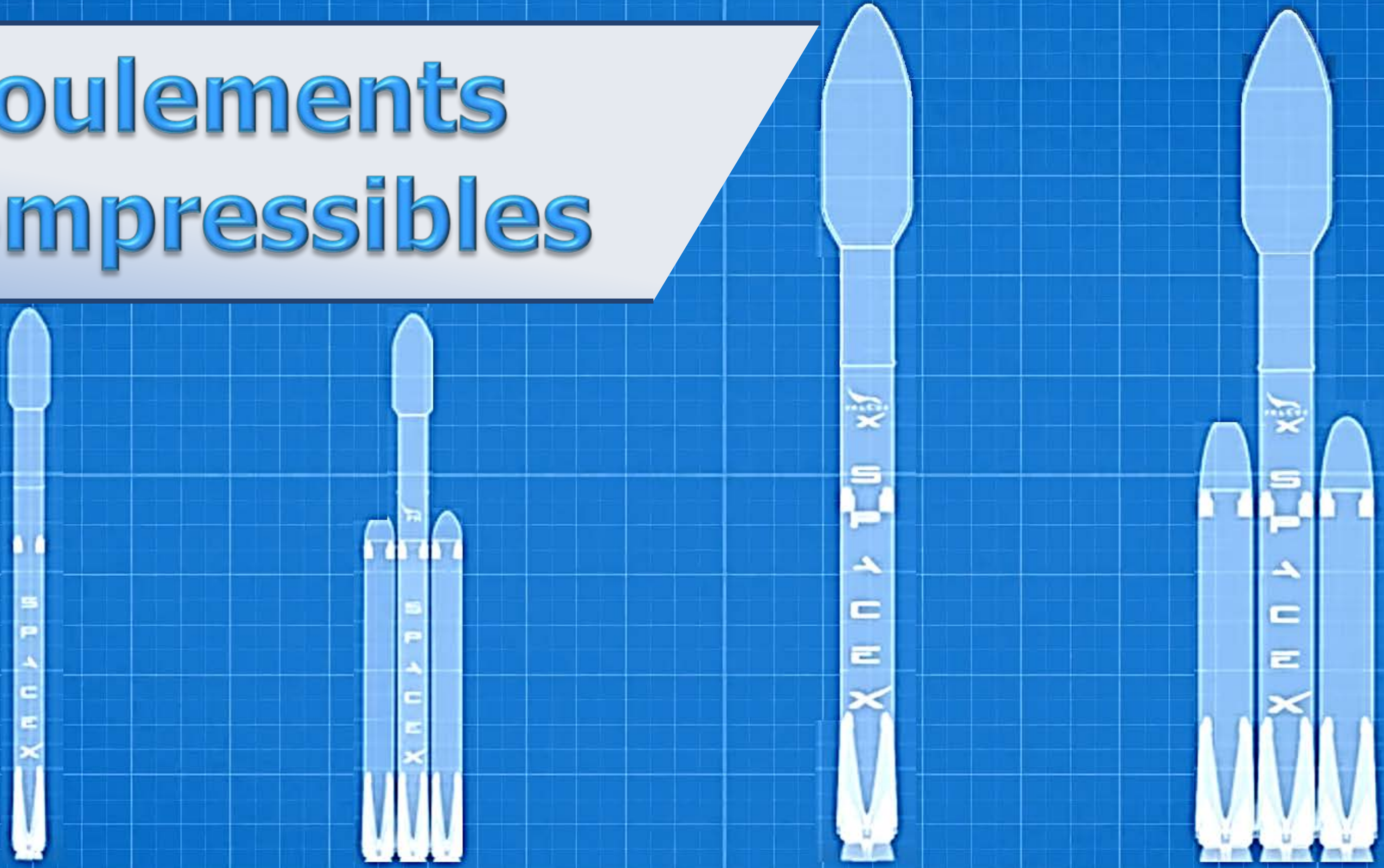
Mécanique des fluides

La force des écoulements

Écoulements Compressibles



Motivation

Les missions interplanétaires et les lanceurs spatiaux (satellites et approvisionnement de la station spatiale) requièrent de fusées pourvues des systèmes produisant de **fortes poussées**.

Le principe de ces systèmes propulsifs repose sur la conversion de l’enthalpie des gaz à haute température générés dans une chambre de combustion en **énergie propulsive**

En pratique ceci se traduit par **l’accélération** des gaz dans une tuyère. À la sortie, la pression (température) diminue fortement en même temps que la vitesse atteint quelques milliers de m/s

Motivation

Des nos jours, le turboréacteur est le moteur le plus utilisé pour le transport aérien et une amélioration du système propulsif est d'intérêt pour l'augmentation du rendement thermique du moteur (diminution de la consommation de carburant)


T- 00:00:19
UPCOMING
LIFTOFF
STARTUP
You Tube
FALCON HEAVY TEST FLIGHT
STARTUP
SPACEX


T- 00:00:19
UPCOMING
LIFTOFF
STARTUP
You
Tube
FALCON HEAVY TEST FLIGHT
STARTUP
SPACEX

Introduction I

Dans les systèmes propulsifs on trouve une forte expansion des gaz de combustion et **l'écoulement est compressible**

Jusqu'à présent nous n'avons traité que les écoulements incompressibles. ($\boldsymbol{\rho = cnste}$., ou bien à "faible vitesse"), déterminés par les équations de continuité et de quantité de mouvement.

