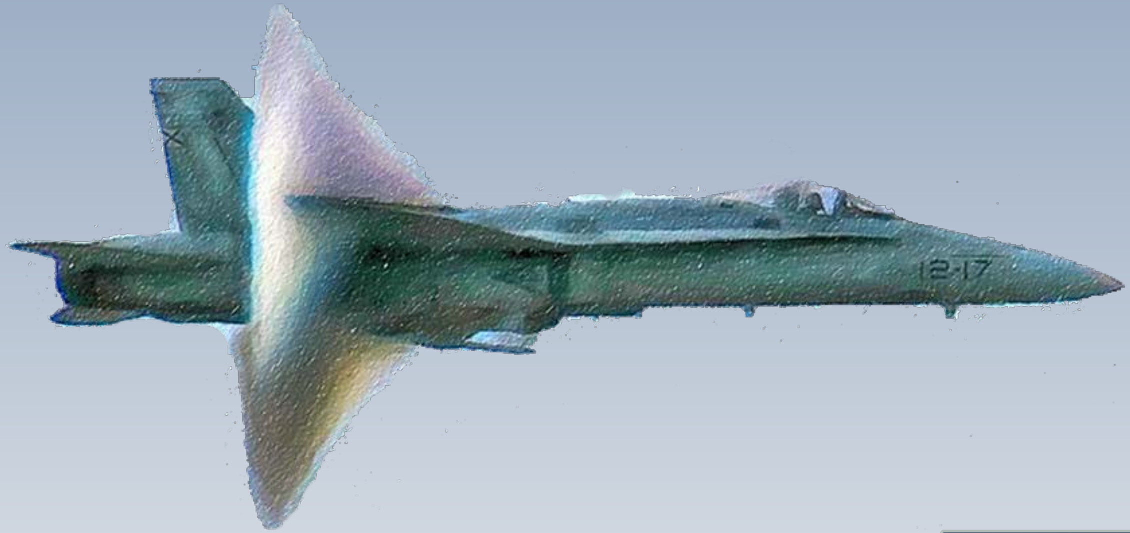
Mécanique des fluides

La force des écoulements

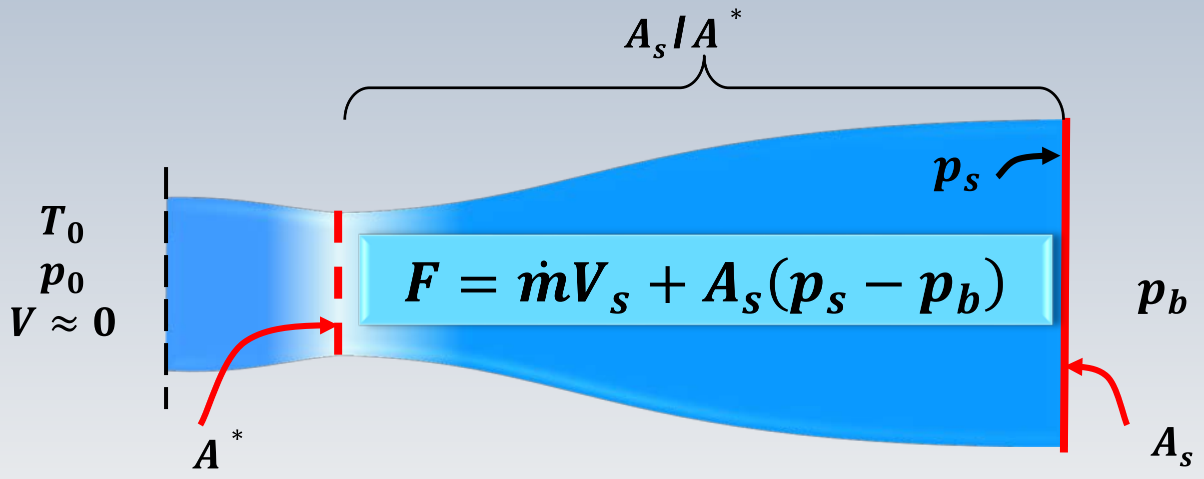


Écoulements Compressibles

II

Écoulements Isentropiques: résumé

La poussée



Abrégé de formules f(Ma,k)

	Air (k=1.4)	Valeurs critiques: Ma=1, air (k=1.4)
$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2$	$\frac{T_0}{T} = 1 + 0.2Ma^2$	$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = 0.8333$
$\frac{a_0}{a} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} Ma^2} = \sqrt{\frac{T_0}{T}}$	$\frac{a_0}{a} = \sqrt{1 + 0.2Ma^2}$	$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} = 0.9129$
$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$	$\frac{p_0}{p} = (1 + 0.2Ma^2)^{3.5}$	$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0.5283$
$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$	$\frac{\rho_0}{\rho} = (1 + 0.2Ma^2)^{2.5}$	$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} = 0.6339$

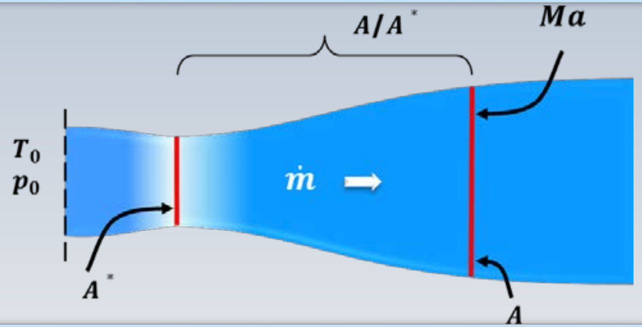
Abrégé de formules f(Ma,k)

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}Ma^2}{(k+1)/2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$(k = 1.4)$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1\left(1+0.2Ma^2\right)^3}{1.728}$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma\sqrt{k}\left[1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$



$$\dot{m}_{\max} = \rho^* A^* V^* = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}}$$

$(k = 1.4)$

$$\dot{m}_{\max} = 0.6847\ \rho_0\sqrt{RT_0}A^* = \frac{0.6847 p_0}{\sqrt{RT_0}}A^*$$

Tables: écoulements isentropiques

9.04 ..

Subsonique

M	A/A*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	V/V*
0	Inf	1.0000	1.0000	1.0000	0
0.0500	11.5914	0.9983	0.9988	0.9995	0.0548
0.1000	5.8218	0.9930	0.9950	0.9980	0.1094
0.1500	3.9103	0.9844	0.9888	0.9955	0.1639
0.2000	2.9635	0.9725	0.9803	0.9921	0.2182
0.2500	2.4027	0.9575	0.9694	0.9877	0.2722
0.3000	2.0351	0.9395	0.9564	0.9823	0.3257
0.3500	1.7780	0.9188	0.9413	0.9761	0.3788
0.4000	1.5901	0.8956	0.9243	0.9690	0.4313
0.4500	1.4487	0.8703	0.9055	0.9611	0.4833
0.5000	1.3398	0.8430	0.8852	0.9524	0.5345
0.5500	1.2549	0.8142	0.8634	0.9430	0.5851
0.6000	1.1882	0.7840	0.8405	0.9328	0.6348
0.6500	1.1356	0.7528	0.8164	0.9221	0.6837
0.7000	1.0944	0.7209	0.7916	0.9107	0.7318
0.7500	1.0624	0.6886	0.7660	0.8989	0.7789
0.8000	1.0382	0.6560	0.7400	0.8865	0.8251
0.8500	1.0207	0.6235	0.7136	0.8737	0.8704
0.9000	1.0089	0.5913	0.6870	0.8606	0.9146
0.9500	1.0021	0.5595	0.6604	0.8471	0.9578

Supersonique

M	A/A*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	V/V*
1.0000	1.0000	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
1.0500	1.0020	0.4979	0.6077	0.8193	1.0411
1.1000	1.0079	0.4684	0.5817	0.8052	1.0812
1.1500	1.0175	0.4398	0.5562	0.7908	1.1203
1.2000	1.0304	0.4124	0.5311	0.7764	1.1583
1.2500	1.0468	0.3861	0.5067	0.7619	1.1952
1.3000	1.0663	0.3609	0.4829	0.7474	1.2311
1.3500	1.0890	0.3370	0.4598	0.7329	1.2660
1.4000	1.1149	0.3142	0.4374	0.7184	1.2999
1.4500	1.1440	0.2927	0.4158	0.7040	1.3327
1.5000	1.1762	0.2724	0.3950	0.6897	1.3646
1.5500	1.2116	0.2533	0.3750	0.6754	1.3955
1.6000	1.2502	0.2353	0.3557	0.6614	1.4254
1.6500	1.2922	0.2184	0.3373	0.6475	1.4544
1.7000	1.3376	0.2026	0.3197	0.6337	1.4825
1.7500	1.3865	0.1878	0.3029	0.6202	1.5097
1.8000	1.4390	0.1740	0.2868	0.6068	1.5360
1.8500	1.4952	0.1612	0.2715	0.5936	1.5614
1.9000	1.5553	0.1492	0.2570	0.5807	1.5861
1.9500	1.6193	0.1381	0.2432	0.5680	1.6099
2.0000	1.6875	0.1278	0.2300	0.5556	1.6330

Chapitre 9: Écoulements compressibles

9.1 Thermodynamique

9.2 La vitesse du son

9.3 Écoulement adiabatique et isentropique

9.4 Écoulement isentropique avec changement de section

9.5 Choc normal

9.6 Tuyères convergente et convergente-divergente

Chocs: introduction I

Dans des nombreux écoulements compressibles à haute vitesse, on trouve des fortes variations des propriétés physiques (***ρ, T, etc.***) sur des distances très faibles, de l'ordre du libre parcours moyen*.

On appelle ces phénomènes **des chocs**. Ils peuvent être causés, par exemple, par l'écoulement sortant d'un moteur à réaction ou une onde expansive générée par une explosion.

Jusqu'à présent, on a regardé les écoulements compressibles isentropiques, unidimensionnels en l'absence de chocs. On étudiera maintenant des écoulements avec la présence de chocs.

*Libre parcours moyen: distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives.

Chocs: introduction II

Les chocs, peuvent se propager dans la direction normale à l’écoulement ou bien de manière oblique. On parle ainsi d’un choc normal, ou bien d’un choc oblique, respectivement.

Dans cette partie on regardera seulement **le choc normal** qui a lieu dans une conduite.

Le problème sera abordé en modélisant le choc comme une discontinuité. Les équations de conservation seront appliquées afin d’établir un lien entre les propriétés en amont et en aval du choc.

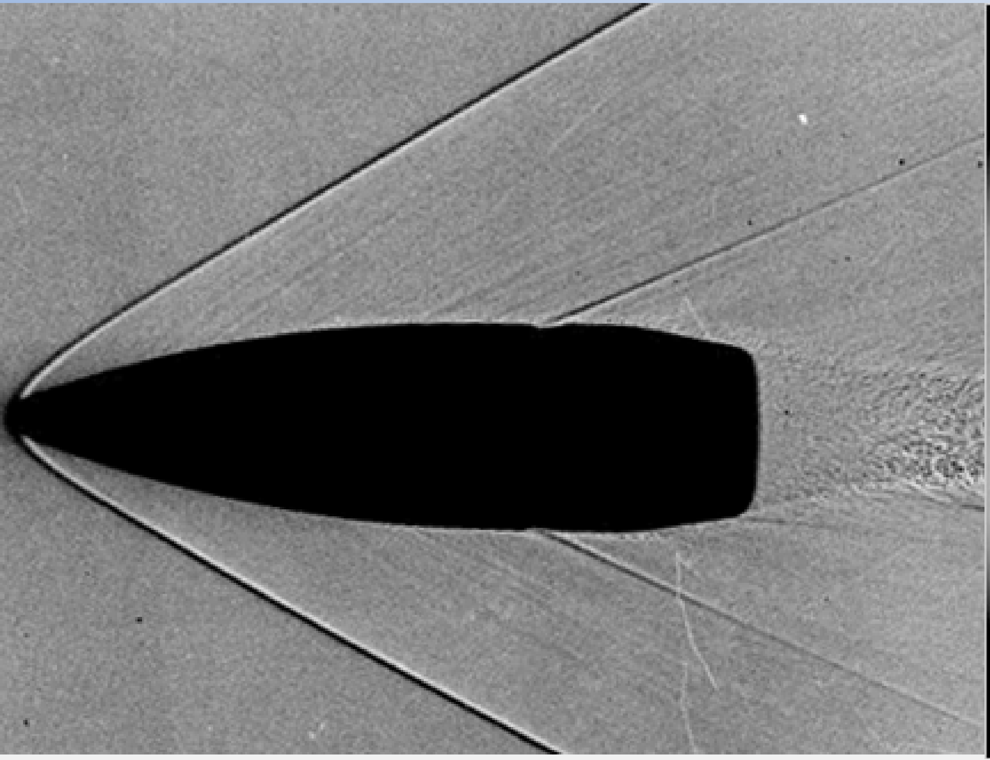
Le résultat est représenté par des équations non linéaires, qui ont été utilisées dans la construction de tables.

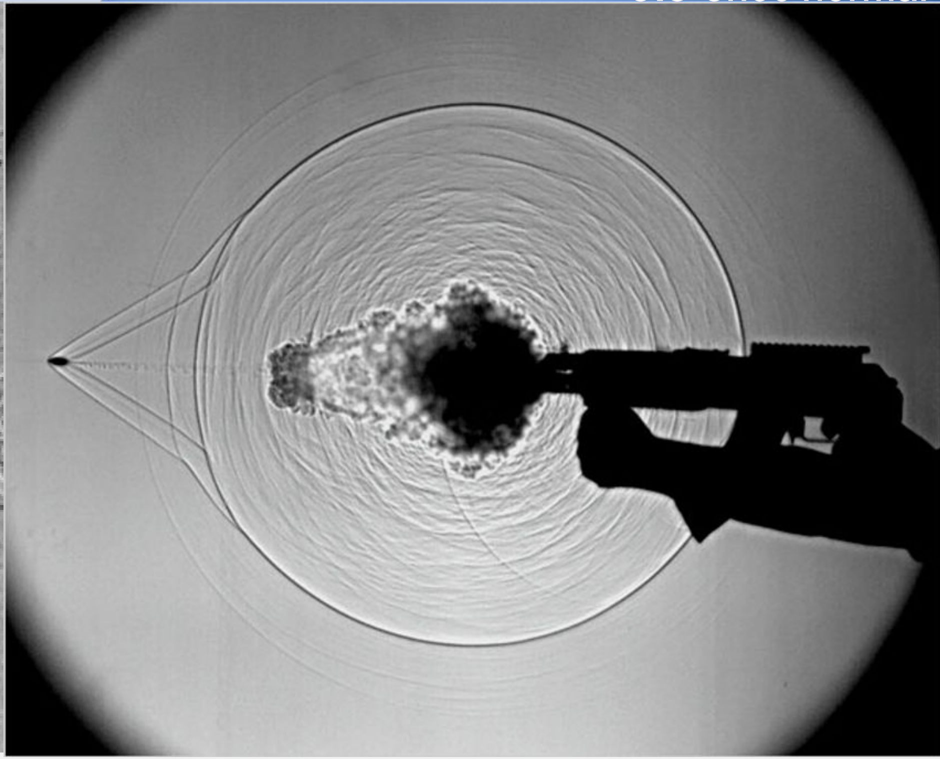
Chocs: introduction III

L'écoulement restera **isentropique en amont et en aval du choc, mais l'entropie ne sera nécessairement pas la même**.

En effet, le passage d'un écoulement supersonique à subsonique **à travers un choc** est un phénomène **fortement irréversible**, donc, avec un **incrément d'entropie**.

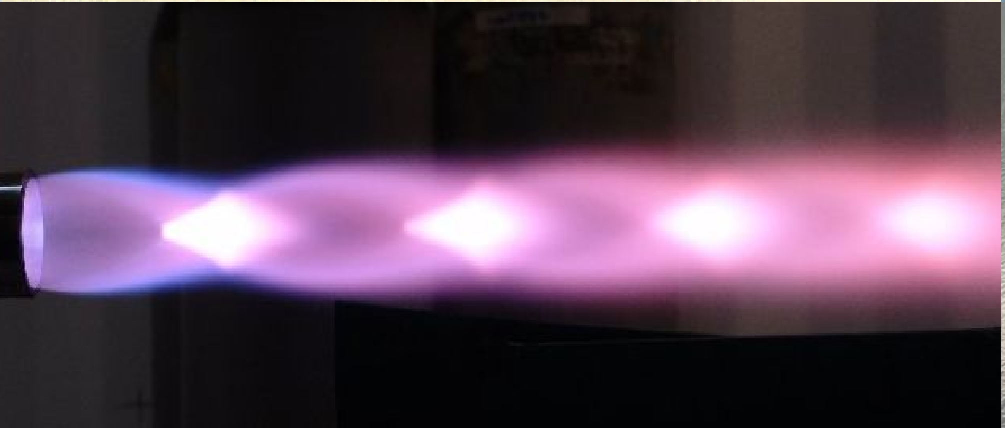
Exemples de chocs: balistique



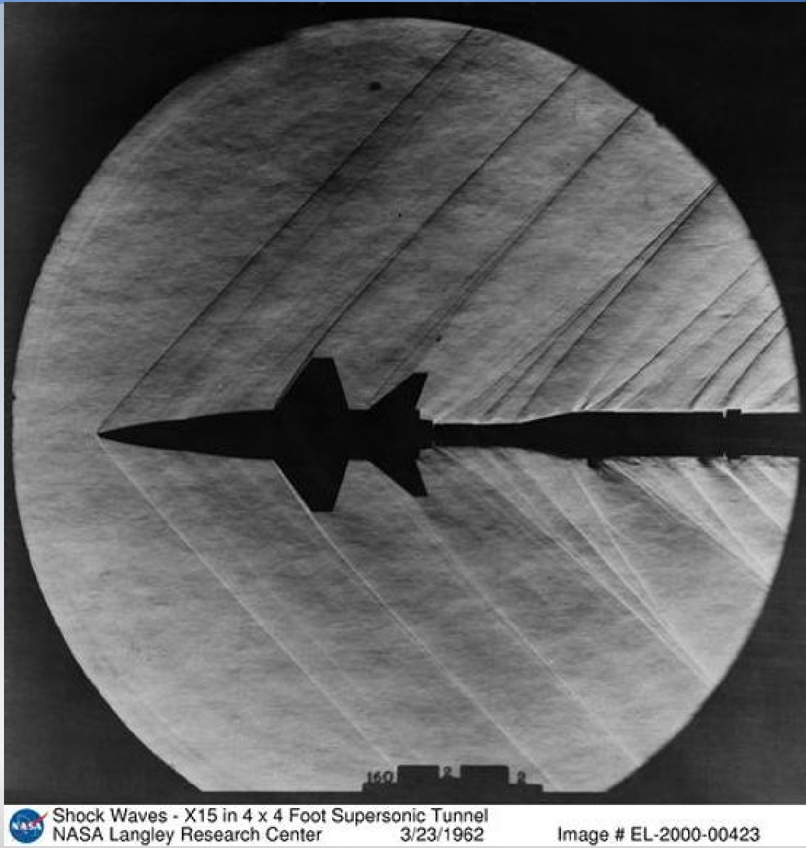


Exemples de chocs obliques

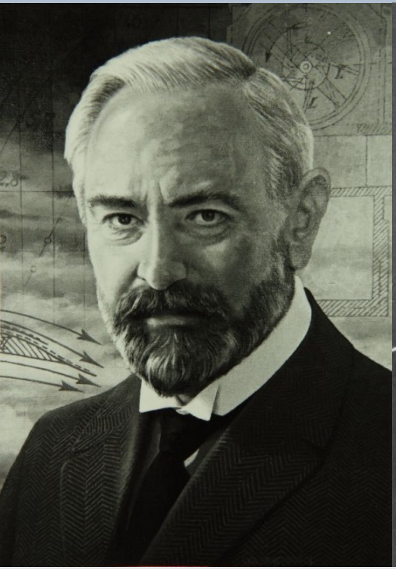





Chocs et aéronefs



Singularité de Prandtl-Glauert



Ludwig Prandtl

Hermann Glauert

Lorsqu’un avion se rapproche de la vitesse du son, une baisse brusque de la pression de l’air se produit autour de l’appareil. Cette chute de pression est associée à une diminution de température qui entraine l’apparition d’un nuage de condensation. Le phénomène est visible à de faibles altitudes et avec une humidité élevée. D’un point de vue mathématique, on dit qu’il s’agit d’une singularité dans la transformation de Prandtl-Glauert.

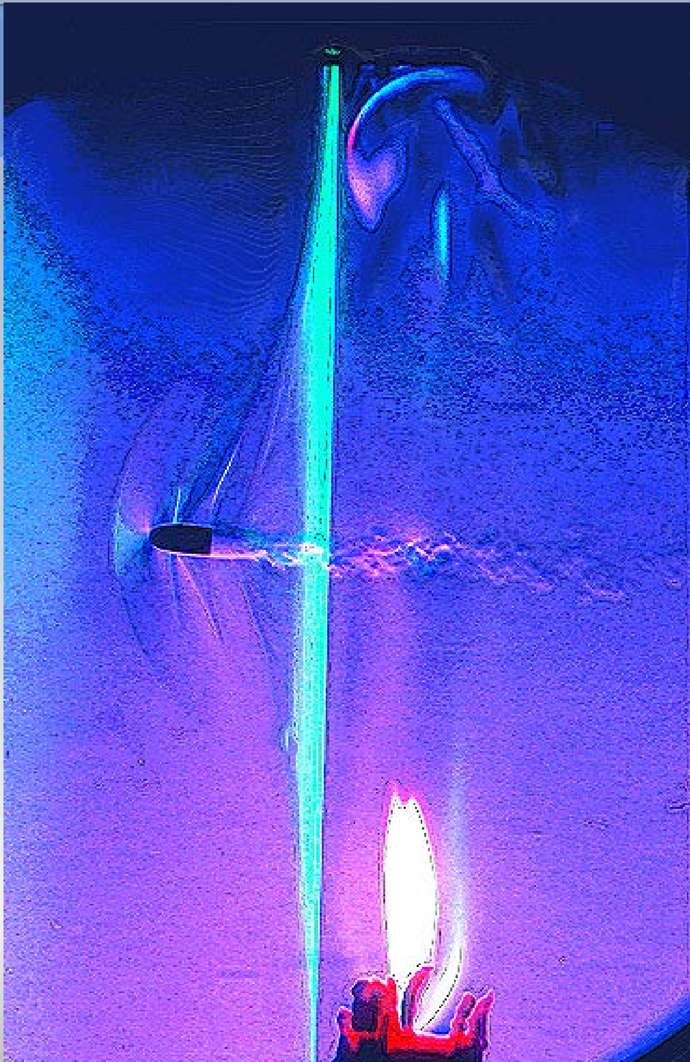
Vites

5 Choc normal

Crédits
Prof. J. Kim Vandiver

Balle calibre 22
en supersonique

Balle calibre 22
en subsonique



Choc normal

On considère un **choc normal stationnaire**, soit perpendiculaire à l'écoulement, séparant le domaine en deux: une région en amont ❶ et une région en aval ❷

On applique les hypothèses suivantes:

- Absence de transfert de chaleur
- Le fluide est à l'équilibre thermodynamique
- Le forces de frottement et de volume sont négligeables

Choc normal

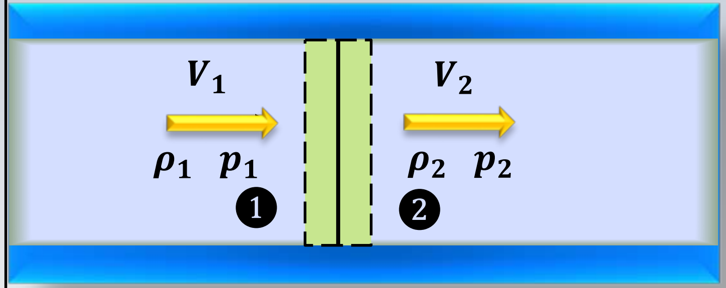
$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

$$p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_0$$

$$\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$$

Afin de relier les états ❶ et ❷, on applique les équations de bilan, pour le cas d'un gaz parfait, sur un volume de contrôle incluant le choc



$$k = c_p / c_v = cste., \quad h_0 = cste.$$

$$dh = c_p dT$$

Choc normal

À partir des équations précédentes on peut trouver des formules pour calculer l'état ❷ , en aval du choc, en fonction de l'état ❶ en amont. Par exemple, la conservation de **l'enthalpie totale** $\boldsymbol{h_0}$ (ou $\boldsymbol{T_0}$) permet de combiner les équations suivantes pour la température :

en amont $\quad 1+\frac{k-1}{2}Ma_1^2=\frac{T_0}{T_1} \quad \Longleftrightarrow \quad 1+\frac{k-1}{2}Ma_2^2=\frac{T_0}{T_2}$ en aval

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{1+(k-1)/2\,Ma_1^2}{1+(k-1)/2\,Ma_2^2}$$

Choc normal

Pour déterminer la variation de pression, on peut utiliser la conservation de **la quantité de mouvement**. Notamment:

$$QM = p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_1\left(1+\frac{\rho_1 V_1^2}{p_1}\right) = p_1\left(1+\frac{V_1^2}{RT_1}\right) = p_1\left(1+\frac{kV_1^2}{a_1^2}\right) = p_1\left(1+kMa_1^2\right)$$

$$QM = p_2\left(1+kMa_2^2\right) = p_1\left(1+kMa_1^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+kMa_1^2}{1+kMa_2^2}$$

Cependant $\boldsymbol{Ma_2}$ n'est pas encore connu

Choc normal

Pour obtenir une relation entre les nombres de Mach, en amont $\boldsymbol{Ma_1}$ et en aval du choc $\boldsymbol{Ma_2}$, on utilise **l'équation de continuité**

$$\rho_1 V_1 = \rho_1 a_1 Ma_1 = \rho_1 (kRT_1)^{1/2} Ma_1 = \boxed{\frac{p_1}{RT_1}(kRT_1)^{1/2} Ma_1 = \frac{p_2}{RT_2}(kRT_2)^{1/2} Ma_2} = \rho_2 V_2$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2} \frac{Ma_1}{Ma_2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{1 + kMa_1^2}{1 + kMa_2^2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{1 + (k-1)/2\, Ma_1^2}{1 + (k-1)/2\, Ma_2^2} \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{Ma_2^2 = \frac{2 + (k-1)Ma_1^2}{2kMa_1^2 + 1 - k}}$$

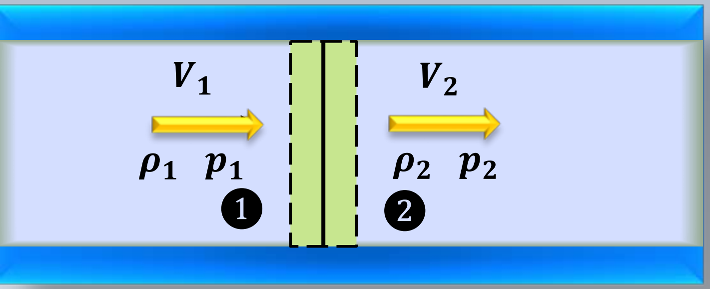
Choc normal

La combinaison des relations

$$Ma_2^2 = \frac{2+(k-1)Ma_1^2}{2kMa_1^2+1-k} \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{1+kMa_1^2}{1+kMa_2^2} \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1+(k-1)/2\,Ma_1^2}{1+(k-1)/2\,Ma_2^2}$$

permet de trouver plusieurs expressions pratiques reliant des quantités avant et après un choc normal, en fonction du nombre de Mach $\boldsymbol{Ma_1}$ (ou $\boldsymbol{M_1}$) avant le choc.

