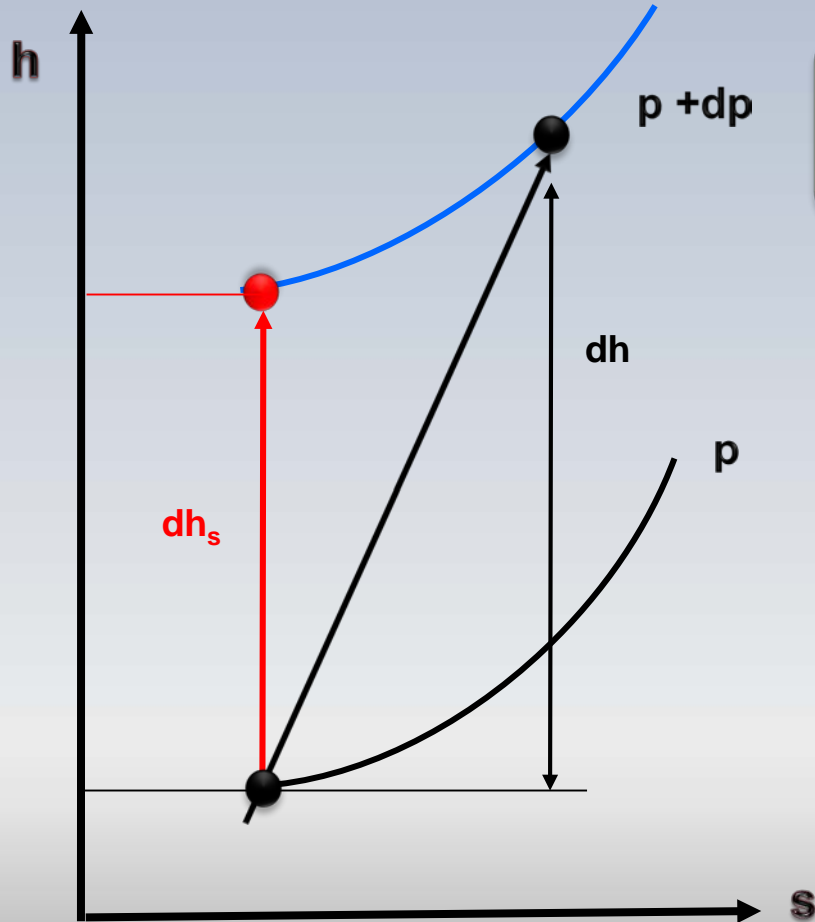


# Rendement polytropique II

Étant donné que les turbomachines thermiques modernes possèdent plusieurs étages, à la limite on peut imaginer qu'une compression (ou expansion) a lieu suivant une série d'étapes infinitésimales

Associé à ce concept, on interprète le rendement polytropique comme *le rendement isentropique d'un étage infinitésimal*

# Rendement Polytropique II



On regarde le rapport entre le travail réel et le travail idéal d'un étage infinitésimal

$$\eta_p = \lim \rightarrow \frac{dh_s}{dh}$$

Compresseur



# Relations polytropiques

Compresseur

$$\eta_p = \frac{dh_s}{dh} = \frac{dh_s}{c_p dT}$$

$$T ds = dh - v dp$$

Processus isentropique

$$T ds = dh_s - v dp$$

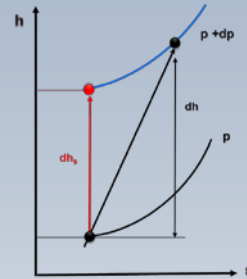
$$dh_s = v dp = \frac{dp}{\rho} = \frac{dp(RT)}{p}$$

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$\eta_p = \frac{dp(RT/p)}{c_p dT}$$

$$\int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p \eta_p} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R}{c_p \eta_p}}$$



# Relations polytropiques

Turbine

$$\eta_p = \frac{dh}{dh_s} = \frac{c_p dT}{dh_s}$$

$$T ds = dh - v dp$$

$$\eta_p = \frac{c_p dT/T}{R dp/p}$$

Processus isentropique

$$T ds = dh_s - v dp$$

$$dh_s = v dp = \frac{dp}{\rho} = \frac{dp(RT)}{p}$$

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$\int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{R\eta_p}{c_p} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R\eta_p}{c_p}}$$