On regardera maintenant **les écoulements compressibles**. En règle générale, ces écoulements sont complexes (chocs, interaction ondes de choc couche limite, poches supersoniques)

Dans la perspective du cours, ils seront seulement présentés à travers une optique simplifiée.

Introduction II

En particulier, on ne considère que **des écoulements internes** dans des conduites rectilignes à section droite à forme constante.

L'écoulement est pris **à l'état permanent** et on se limite à un **fluide parfait**: **non visqueux** et **non conducteur de la chaleur**.

Pour les écoulements compressibles, caractérisés par une masse volumique ($\boldsymbol{\rho}$) variable, en plus des équations de continuité et de quantité de mouvement, on doit considérer **l'équation de conservation d'énergie**

Introduction III

À ces équations, on ajoute **l’équation d’état des gaz parfaits** qui permet de faire le couplage entre la pression et l’énergie (ou la température).

Puisque la masse volumique est variable, l’ensemble des **propriétés thermodynamiques** est affecté. Ainsi, avant d’aborder l’étude des écoulements compressibles, on fera un court rappel sur ce sujet.

OBJECTIFS

- Étudier des écoulements 1-D compressibles no visqueux
- Évaluer la vitesse du son et le nombre de Mach
- Introduire la notion de grandeur d'arrêt
- Identifier la nature d'un écoulement: subsonique ou supersonique
- Étudier le choc normal et les écoulements dans les tuyères

Introduction IV

<u>Ecoulements incompressibles</u>

Conservation de la masse

Conservation de la quantité de mouvement

<u>Ecoulements compressibles</u>

Conservation de la masse

Conservation de la quantité de mouvement

Conservation de l’énergie

L’équation d’état $p = f(\rho)$

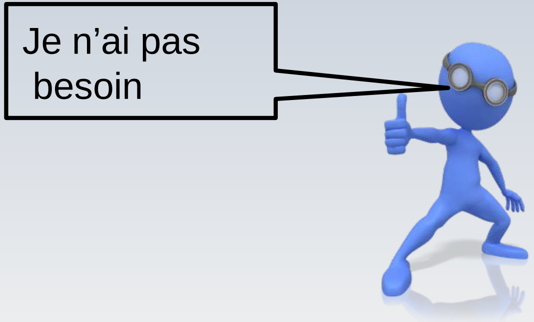
Chapitre 9: Écoulements compressibles

9.1 | 9.2 | 9.3 | 9.4 | 9.5 | 9.6

Rappel

Voici un rappel de quelques formules fondamentales de la thermodynamique nécessaires pour l’étude des écoulements compressibles

Quelques éléments additionnels peuvent être trouvés dans l’annexe



Je clique pour regarder

Résumé I

Définition	Relation	Gaz Parfaitt
Relation pression-densité-température	$p = f(\rho, T)$	$p = \rho R T$
Énergie interne par unité de masse	$\hat{u}$	$\hat{u}(T)$
Enthalpie par unité de masse	$h = \hat{u} + p/\rho$	$h = \hat{u} + RT$
Chaleur spécifique à volume constant	$c_v = \left.\frac{\partial \hat{u}}{\partial T}\right\|_v$	$c_v = \frac{d\hat{u}}{dT}$
Chaleur spécifique à pression constante	$c_p = \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right\|_p$	$c_p = \frac{dh}{dT} = \frac{d\hat{u}}{dT} + R$ $c_p - c_v = R$
Volume spécifique	$\frac{1}{\rho}$	

Résumé II

$$R = c_p - c_v \qquad c_v = \frac{R}{k-1} \qquad c_p = \frac{kR}{k-1}$$

$\boldsymbol{Propriétés\ pour\ l'air\ k = 1.4}$		
$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{C_v}$	$\boldsymbol{C_v}$
$1716\ \dfrac{ft^2}{s^2\,°R}$	$4293\ \dfrac{ft^2}{s^2\,°R}$	$6009\ \dfrac{ft^2}{s^2\,°R}$
$287\dfrac{m^2}{s^2\,K}$	$718\dfrac{m^2}{s^2\,K}$	$1005\dfrac{m^2}{s^2\,K}$

$$\widehat{u} = \int c_v\, dT \;\Rightarrow\; \widehat{u}_2 - \widehat{u}_1 = c_v\,(T_2 - T_1) \qquad h = \int c_p\, dT \;\Rightarrow\; h_2 - h_1 = c_p\,(T_2 - T_1)$$

Variation d’énergie interne et d’enthalpie d’un gaz parfait à chaleur spécifique constante

Résumé III

Processus **isentropique** $s_1 = s_2$, $c_p = cnste$.