Choc normal



$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[2kM_1^2 - (k-1)\right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2 + 2}$$

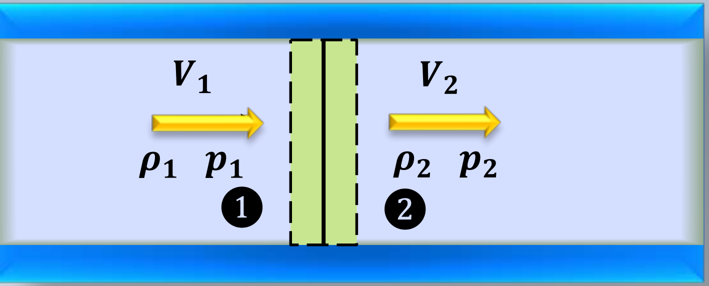
$$M_2^2 = \frac{(k-1)M_1^2 + 2}{2kM_1^2 - (k-1)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[2 + (k-1)M_1^2\right]\frac{2kM_1^2 - (k-1)}{(k+1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{(k+1)^2 M_1^2}{2 + (k-1)M_1^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{k+1}{2kM_1^2 - (k-1)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2}\right]^{\frac{(k+1)(k-1)}{2}}$$

Choc normal



$k = 1.4$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2.4}\left[2.8M_1^2 - 0.4\right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2.4M_1^2}{0.4M_1^2 + 2}$$

$$M_2^2 = \frac{0.4M_1^2 + 2}{2.8M_1^2 - 0.4}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[2 + 0.4M_1^2\right]\frac{2.8M_1^2 - 0.4}{(2.4)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{(2.4)^2 M_1^2}{2 + 0.4M_1^2}\right]^{3.5}\left[\frac{2.4}{2.8M_1^2 - 0.4}\right]^{2.5}$$

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{2 + 0.4M_1^2}{2 + 0.4M_2^2}\right]^{0.48}$$

Rankine-Hugoniot I

Les relations précédentes permettant de quantifier le saut entre les états **1** et **2** donnent lieu à **l'équation de Rankine-Hugoniot**.

Celle-ci relie l'état thermodynamique $(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{\rho_1})$ en amont du choc à l'état après le choc $(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{\rho_2})$. Pour **un gaz parfait**, elle peut être obtenue en éliminant le nombre Mach $\mathbf{M_1}$ des expressions

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[2kM_1^2 - (k-1)\right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2 + 2}$$

$$\boldsymbol{\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{k+1}{k-1}\right)(\rho_2/\rho_1) - 1}{\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - (\rho_2/\rho_1)}}$$

Rankine-Hugoniot II

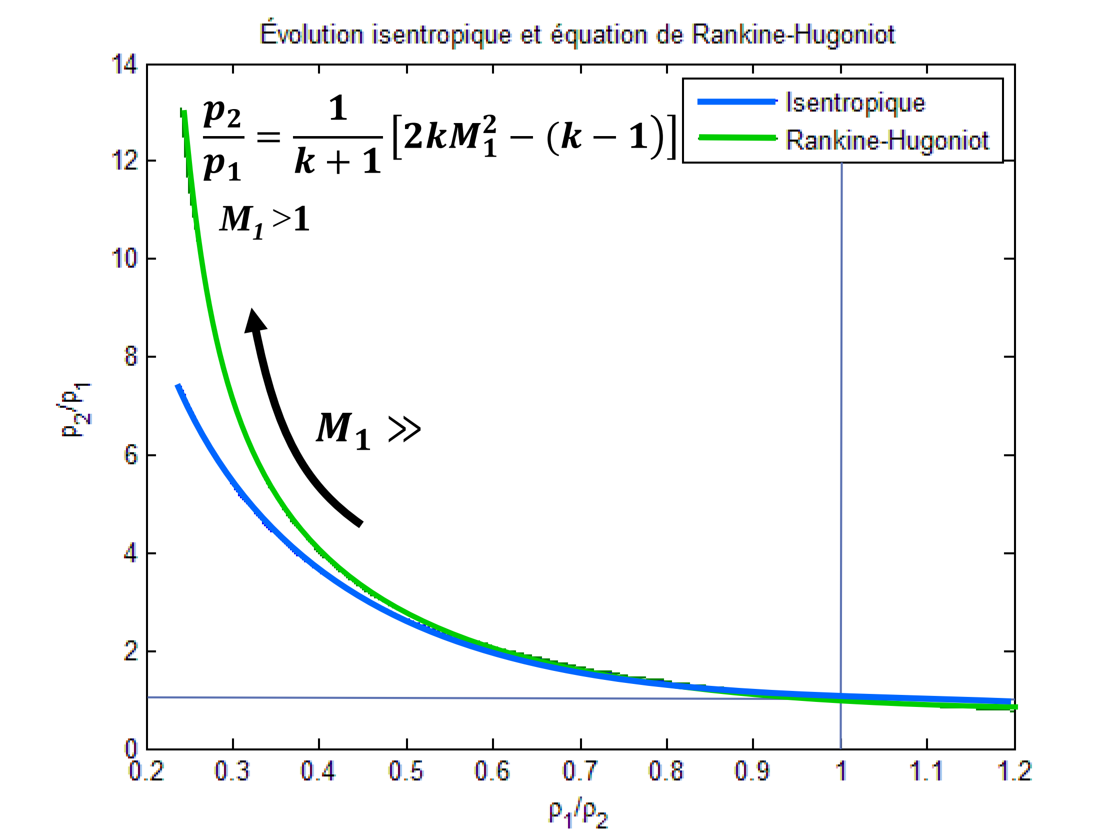
Afin de comparer le saut de pression entre deux états ❶ et ❷ lors d'un choc normal (l'équation de Rankine-Hugoniot), avec celui décrit par:$\boldsymbol{p_1/\rho_1{}^k = p_2/\rho_2{}^k = cnste.}$, soit par **un processus isentropique,** on peut utiliser une représentation graphique.

Le saut de pression est affiché à la figure suivante en fonction du rapport de masse volumique.

On note que la courbe décrite par l'équation de R-H, qui est aussi une fonction du nombre de Mach avant le choc, s'écarte de plus en plus d'un processus isentropique pour $\boldsymbol{M_1 > 1}$

Le processus ayant lieu au travers d'un choc droit, n'est donc pas isentropique!

Rankine-Hugoniot III



Variation d’entropie

Pour un gaz parfait, **l’accroissement d’entropie au travers d’un choc** droit peut être déterminé à partir de l’équation:

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P}$$

et

$$c_p = \frac{kR}{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{k}{k-1} \ln\left\{\frac{T_2}{T_2}\right\} - \ln\left\{\frac{p_2}{p_2}\right\}$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-1}\right]$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left[\left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} (2kMa_1^2 - k + 1)\left(\frac{2}{Ma_1^2} + k - 1\right)^{k}\right]$$

Remarques

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left[\left(\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}(2kMa_1^2 - k + 1)\left(\frac{2}{Ma_1^2} + k - 1\right)^{k}\right]$$

- la variation d'entropie s'annule pour $\boldsymbol{Ma_1 = 1}$
- la variation d'entropie est positive pour $\boldsymbol{Ma_1 > 1}$
- la variation d'entropie serait négative (impossible) pour $\boldsymbol{Ma_1 < 1}$
- **un choc peut seulement avoir lieu lorsque** $\boldsymbol{Ma_1 > 1}$

L'entropie et la pression totale

La variation de la pression totale peut être regardé utilisant le changement d'entropie. Notamment :

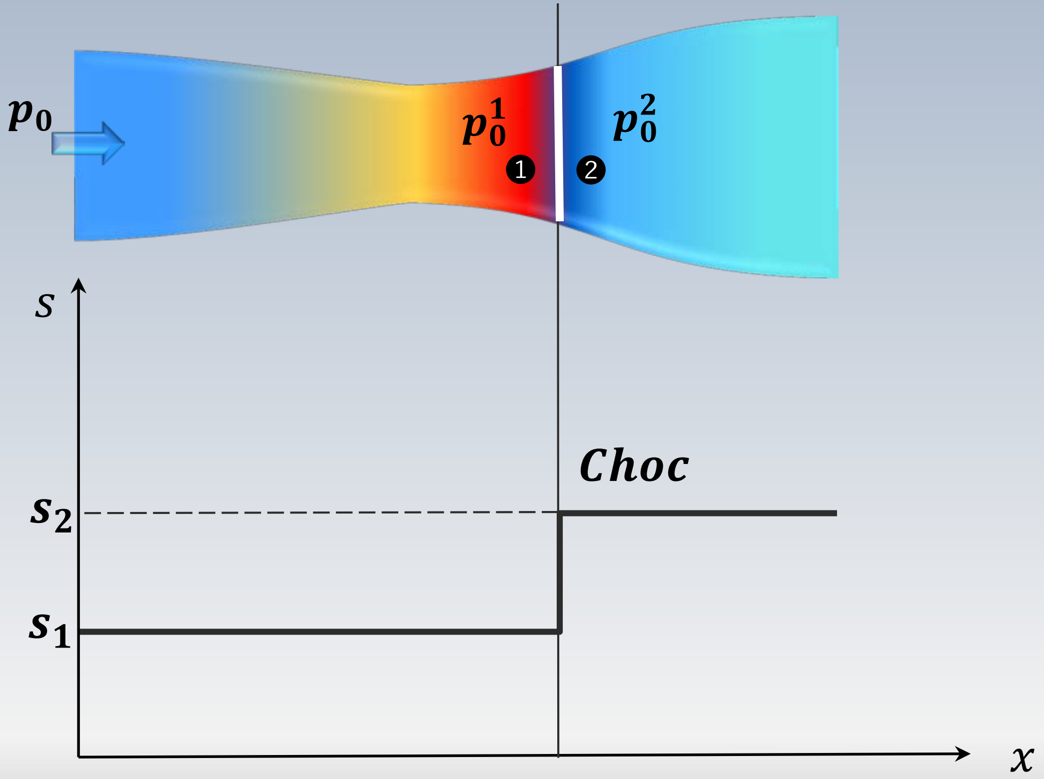
$$s_2 - s_1 = c_p \, ln \frac{T_0^2}{T_0^1} - R \, ln \frac{p_0^2}{p_0^1}$$

Mais $\boldsymbol{T_0^2 = T_0^1 = T_0 = cnste}$. **au travers d'un choc**, alors:

$$s_2 - s_1 = -R\ln \frac{p_0^2}{p_0^1}$$

Puisque le saut d'entropie au travers un choc est positif, le rapport de pression totale $\boldsymbol{p_0^2/p_0^1}$ doit être inférieur à l'unité

Augmentation d'entropie



$$p_0^1 = p_0$$

$$p_0^2 < p_0^1$$

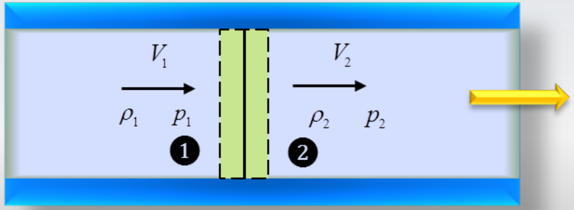
L'entropie augmente au travers un choc

$$\boxed{s_2 - s_1 = -R\ln\frac{p_0^2}{p_0^1}}$$

Variation d’enthalpie

Dans le cadre d’un **gaz réel**, on peut établir l’équation de **Rankine-Hugoniot** en repartant des équations de conservation pour un choc, maintenant avec ***h=h(p,ρ)*.** Notamment:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \\
&p_1 - p_2 = \rho_2 V_2^2 - \rho_1 V_1^2 \\
&h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_0 \\
&h = h(p,\rho)
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \quad h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)
$$



Les tables et +

Il est pratique de disposer sous forme de tables les formules décrivant la variation de propriétés telles que la pression, la température ou le nombre de Mach à travers le choc.

Bien sûr que ces formules peuvent être incorporées dans des programmes informatiques pour obtenir des résultats plus précis.

En effet, dans *Matlab* par exemple, on retrouve la fonction **flownormalshock** pour obtenir les rapports de quantités à travers le choc. On dispose également de la fonction **flowisentropic** pour calculer la variation de propriétés dans un écoulement isentropique

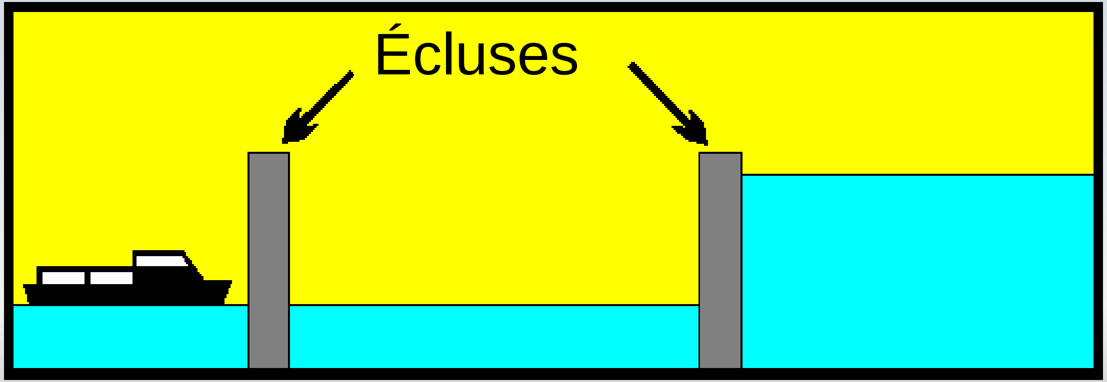
Tables: choc normal

M_1	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_1/p_{02}
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.5283
1.0500	0.9531	1.1196	1.0840	1.0328	0.9999	0.4979
1.1000	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	0.4689
1.1500	0.8750	1.3762	1.2550	1.0966	0.9967	0.4413
1.2000	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	0.4154
1.2500	0.8126	1.6563	1.4286	1.1594	0.9871	0.3911
1.3000	0.7860	1.8050	1.5157	1.1909	0.9794	0.3685
1.3500	0.7618	1.9596	1.6028	1.2226	0.9697	0.3475
1.4000	0.7397	2.1200	1.6897	1.2547	0.9582	0.3280
1.4500	0.7196	2.2862	1.7761	1.2872	0.9448	0.3098
1.5000	0.7011	2.4583	1.8621	1.3202	0.9298	0.2930
1.5500	0.6841	2.6363	1.9473	1.3538	0.9132	0.2773
1.6000	0.6684	2.8200	2.0317	1.3880	0.8952	0.2628
1.6500	0.6540	3.0096	2.1152	1.4228	0.8760	0.2493
1.7000	0.6405	3.2050	2.1977	1.4583	0.8557	0.2368
1.7500	0.6281	3.4063	2.2791	1.4946	0.8346	0.2251
1.8000	0.6165	3.6133	2.3592	1.5316	0.8127	0.2142
1.8500	0.6057	3.8263	2.4381	1.5693	0.7902	0.2040
1.9000	0.5956	4.0450	2.5157	1.6079	0.7674	0.1945
1.9500	0.5862	4.2696	2.5919	1.6473	0.7442	0.1856
2.0000	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	0.1773

M_1	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_1/p_{02}
2.0000	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	0.1773
2.0500	0.5691	4.7362	2.7400	1.7285	0.6975	0.1695
2.1000	0.5613	4.9783	2.8119	1.7705	0.6742	0.1622
2.1500	0.5540	5.2263	2.8823	1.8132	0.6511	0.1553
2.2000	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	0.1489
2.2500	0.5406	5.7396	3.0186	1.9014	0.6055	0.1428
2.3000	0.5344	6.0050	3.0845	1.9468	0.5833	0.1371
2.3500	0.5286	6.2763	3.1490	1.9931	0.5615	0.1317
2.4000	0.5231	6.5533	3.2119	2.0403	0.5401	0.1266
2.4500	0.5179	6.8363	3.2733	2.0885	0.5193	0.1218
2.5000	0.5130	7.1250	3.3333	2.1375	0.4990	0.1173
2.5500	0.5083	7.4196	3.3919	2.1875	0.4793	0.1130
2.6000	0.5039	7.7200	3.4490	2.2383	0.4601	0.1089
2.6500	0.4996	8.0263	3.5047	2.2902	0.4416	0.1051
2.7000	0.4956	8.3383	3.5590	2.3429	0.4236	0.1014
2.7500	0.4918	8.6563	3.6119	2.3966	0.4062	0.0979
2.8000	0.4882	8.9800	3.6636	2.4512	0.3895	0.0946
2.8500	0.4847	9.3096	3.7139	2.5067	0.3733	0.0915
2.9000	0.4814	9.6450	3.7629	2.5632	0.3577	0.0885
2.9500	0.4782	9.9863	3.8106	2.6206	0.3428	0.0856
3.0000	0.4752	10.3333	3.8571	2.6790	0.3283	0.0829

Conclusion

À l’aide de formules, sous forme de tables, ou informatisées, il possible d’analyser des écoulements dans des conduites présentant un choc droit. Plus spécifiquement, on peut relier des paramètres de l’écoulement **entre deux régions isentropiques** séparés par un choc



Résumé I

- Pour l'étude des écoulements dans les tuyères on suppose un **écoulement stationnaire et sans de frottement**
- S'il n'y **pas de choc**, l'écoulement est isentropique partout et **les quantités de stagnation sont conservées**
- Les **tables isentropiques** ont **deux branches**, une **subsonique** et une **supersonique**
- Dans chaque branche **un même rapport de A/A^***, conduit à des **nombres de Mach différents**
- Les tables (ou formules) d'onde de **choc normal** permettent de passer d'un écoulement **supersonique** vers un **subsonique**

Résumé II

- La température totale T_0 est **conservée** au travers d'un choc
- La pression totale p_0 n'est **pas conservée** au travers d'un choc
- L'aire physique est clairement la même de part et d'autre d'un choc, mais **le nombre de Mach c'est différent**.
- On trouve alors une aire critique A_1^* (réelle = au col) correspondante au nombre de Mach M_1 **avant le choc**, et une aire critique A_2^* (fictive) **après le choc** pour M_2.

Résume III

Amont 1

$M_1 > 1$

V_1

p_1

ρ_1

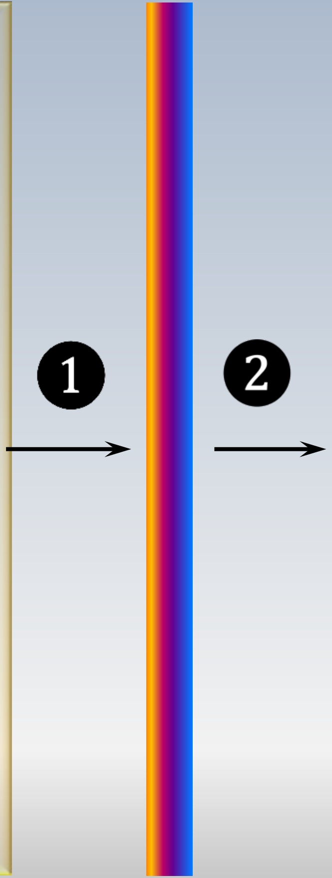
T_1

s_1

$p_{0,1}$

$h_{0,1}$

$T_{0,1}$



Aval 2

$M_2 < 1$

$V_2 < V_1$

$p_2 > p_1$

$\rho_2 > \rho_1$

$T_2 > T_1$

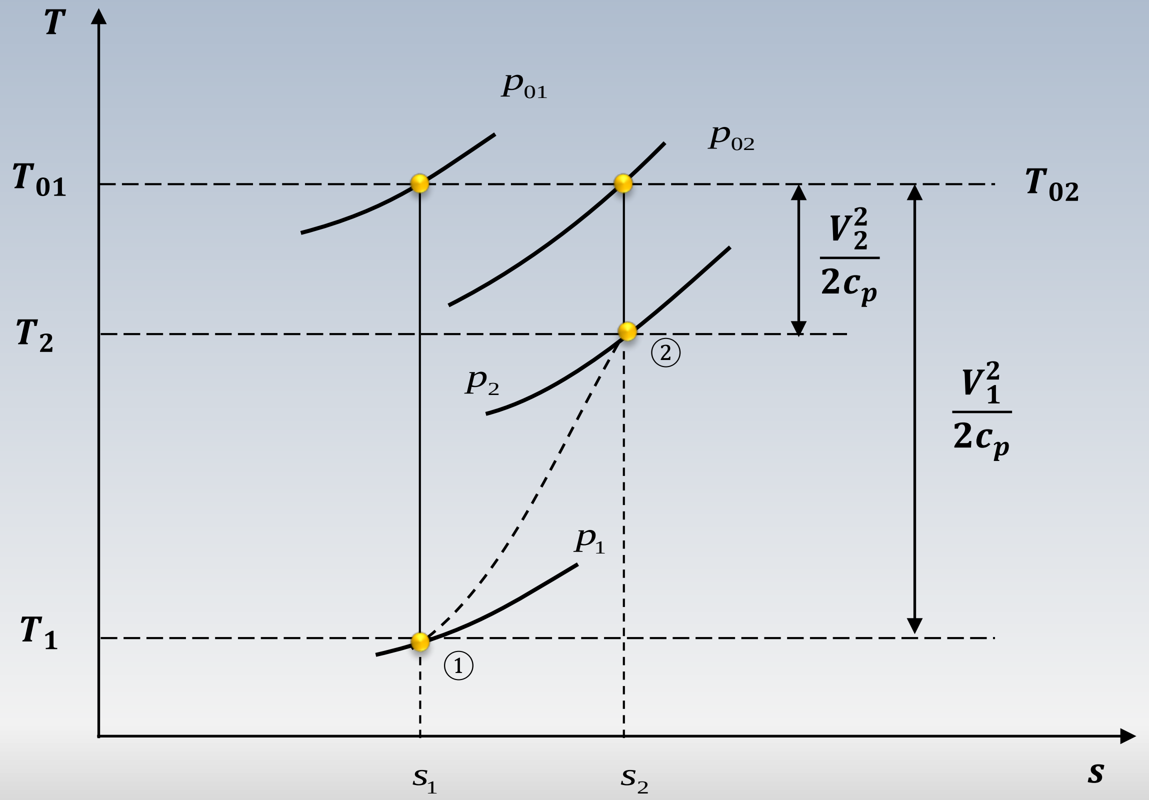
$s_2 > s_1$

$p_{0,2} < p_{0,1}$

$h_{0,2} = h_{0,1}$

$T_{0,2} = T_{0,1}$

Résume IV: diagramme T-S




You
Tube

Ressaut hydraulique

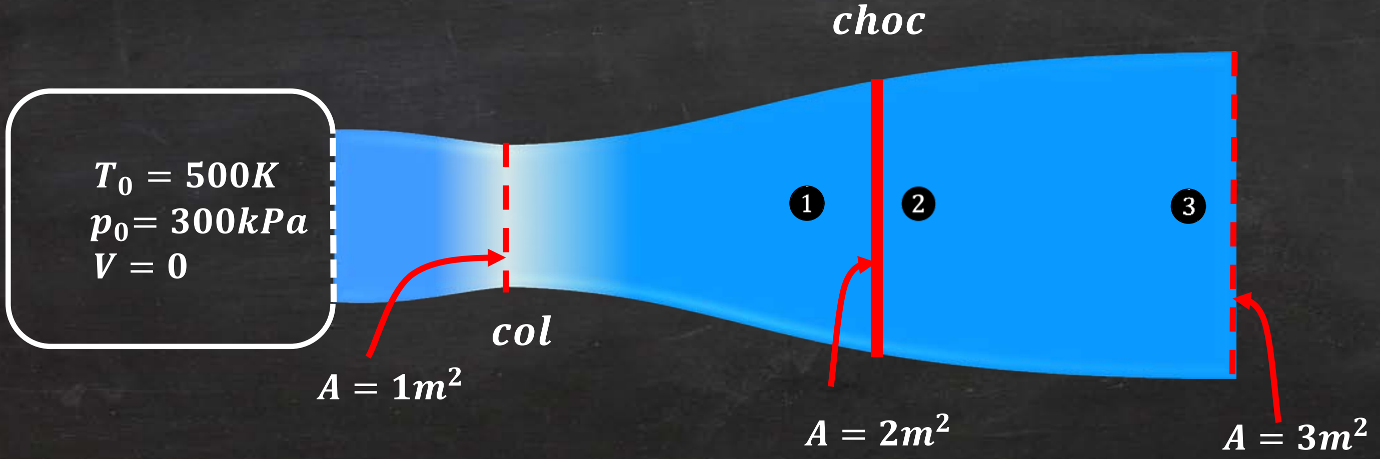
Expérience à gauche, et simulation à droite. Vidéos gentillesse de Youtube

L'incrément de hauteur dans un ressaut hydraulique, peut se comparer à l'augmentation de pression causée par un choc dans un écoulement compressible

Exemple 9.6

De l'air $(k = 1.4, R = 287\, m^2/(s^2K),\ c_p = 1005\, m^2/(s^2K))$, s'écoule d'un réservoir passant par un col jusqu'au <u>point 1 où il y a un choc</u>. Les conditions de stagnation (d'arrêt) en amont sont $p_0 = 300\, kPa, T_0 = 500K$

Estimez $p_1, p_2, p_{02}, A_2{}^*, p_{03}, A_3{}^* p_3, T_{03}$



Exemple 9.6 (suite I)

$p_1, p_2, p_{02}, A_2^{*}?$

$p_{03}, A_3^{*} p_3, T_{03}?$

$k = 1.4, R = 287\ m^2/(s^2K),$
$c_p = 1005\ m^2/(s^2K)$
$p_0 = 300\ kPa, T_0 = 500K$

L'écoulement entre le réservoir et la section ❶, juste avant le choc, est **Isentropique**

Nous pouvons alors appliquer les relations du **FORMULAIRE I**

Relation isentropique (air)

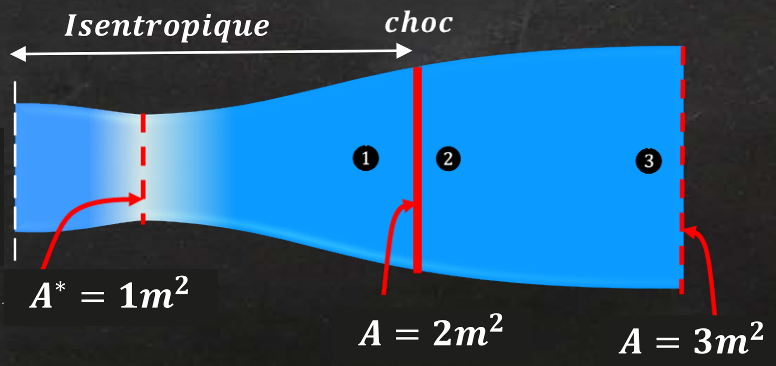
Méthode numérique

$$\frac{A_1}{A_1^*} = \frac{1}{Ma_1}\frac{\left(1+0.2Ma_1^2\right)^3}{1.728} = 2 \Rightarrow Ma_1 = 2.1970 \Rightarrow$$

$A_1^* = 1m^2, \quad A_1 = 2m^2$

$$p_1 = \frac{p_0}{\left(1+0.2Ma_1^2\right)^{3.5}} = 28.2kPa$$

$T_0 = 500K$
$p_0 = 300kPa$
$V = 0$



Exemple 9.6 (II)

p_1, p_2, p_{02}, A_2^*?
$p_{03}, A_3^* p_3, T_{03}$?