# Relations polytropiques

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/c_p \eta_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma \eta_p}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R \eta_p / c_p} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\eta_p (\gamma-1) / \gamma}$$

**Compresseur**

$$\eta_p = \frac{(\gamma - 1) / \gamma}{(n - 1) / n}$$

**Turbine**

$$\eta_p = \frac{(n - 1) / n}{(\gamma - 1) / \gamma}$$



# Rendements polytropique-isentropique

Compresseur

$$\eta_s \leq \eta_p$$

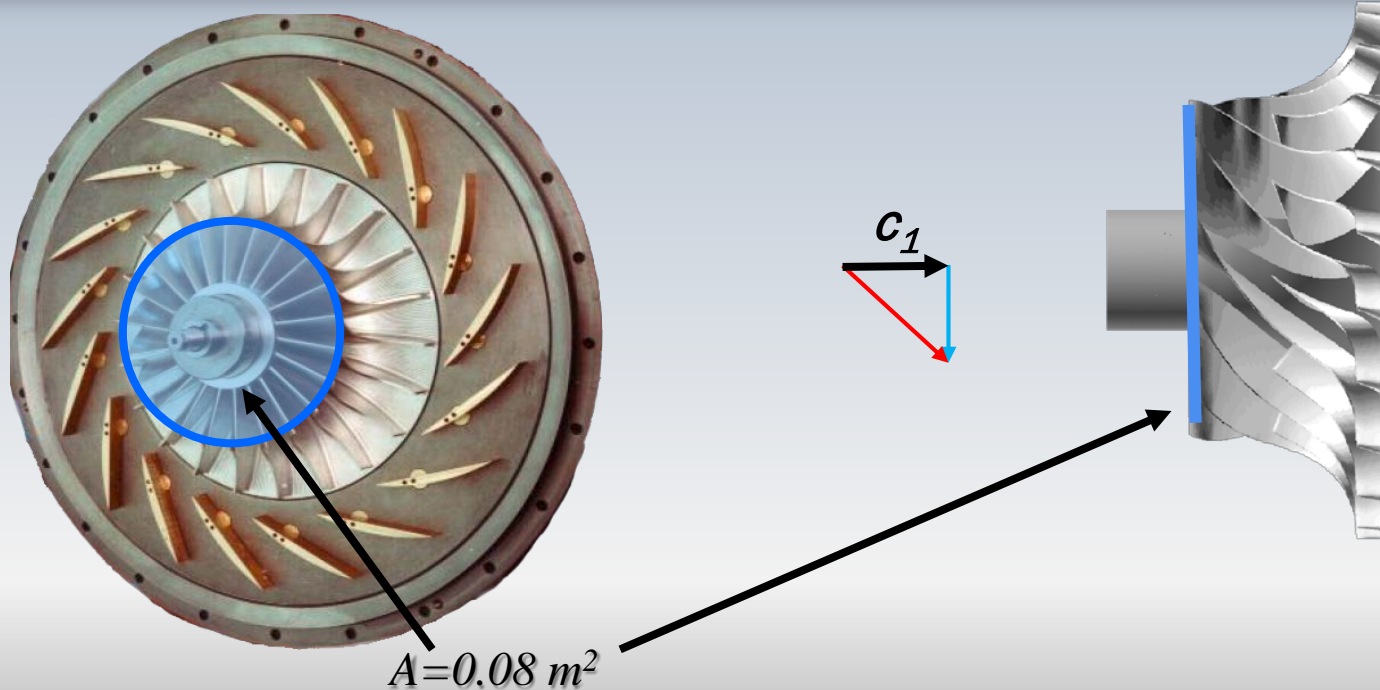
Turbine

$$\eta_s \geq \eta_p$$

$$\eta_s = \left( \frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} \eta_p - 1} \right)$$

$$\eta_s = \left( \frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)\eta_p/\gamma} - 1}{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1} \right)$$