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\frac{p}{\rho^k} = cnste$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Variation d'entropie

Pour un gaz parfait, la variation d'entropie entre deux états ❶ et ❷ peut être calculée par:

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$$

$$c_p = cnste$$

ou encore

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)}$$

$$c_p = cnste$$

Exemple 9.1

De l'argon s'écoule dans un tube. La **condition initiale** est:
$p_1 = 1.7\ MPa, \rho_1 = 18\ kg/m^3$, tandis que **l'état final** est $p_2 = 248\ kPa, T_2 = 400K$

Estimer (a) la température initiale, (b) la masse volumique finale, (c) le changement d'enthalpie, et (d) le changement d'entropie

Solution

Les propriétés de l'argon $R = 208\ m^2/(s^2\ K)$ **et** $k = 1.67$

a) Calcul de T_1: $$T_1 = \frac{p_1}{\rho_1 R} = 454\ K$$

b) Calcul de ρ_2: $$\rho_2 = \frac{p_2}{T\quad R} = 2.98\ kg/m^3$$

Exemple 9.1 (suite)

(c) le changement d'enthalpie, et (d) le changement d'entropie

$$\boxed{\begin{aligned} T_1 &= 454\,K \\ T_2 &= 400\,K \end{aligned}}$$

Solution

Les propriétés de l'argon $R = 208 \;\; m^2/(s^2\,K)$ ***et*** $k = 1.67$

c) Calcul de Δh:

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \Longleftarrow \quad c_p = \frac{kR}{k-1}$$

$$\Delta h = -28000\,J/k\,g$$

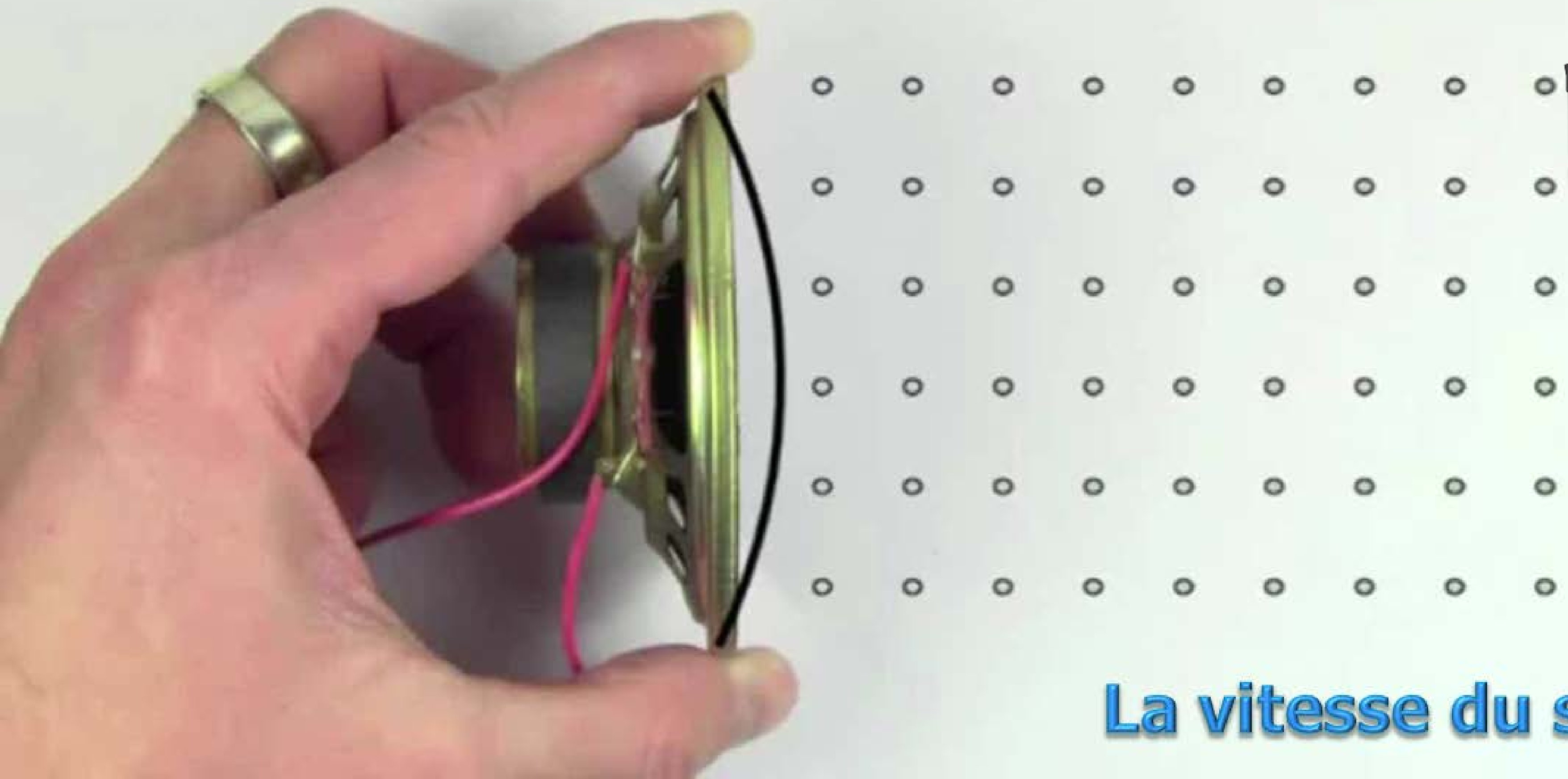
b) Calcul de Δs:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_1 &= 1.7\,MPa \\ p_2 &= 288\,kPa \end{aligned}}$$