$k = 1.4, R = 287\ m^2/(s^2K)$,
$c_p = 1005\ m^2/(s^2K)$
$p_0 = 300\ kPa, T_0 = 500K$

Pour trouver le nombre de Mach à la section ❶, nous pouvons utiliser le ***chemin alternatif*** fournit par les **tables d'écoulement isentropique**

Table *isentropique*

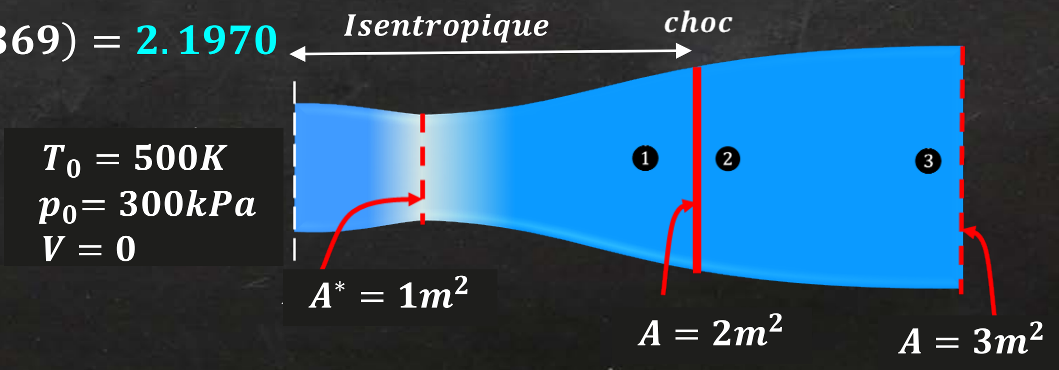
Ma	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
2.1	0.1904	0.2058	0.5313	1.8369
2.2	0.0935	0.1841	0.5081	2.0050

$A_1^* = 1m^2, \quad A_1 = 2m^2$

$A/A^* \leftarrow 2$

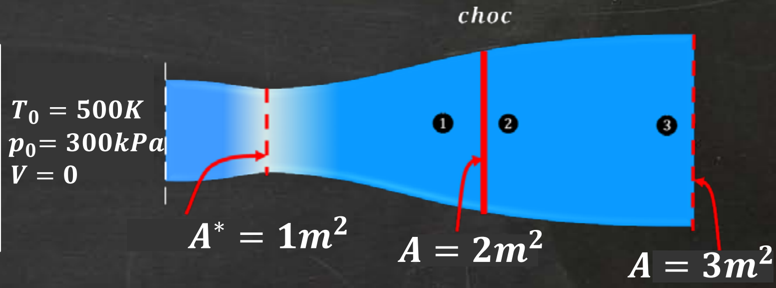
$$Ma_1 = 2.10 + \frac{2.20 - 2.10}{2.0050 - 1.8369}(2 - 1.8369) = 2.1970$$

$$p_1 = \frac{p_0}{(1 + 0.2Ma_1^2)^{3.5}} = 28.2kPa$$



Exemple 9.6 (III)

$$k = 1.4, R = 287\ m^2/(s^2K),\quad c_p = 1005\ m^2/(s^2K)\quad p_0 = 300\ kPa, T_0 = 500K\quad p_1 = 28.2\ kPa,\ A^*{}_1 = 1\ m^2$$



Pour trouver les quantités au niveau ❷, juste après le choc, nous utiliserons les équations ou les tables pour un choc normal: **FORMULAIRE II**

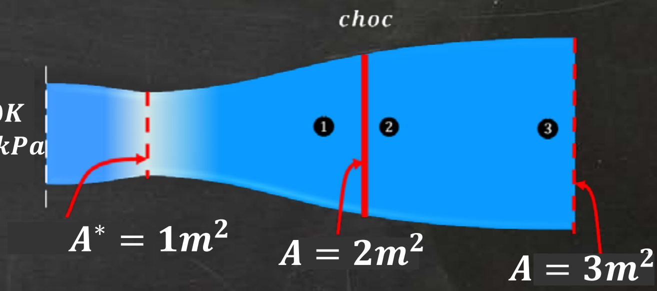
$$Ma_1 = 2.1970 \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[2kMa_1^2 - (k-1)\right] \qquad p_2 = 154kPa$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left[\frac{(k+1)^2 M_1^2}{2+(k-1)M_1^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} \left[\frac{k+1}{2kM_1^2-(k-1)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

etc...

Exemple 9.6 (IV)

$k = 1.4, R = 287\ m^2/(s^2K),$
$c_p = 1005\ m^2/(s^2K)$
$p_0 = 300\ kPa, T_0 = 500K$
$p_1 = 28.2\ kPa,\ A^*{}_1 = 1\ m^2$



Solution: tables

$Ma_1 = 2.1970$

Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	$V_2/V_1 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A_2^*/A_1^*
2.1	0.5613	4.9783	2.8119	1.7705	0.6742	1.4832
2.2	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	1.5920

$$p_2 = p_1 \times 5.4800 = 154.5\ kPa$$

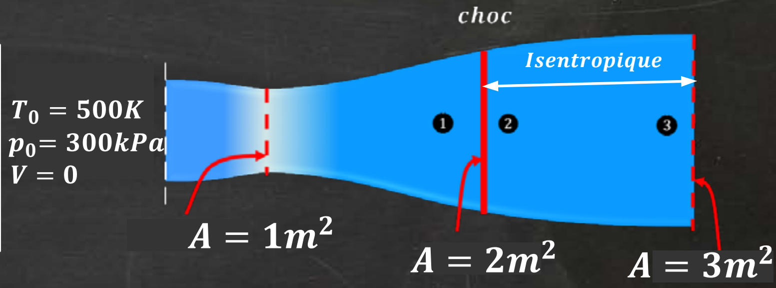
$$p_{02} = p_{01} \times 0.6281 = 188\ kPa$$

$$T_{02} = T_0 = 500K$$

$$A_2^* = \underbrace{A_1^*}_{1m^2} \times 1.5920 = 1.59m^2$$

Exemple 9.6 (V)

$k = 1.4, R = 287\ m^2/(s^2K),$
$c_p = 1005\ m^2/(s^2K)$
$p_0 = 300\ kPa, T_0 = 500K$
$p_1 = 28.2\ kPa,\ A^*{}_1 = 1\ m^2$



Solution

Calcul de, T_{03}, p_{03}, A_3^*

$Ma_1 = 2.1972$ $\quad p_{02} = 188\ kPa$ $\quad A_2^* = 1.59m^2$

Ma_1	Ma_2	p_2/p_1	$V_2/V_1 = \rho_2/\rho_1$	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	A_2^*/A_1^*
2.1	0.5613	4.9783	2.8119	1.7705	0.6742	1.4832
2.2	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	1.5920

$$T_{03} = T_{02} = T_0 = 500K$$

Adiabatique

$$p_{03} = p_{02} = 188\ kPa$$

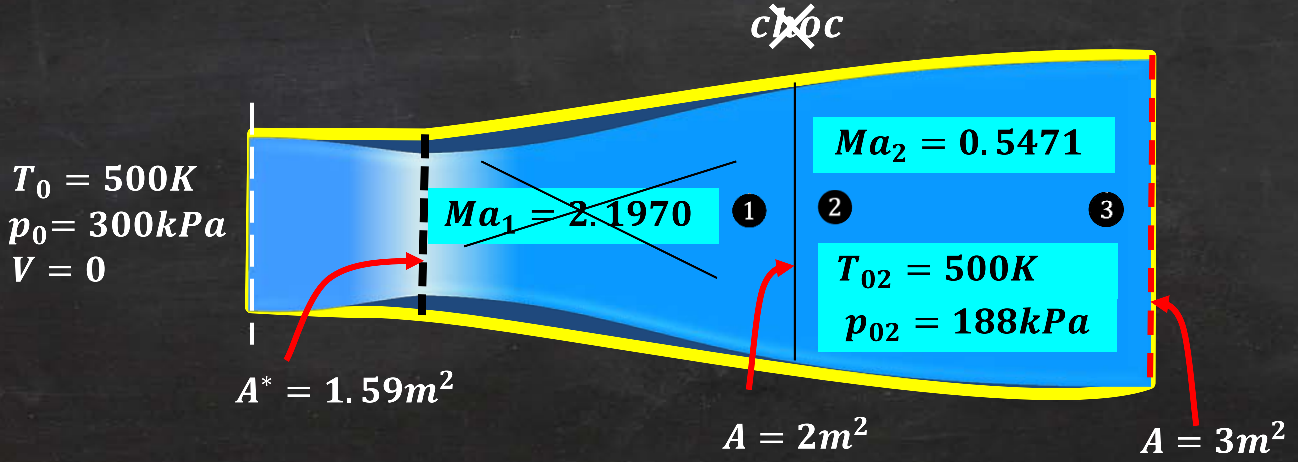
2 Isentropique 3

$$A_3^* = A_2^* = 1.59m^2$$

$A_3^* = A_2^*$: aire d'un col fictif

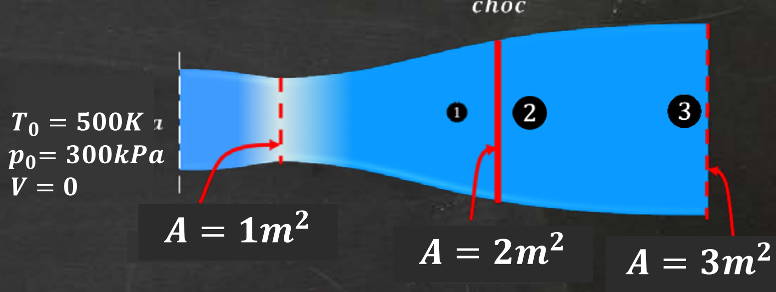
Exemple 9.6(VI)

L'écoulement entre la section ❷ en aval du choc et la sortie ❸ est isentropique Pour continuer, on suppose une tuyère fictive équivalente dont le nombre de Mach est $\mathrm{Ma}_2 = 0.5471$ à la section 2 ($A_2 = 2\,m^2$). Dans cette tuyère imaginaire **il n'y a pas de choc** et l'aire correspondante du col est $A_2^* = 1.59m^2$



A_2^*/A_1^* a été obtenu de la table d'un choc normal pour $Ma_1 = 2.1970$

Exemple 9.6 (VII)

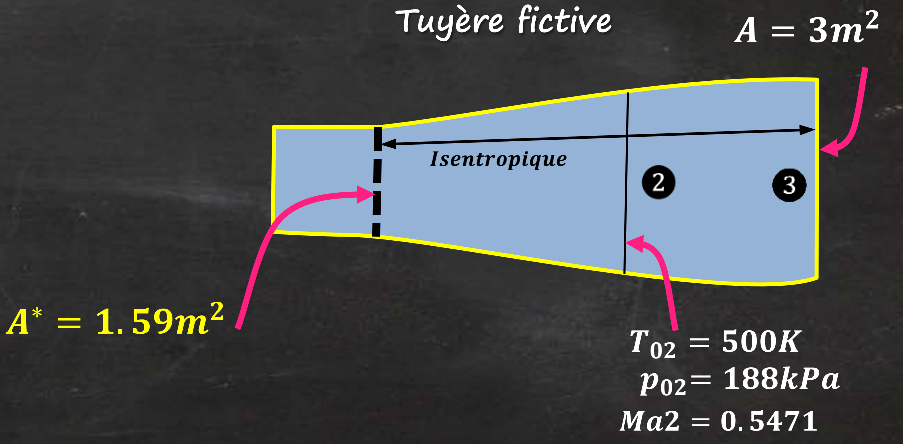


À la position 2, après le choc, l'écoulement est subsonique (Ma_2=0.5471), et puisque nous sommes dans la partie divergente de la tuyère, la vitesse doit chuter entre les sections 2 et 3

Calcul de Ma_3

$$\frac{A_3}{A_3^*} = \frac{3}{1.59} = 1.89 \quad = \frac{1}{Ma_3}\,\frac{(1+0.2Ma_3^2)^3}{1.728}$$

$\Rightarrow$ $Ma_3 = 0.33$



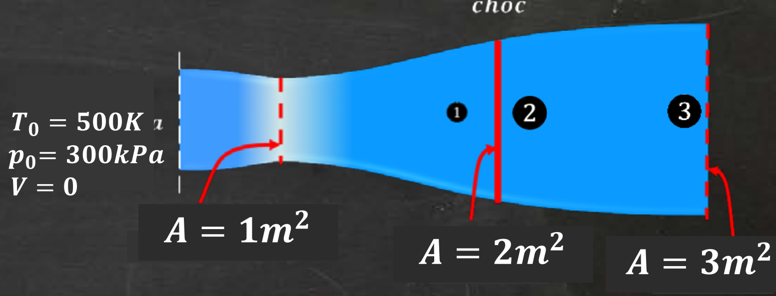
$A_3^* = 1.59m^2$ Indique l'aire du col d'une tuyère fictive dont aire à la sortie 3 est $A_3 = 3m^2$

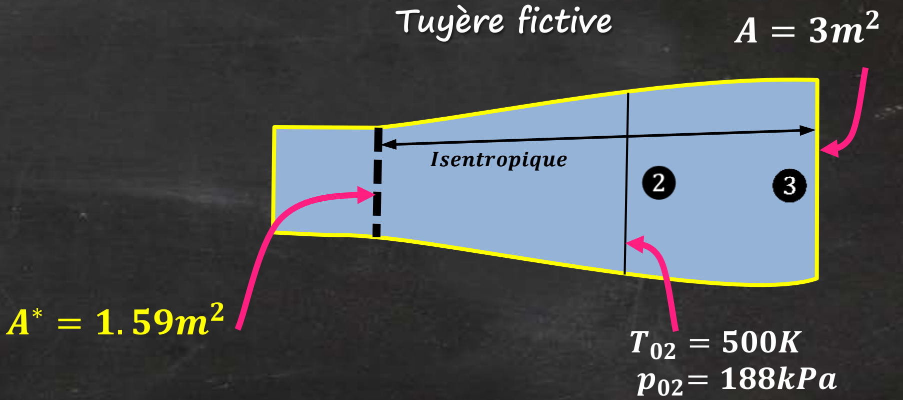
Exemple 9.6 (VIII)

Après le choc, l'écoulement demeure **isentropique** et toutes les quantités totales (d'arrêt) restent les mêmes. Nous pouvons alors trouver facilement les quantités statiques à la station 3. Notamment :

$$p_3 = \frac{\overbrace{p_{03}}^{p_{03}=p_{02}}}{\left(1 + 0.2\underbrace{Ma_3^2}_{Ma_3 = 0.33}\right)^{3.5}} = \mathbf{174kPa}$$

Relation isentropique (air)

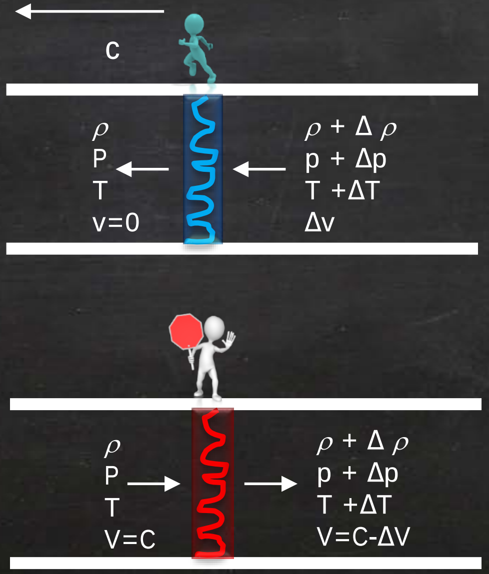


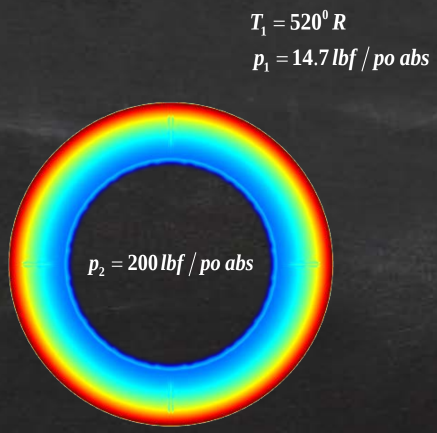


Onde de choc

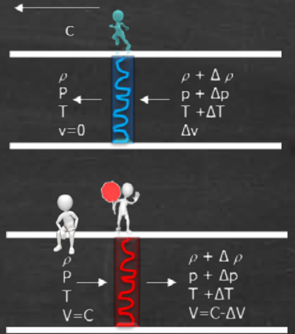
Exemple 9.7

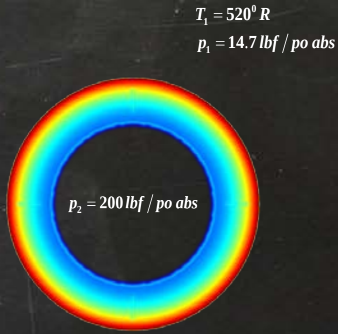
Une explosion dans l'air au repos (k=1.4,R=1716 pi²/(s^2 ^{0}R), c_p=1005 pi²/(s^2 ^{0}R)), engendre une onde de choc sphérique se propageant. On considère l'instant où la pression de l'onde à l'intérieur est de $\mathbf{p_0 = 200}\ lbf/po^2 abs.$
Déterminer (a) la vitesse de l'onde de choc et (b) la vitesse de l'air V à l'intérieur du choc





Exemple 9.7 (suite I)





Solution

On se place sur l'onde de choc en mouvement

Subsonique

À l'extérieur du choc nous avons:

La vitesse absolue du fluide: 0

La vitesse relative du fluide: $V_1 = C$

La pression du fluide: $p_1 = 14.7 lbf \ / \ po^2$

La température du fluide: $T_1 = 520^\circ R$

Supersonique

À l'intérieur du choc nous avons:

La vitesse absolue du fluide: V_2

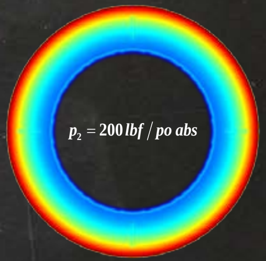
La vitesse relative du fluide: $V = V_1 - V_2$

La pression du fluide: $p_2 = 200 lbf \ / \ po^2$

k=1.4, R=1716 pi²/(s² ⁰R), c_p=1005 pi²/(s² ⁰R)

$T_1 = 520^0 R$

$p_1 = 14.7\, lbf / po\ abs$



Exemple 9.7 (suite II)

Solution: calcul de $C=V_1$

Subsonique

À l'extérieur du choc nous avons:

La vitesse absolue du fluide: 0

La vitesse relative du fluide: $V_1 = C$

La pression du fluide: $p_1 = 14.7 lbf \,/\, po^2$

La température du fluide: $T_1 = 520^\circ R$

Supersonique

À l'intérieur du choc nous avons:

La vitesse absolue du fluide: V_2

La vitesse relative du fluide: $V = V_1 - V_2$

La pression du fluide: $p_2 = 200 lbf \,/\, po^2$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{200}{14.7} = 13.61 = \frac{1}{2.4}\left[2.8 Ma_1^2 - 0.4\right] \Rightarrow Ma_1 = 3.436$$

Vitesse du son: $a_1 = 49\sqrt{T_1} = 1117\, pi/s \Rightarrow Ma_1 = \dfrac{V_1}{a_1} = 3.436 \Rightarrow V_1 = C = Ma_1 \times a_1 = 3840\, pi/s$

Exemple 9.7 (suite III)

Solution: calcul de V_2. On doit déterminer la température à l'intérieur du choc

Subsonique

À l'extérieur du choc nous avons:

La vitesse absolue du fluide: 0

La vitesse relative du fluide: $V_1 = C$

La pression du fluide: $p_1 = 14.7 lbf / po^2$

La température du fluide: $T_1 = 520^\circ R$

$$Ma_1 = \frac{V_1}{a_1} = 3.436$$

Supersonique

À l'intérieur du choc nous avons:

La vitesse absolue du fluide: V_2

La vitesse relative du fluide: $V = V_1 - V_2$

La pression du fluide: $p_2 = 200 lbf / po^2$

$$\boldsymbol{T_{01} = T_{02}}$$

$$c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[2 + 0.4 Ma_1^2\right] \frac{2.8 Ma_1^2 - 0.4}{(2.4)^2 Ma_1^2} = 3.228 \Rightarrow T_2 = 1679^\circ R \Rightarrow V_2^2 = 2 c_p \left(T_1 - T_2\right) + V_1^2 \qquad V_2 = 903 pi / s$$

$$V_1 = 3840 pi / s$$

Chapitre 9: Écoulements compressibles

9.1 Thermodynamique

9.2 La vitesse du son

9.3 Écoulement adiabatique et isentropique

9.4 Écoulement isentropique avec changement de section

9.5 Choc normal

9.6 Tuyères convergente et convergente-divergente

Contexte

Une tuyère est une conduite qui permet l'accélération d'un gaz afin de générer une force de poussée

Pour ce faire, le dispositif relie un réservoir (où la vitesse est nulle) à pression $\boldsymbol{p_0}$, à un environnement à pression $\boldsymbol{p_b}$

L'écoulement a lieu dès que la pression ambiante $\boldsymbol{p_b}$ est inférieure à la pression $\boldsymbol{p_0}$ dans le réservoir

Contexte

En fonction du niveau de la pression de l'environnement $\boldsymbol{p_b}$ et du type de tuyère, divers types de phénomènes auront lieu pour une pression donnée du réservoir $\boldsymbol{p_0}$

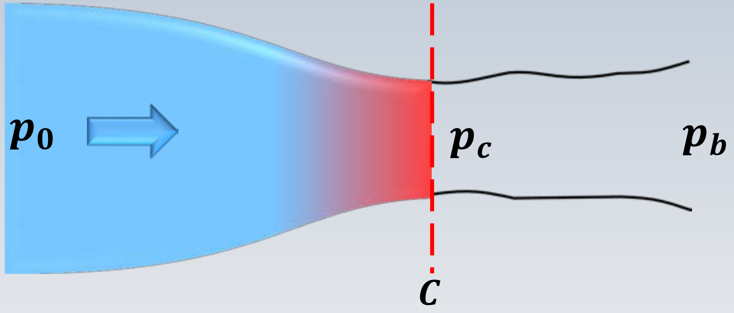
Pour caractériser un écoulement, on définit **le taux de détente** $\boldsymbol{NPR = p_0/p_b}$. Naturellement, il faut que $\boldsymbol{NPR > 1}$ pour que le fluide s'écoule du réservoir vers la sortie

Dans ce contexte, nous analyserons l'impact du $\boldsymbol{NPR}$ sur l'écoulement. On regrderaa d'abord les tuyères convergentes

NPR: nozzle pressure ratio

Tuyère convergente I

Pour **une tuyère strictement convergente** et pour une pression $\boldsymbol{p_b}$ fixe, on peut débuter l'analyse en regardant le nombre de Mach au plan de sortie ($\boldsymbol{C}$ sur la figure)

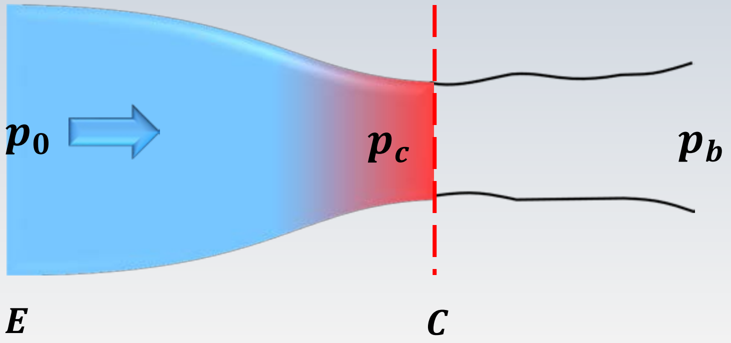


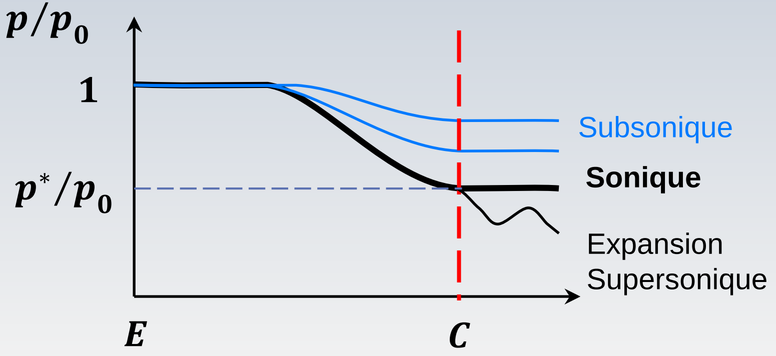
$$\frac{p_c}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{k-1/k}$$

Au fur et mesure que la pression $\boldsymbol{p_0}$ croît, le nombre de Mach dans l'équation ci-dessus (écoulement isentropique), augmente jusqu'atteindre la valeur $\boldsymbol{Ma}$ =**1** au plan de sortie.