À l'entrée du rotor d'un compresseur la vitesse moyenne est  $C_1=320 \text{ m/s}$ . L'aire de la section de passage est  $A=0.08 \text{ m}^2$ . La température et la pression de l'environnement autour du compresseur sont respectivement  $T=300\text{K}$  et  $P=100\text{kPa}$ . La puissance fournie au fluide est  $\dot{W}=300\text{kW}$ . Calculez:



1

- Les conditions de stagnation: température, pression et masse volumique à l'entrée du compresseur

2

- Le débit massique

3

- La pression de stagnation maximale possible à la sortie

Considérez un processus isentropique entre tout point de l'environnement et l'entrée du compresseur

Considérez que la vitesse  $c_1$  est alignée avec l'axe de l'arbre

Considérez l'air comme un gaz idéal avec  $R \sim 287(\text{J/kg-K})$  et  $c_p = 1010(\text{J/kg-K})$

Stagnation= Arrêt



$$c = 0$$

$$T = 300K$$

$$p = 100kPa$$

0

$$c_1 = 320 \text{ m/s}$$



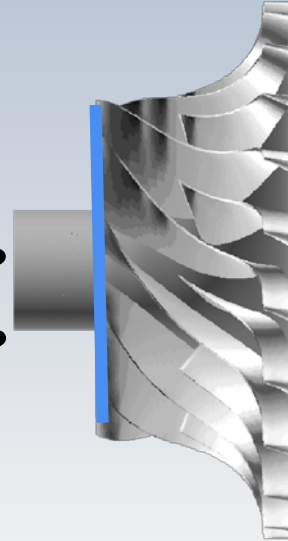
$$T_{01} = ?$$

$$p_{01} = ?$$

$$\rho_{01} = ?$$

1

$$\dot{m} = ?$$



$$p_{02}(\text{max}) = ?$$

2

$$\dot{W} = 300kW$$

$$C_1 = 320 \text{ m/s} \quad A = 0.08 \text{ m}^2$$

$$T = 300 \text{ K} \quad P = 100 \text{ kPa}$$

$$W = 300 \text{ kW}$$

$$R = 287 \text{ (J/kg-K)} \quad c_p = 1010 \text{ (J/kg-K)}$$

Conditions de stagnation à l'entrée du compresseur

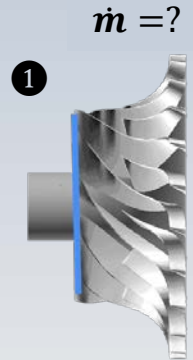
$$T_{01} = 300 \text{ K}, \quad p_{01} = 100 \text{ kPa} \rightarrow \rho_{01} = \frac{p_{01}}{RT_{01}} = 1.161 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Débit massique  $\dot{m} = \rho_1 c_1 A_1$  ?

$$T_{01} = T_1 + \frac{c_1^2}{2c_p}$$

Température  $T_1$

$$T_1 = T_{01} - \frac{c_1^2}{2c_p} = 300 - \frac{320^2}{2 \times 1010} = 249.3 \text{ K}$$



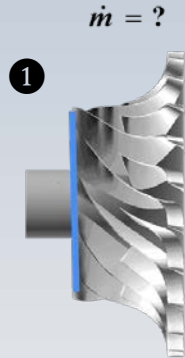
$C_f=320 \text{ m/s}$   $A=0.08 \text{ m}^2$   
 $T = 300\text{K}$   $P = 100\text{kPa}$   
 $W=300 \text{ kW}$   
 $R=287(\text{J/kg-K})$   $c_p = 1010(\text{J/kg-K})$

Pression  $p_1$

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \left( \frac{T_1}{T_{01}} \right)^{\frac{c_p}{R}} \rightarrow 100 \left( \frac{249.3}{300} \right)^{\frac{1010}{287}} = 51.90 \text{ kPa}$$

Masse volumique  $\rho_1$

$$\rho_1 = \left( \frac{p_1}{RT_1} \right) = \left( \frac{51.90}{287 \times 249.3} \right) = 0.726 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



$C_1=320 \text{ m/s}$   $A=0.08 \text{ m}^2$   
 $T = 300\text{K}$   $P = 100\text{kPa}$   
 $W=300 \text{ kW}$