$$\Delta s = 334 \;\; m^2/(s^2\;\;K)$$

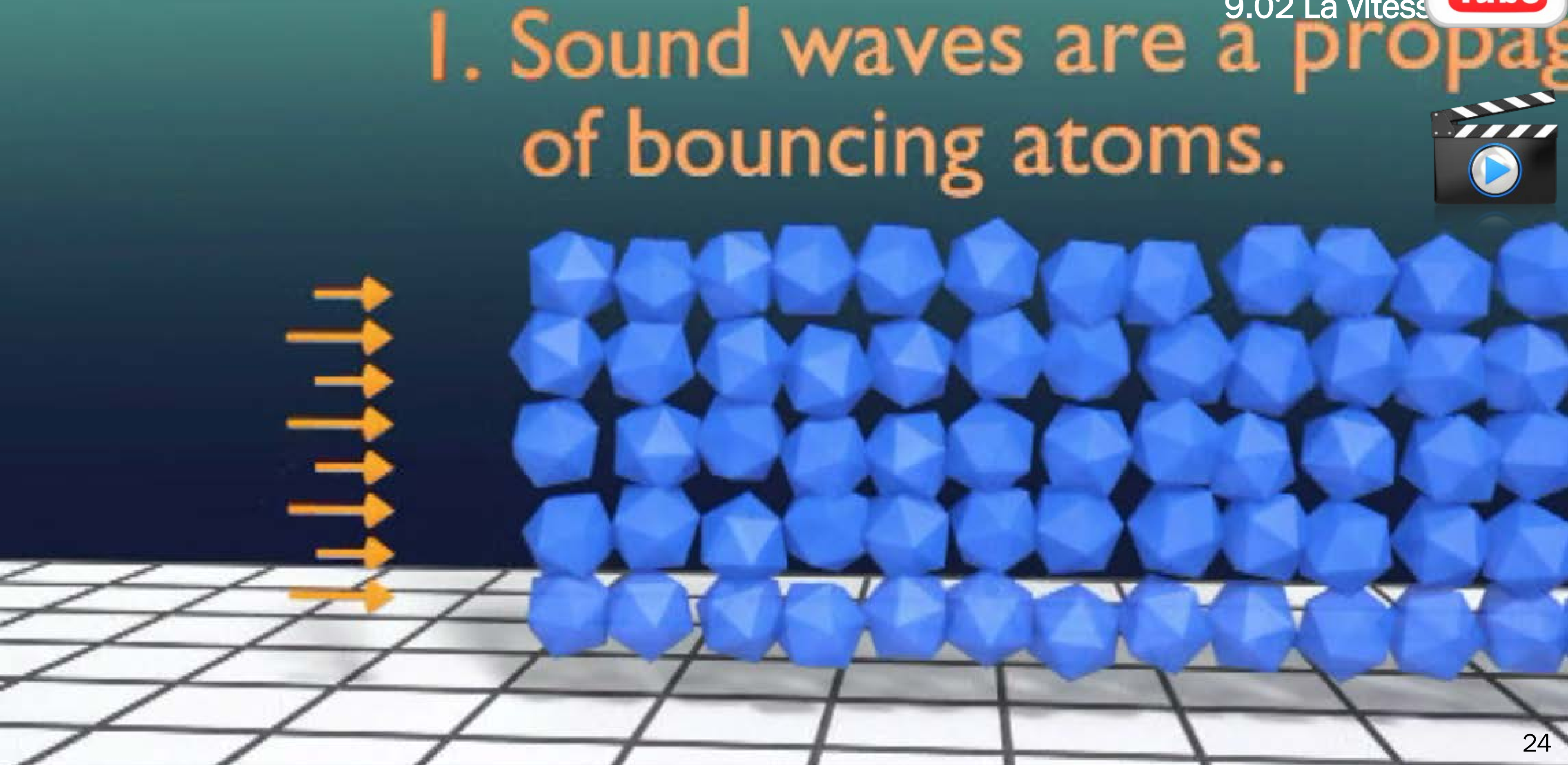
Chapitre 9: Écoulements compressibles



La vitesse du son

La vitesse du son

9.02 La vitess



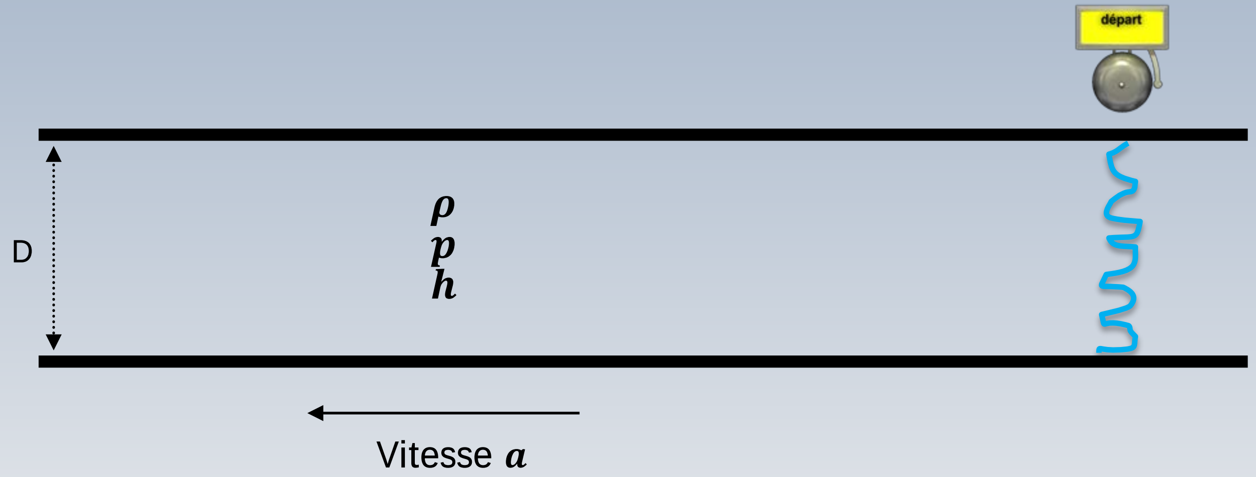
La vitesse du son

Une forme permettant de caractériser la compressibilité d'un fluide, est d'évaluer **la vitesse avec laquelle se propagent des petites perturbations** au sein de celui-ci. Cette vitesse correspond à **la vitesse du son**.