Tuyère convergente II

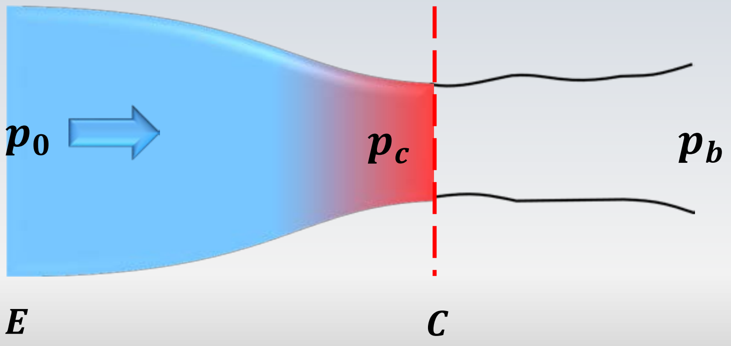
Une fois que l'écoulement est rendu **sonique** en ce point, **le débit massique est maximal**. Ainsi, le conditions au point C sont critiques avec $p_b=p_c=p^*$. On a alors une valeur bien précise pour $NPR^* = p_0/p^* = ((k+1)/2))^{k/(k-1)}$ =1.8929 (k=1.4)

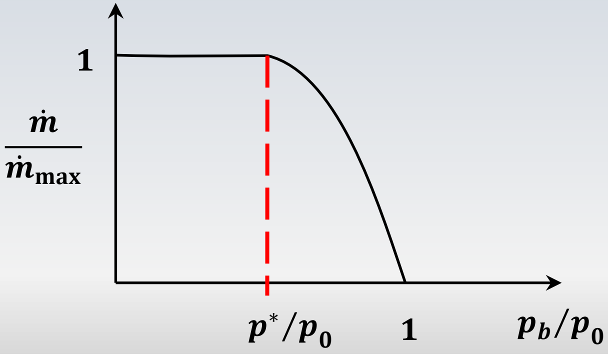




Tuyère convergente III

Le graphique illustre le débit adimensionnel $\dot{m}/m_{max}$ en fonction de la pression adimensionnelle p_b/p_0. Évidemment, si la pression est la même partout, il n' y a pas d'écoulement. Si l'on diminue p_b, un débit croissante a lieu et, lorsque p_b=p_c=p^*, on atteint le débit maximal.





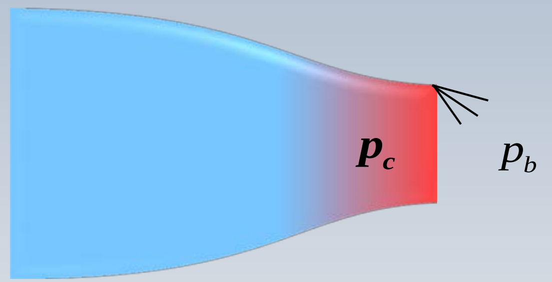
Tuyère convergente IV

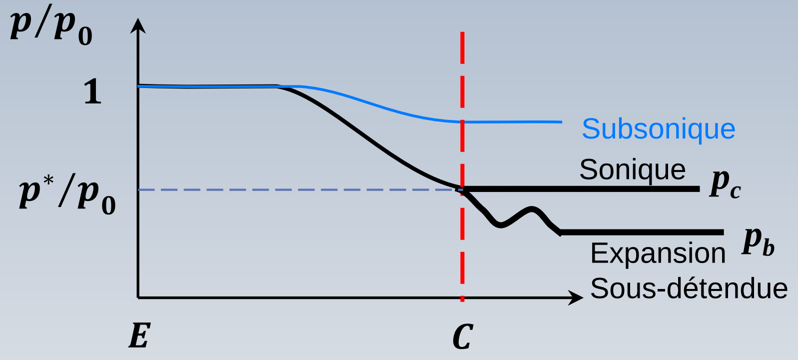
Si la pression en arrière continue a diminuer, soit $p_b < p^*$, (ou bien si la pression p_0 augmentais) l'écoulement demeure bloqué et $\mathbf{Ma}$ ne peut pas excéder $\mathbf{1}$. Par contre, la pression de sortie p_c est en dessus de p_b. Ce phénomène donne lieu à un jet *sous-détendu*.

Dans ce cas, la pression p_c s'ajuste jusqu'à la pression ambiante p_b au moyen d'ondes de détente (interprétés comme un éventail) qui sont accrochées à la lèvre de la tuyère.

L'expansion se poursuit ensuite en aval de la section de sortie de la tuyère

Tuyère convergente V

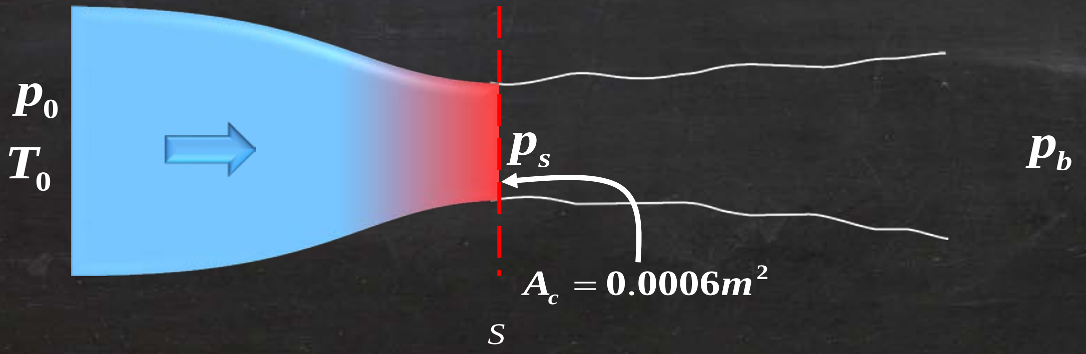




Exemple 9.8

De l'air ($k = 1.4, R = 287\,m^2/(s^2K)$, $c_p = 1005\,m^2/(s^2K)$), s'écoule dans une tuyère convergente. L'aire de la section du col à la sortie est $A_c = 0.0006m^2$. Les conditions de stagnation (arrêt) en amont sont $p_0 = 120\,kPa, T_0 = 400K$

a) On doit déterminer la pression à la sortie p_s et le débit massique $\dot{m}$ pour deux pressions en arrière a) $p_b = 90\,kPa$ et b) $p_b = 45\,kPa$



Exemple 9.8 (suite I)

$R = 287 \ m^2/(s^2 K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005 \ m^2/(s^2 K)$
$A_s = 0.0006 m^2$, , $p_0 = 120 kPa$, $T_0 = 400K$,

Solution FORMULAIRE I

$p_b = 45 \ kPa$ $p_b = 90 \ kPa$

On regardera d'bord la condition de design, c'est-à-dire avec une vitesse sonique au col: $A_{col}=A^*=0.0006 \ m^2$. Ensuite, on déterminera la pression à la sortie p_s en fonction de la pression de stagnation p_o.
Puisque le col à la sortie est sonique, le nombre de Mach à cet endroit est unitaire.

$$Ma_s = 1 \qquad \frac{p_0}{p_s} = \left(1 + 0.2 Ma_s^2\right)^{3.5} = 1.8929 \Longrightarrow p_s = p^* = 63.4 kPa$$

Si $p_b < p_s = p^*$, alors l'écoulement est bloqué et le débit massique est maximal.
C'est le cas pour $p_b = 45 kPa < p_s = 63.4 kPa$

$$\dot{m}_{\max} = 0.6847 \frac{p_0 A^*}{\sqrt{R T_0}} = 0.145 \ kg/s$$

Exemple 9.8 (suite II)

$R = 287\ m^2/(s^2 K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$
$A_s = 0.0006 m^2$, , $p_0 = 120 kPa$, $T_0 = 400K$,

Solution

$p_b = 45\ kPa$ $p_b = 90\ kPa$

Pour p_b =90kPa >p_s =63.4kPa, l'écoulement à la sortie est alors **subsonique** et le débit massique n'est **pas maximal**. Dance cas, la pression à la sortie p_s est égale à p_b.

$$p_s = p_b = 90\ kPa$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{k/k-1} \qquad \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2$$

$$Ma_s^2 = 5\left(\left(\frac{p_0}{p_s}\right)^{2/7} - 1\right) = 0.4283 \Rightarrow Ma_s = 0.654 \Rightarrow \frac{T_0}{T_s} = 1 + 0.2 Ma_s^2 \Rightarrow T_s = 368.48K$$

$$a_s = \sqrt{kRT_s} = 384.78 m/s \Rightarrow V_s = a_s Ma_s = 251.65\ m/s$$

$$\rho_s = \frac{p_s}{RT_s} = 0.8510 kg/s$$

$$\dot{m} = \rho_s A_s V_s = 0.129 k\ g/s$$

Exemple 9.8 (suite III)

$$R = 287\ m^2/(s^2\,K)\ ,\ k = 1.4,\ c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$$
$$A_s = 0.0006 m^2,\quad ,p_0 = 120 kPa,\quad T_0 = 400K,$$

Solution: Méthode alternative pour le calcul du débit:

$Ma_s = 0.654$

$p_s = 90\ kPa$

Il est aussi possible de calculer le débit à l'aide de l'une des formules:

$$\dot{m} = A_s \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_s}{p_0}\right)^{2/k}\left[1-\left(\frac{p_s}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} = 0.129k\ g/s$$

$$\dot{m} = A_s \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} Ma_s\sqrt{k}\left[1+\frac{k-1}{2}Ma_s^2\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} = 0.129k\ g/s$$

Exemple 9.8 (suite IV)

$R = 287\ m^2/(s^2 K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$

$A_s = 0.0006 m^2$, , $p_0 = 120 kPa$, $T_0 = 400K$,

Solution: Méthode alternative avec des tables: $p_b = 45\ kPa$ $p_b = 90\ kPa$

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
0.9000	0.5913	0.8606	1.0089
0.9100	0.5849	0.8579	1.0071
0.9200	0.5785	0.8552	1.0056
0.9300	0.5721	0.8525	1.0043
0.9400	0.5658	0.8498	1.0031
0.9500	0.5595	0.8471	1.0021
0.9600	0.5532	0.8444	1.0014
0.9700	0.5469	0.8416	1.0008
0.9800	0.5407	0.8389	1.0003
0.9900	0.5345	0.8361	1.0001
1.00	0.5283	0.8333	1.000
1.0100	0.5221	0.8306	1.0001
1.0200	0.5160	0.8278	1.0003
1.0300	0.5099	0.8250	1.0007
1.0400	0.5039	0.8222	1.0013
1.0500	0.4979	0.8193	1.0020

M=1, p^*/p_0 =0.5283

$$p_s = p_0 \times 0.5283 = 63.4 kPa$$

$$p_b = 45\ kPa < 63.4 kPa$$

l'écoulement est bloqué au col(=sortie)

$$Ma = 1 \quad et \quad A^* = A_s = 0.0006 m^2$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 A^*} = \sqrt{k}\left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\dot{m} = 0.145\ kg/s$$

Exemple 9.8 (suite V)

$R = 287\ m^2/(s^2 K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$
$A_s = 0.0006 m^2$, , $p_0 = 120 kPa$, $T_0 = 400K$,

$p_b = 45\ kPa$ $p_b = 90\ kPa$

Solution: Méthode alternative avec des tables:

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
0.6000	0.7840	0.9328	1.1882
0.6100	0.7778	0.9307	1.1767
0.6200	0.7716	0.9286	1.1656
0.6300	0.7654	0.9265	1.1552
0.6400	0.7591	0.9243	1.1451
0.6500	0.7528	0.9221	1.1356
0.6600	0.7465	0.9199	1.1265
0.6700	0.7401	0.9176	1.1179
0.6800	0.7338	0.9153	1.1097
0.6900	0.7274	0.9131	1.1018
0.7000	0.7209	0.9107	1.0944
0.7100	0.7145	0.9084	1.0873
0.7200	0.7080	0.9061	1.0806
0.7300	0.7016	0.9037	1.0742
0.7400	0.6951	0.9013	1.0681
0.7500	0.6886	0.8989	1.0624

$p_e/p_0 = 0.75$ M=0.654

$p_s/p_0 = 90/120 = 0.75$

$p_b = 90\ kPa > 63.4 kPa$

l'écoulement n'est pas bloqué au col

Calcul du débit massique avec $M_s = 0.654$

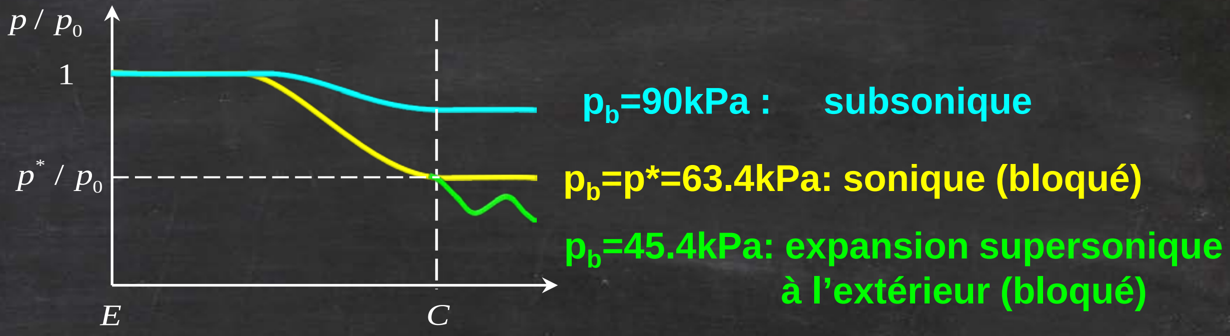
$$\dot{m} = A_s \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} Ma\sqrt{k}\left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\dot{m} = 0.129\ kg/s$$

Exemple 9.8 (suite VI)

$$R = 287\ m^2/(s^2 K)\ ,\ k = 1.4,\ c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$$
$$A_s = 0.0006 m^2,\ \ , p_0 = 120 kPa,\ \ T_0 = 400K,$$

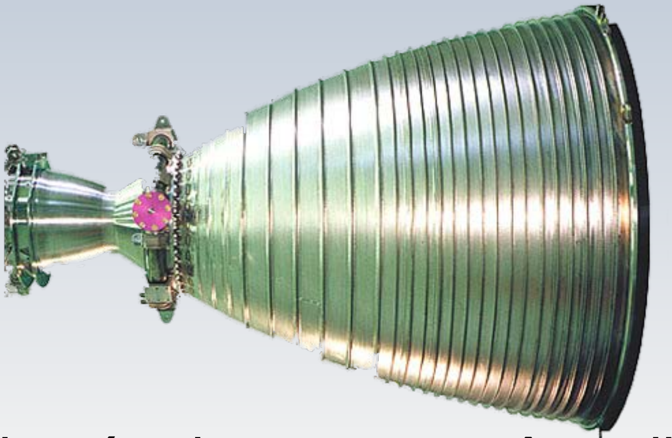
Solution: résumé graphique:



9 7
8 1
1 1
0 2
2 1
5 7

La tuyère de Laval

On considère une tuyère dite de Laval formée par un convergent suivi d'un divergent. Bien que de ondes de choc obliques peuvent y apparaître, on ne regardera que les chocs droits (normaux)

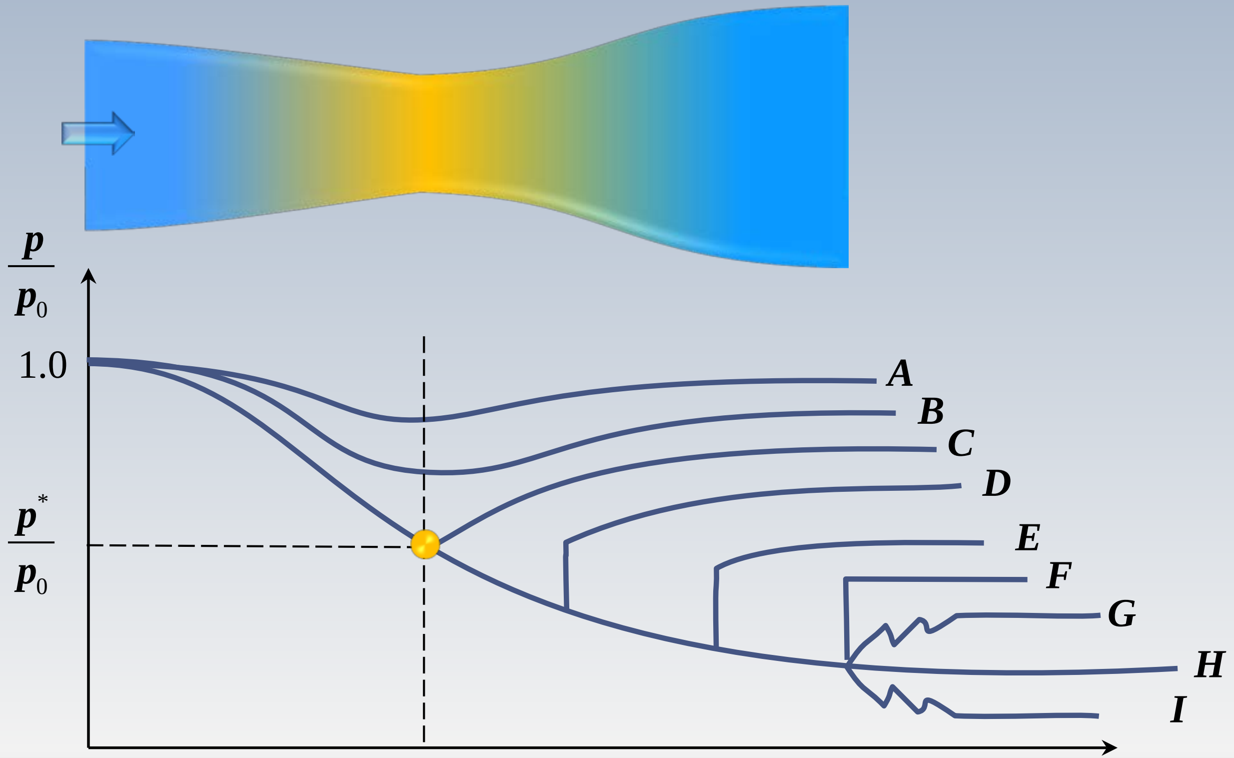


Divers régimes d'opération peuvent être distingués

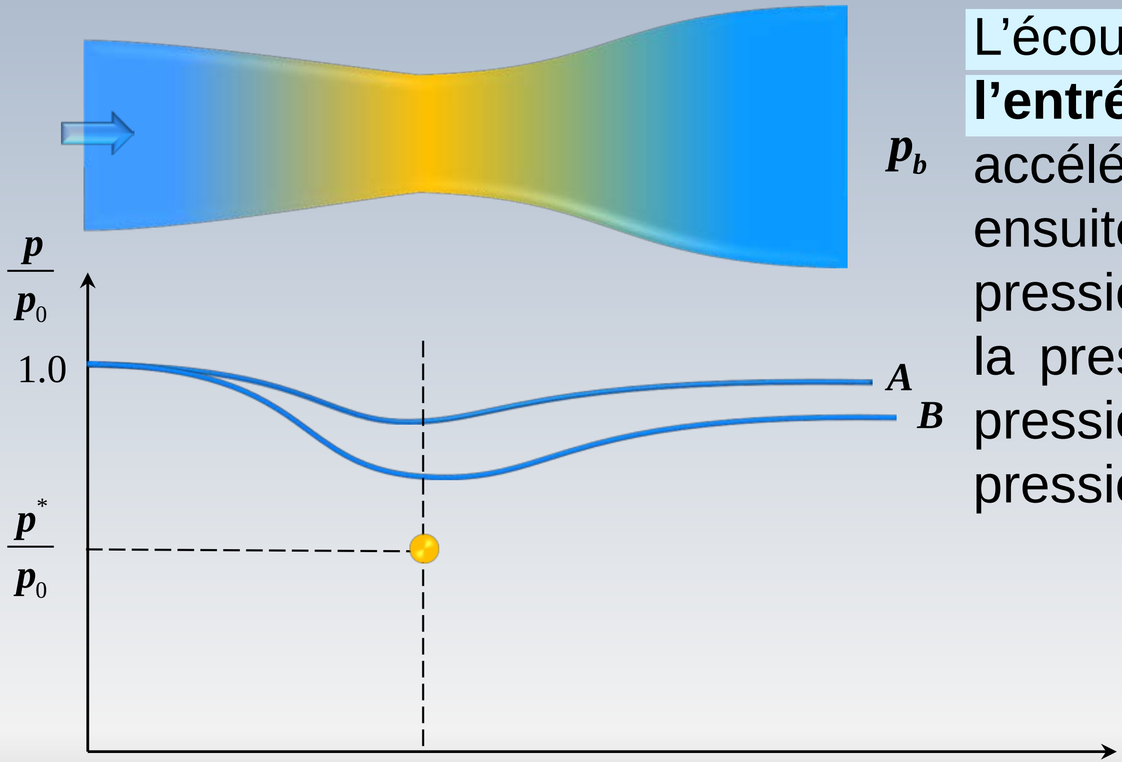
La tuyère de Laval

Les régimes d'opération (ou les écoulements) ayant lieu dans une une tuyère convergente-divergente sont plus variés que dans une tuyère purement convergente. En fait, on retrouvera plusieurs catégories d'écoulement en fonction de la valeur du taux de détente (***NPR***).