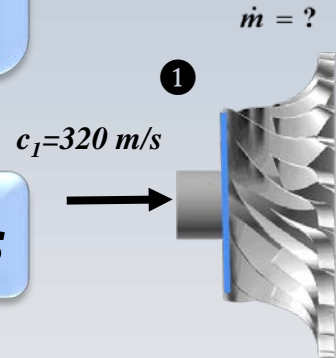
Masse volumique  $\rho_1$

$$\rho_1 = \left( \frac{p_1}{RT_1} \right) = \left( \frac{51.90}{287 \times 249.3} \right) = 0.726 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$T_1 = 249.3\text{K}$$

Débit massique

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 c_1 = 0.726 \times 0.08 \times 320 = 18.57 \text{ kg/s}$$



Voie alternative  $Ma = c_1 / \sqrt{\gamma RT_1}$

$$\frac{\dot{m} \sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma \sqrt{\gamma} \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right]^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

→  $\dot{m}$

$C_f=300 \text{ m/s}$   $A=0.08 \text{ m}^2$   
 $T = 300\text{K}$   $P = 100\text{kPa}$   
 $W=300 \text{ kW}$

Pression (totale) maximale à la sortie

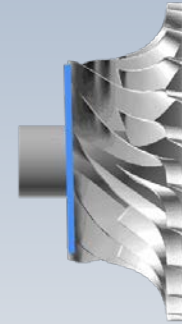
$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01})$$

$$T_{02} = T_{01} + \frac{\dot{W}}{\dot{m} \times c_p} = 315.9\text{K}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{c_p}{R}} \rightarrow p_{02} = 119.9 \text{ kPa}$$

$$\dot{m} = 18.57 \text{ kg / s}$$

$$T_{01} = 300\text{K}$$
$$p_{01} = 100\text{kPa}$$



$$\dot{W} = 300\text{kW}$$

$$p_{02}(\text{max}) = ?$$





Un compresseur centrifuge tourne à  $n=20000 \text{ rpm}$ . Le diamètre extérieur est  $D=300 \text{ mm}$  et le nombre de pales est  $Z=15$ . Les conditions de stagnation à l'entrée sont  $T_0=15^\circ\text{C}$  et  $p_0=100\text{kN/m}^2$ . Le débit massique d'air est  $\dot{m}=0.9\text{kg/s}$  et la composante périphérique de la vitesse absolue à la sortie est  $90\%$  de la vitesse tangentielle  $U$  en ce point. Le *rendement polytropique* du compresseur est  $\eta_p=80\%$ . Trouvez: a) le travail spécifique  $W_e$ , b) la température totale à la sortie  $T_{02}$ , c) le rapport:  $P\text{-d'arrêt-sortie}/P\text{-d'arrêt-entrée}$  dans le rotor

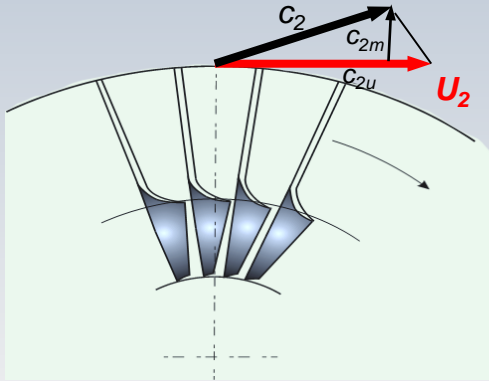
Considérez que la vitesse absolue de l'écoulement à l'entrée est alignée avec l'axe de l'arbre (sans prérotation)