Pour évaluer la vitesse du son, on imagine une perturbation de **pression infinitésimale** $\boldsymbol{dp}$, créée par le déplacement d'un piston à une **vitesse infinitésimale** $\boldsymbol{du}$ à l'extrémité d'un tube.

La perturbation se propage dans le tube sous la forme d'une onde plane avec une **vitesse** $\boldsymbol{a}$

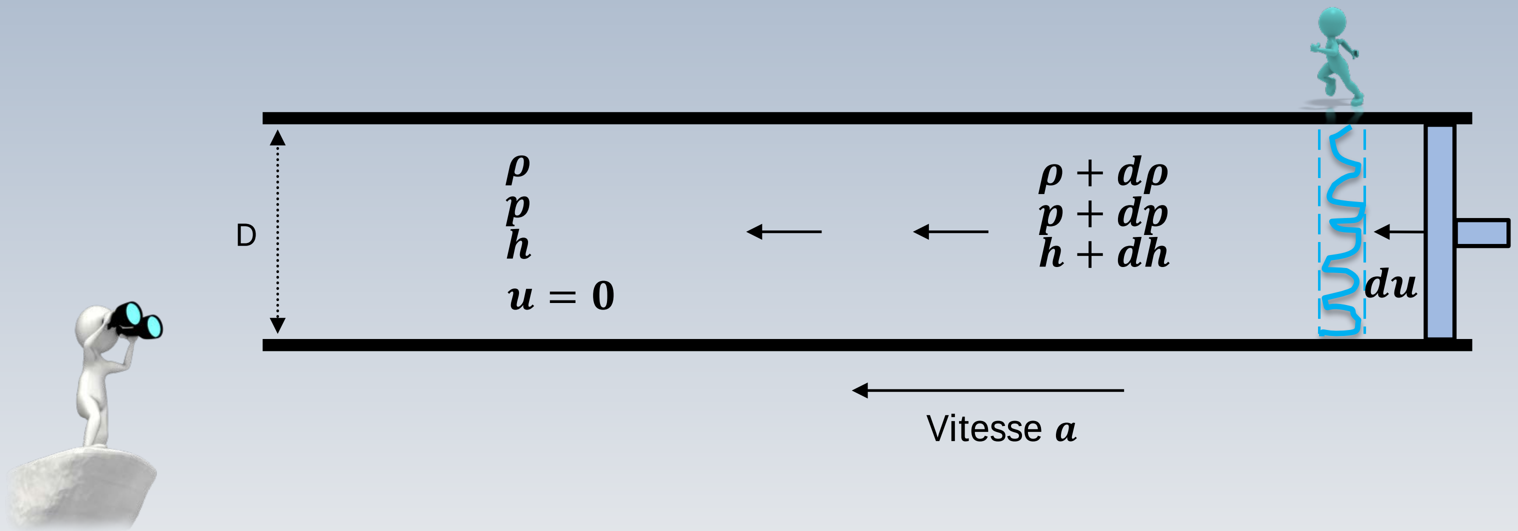
Perturbation sonore



On s'intéresse à la propagation d'une (faible) perturbation élémentaire de pression $\boldsymbol{dp}$ avec une vitesse $\boldsymbol{a}$.