Régimes dans une tuyère de Laval

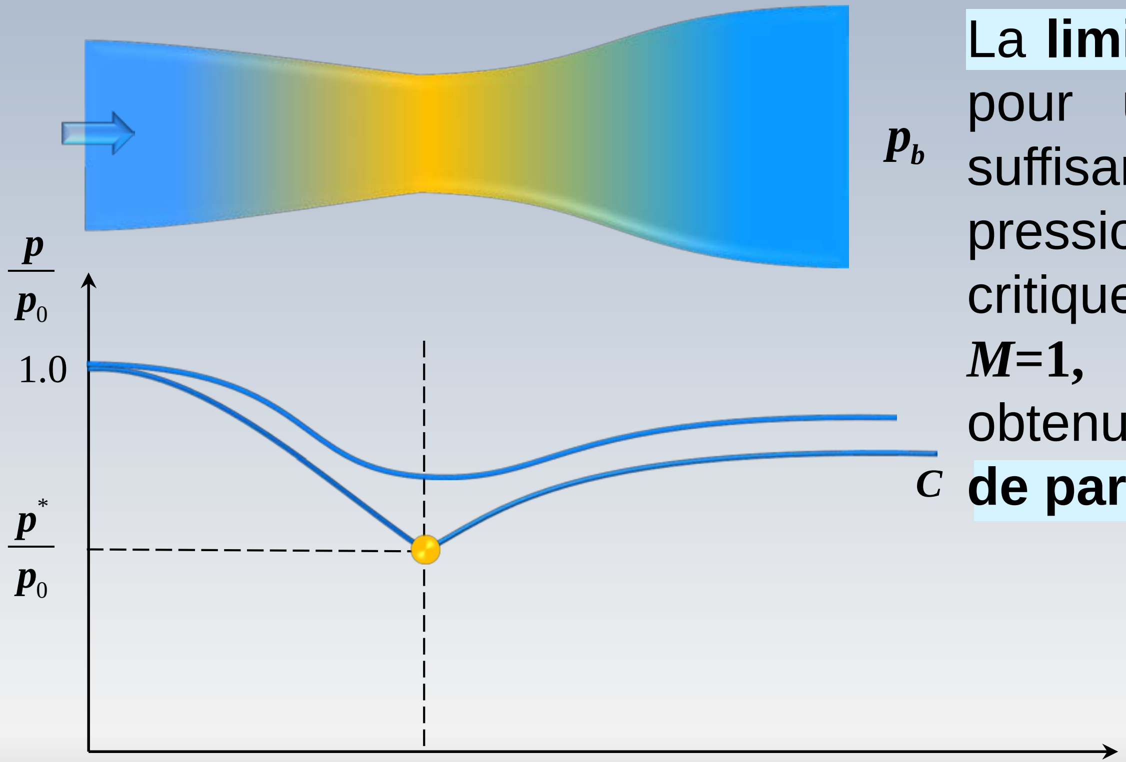


Écoulement subsonique partout



L'écoulement est subsonique de l'entrée à la sortie. Le fluide est accéléré dans le convergent et ensuite ralentie dans le divergent. La pression en arrière p_b est proche de la pression d'arrêt en amont p_0. La pression au col est supérieure à la pression critique p^*

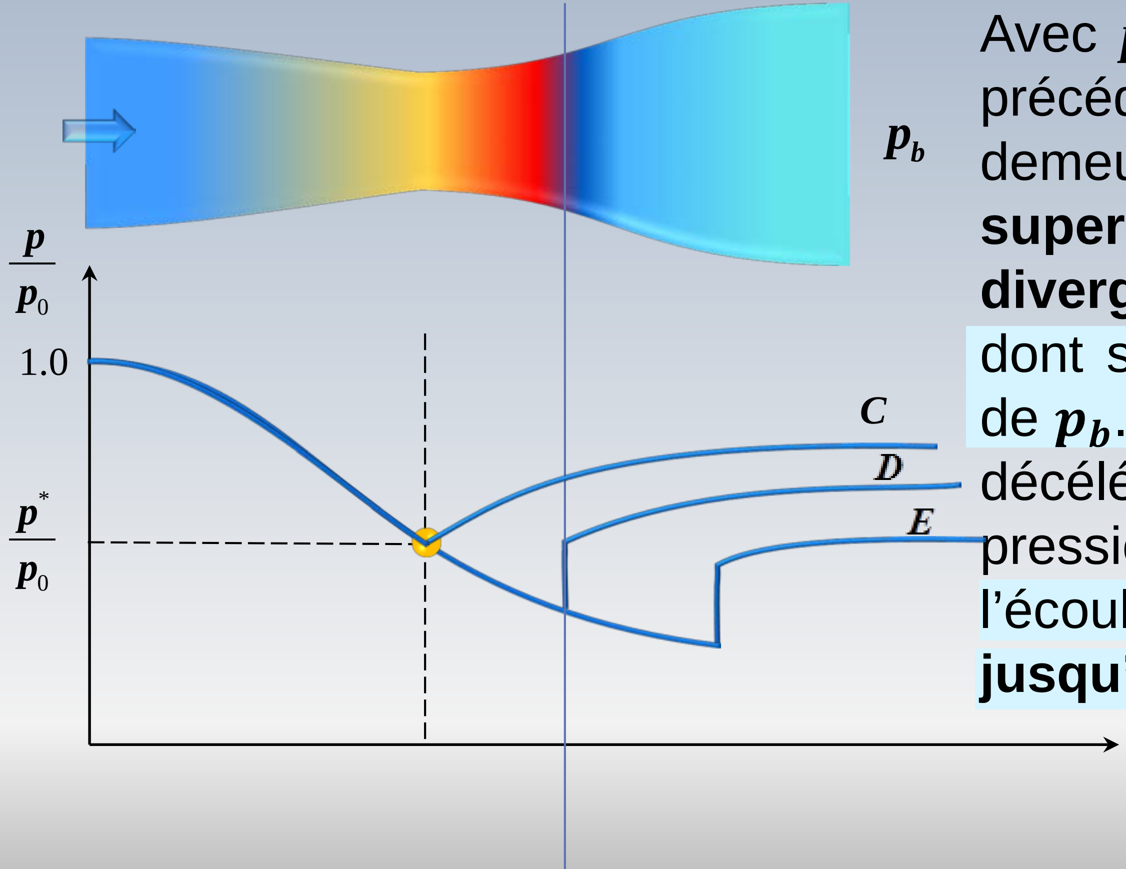
Écoulement critique



La **limite critique au col est atteinte** pour une pression en arrière p_b suffisamment faible. Au col, la pression correspond à la pression critique p^*, l'écoulement est sonique, M**=1,** et le débit maximal $\dot{m}_{max}$ est obtenu. L'écoulement est **subsonique de part et d'autre du col**

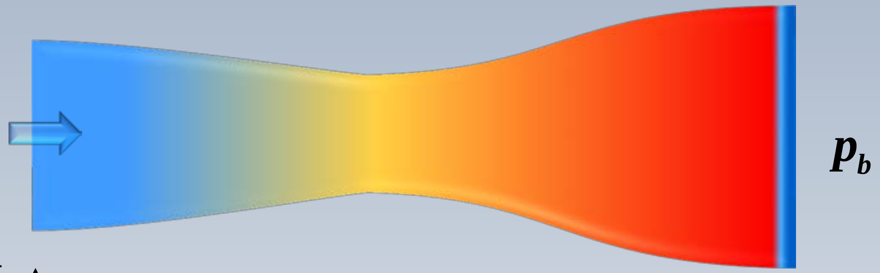
Retour méthodologie

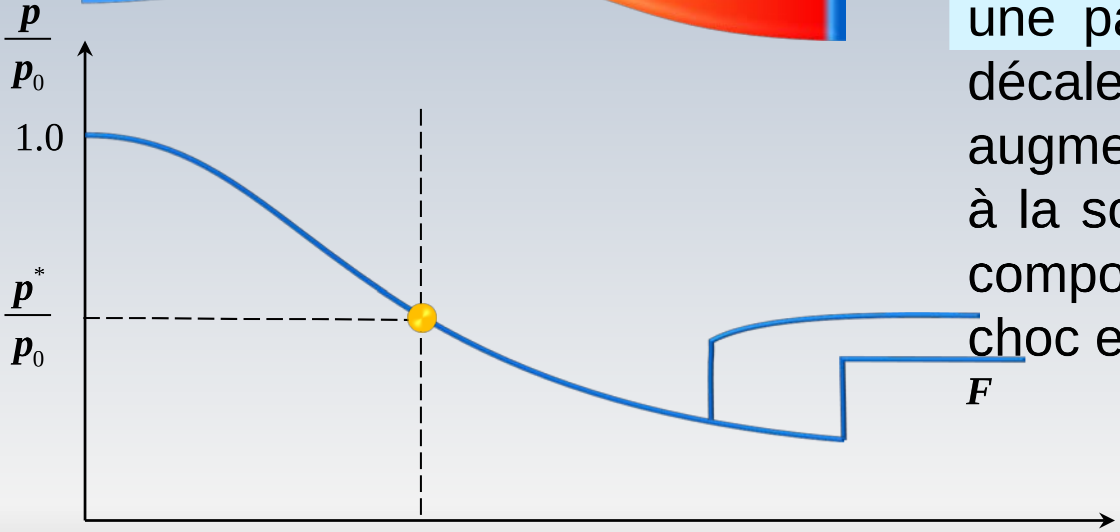
Subsonique-supersonique-subsonique



Avec p_b diminuant du niveau décrit précédemment(ligne C), l'écoulement demeure critique au col et devient **supersonique dans une partie du divergent**. Un **choc droit apparaît**, dont sa position dépend de la valeur de p_b. Le choc est accompagné d'une décélération et d'un gain soudain en pression. En aval de celui-ci, l'écoulement **redevient subsonique jusqu'à la sortie**

Subsonique-supersonique-subsonique

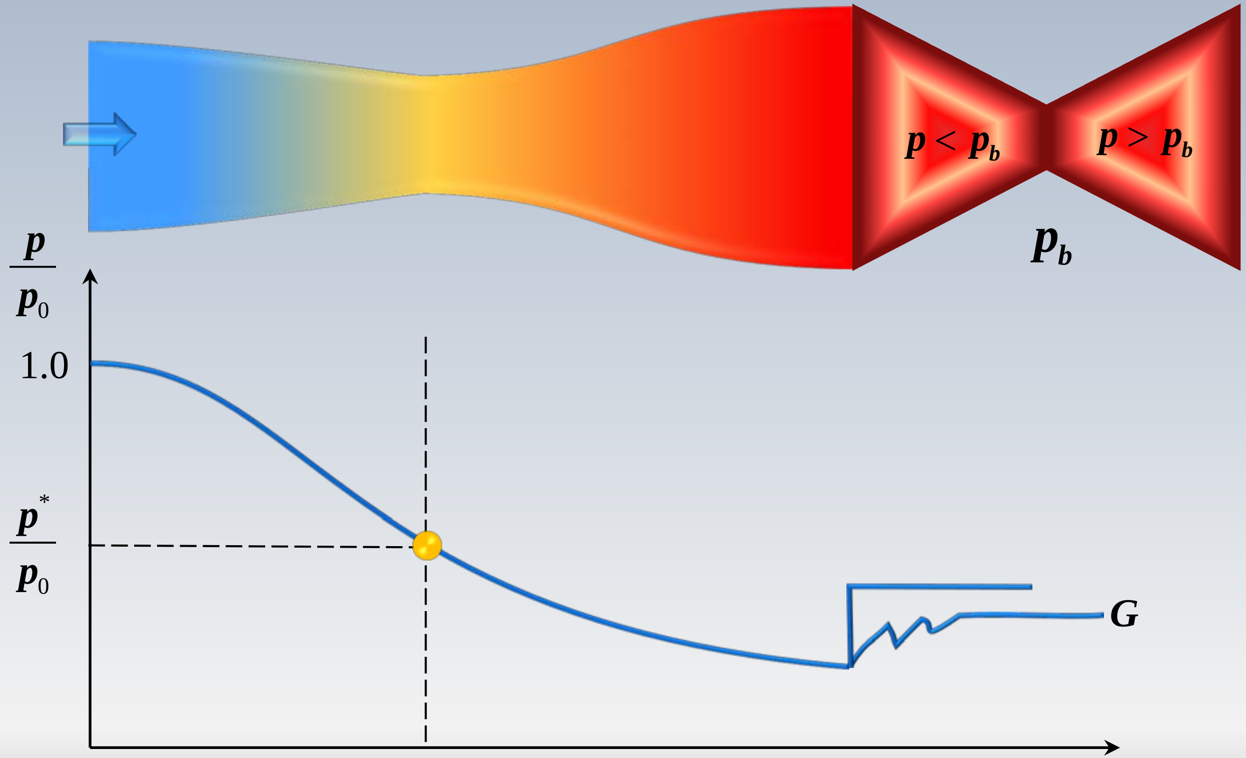




Ce cas correspond à **la limite** du régime caractérisé par un écoulement sonique au col et supersonique dans une partie du divergent. Le choc se décale vers l'aval lorsque la détente augmente pour se situer **exactement** à la sortie (courbe F). La pression p_s comporte deux valeurs, une avant le choc et autre après le choc, p_s=p_b.

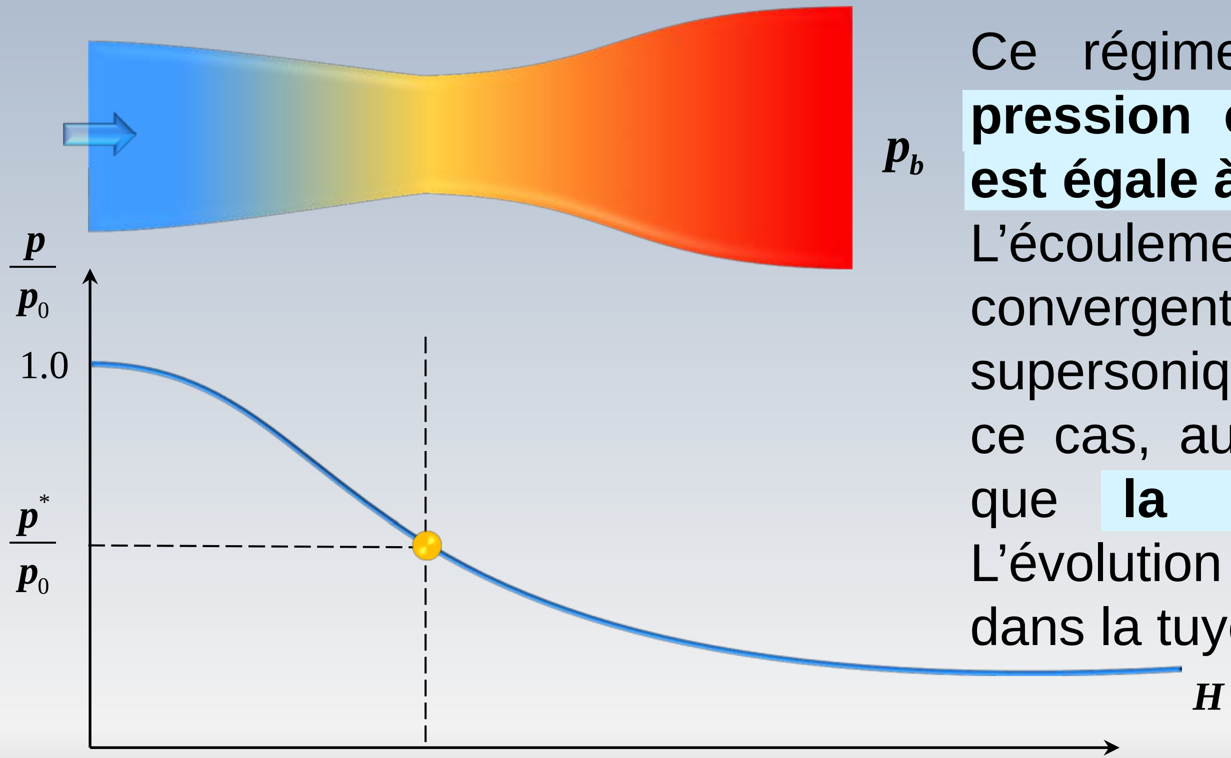
Retour méthodologie

Tuyère en sur-expansion



Une diminution de p_b ne modifie plus l'écoulement dans la tuyère. Dans ce cas, elle est dite en *sur-expansion*. L'ajustement de pression entre le jet et l'ambiant, se fait à l'extérieur par une suite d'ondes de **choc obliques**. Ces ondes génèrent des cellules périodiques en forme de diamant

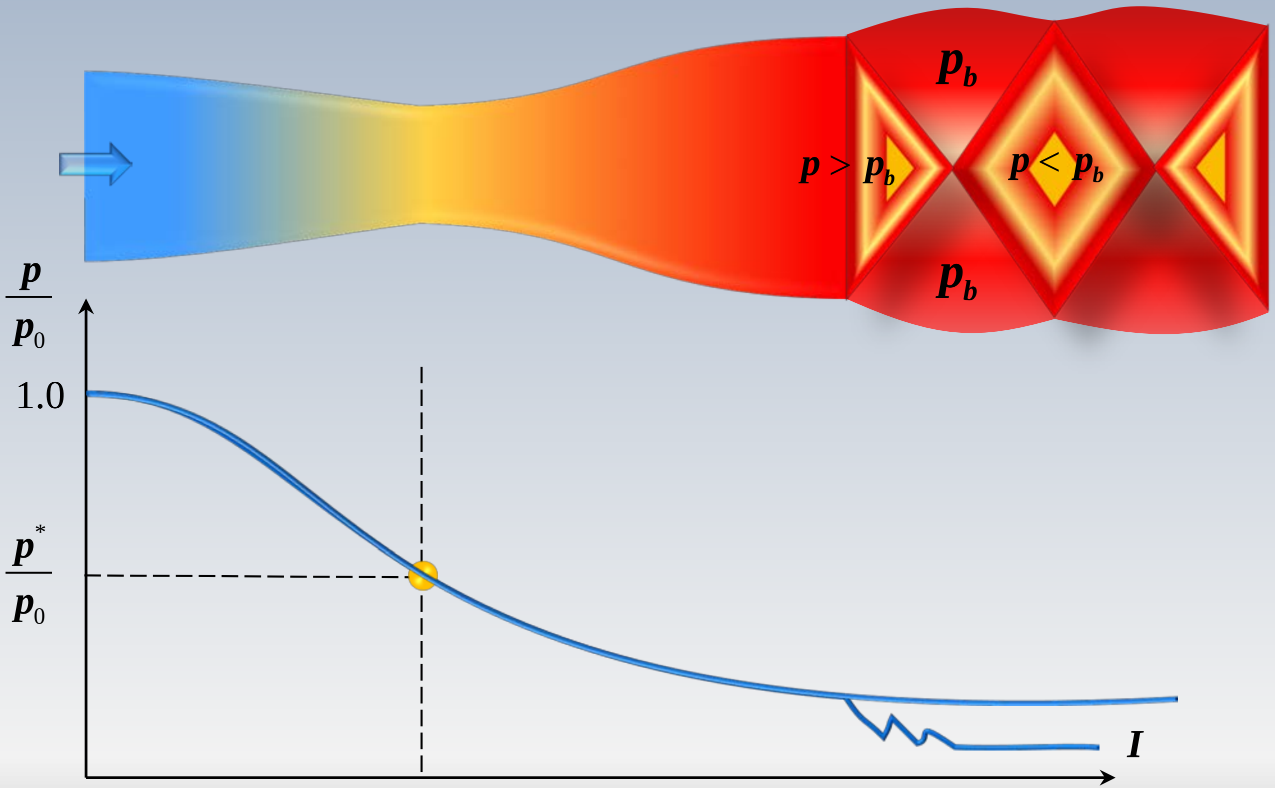
Tuyère adaptée



Ce régime est obtenu lorsque **la pression en arrière (ambiante) p_b est égale à la pression p_s à la sortie.** L'écoulement est subsonique dans le convergent, sonique au col et supersonique dans le divergent. Dans ce cas, aucun choc a lieu et on dit que **la tuyère est adaptée**. L'évolution est isentropique partout dans la tuyère.

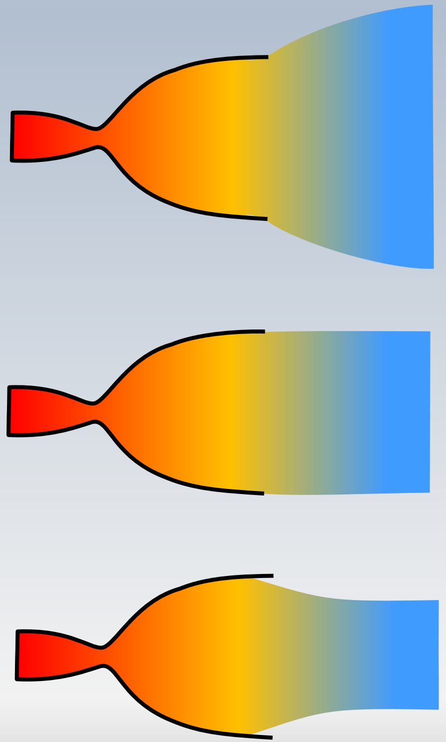
Retour méthodologie

Tuyère en sous-expansion



Pour ce régime, la pression en arrière p_b (I) est en dessous de la pression p_s correspondant à une évolution isentropique. L'écoulement s'ajuste à la pression extérieure par une série **d'ondes de détente obliques**. La tuyère est en en *sous-expansion* et, tel que pour le cas en sur-expansion, on retrouve des cellules en forme de diamant.

Résumé



Tuyère en sous-expansion

$p_{sortie} > p_{ambiante}$

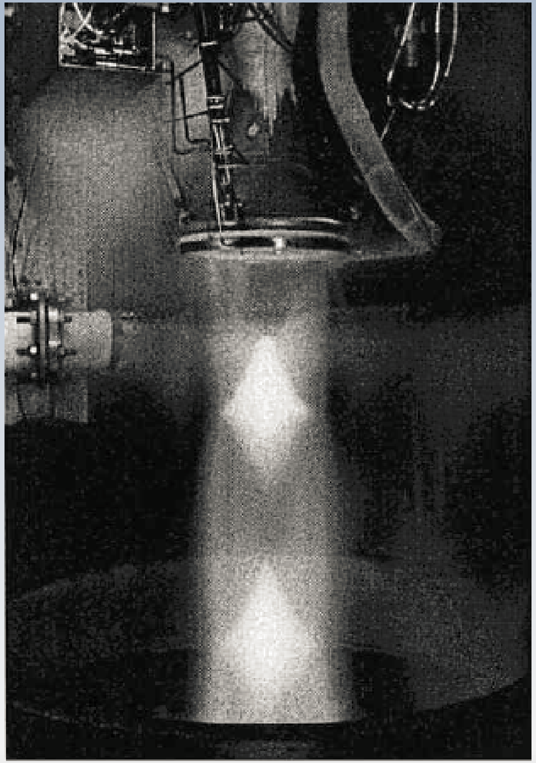
Tuyère adaptée

$p_{sortie} = p_{ambiante}$

Tuyère en sur-expansion

$p_{sortie} < p_{ambiante}$

Hors Design

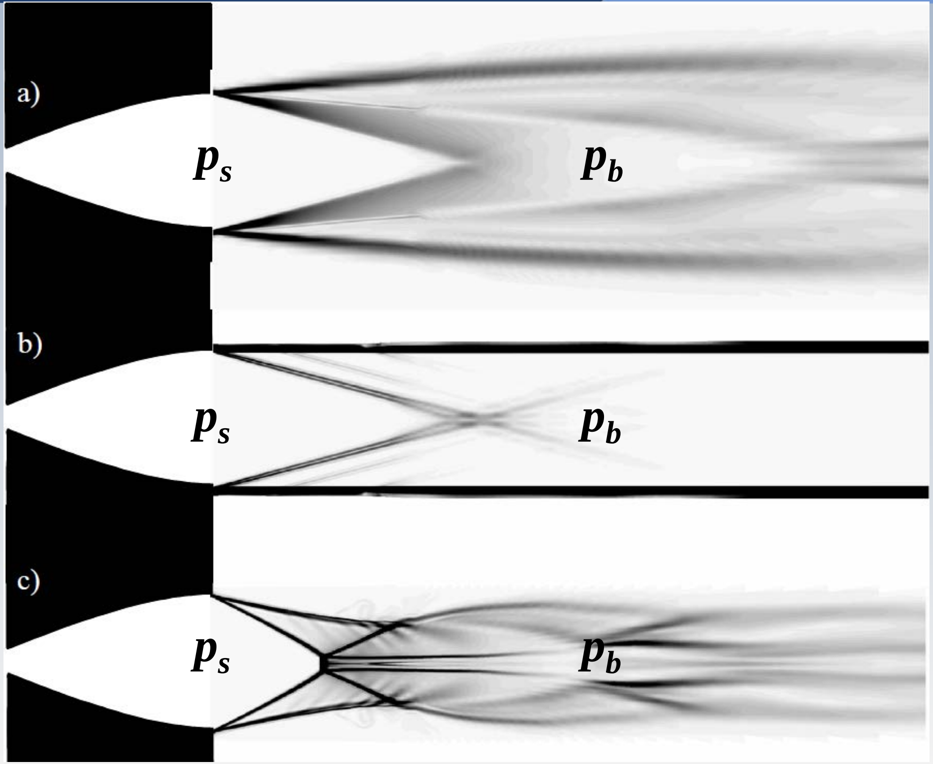


a) Tuyère en sur-expansion,

b) Tuyère en sous-expansion

Photographies P&W et NASA

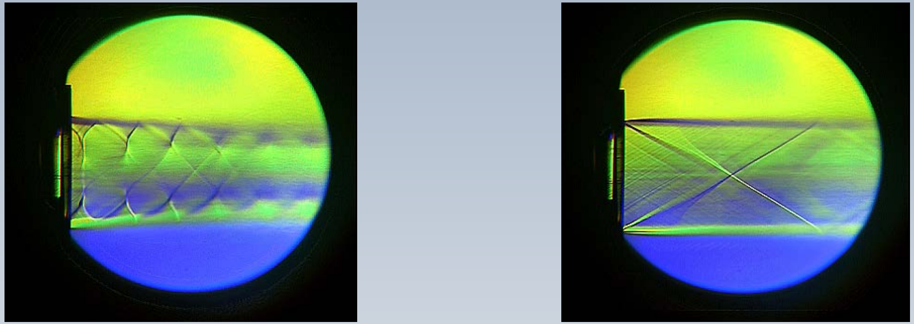
Image Schlieren



Östlund, J. Supersonic flow separation with application to rocket engine nozzles KTH, SE-100 44 Stockholm, 2004

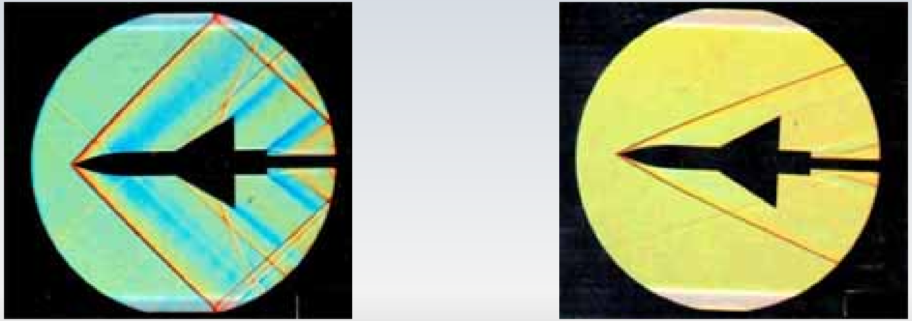
Images Schlieren numériques pour une tuyère: a) en sous expansion, $p_s > p_b$, b) adaptée, $p_s = p_b$, c) en sur expansion $p_s < p_b$