Considérez l'air comme un gaz idéal:  $R = 287 \text{ J/kg} - \text{K}$



# Données

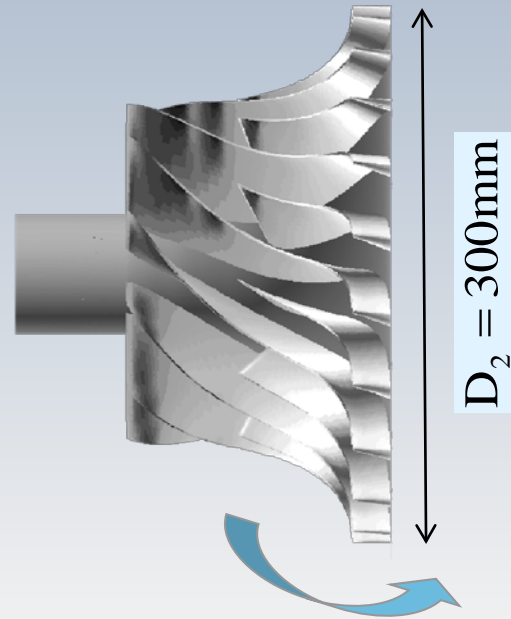
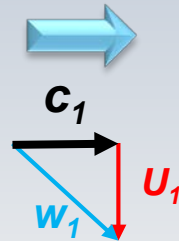
$$c_{2u} = 0.9 U_2$$



$$T_0 = 15^\circ\text{C}$$
$$P_0 = 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

a) le travail spécifique  $W_e$ , b) température totale à la sortie  $T_{02}$ , c) le rapport de pression d'arrêt dans le rotor

$$\dot{m} = 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$



$$\eta_p = 0.8$$

$$n = 20000 \text{ rpm}$$

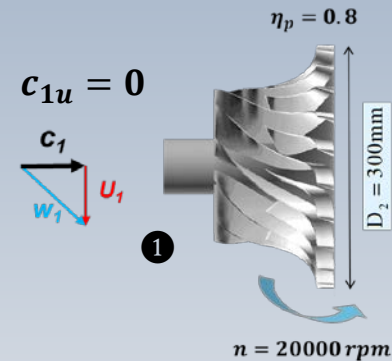
# Travail spécifique ?

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = (h_{02} - h_{01}) = (c_{2u}U_2 - c_{1u}U_1) \quad c_{1u} = 0$$

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = c_{2u} U_2 = 0.9U_2 \times U_2$$

$$U_2 = \frac{\pi n D_2}{60} = \frac{\pi \times 20000 \times 0.30}{60} = 314.16 \frac{m}{s}$$

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = 0.9U_2 \times U_2 = 88826 \frac{m^2}{s^2} = h_{02} - h_{01} = c_p(T_{02} - T_{01})$$



$$\dot{m} = 0.9 \frac{kg}{s}$$

$$T_{01} = 15^\circ C$$

$$p_{01} = 100 \frac{kN}{m^2}$$

$$D_2 = 300 mm$$

$$\eta_p = 0.8$$

$$n = 20000 \text{ rpm}$$

$$c_{2u} = 0.9U_2$$

$$c_{1u} = 0$$



# Température totale $T_{02}$ ?



$$T_{02} = T_{01} + \frac{\dot{W}}{c_p \dot{m}} = 288K + \frac{88826 \text{ m}^2/\text{s}^2}{1006 \text{ J/kg} \cdot \text{K}}$$

$\uparrow$   
(288K)

$$T_{02} = 376.29 \text{ K} \quad \rightarrow c_p \approx 1012 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

$$T_{02} = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} = 332.14 \quad \rightarrow c_p \approx 1007.8 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

On a cherché une température moyenne puisque la valeur de  $c_p$  dépend de la température

$$\dot{m} = 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$T_{01} = 15^\circ \text{C}$$

$$p_{01} = 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$D_2 = 300 \text{ mm}$$

$$\eta_p = 0.8$$

$$n = 20000 \text{ rpm}$$

$$c_{2u} = 0.9 U_2$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}}$$

# Pression totale $p_{02}$ ?

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}} = \left( \frac{375.8}{288} \right)^{\frac{0.8 \times 1007.8}{287}} = 2.117$$



$$\dot{m} = 0.9 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$T_{01} = 15^\circ \text{C}$$

$$p_{01} = 100 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$D_2 = 300 \text{mm}$$

$$\eta_p = 0.8$$

$$n = 20000 \text{ rpm}$$

$$c_{2u} = 0.9 U_2$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left( \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{\frac{\eta_p c_p}{R}}$$

$$R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

On a un compresseur axial à **4 étages** ayant les caractéristiques suivantes :

$$\begin{array}{l|l} rp_1 = 1.8 & \eta_{1s} = 82.%, (W_{s1} = 78400 \text{ J/kg}) \\ rp_2 = 2.1 & \eta_{2s} = 78\% \\ rp_3 = 2.3 & \eta_{3s} = 78\% \\ rp_4 = 2.6 & \eta_{4s} = 74\% \end{array}$$



$p_{01} = 1.5 \text{ bar}$ ,  $T_{01} = 350 \text{ K}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\eta_{ks}$  = rendement isentropique de l'étage  $k$ .