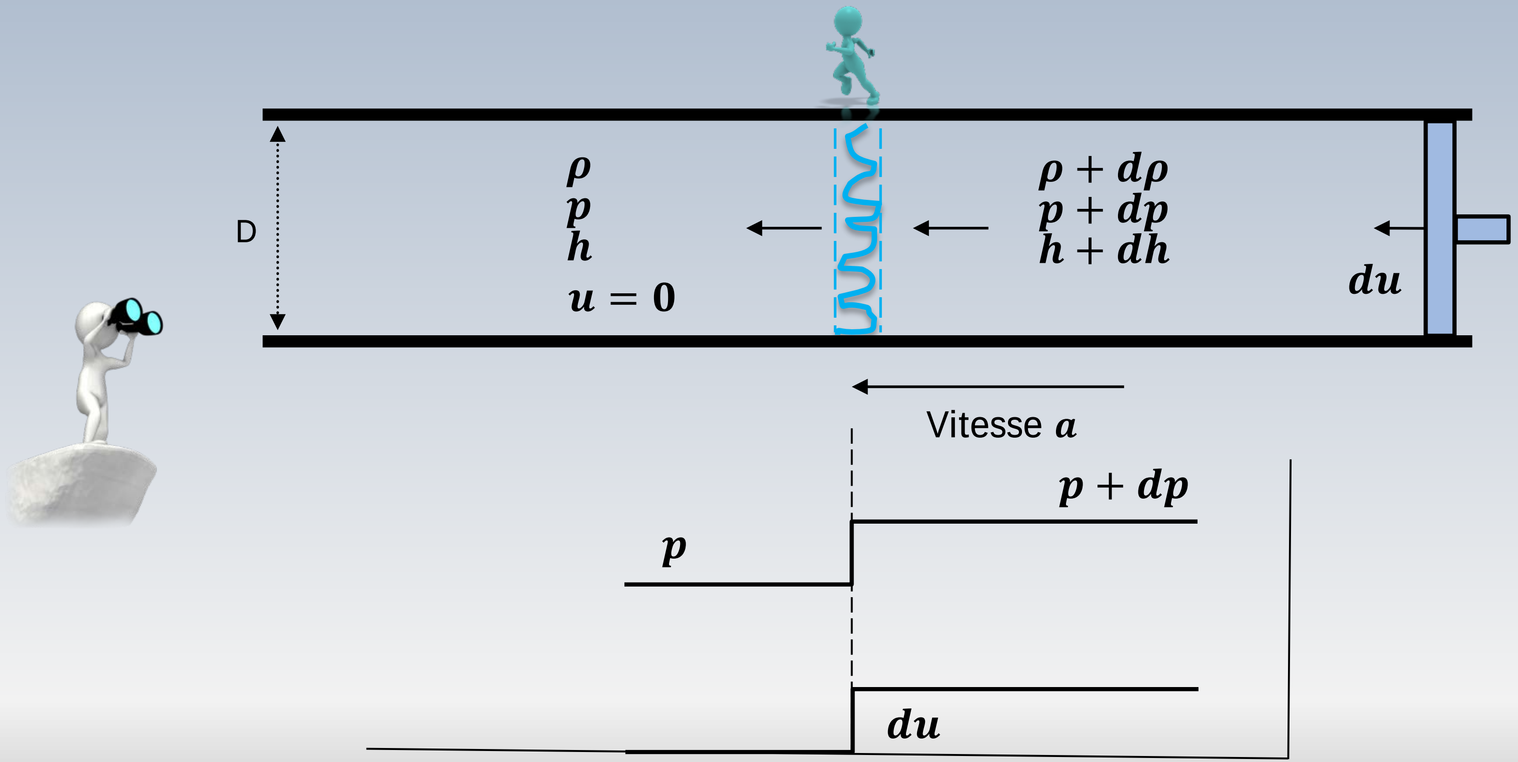
Le milieu est supposé au repos, homogène, isotrope, à l'équilibre thermodynamique à l'état $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\rho}$. On néglige les effets gravitationnels.