Photographie Schlieren



Aerodynamics Reserch Center
University of Texas at Arlington

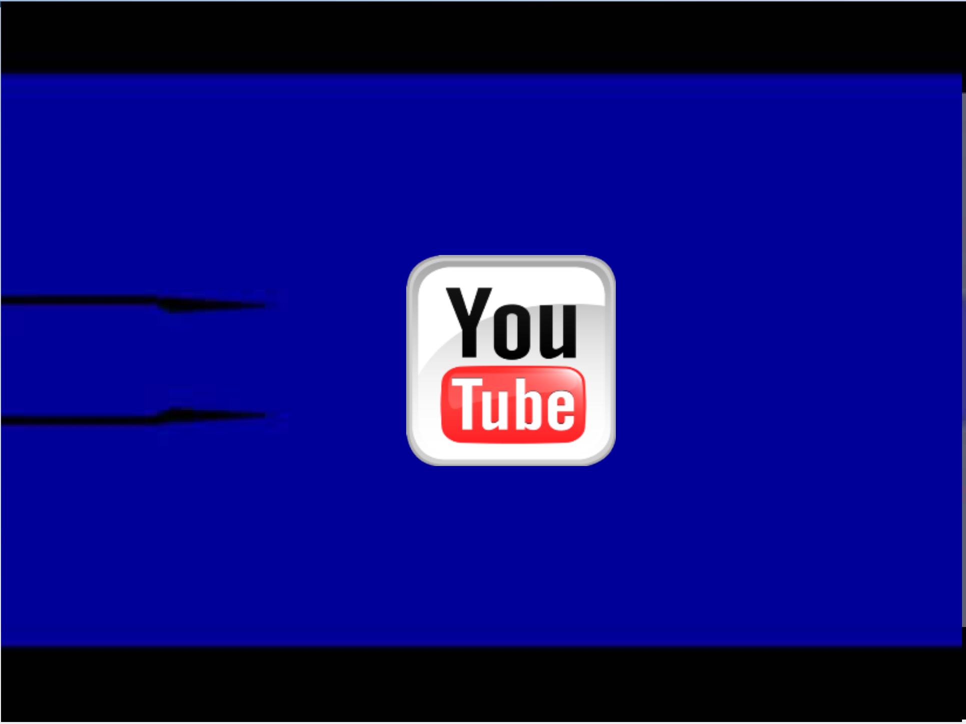
Chocs obliques à la sortie d’une tuyère en sous-expansion. La pression p_b en arrière est inférieure pour le cas à droite



Fronts d’ondes attachés à Mach=1, à gauche et Mach=4, à droite

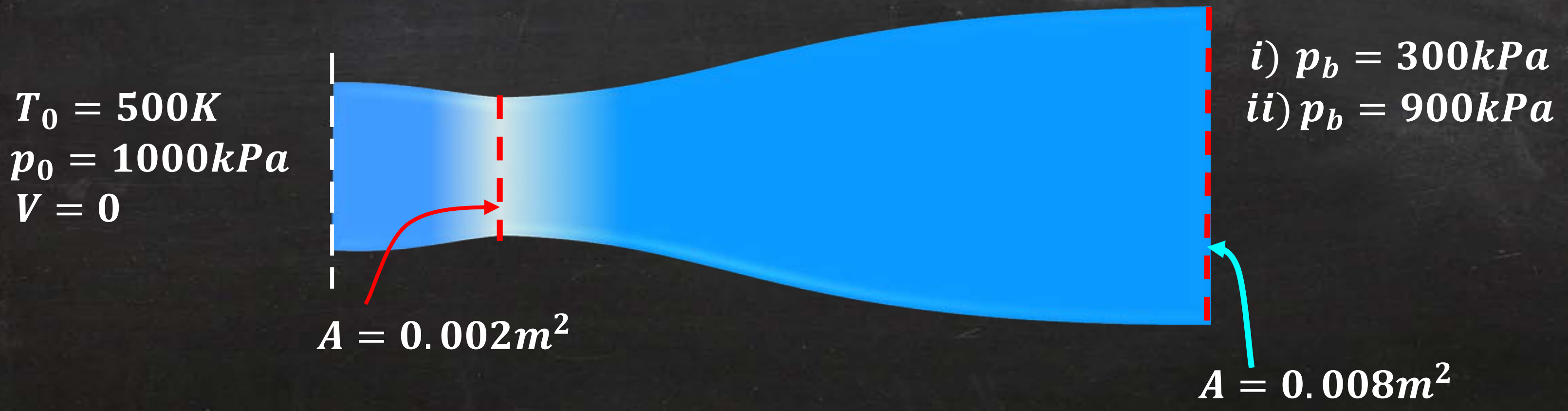
Photographie Schlieren

Jet supersonique



Exemple 9.9

On a une tuyère convergente-divergente qui transporte de l'air ($k = 1.4, R = 287\ m^2/(s^2K)$, $c_p = 1005\ m^2/(s^2K)$). La pression et la température dans le réservoir (conditions de stagnation) sont $p_0 = 1000\ kPa, T_0 = 500K$.
L'aire à la sortie est, $A_s = 0.008m^2$ et l'aire critique est $A_c = 0.002m^2$. Deux pressions en arrière sont considérés: $p_b = 300\ kPa$ et $p_b = 900\ kPa$. a)Quel est le **débit massique $\dot{m}$** pour chaque pression p_b? b)Quelles sont les pressions correspondantes (p_s) à la sortie?



Exemple (suite I)

$R = 287\ m^2/(s^2 K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$

$A_s = 0.008 m^2$, $A_c = 0.002 m^2$, $p_0 = 1000 kPa$, $T_0 = 500K$,

$i) p_b = 300 kPa$, $ii) p_b = 900 kPa$

Solution $\dot{m}$?

La condition de design implique que le col est sonique (Ma=1). Dans ce cas, il faut déterminer la pression à la sortie p_s en fonction de la pression de stagnation p_o. On commence alors par un calcul correspondant à la condition de design isentropique (courbe H).

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{0.008}{0.002} = 4 \Rightarrow \frac{A}{A^*} = \frac{1}{\mathrm{Ma}_s} \frac{\left(1 + 0.2\mathrm{Ma}_s^2\right)^3}{1.728}$$

$$\Rightarrow Ma_s = 2.94$$

$$p_{s(design)} = p_0 \times 0.0298 = 29.8\, kPa$$

$p/p_0 = 0.0298$ M=2.94

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
2.9000	0.0317	0.3729	3.8498
2.9100	0.0312	0.3712	3.8866
2.9200	0.0307	0.3696	3.9238
2.9300	0.0302	0.3681	3.9614
2.9400	**0.0298**	**0.3665**	**3.9993**
2.9500	0.0293	0.3649	4.0376
2.9600	0.0289	0.3633	4.0763
2.9700	0.0285	0.3618	4.1153
2.9800	0.0281	0.3602	4.1547
2.9900	0.0276	0.3587	4.1944
3.0000	0.0272	0.3571	4.2346
3.0100	0.0268	0.3556	4.2751
3.0200	0.0264	0.3541	4.3160
3.0300	0.0260	0.3526	4.3573
3.0400	0.0256	0.3511	4.3989

Sans la table

$$\frac{p_s}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + 0.2 Ma_s^2\right)^{3.5}}$$

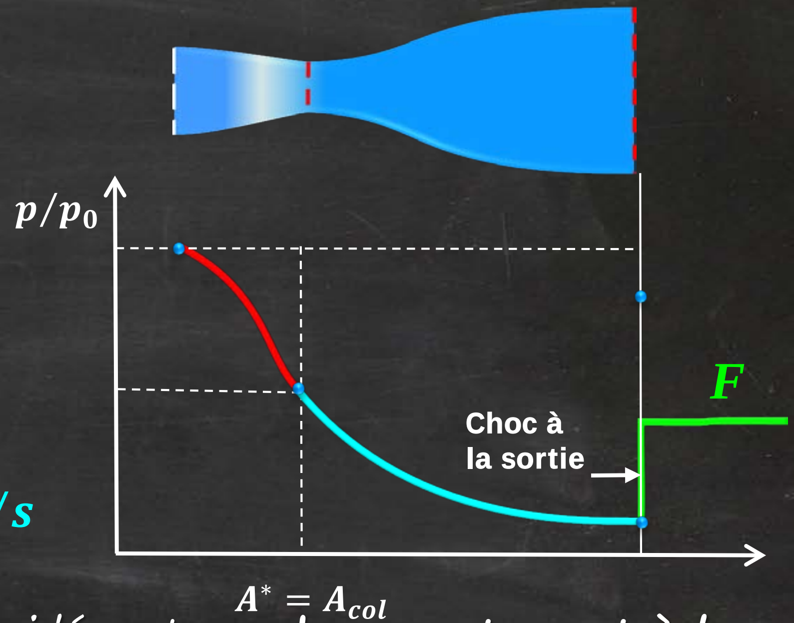
Exemple (suite II)

Solution

$$\dot{m} = \frac{p_0 A_c}{\sqrt{RT_0}}\sqrt{k}\left[1+\frac{k-1}{2}\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$A^* = A_c$ (sonique au col)

$$\dot{m}_{\max} = \frac{0.6847 p_0}{\sqrt{RT_0}} A^* \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = 3.61\, kg/s$$



On réalise maintenant un deuxième calcul considérant <u>un choc exactement à la sortie</u>, soit selon <u>la courbe F</u>. Les valeurs des propriétés <u>avant le choc</u>, sont celles obtenues dans les calculs précédents.

a)Quel est le <u>débit massique</u> pour chaque pression p_b?
b)Quelles sont les pressions correspondantes (p_s) à la sortie?

Exemple (suite III)

$$A_s = 0.008m^2, \quad A_c = 0.002m^2, p_0 = 1000kPa, \quad T_0 = 500K$$

Solution On regarde pour $p_2 = p_b = 300$ kPa

Avec des tables:

$$p_1 = 29.8\,kPa \Longrightarrow \frac{p_2}{p_1} = 9.92$$

$$\boxed{p_2 = 295.6kPa}$$

M_1	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_1/p_{02}
2.90	0.4814	9.6450	3.7629	2.5632	0.3577	0.0885
2.91	0.4807	9.7128	3.7725	2.5746	0.3547	0.0879
2.92	0.4801	9.7808	3.7821	2.5861	0.3517	0.0873
2.93	0.4795	9.8490	3.7917	2.5976	0.3487	0.0868
2.94	0.4788	9.918	3.801	2.609	0.3457	0.08619
2.95	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.96	0.4776	10.0552	3.8200	2.6322	0.3398	0.0851
2.97	0.4770	10.1244	3.8294	2.6439	0.3369	0.0845

$\boxed{p_2/p_1 = 9.92 \quad Ma_2 = 0.479}$

ou encore avec des formules

$$Ma_1 = 2.94$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[2kMa_1^2 - (k-1)\right]$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2.4}\left[2.8Ma_1^2 - 0.4\right] = 9.92$$

$$\boxed{p_2 = 295.6 < 300kPa = p_b}$$

On note que la pression p_b en arrière de 300kPa est (légèrement) supérieure à la pression p_2=295.6 kPa qui produit un choc à la sortie. Il y a donc un choc droit juste en amont du plan de sortie et l'écoulent est subsonique par après

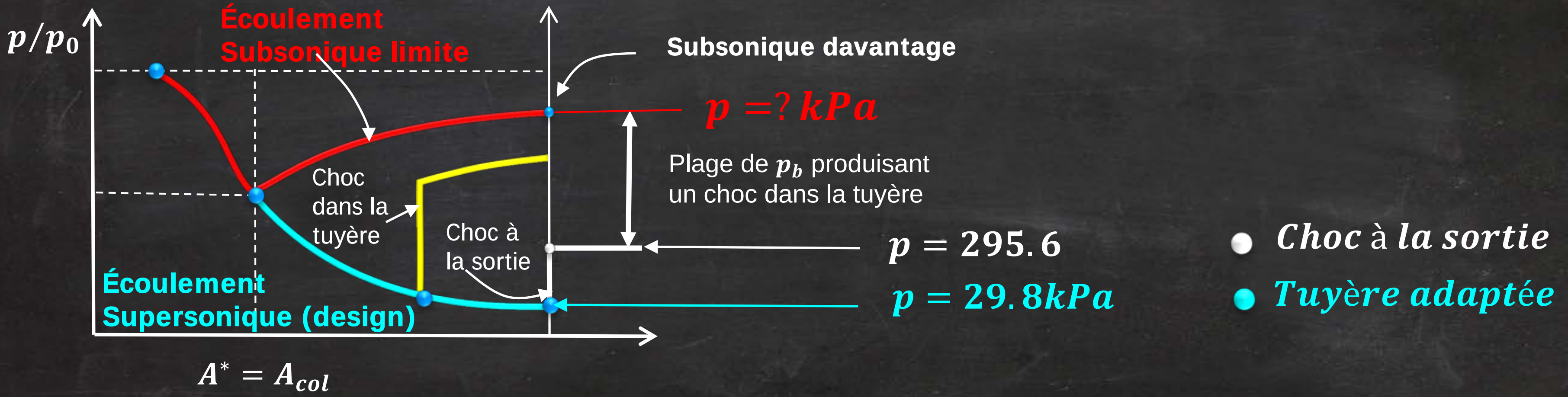
$\dot{m} = 3.61\,kg/s$ Le même que précédemment

Exemple (suite IV)

$A_s = 0.008 m^2, \quad A_c = 0.002 m^2, p_0 = 1000 kPa, \quad T_0 = 500 K$

Solution : cas lorsque p_b=900 kPa

Est-ce qu'on a un choc dans la tuyère avec p_b=900kPa?



À partir du rapport d'aire, on cherche le rapport de pression correspondant à un écoulement subsonique (ligne rouge). Si la pression en arrière p_b est supérieure à la valeur obtenue, l'écoulement demeure subsonique

Exemple (suite V)

$$A_s = 0.008m^2, \quad A_c = 0.002m^2, p_0 = 1000kPa, \quad T_0 = 500K$$

Solution : cas lorsque p_b=900 kPa

INTERPOLATION

Si la pression en arrière est inférieure à la valeur obtenue (mais pas la valeur de design 29.8 kPa pour générer un écoulement supersonique) il y aura un choc

$$\frac{A_s}{A_c^*} = \frac{0.008}{0.002} = 4 \Longrightarrow \frac{p}{p_0} = 0.9864\left(1 - \frac{4-4.1824}{3.9103-4.1824}\right) + \left(\frac{4-4.1824}{3.9103-4.1824}\right)0.9844 = 0.9851$$

$$p_0 = 1000kPa \Longrightarrow p_2 = 985.1\ kPa$$

$$\boxed{29.8kPa < p_b = 900\ kPa < 985.1\ kPa}$$

$\Longrightarrow$ Il y a un choc

$$A/A^* = 4$$

$$Ma = 0.1467$$

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
0.0500	0.9983	0.9995	11.5914
0.0600	0.9975	0.9993	9.6659
0.0700	0.9966	0.9990	8.2915
0.0800	0.9955	0.9987	7.2616
0.0900	0.9944	0.9984	6.4613
0.1000	0.9930	0.9980	5.8218
0.1100	0.9916	0.9976	5.2992
0.1200	0.9900	0.9971	4.8643
0.1300	0.9883	0.9966	4.4969
0.1400	0.9864	0.9961	4.1824
0.1500	0.9844	0.9955	3.9103
0.1600	0.9823	0.9949	3.6727
0.1700	0.9800	0.9943	3.4635
0.1800	0.9776	0.9936	3.2779
0.1900	0.9751	0.9928	3.1123

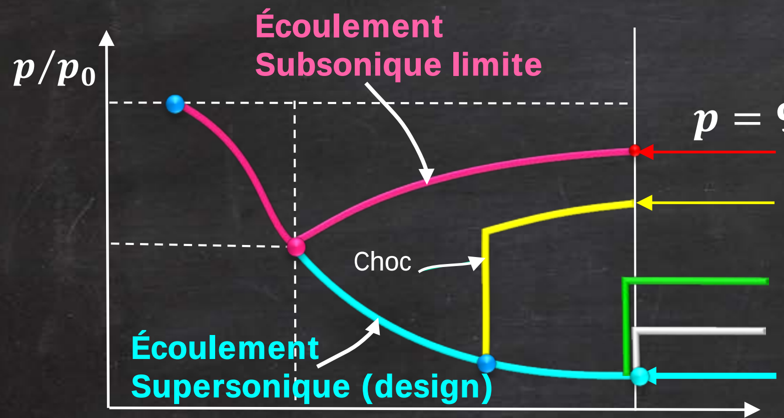
Exemple (suite VI)

Résumé

$R = 287\ m^2/(s^2\,K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$

$A_s = 0.008 m^2$, $A_c = 0.002 m^2, p_0 = 1000 kPa$, $T_0 = 500K$,

$i) p_b = 300 kPa$, $ii) p_b = 900 kPa$



$p = 985.5 kPa$ $Ma = 0.1467$ *Limite subsonique*

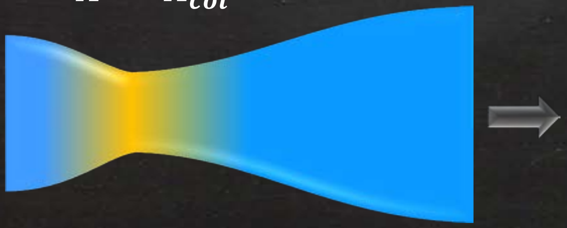
$p_b = 900 kPa$

$p_b = 300 kPa$

$p = 295.6$ *Choc à la sortie*

$p = 29.8 kPa$ $Ma = 2.94$ *Tuyère adaptée*

$A^* = A_{col}$



$\dot{m} = 3.61\, kg/s$

Résumé de la méthodologie

Les propriétés de stagnation (ou d'arrêt) dans la chambre à combustion: p_0, ρ_0, T_0, sont connues, ainsi que le rapport d'aire entre les sections à la sortie et celle au col; A_s/A_c

Pour commencer, on détermine les pressions et le nombres de Mach de trois régimes limites :

- Courbe H: La **tuyère est adaptée** et la pression de design p_s à la sortie est égale à la pression en arrière (ambiante) p_b. L'évolution est **isentropique partout** et on détermine le nombre de Mach (supersonique) et la pression p_H au moyen du rapport A_s/A_c et de relations isentropiques (formules ou tables).

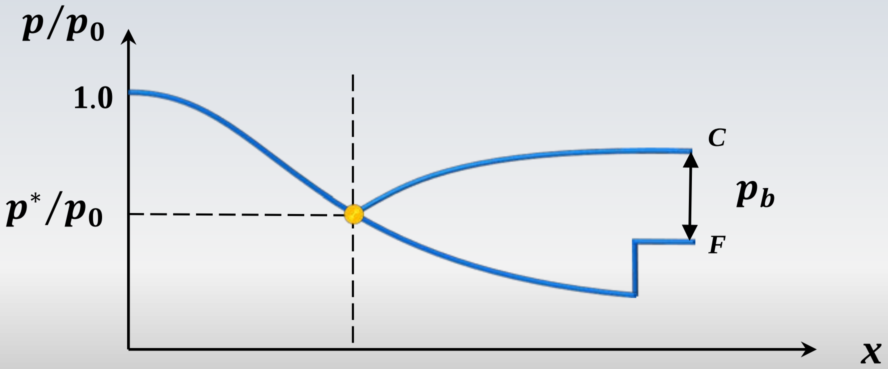
Résumé de la méthodologie

- <u>Courbe F</u> : Un choc se situe exactement à la sortie. Le nombre de Mach calculé pour la condition de design est utilisé dans les relations de saut (formules ou tables) pour déterminer le nombre de Mach et la pression $\boldsymbol{p_F}$ après le choc. Cette pression correspond à **la limite inférieure** pour déterminer si un choc à lieu dans la tuyère
- <u>Courbe C</u> : La valeur critique ($\boldsymbol{M}$=$\mathbf{1}$) est atteinte au col, mais l'écoulement demeure subsonique jusqu'à la sortie. Le rapport $\boldsymbol{A_s/A_c}$ permet de calculer le nombre de Mach (subsonique) et la pression $\boldsymbol{p_C}$ à la sortie. Cette pression est **la limite supérieure** des pressions qui produiront un choc dans la tuyère

Résumé de la méthodologie

Conclusion

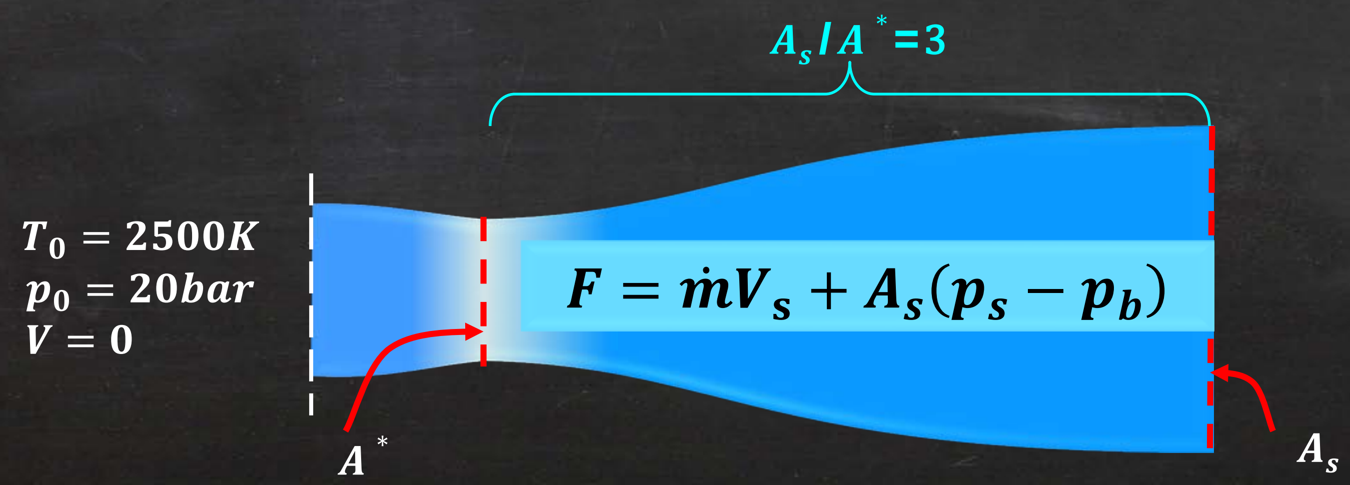
- Toute pression en arrière p_b se trouvant dans la plage $p_F < p_b < p_C$, produit un choc dans la tuyère.
- Lorsque la pression p_b satisfait $p_F < p_b < p_C$, l'écoulement est sonique au col (M=1) et le débit massique est donc maximal



Exemple

Le rapport d'aire sortie-col de la tuyère convergente-divergente d'une fusée est , $A_s/A^* = 3$. Pour le gaz on considère ($k = 1.2, R = 248\, J/(kg\, K)$; $m^2/(s^2K)$). La pression et la température dans le réservoir (conditions de stagnation) sont $p_0 = 20\ bar, T_0 = 2500K$.

On doit calculer la poussée par unité d'aire lorsque la tuyère opère au point de design (tuyère adaptée)



Exemple (suite I)

$$R = 248\ m^2/(s^2 K)\ ,\ k = 1.2$$
$$A_s/A^* = 3, \quad p_0 = 20\,bar, \quad T_0 = 2500K$$

Solution

i) $$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma\sqrt{k}\left[1 + \frac{k-1}{2}Ma^2\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \Longrightarrow \frac{\dot{m}}{A}$$

Ma=1 au col $\Longrightarrow$

$$\frac{\dot{m}}{A^*} = \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}}\sqrt{k}\left[1 + \frac{k-1}{2}\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \Longrightarrow \frac{\dot{m}}{A} = 1647.27\ \left(\frac{kg}{s}\right)/m^2$$

$ii)/i) \Longrightarrow$

Exemple (suite I)

$$R = 248\ m^2/(s^2\,K)\ ,\ k = 1.2$$

$$A_s/A^* = 3, \quad p_0 = 20\,bar, \quad T_0 = 2500K$$

Solution

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{Ma_s}\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_s^2\right)\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$3 = \frac{1}{Ma_s}\left[0.909\left(1+0.1Ma_s^2\right)\right]^{5.5} \Rightarrow Ma_s = 2.4$$

$k = 1.2$

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
2.200	0.0936	0.6738	2.359
2.300	0.0782	0.6540	2.659
2.400	**0.0652**	**0.6345**	**3.010**
2.500	0.0543	0.6153	3.420

$$\frac{T_0}{T} = 1+\frac{k-1}{2}Ma^2 \Rightarrow T_s = T_0 \times 0.635 \Rightarrow T_s = 1587.5K$$

Exemple (suite I)

$$R = 248 \ m^2/(s^2 K) \ , k = 1.2$$
$$A_s/A^* = 3, \quad p_0 = 20\, bar, \quad T_0 = 2500K$$

Solution

$$T_s = 1586.3K \qquad Ma_s = 2.4$$

$$V_s = Ma_s\sqrt{kRT_s} \qquad V_s = 2.4_s\sqrt{1.2 \times 248 \times 1586.3}$$

$$V_s = 1649 \text{ m/s}$$

$$\frac{\dot{m}}{A} = 1647.27\, (kg/s)/m^2$$

$$\Rightarrow \frac{F_p}{A} = \left(\frac{\dot{m}}{A}\right) V_s = 1647.27 \times 1649$$

$$\frac{F_p}{A} = 2.7163M\, N/m^2$$

Bang sonique

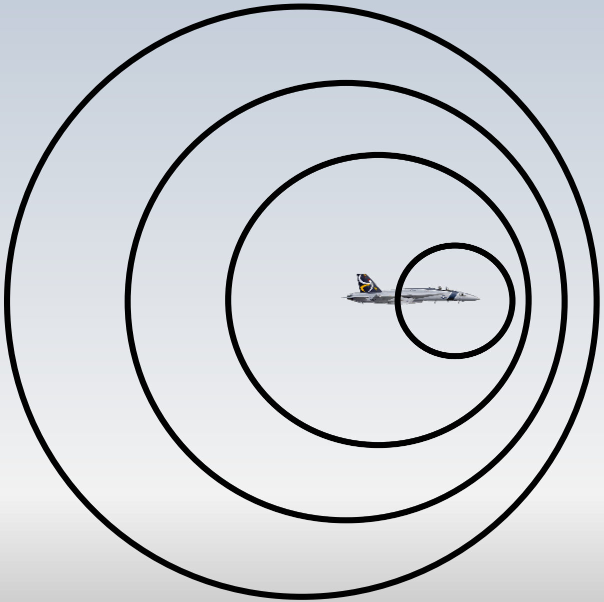
Le bang sonique se produit lors d'un écoulement externe et il est différent d'un choc qu'on retrouve dans une tuyère.