Calculer le **rendement polytropique du premier étage**. Trouver le rapport  $T_{0\text{entrée}} / T_{0\text{sortie}}$  pour chaque étage. Par la suite, calculer ce rapport de température, le  $r_p$  et le  $\eta_s$  et  $\eta_p$  pour des configurations à **2,3** et **4** étages

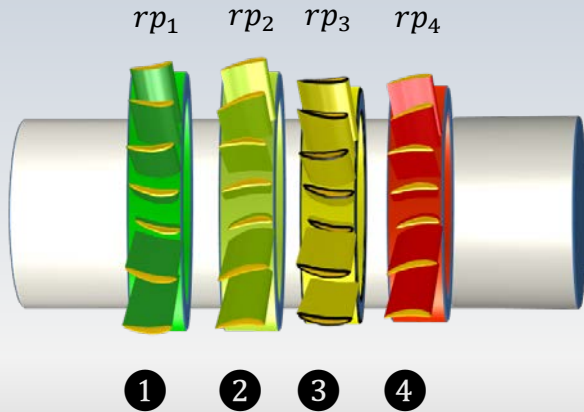
# Formules:rappel

$rp_1 = 1.8$     $\eta_{1s} = 82\%$   
 $rp_2 = 2.1$     $\eta_{2s} = 78\%$   
 $rp_3 = 2.3$     $\eta_{3s} = 78\%$   
 $rp_4 = 2.6$     $\eta_{4s} = 74\%$



$$\eta_s = \left( \frac{(p_{i+1}/p_i)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{(p_{i+1}/p_i)^{(\gamma-1)/\gamma} \eta_p - 1} \right)$$

$i = 1,2,3,4$



$\eta_p$

Les quantités sont totales (d'arrêt)

# Étage 1



$$\begin{aligned}rp_1 &= 1.8 & \eta_{1s} &= 82\% \\rp_2 &= 2.1 & \eta_{2s} &= 78\% \\rp_3 &= 2.3 & \eta_{3s} &= 78\% \\rp_4 &= 2.6 & \eta_{4s} &= 74\%\end{aligned}$$

$$\eta_{1s} = \left( \frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{T_2/T_1 - 1} \right)$$

①

$$T_2/T_1 = \left( \frac{(rp_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\eta_{1s}} \right) + 1 \quad \Rightarrow \quad T_2/T_1 = 1.22$$

① ② ③ ④

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma\eta_p} \quad \Rightarrow \quad \eta_p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) / \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Les quantités sont totales (d'arrêt)

$$\eta_p = 0.844$$



# Températures

$$\begin{array}{ll} rp_1 = 1.8 & \eta_{1s} = 82\% \\ rp_2 = 2.1 & \eta_{2s} = 78\% \\ rp_3 = 2.3 & \eta_{3s} = 78\% \\ rp_4 = 2.4 & \eta_{4s} = 74\% \end{array}$$



$$\textcircled{1} \quad T_2 / T_1 = 1.22$$

$$\eta_{12p} = 0.844$$

$$\textcircled{2} \quad T_3 / T_2 = 1.30$$

$$\eta_{32p} = 0.808$$

$$\textcircled{3} \quad T_4 / T_3 = 1.34$$

$$\eta_{43p} = 0.813$$

$$\textcircled{4} \quad T_5 / T_4 = 1.42$$

$$\eta_{54p} = 0.772$$

$\textcircled{1} \textcircled{2}$

$$T_3 / T_1 = (T_3 / T_2)(T_2 / T_1) = 1.3 \times 1.22 = 1.59$$

$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3}$

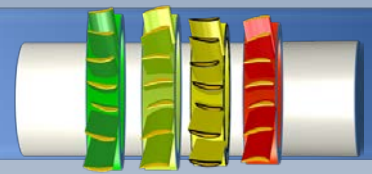
$$T_4 / T_1 = (T_3 / T_1)(T_4 / T_3) = 1.59 \times 1.34 = 2.14$$