Propagation d'une perturbation

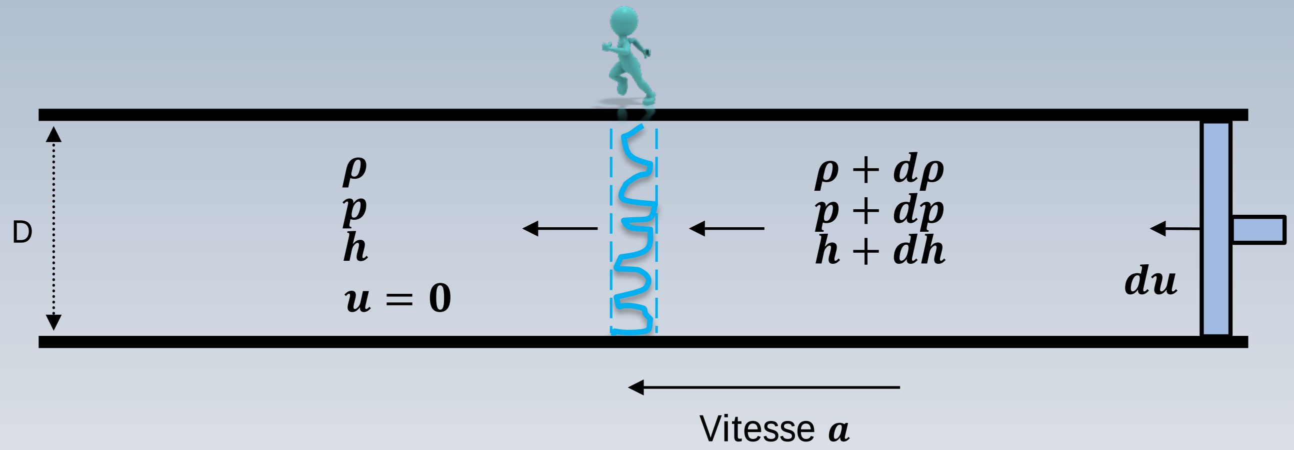


Souvent, on imagine que la perturbation a été générée par l'effet d'un piston se déplaçant à une **vitesse constante du**

Propagation d'une perturbation



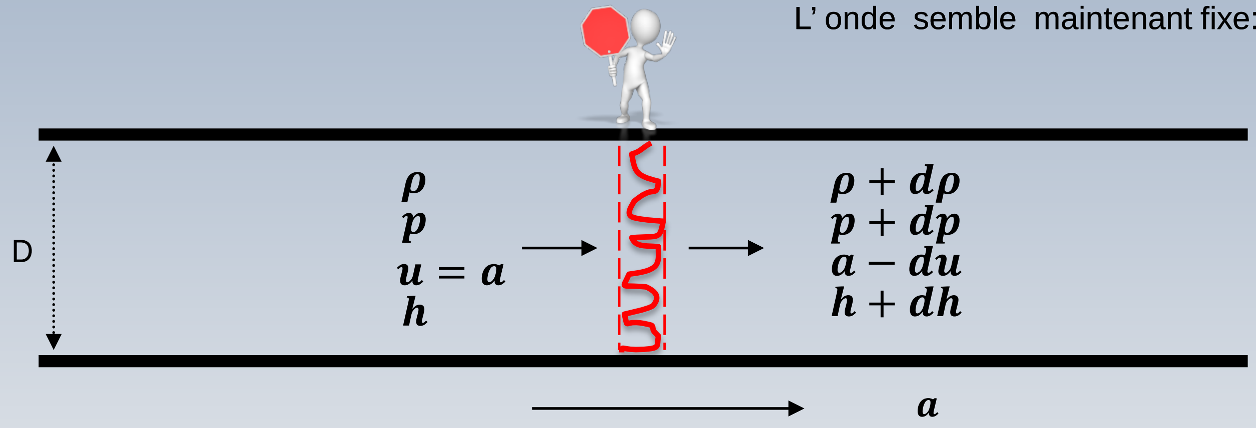
Propagation d'une perturbation



On regarde maintenant le problème du point de vue d'un observateur se déplaçant avec la perturbation à la vitesse a.

Observateur sur la perturbation

L' onde semble maintenant fixe:

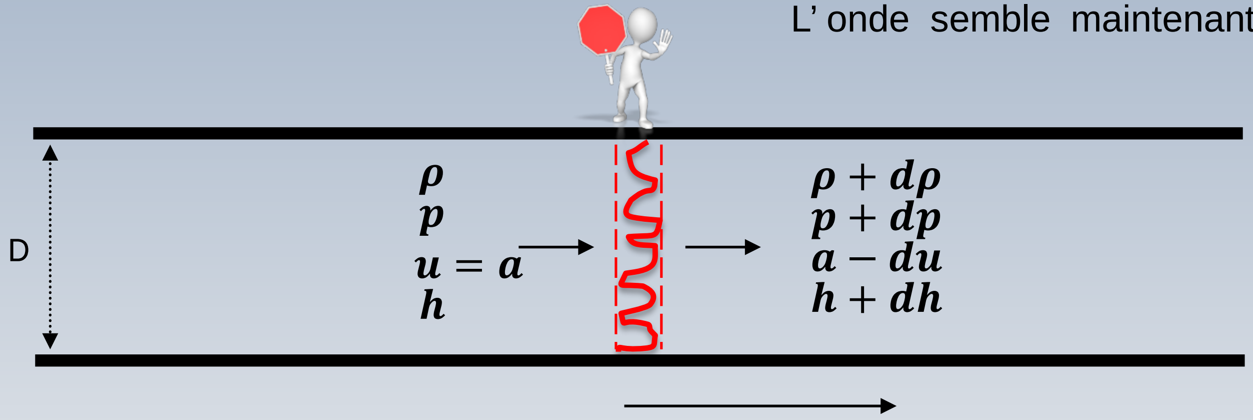


Écoulement relatif à un observateur se déplaçant avec la perturbation

L'écoulement arrivant vers l'observateur avec une vitesse $\boldsymbol{a}$, une pression $\boldsymbol{p}$, une masse volumique $\boldsymbol{\rho}$, et une enthalpie $\boldsymbol{h}$, est soudainement ralentie à $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{du})$, accompagnée d'un incrément élémentaire de pression $\boldsymbol{dp}$, de masse volumique $\boldsymbol{d\rho}$, et d'enthalpie $\boldsymbol{dh}$.