Le phénomène n'est pas causé par le passage d'un écoulement supersonique vers subsonique (ou vice-versa). Il a lieu lorsqu'un objet se déplace à une **vitesse supérieure à celle du son**

Un avion, par exemple, génère des fronts d'onde (ondes de pression) sphériques dont l'origine est la position de l'avion.

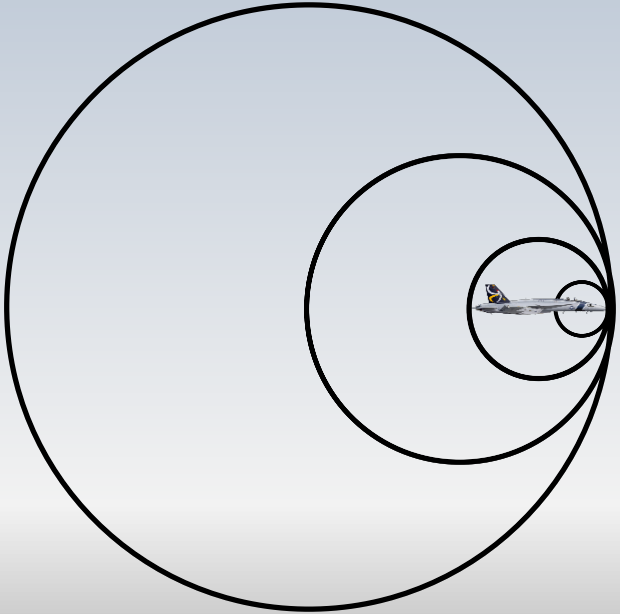
Bang sonique Ma<1

En **régime subsonique** les divers fronts sphériques se propagent autour de l'avion séparés les uns des autres



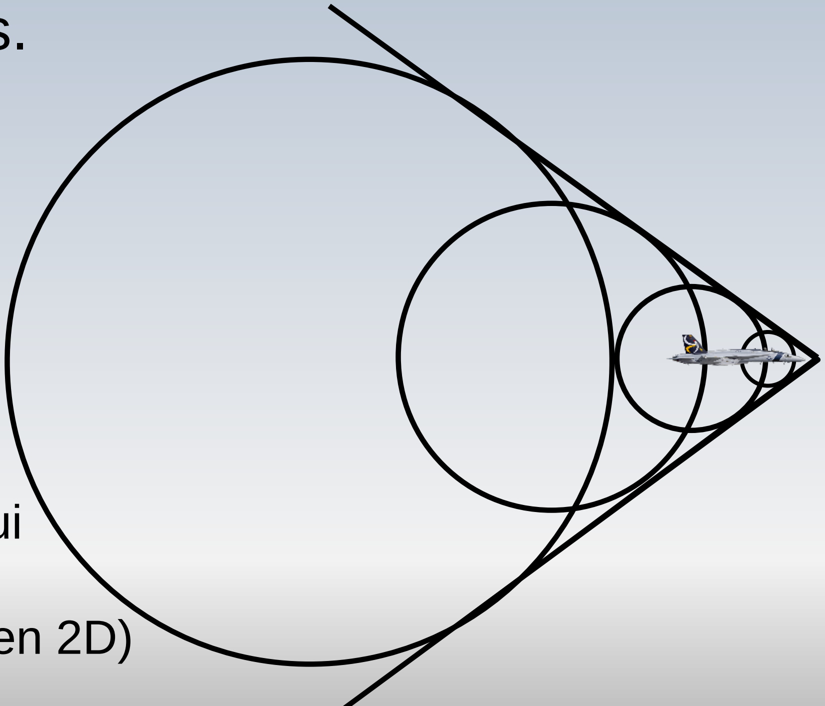
Bang sonique Ma=1

Lorsque l'avion attient la **vitesse du son** (**Ma=1**), il 'attrape' les fronts d'onde qui se rejoignent juste devant l'aéronef



Bang sonique Ma>1

En **régime supersonique**, les ondes de pression sont créées plus rapidement que le temps requis pour qu'elles s'éloignent les unes des autres.



Les ondes s'accumulent formant un cône (cône de Mach) qui est tangente aux différents cercles (en 2D)

Bang sonique

En régime subsonique les ondes de pression ou sonores produites par l'avion sont perçues de manière séquentielle. Par contre, en régime supersonique la concentration des ondes dans le cône de Mach est perçue comme un choc sonore

Résumé I

- On a regardé le cas d'un **écoulement compressible interne**, **non visqueux, en régime permanent**, dans des **conduites unidimensionnels.**
- Dans un premier temps, on a considéré uniquement des écoulements isentropiques et un court rappel de quelques éléments de thermodynamique a été fait.
- Le concept de **grandeur d'arrêt, totale, ou de stagnation**, a été introduit et la notion **de vitesse du son** a été présentée.
- On a examiné l'effet de la variation de section d'une conduite sur l'écoulement et on a établi **qu'un col est nécessaire** pour accélérer un fluide au-delà de la vitesse sonique isentropique

Résumé II

- On a référé la vitesse et l'aire d'une section quelconque aux **conditions soniques au col, appelées critiques**, et des tables isentropiques ont été révélées
- Dans un deuxième temps, on a regardé des écoulements avec la présence de **chocs droits**.
- Des équations permettant le calcul des propriétés après un choc, en fonction des quantités avant le choc, ont été établies. Des tables homologues à ces équations ont été présentées.

Résumé III

- Divers écoulements dans une tuyère convergente-divergente ont été décrits. Si la pression aval est “incorrecte”, une fraction de l’énergie cinétique est perdue dans les irréversibilités d’un choc. Des équations, ainsi que des tables, ont été utilisées pour la résolution de ce type de problèmes.
- Plusieurs cas supersoniques peuvent être traités utilisant la théorie de base pour le chocs normaux. Cependant, en 3D et à géométrie complexe, les ondes de choc normales sont rares. En réalité, **la grande majorité de chocs sont fondamentalement obliques.**

Résumé IV

- **Le paramètre fondamental** dans le design d'une tuyère c'est **le rapport d'expansion**

$$\boxed{\frac{A_{sortie}}{A_{col}} = \frac{A_s}{A^*}}$$

- Cette quantité implique également un rapport (optimal) pour d'autres variables telles que le nombre de Mach ou la pression entre la sortie et le col sonique.
- Des facteurs comme le transfert de chaleur et la forme (profil) de la tuyère sont aussi importants pour le design

Résumé V

Débit adimensionnel (**Éq. Continuité** +éq. état +vitesse du son+qtés. totales)

$$\boldsymbol{\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma\sqrt{k}\left[1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}}$$

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{Ma_s}\left[\frac{2}{k+1}\left(1+\frac{k-1}{2}Ma_s^2\right)\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

À la sortie $\boldsymbol{Ma_s}$, $\boldsymbol{A_s}$

$$\frac{\dot{m}^*\sqrt{RT_0}}{p_0 A^*} = \sqrt{k}\left[1+\frac{k-1}{2}\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

Au col $\boldsymbol{Ma=1}$, $\boldsymbol{A=A^*}$

Résumé VI

$$\boxed{1+\frac{k-1}{2}Ma^2=\frac{T_0}{T}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1}=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{k-1/k}}$$

Des rapports entre ces relations écrites pour le col (critique *), et pour la sortie(s), conduisent à des relations similaires à celle pour l’aire. Notamment

$$\frac{p^*}{p_s}=\left(\frac{k+1}{2+(k-1)M_s^2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Résumé VII

Pour un gaz idéal, les relations:

$$Ma_2^2 = \frac{2+(k-1)Ma_1^2}{2kMa_1^2+1-k} \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{1+kMa_1^2}{1+kMa_2^2} \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1+(k-1)/2\,Ma_1^2}{1+(k-1)/2\,Ma_2^2}$$

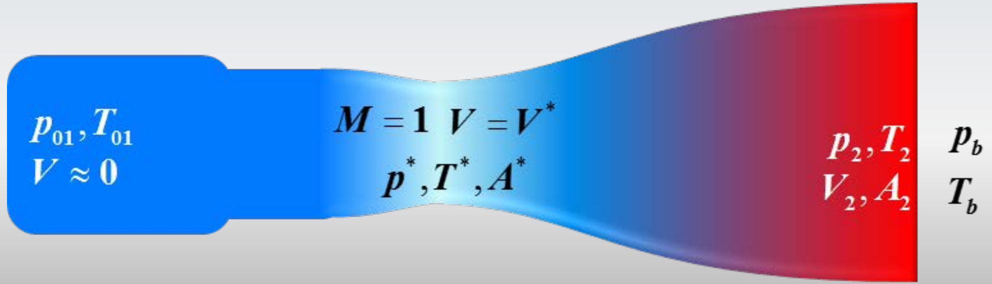
permettent de ‘traverser’ un choc normal pour obtenir des quantités après le choc (indice 2) en fonction du nombre de Mach avant le choc $\boldsymbol{Ma_1}$.

Pour un écoulement adiabatique, la température totale $\boldsymbol{T_0}$ est conservé, même en présence d’un choc, mais pas la pression $\boldsymbol{p_0}$ ni la masse volumique $\boldsymbol{\rho_0}$.

La poussée

$$C_F = \frac{F}{A^* p_{01}} = k\sqrt{\left(\frac{2}{k-1}\right)\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)} + (p_2 - p_b)\frac{A_2}{p_{01}A^*}$$

La **poussée (adimensionnelle)** $\mathbf{F/A^* p_{01}}$ est **maximale** lorsque la pression à la sortie est égale à celle de l'ambiant , soit $\boldsymbol{p_2 = p_b}$



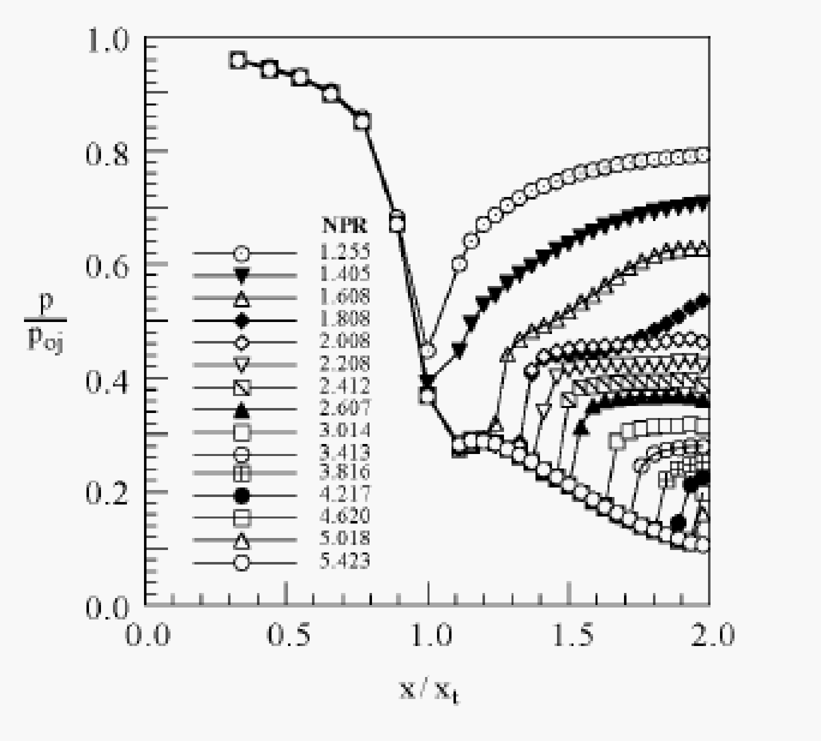
Épilogue

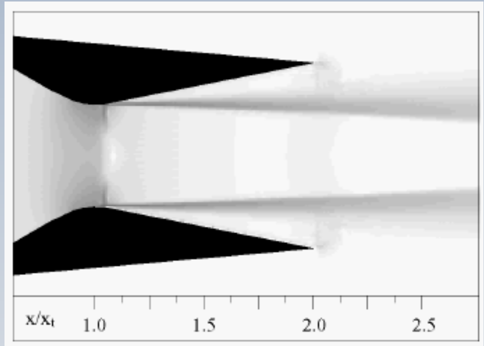
Dans le cadre courant, la théorie des ondes de choc obliques, les phénomènes visqueux, la présence d'une couche limite et les effets transitoires n'ont pas été pris en compte. On doit noter cependant, que dans les tuyères à grand rapport de section (sortie/col), telles qu'utilisées dans les fusées, l'écoulement est parfois décollé et plusieurs chocs obliques ont lieu. Leur position ainsi que le type de structure, incluant des réflexions, change en fonction du rapport de pression et du temps.

Les images suivantes illustrent quelques cas de chocs obliques en fonction du taux de détente (NPR). Les résultats proviennent d'une étude expérimentale et numérique.

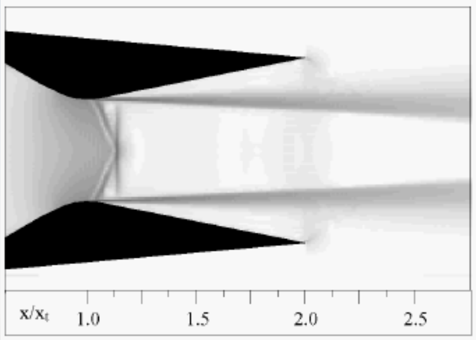
Épilogue

C.A Hunter ,Experimental, Theoretical, and Computational Investigstionn on Separated Nozzle Flows AIAA Paper 98-3107, 1998





NPR=1.4

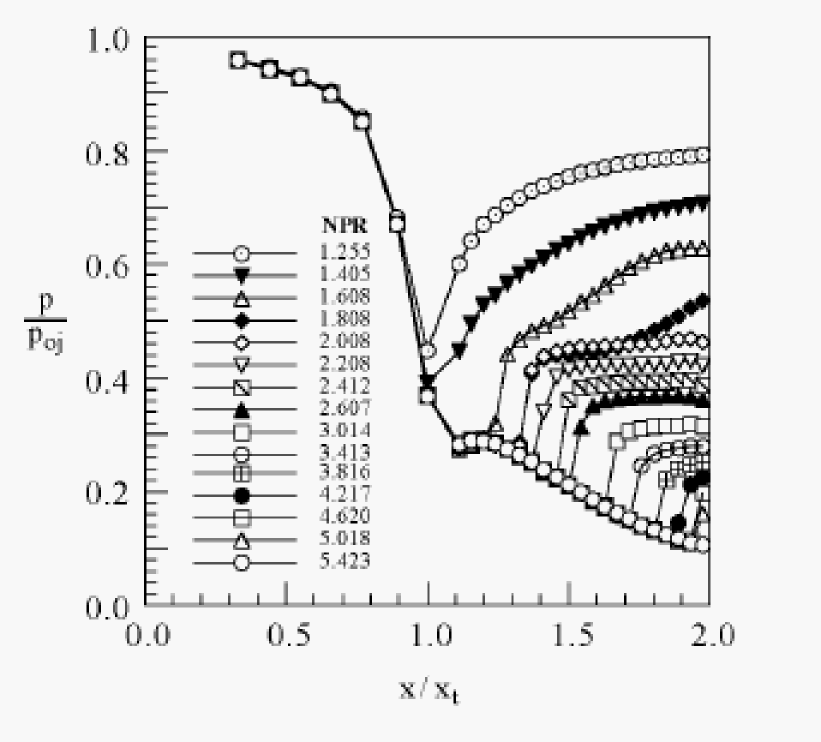


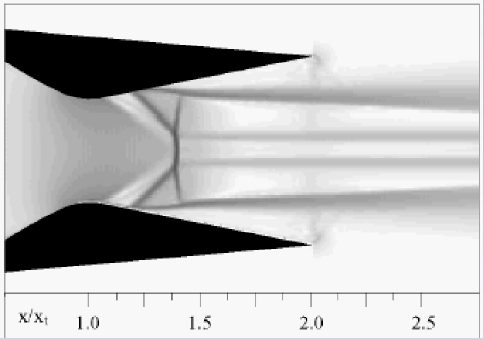
NPR=1.6

Différents NPR , chocs obliques: Strioscopie (images Schlieren) numérique

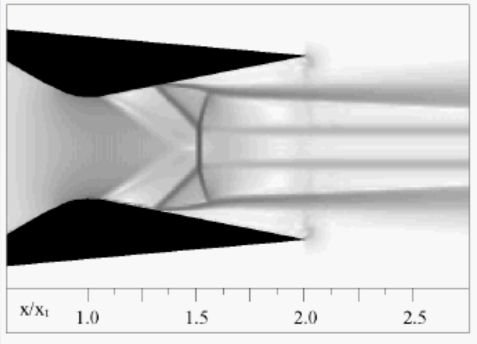
Épilogue

C.A Hunter ,Experimental, Theoretical, and Computational Investigstionn on Separated Nozzle Flows AIAA Paper 98-3107, 1998





NPR=1.8



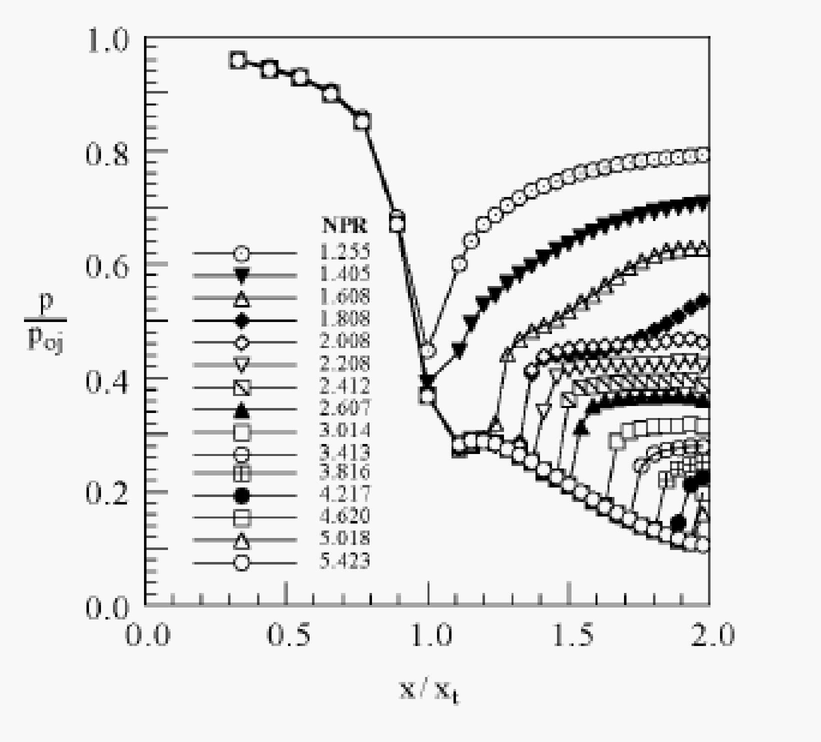
NPR=2.0

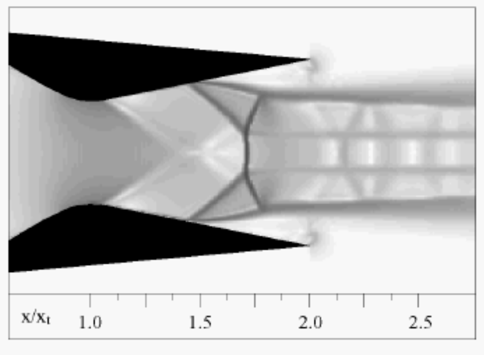
Différents NPR , chocs obliques: Strioscopie (images Schlieren) numérique

Perrot Y. ,Étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible, Thèse de doctorat, INSA de Rouen, 2006.

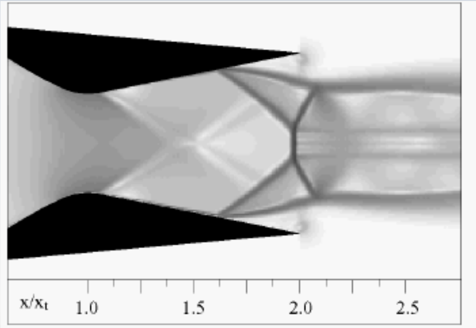
Épilogue

C.A Hunter ,Experimental, Theoretical, and Computational Investigstionn on Separated Nozzle Flows AIAA Paper 98-3107, 1998





NPR=2.4



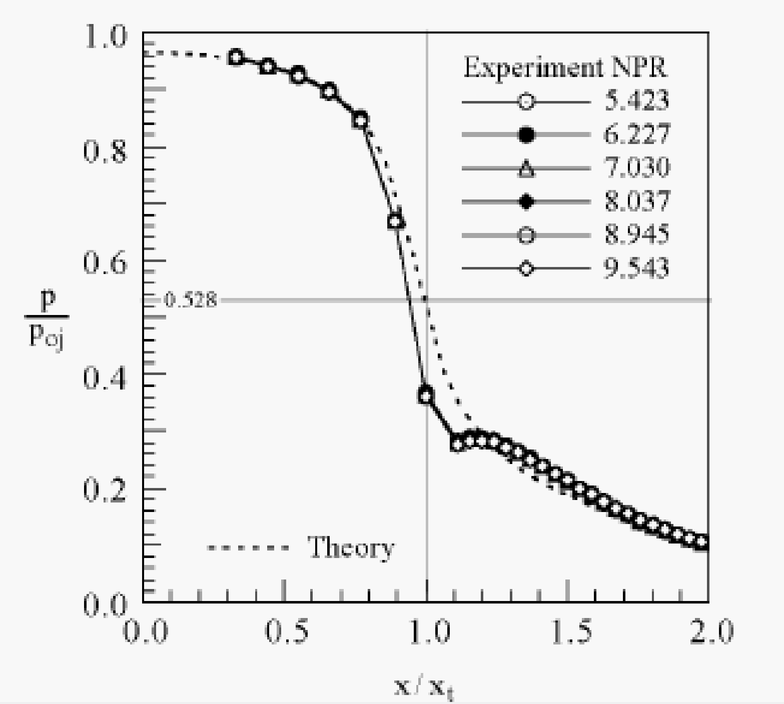
NPR=3.0

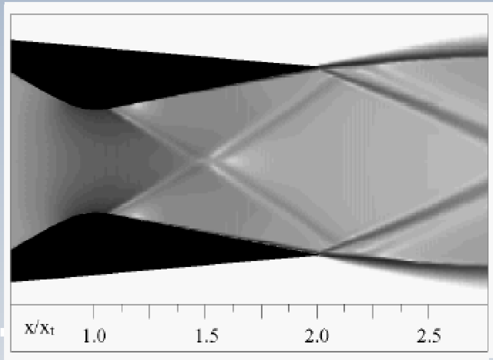
Différents NPR , chocs obliques: Strioscopie (images Schlieren) numérique

Perrot Y. ,Étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible, Thèse de doctorat, INSA de Rouen, 2006.