$\textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{4}$

$$T_5 / T_1 = (T_4 / T_1)(T_5 / T_4) = 2.14 \times 1.42 = 3.05$$

Les quantités sont totales (d'arrêt)

# Rendements



① ②

$$p_3 / p_1 = (p_3 / p_2)(p_2 / p_1) = 1.8 \times 2.1 = 3.78$$

$$\eta_{13p} = 0.819$$

① ② ③

$$p_4 / p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = 8.69$$

$$\eta_{14p} = 0.812$$

① ② ③ ④

$$p_5 / p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = 22.6$$

$$\eta_{15p} = 0.799$$

$$T_2/T_1 = 1.22 \quad rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$

$$T_3/T_1 = 1.59 \quad rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$

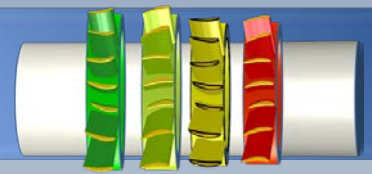
$$T_4/T_1 = 2.14 \quad rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$

$$T_5/T_1 = 3.05 \quad rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1ip} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left( \frac{p_i}{p_1} \right) / \ln \left( \frac{T_i}{T_1} \right)$$

$$i = 2, 3, 4, 5$$

# Rendements



① ② ③ ④

① ②

$$p_3 / p_1 = (p_3 / p_2)(p_2 / p_1) = 1.8 \times 2.1 = 3.78$$

① ② ③

$$p_4 / p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = 8.69$$

① ② ③ ④

$$p_5 / p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = 22.6$$

$$T_2/T_1 = 1.22 \quad rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$

$$T_3/T_1 = 1.59 \quad rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$

$$T_4/T_1 = 2.14 \quad rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$

$$T_5/T_1 = 3.05 \quad rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

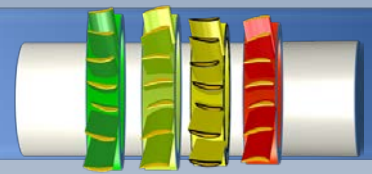
$$\eta_{1is} = \left( \frac{(p_i/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{T_i/T_1 - 1} \right)$$

$$i = 2,3,4,5$$

$\eta_{12s} = 0.82$	

Le rendement isentropique varie de manière plus significative que le rendement polytropic

# Rendements



① ② ③ ④

① ②

$$p_3 / p_1 = (p_3 / p_2)(p_2 / p_1) = 1.8 \times 2.1 = 3.78$$

① ② ③

$$p_4 / p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 = 8.69$$

① ② ③ ④

$$p_5 / p_1 = 1.8 \times 2.1 \times 2.3 \times 2.6 = 22.6$$

$$T_2/T_1 = 1.22 \quad rp_1 = 1.8 \quad \eta_{1s} = 82\%$$

$$T_3/T_1 = 1.59 \quad rp_2 = 2.1 \quad \eta_{2s} = 78\%$$

$$T_4/T_1 = 2.14 \quad rp_3 = 2.3 \quad \eta_{3s} = 78\%$$

$$T_5/T_1 = 3.05 \quad rp_4 = 2.6 \quad \eta_{4s} = 74\%$$

$$\eta_{1is} = \left( \frac{(p_i/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{T_i/T_1 - 1} \right)$$

$$i = 2,3,4,5$$

$\eta_{12s} = 0.82$	$\eta_{12p} = 0.844$
$\eta_{13s} = 0.779$	$\eta_{13p} = 0.819$
$\eta_{14s} = 0.745$	$\eta_{14p} = 0.812$
$\eta_{15s} = 0.701$	$\eta_{15p} = 0.799$

Le rendement isentropique varie de manière plus significative que le rendement polytropic

# À venir



À venir:  
*Les machines axiales*