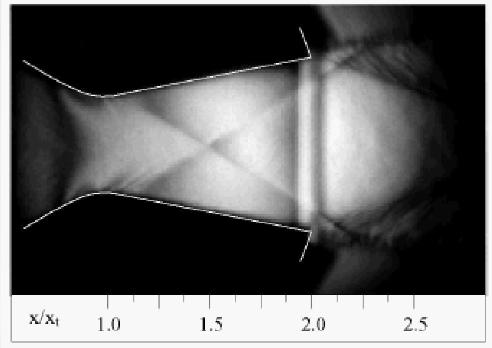
Épilogue

C.A Hunter ,Experimental, Theoretical, and Computational Investigstionn on Separated Nozzle Flows AIAA Paper 98-3107, 1998





NPR=5.4

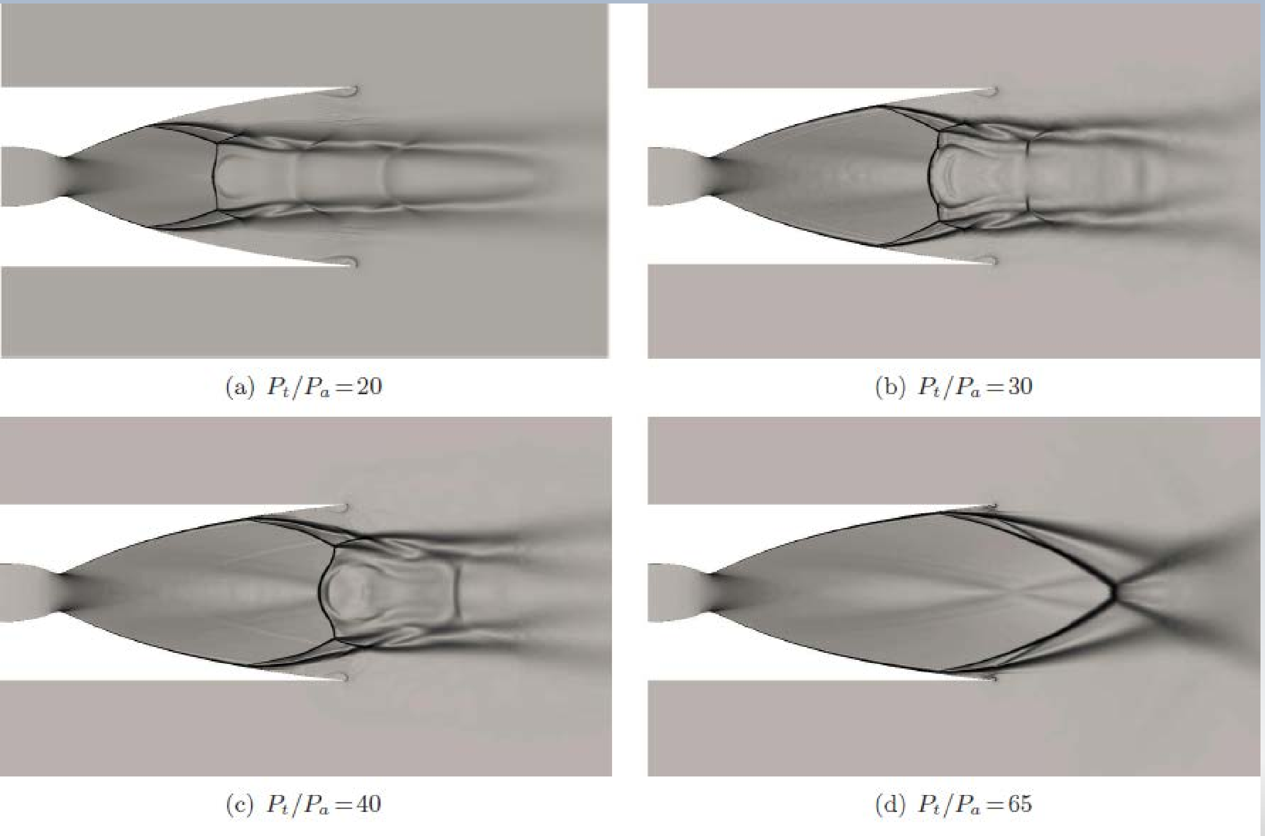


NPR=8.95

Différents NPR , chocs obliques: Strioscopie (images Schlieren) numérique

Perrot Y. ,Étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible, Thèse de doctorat, INSA de Rouen, 2006.

Épilogue



Perrot Y. ,Étude, mise au point et validation de modèles de turbulence compressible. Thèse de doctorat, INSA de Rouen, 2006.

Chocs obliques: Strioscopie (images Schlieren) numérique

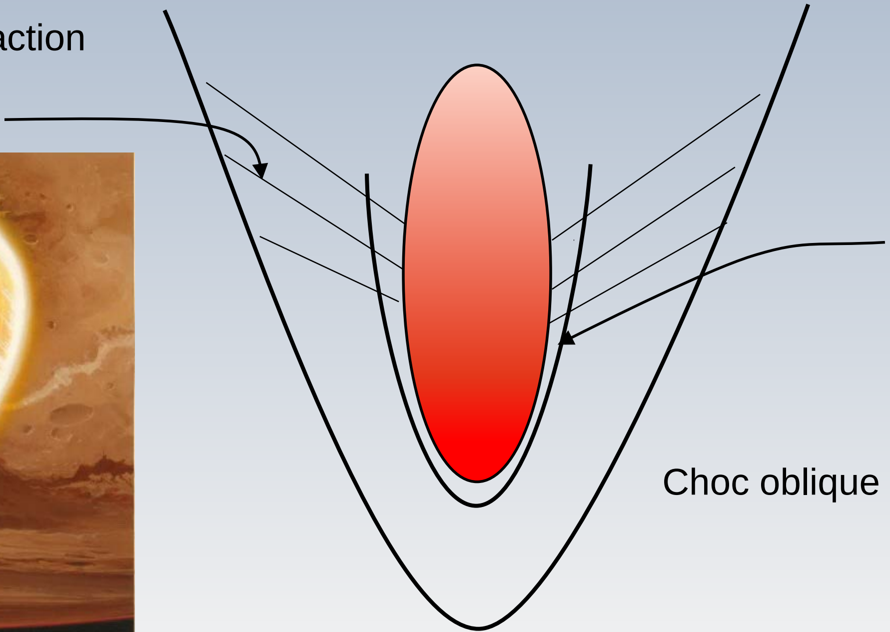
Épilogue

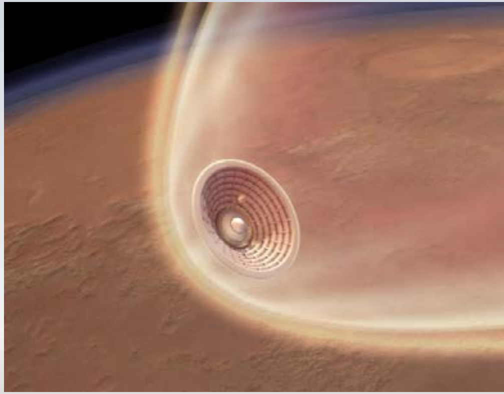
Épilogue

Huit jours avant le vol des frères Wright on lisait dans le New York Times: *may be in 1 million to 10 million years they might be able to make a plane that would fly*.

Information populaire sur le Web non confirmée!

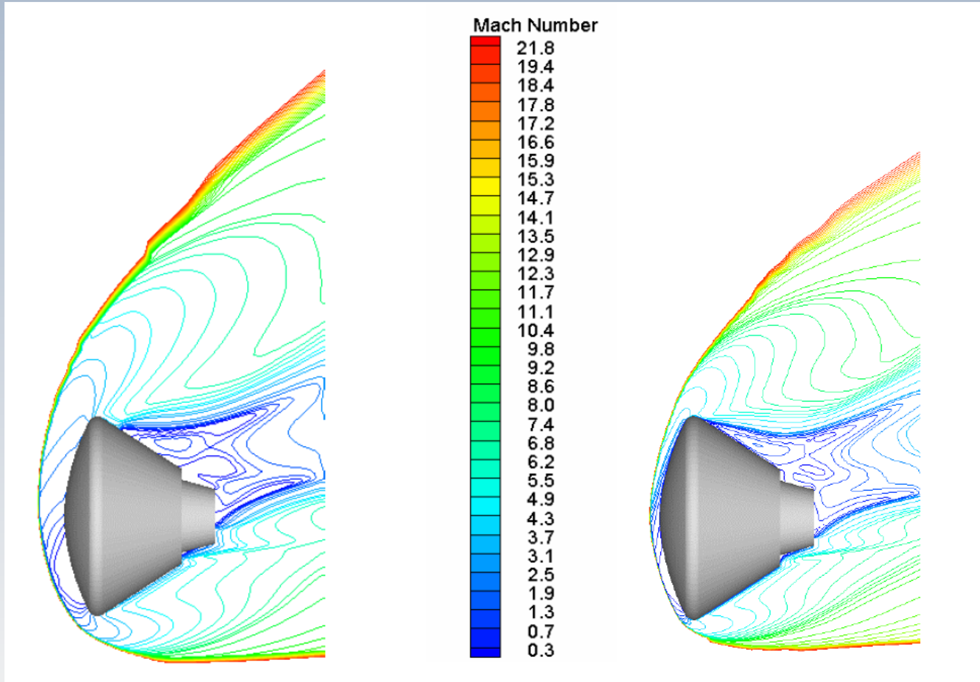
Rentrée atmosphérique





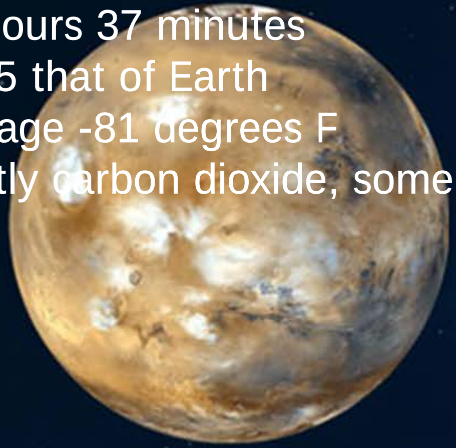
Rentrée atmosphérique

Pour des nombres de Mach élevés (Ma=25) , et k=cnste., les tables de choc normal pour un gaz idéal donnent des valeurs exagérées



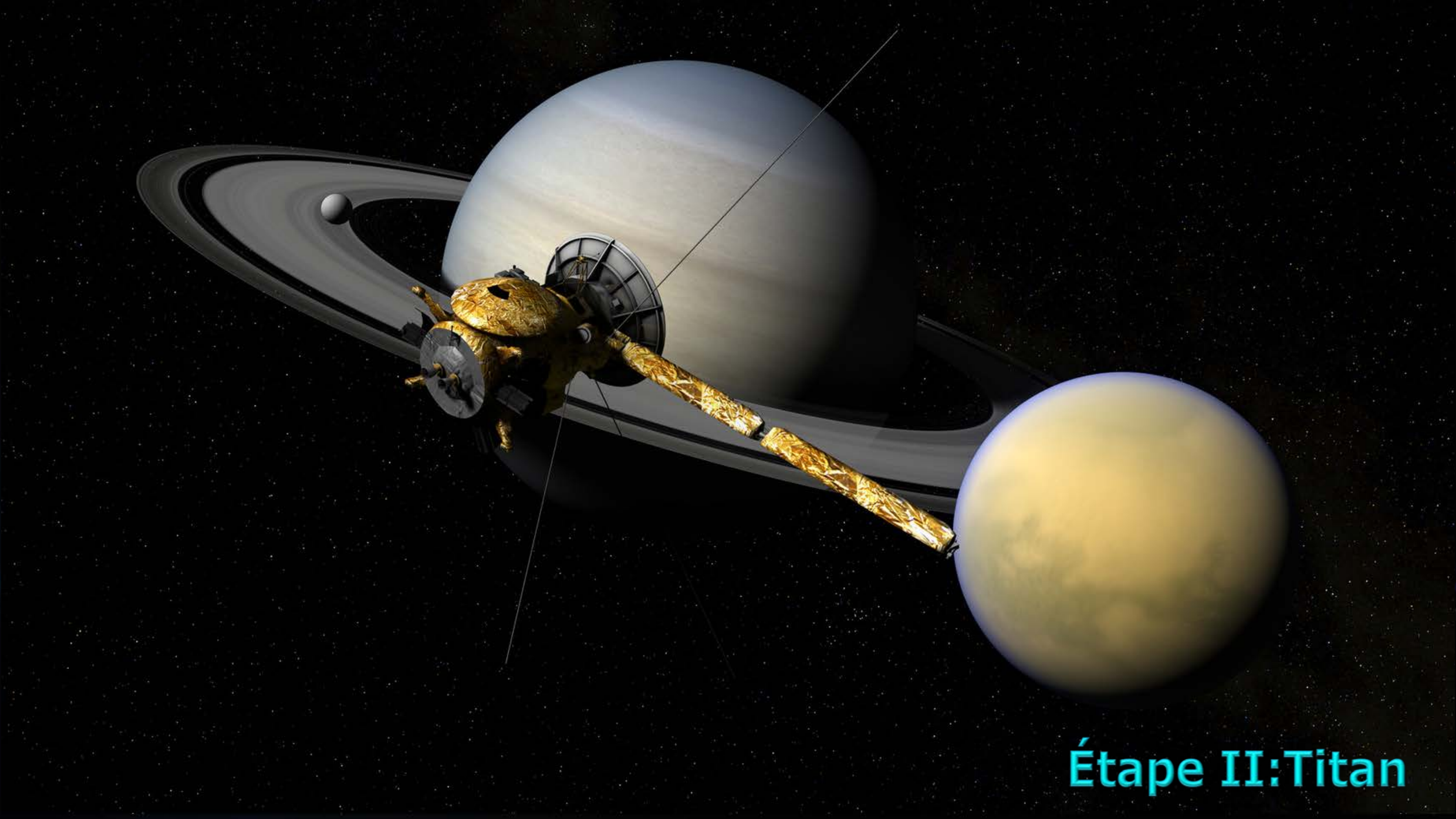
Gaz idéal

Gaz réel

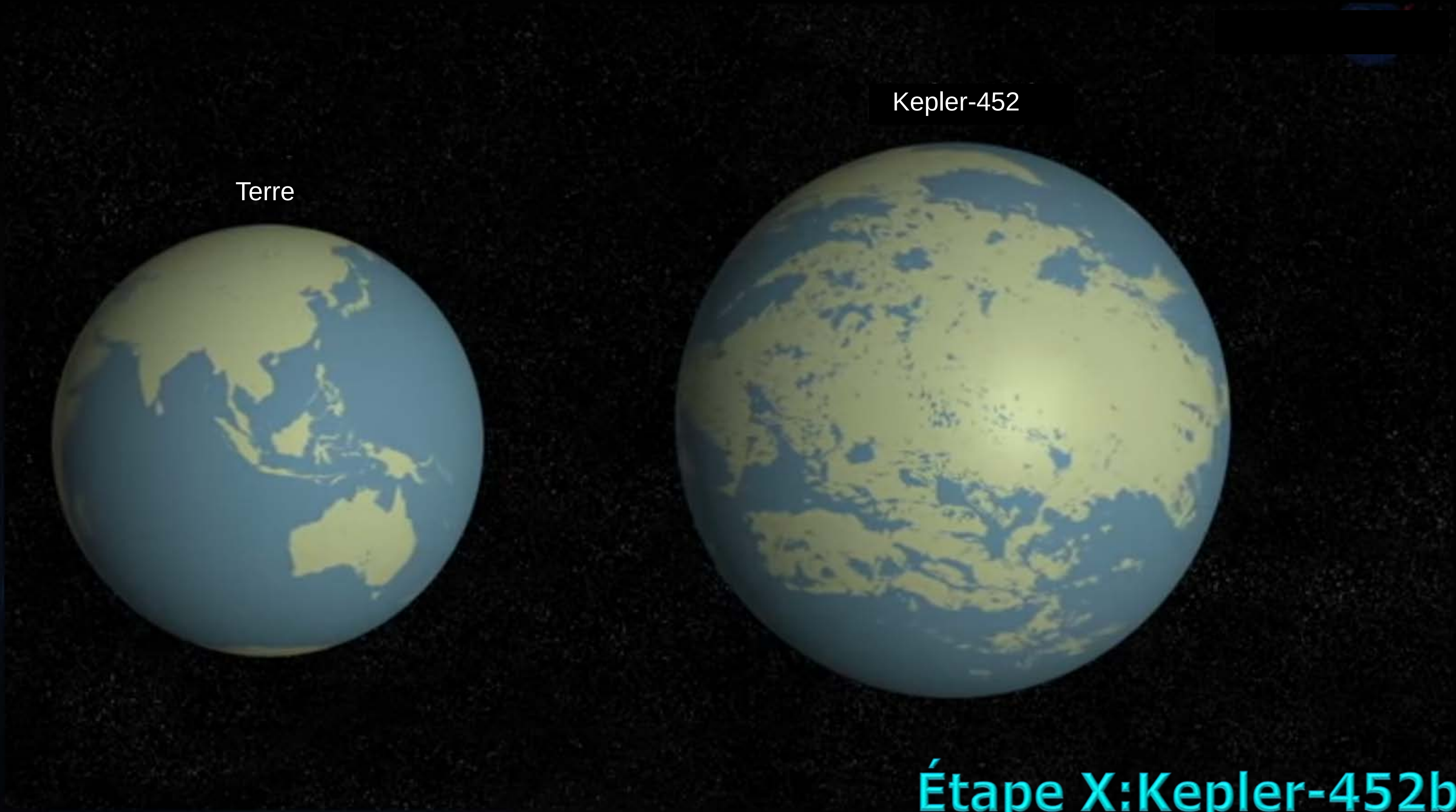


	Earth	Mars
Average Distance from Sun	93 million miles	142 million miles
Average Speed in Orbiting Sun	18.5 miles per second	14.5 miles per second
Diameter	7,926 miles	4,220 miles
Tilt of Axis	23.5 degrees	25 degrees
Length of Year	365.25 Days	687 Earth Days
Length of Day	23 hours 56 minutes	24 hours 37 minutes
Gravity	2.66 times that of Mars	0.375 that of Earth
Temperature	Average 57 degrees F	Average -81 degrees F
Atmosphere	nitrogen, oxygen, argon,	mostly carbon dioxide, some
water vapor		

Étape I:Mars


Étape II:Titan

Étape X:Kepler-452b



D'un rayon 60 % plus grand que celui de la Terre, Kepler-452b orbite en 385 jours autour de son étoile. Cette planète se situe à environ 1 400 années-lumière de la Terre, dans la constellation du Cygne.

“I those moments will be lost in time,
like tears in rain”

Le futur est déjà là

Abrégé de formules f(Ma,k)

RETOUR

	Air (k=1.4)	Valeurs critiques: Ma=1, air (k=1.4)
$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2$	$\frac{T_0}{T} = 1 + 0.2 Ma^2$	$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = 0.8333$
$\frac{a_0}{a} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} Ma^2} = \sqrt{\frac{T_0}{T}}$	$\frac{a_0}{a} = \sqrt{1 + 0.2 Ma^2}$	$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} = 0.9129$
$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$	$\frac{p_0}{p} = (1 + 0.2 Ma^2)^{3.5}$	$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0.5283$
$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$	$\frac{\rho_0}{\rho} = (1 + 0.2 Ma^2)^{2.5}$	$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} = 0.6339$

Abrégé de formules f(Ma,k)

RETOUR

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}Ma^2}{(k+1)/2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1\left(1+0.2Ma^2\right)^3}{1.728}$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = Ma\sqrt{k}\left[1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = 1.183Ma\left[1+0.2Ma^2\right]^{-3}$$

$$\dot{m}_{\max} = \rho^* A^* V^* = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}}$$

$$\dot{m}_{\max} = 0.6847\ \rho_0\sqrt{RT_0}A^* = \frac{0.6847p_0}{\sqrt{RT_0}}A^*$$

$(k = 1.4)$

RETOUR

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{k+1}\left[2kM_1^2 - (k-1)\right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(k+1)M_1^2}{(k-1)M_1^2 + 2}$$

$$M_2^2 = \frac{(k-1)M_1^2 + 2}{2kM_1^2 - (k-1)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[2 + (k-1)M_1^2\right]\frac{2kM_1^2 - (k-1)}{(k+1)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{(k+1)^2 M_1^2}{2 + (k-1)M_1^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}\left[\frac{k+1}{2kM_1^2 - (k-1)}\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{2 + (k-1)M_1^2}{2 + (k-1)M_2^2}\right]^{\frac{(k+1)(k-1)}{2}}$$

RETOUR

$\boldsymbol{k = 1.4}$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2.4}\left[2.8M_1^2 - 0.4\right]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{2.4M_1^2}{0.4M_1^2 + 2}$$

$$M_2^2 = \frac{0.4M_1^2 + 2}{2.8M_1^2 - 0.4}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[2 + 0.4M_1^2\right]\frac{2.8M_1^2 - 0.4}{(2.4)^2 M_1^2}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \left[\frac{(2.4)^2 M_1^2}{2 + 0.4M_1^2}\right]^{3.5}\left[\frac{2.4}{2.8M_1^2 - 0.4}\right]^{2.5}$$

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{M_2}{M_1}\left[\frac{2 + 0.4M_1^2}{2 + 0.4M_2^2}\right]^{0.48}$$

Abrégé de formules f(Ma,k)

RETOUR

	Air (k=1.4)	Valeurs critiques: Ma=1, air (k=1.4)
$\frac{T_0}{T}=1+\frac{k-1}{2}Ma^2$	$\frac{T_0}{T}=1+0.2Ma^2$	$\frac{T^*}{T_0}=\frac{2}{k+1}=0.8333$
$\frac{a_0}{a}=\sqrt{1+\frac{k-1}{2}Ma^2}=\sqrt{\frac{T_0}{T}}$	$\frac{a_0}{a}=\sqrt{1+0.2Ma^2}$	$\frac{a^*}{a_0}=\sqrt{\frac{2}{k+1}}=0.9129$
$\frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$	$\frac{p_0}{p}=(1+0.2Ma^2)^{3.5}$	$\frac{p^*}{p_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}=0.5283$
$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$	$\frac{\rho_0}{\rho}=(1+0.2Ma^2)^{2.5}$	$\frac{\rho^*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}=0.6339$

Abrégé de formules f(Ma,k)

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = 1.183Ma\left[1+0.2Ma^2\right]^{-3}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma}\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}Ma^2}{(k+1)/2}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$(k = 1.4)$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1\left(1+0.2Ma^2\right)^3}{1.728}$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = Ma\sqrt{k}\left[1+\frac{k-1}{2}Ma^2\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = 1.183Ma\left[1+0.2Ma^2\right]^{-3}$$

$$\dot{m}_{\max} = \rho^*A^*V^* = p_0A^*\sqrt{\frac{k}{RT_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}}$$

$(k = 1.4)$

$$\dot{m}_{\max} = 0.6847\ \rho_0\sqrt{RT_0}A^* = \frac{0.6847p_0}{\sqrt{RT_0}}A^*$$

Tables: écoulements isentropiques

Subsonique

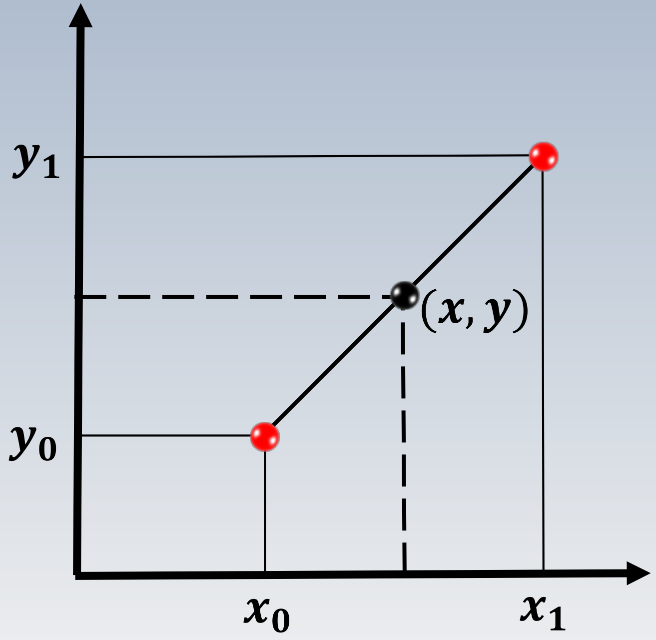
M	A/A*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	V/V*
0	Inf	1.0000	1.0000	1.0000	0
0.0500	11.5914	0.9983	0.9988	0.9995	0.0548
0.1000	5.8218	0.9930	0.9950	0.9980	0.1094
0.1500	3.9103	0.9844	0.9888	0.9955	0.1639
0.2000	2.9635	0.9725	0.9803	0.9921	0.2182
0.2500	2.4027	0.9575	0.9694	0.9877	0.2722
0.3000	2.0351	0.9395	0.9564	0.9823	0.3257
0.3500	1.7780	0.9188	0.9413	0.9761	0.3788
0.4000	1.5901	0.8956	0.9243	0.9690	0.4313
0.4500	1.4487	0.8703	0.9055	0.9611	0.4833
0.5000	1.3398	0.8430	0.8852	0.9524	0.5345
0.5500	1.2549	0.8142	0.8634	0.9430	0.5851
0.6000	1.1882	0.7840	0.8405	0.9328	0.6348
0.6500	1.1356	0.7528	0.8164	0.9221	0.6837
0.7000	1.0944	0.7209	0.7916	0.9107	0.7318
0.7500	1.0624	0.6886	0.7660	0.8989	0.7789
0.8000	1.0382	0.6560	0.7400	0.8865	0.8251
0.8500	1.0207	0.6235	0.7136	0.8737	0.8704
0.9000	1.0089	0.5913	0.6870	0.8606	0.9146
0.9500	1.0021	0.5595	0.6604	0.8471	0.9578

Supersonique

M	A/A*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	V/V*
1.0000	1.0000	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
1.0500	1.0020	0.4979	0.6077	0.8193	1.0411
1.1000	1.0079	0.4684	0.5817	0.8052	1.0812
1.1500	1.0175	0.4398	0.5562	0.7908	1.1203
1.2000	1.0304	0.4124	0.5311	0.7764	1.1583
1.2500	1.0468	0.3861	0.5067	0.7619	1.1952
1.3000	1.0663	0.3609	0.4829	0.7474	1.2311
1.3500	1.0890	0.3370	0.4598	0.7329	1.2660
1.4000	1.1149	0.3142	0.4374	0.7184	1.2999
1.4500	1.1440	0.2927	0.4158	0.7040	1.3327
1.5000	1.1762	0.2724	0.3950	0.6897	1.3646
1.5500	1.2116	0.2533	0.3750	0.6754	1.3955
1.6000	1.2502	0.2353	0.3557	0.6614	1.4254
1.6500	1.2922	0.2184	0.3373	0.6475	1.4544
1.7000	1.3376	0.2026	0.3197	0.6337	1.4825
1.7500	1.3865	0.1878	0.3029	0.6202	1.5097
1.8000	1.4390	0.1740	0.2868	0.6068	1.5360
1.8500	1.4952	0.1612	0.2715	0.5936	1.5614
1.9000	1.5553	0.1492	0.2570	0.5807	1.5861
1.9500	1.6193	0.1381	0.2432	0.5680	1.6099
2.0000	1.6875	0.1278	0.2300	0.5556	1.6330

Interpolation linéaire

RETOUR



$$y = y_0\left(1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) + y_1\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)$$