Conservation de la masse

L' onde semble maintenant fixe



Vitesse $\boldsymbol{a}$

Conservation de la masse

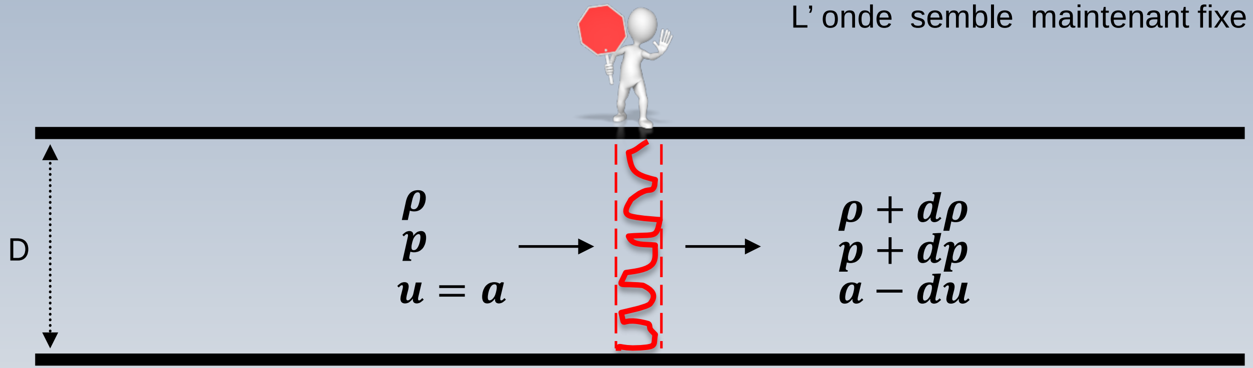
$$\rho a = (\rho + d\rho)(a - du)$$

Si l'on néglige le terme d'ordre supérieur $d\rho du$, on trouve

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{a}}$$

Conservation de Q. de Mouvement

L' onde semble maintenant fixe



Hypothèses

- écoulement 1D
- permanent ,
- non visqueux,
- pesanteur négligeable

Variation de la Q. de mouvement

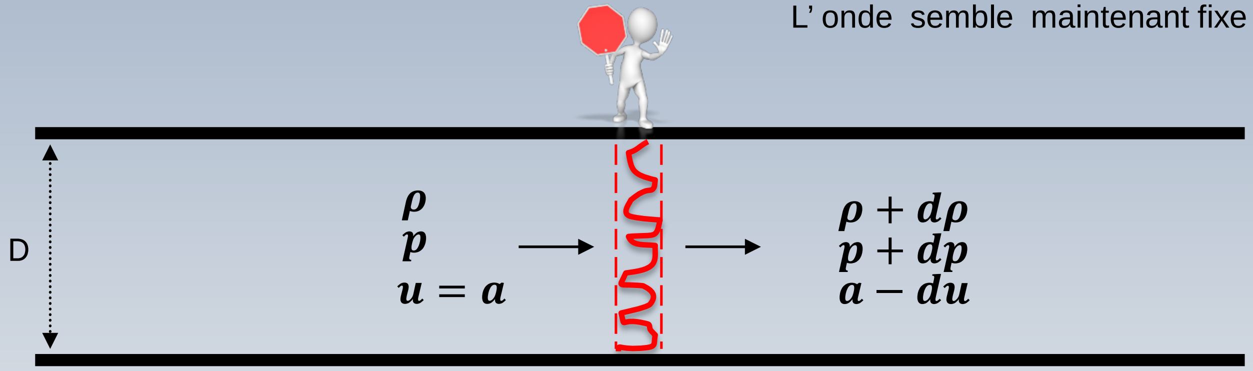
$$p - (p + dp) = \rho a(a - du\ - a)$$

d'où on a:

$$\boldsymbol{dp = \rho a du}$$

Q. de Mouvement + continuité

L' onde semble maintenant fixe



$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} = \frac{du}{a}}$$

Conservation de la masse

$$dp = \rho a du$$

$$\boldsymbol{a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)}$$

Conservation de l'énergie

La valeur de $\boldsymbol{dp/d\rho}$ dépend du type de processus. Pour ce cas, supposé adiabatique et avec les effets gravitationnels négligés, l'équation de l'énergie s'écrit:

$$h + \frac{a^2}{2} = h + dh + \frac{(a - du)^2}{2}$$

Si l'on néglige le terme d'ordre supérieur du^2, on trouve

$$\boldsymbol{dh = adu}$$

L'entropie

L'introduction de la relation $\boldsymbol{dp = \rho a du}$ trouvée précédemment, dans $\boldsymbol{dh = a du}$ permet d'écrire:

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

On note que l'équation $Tds = dh - vdp$, pour **un processus isentropique** conduit également à

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

La vitesse du son

Par conséquent, le mouvement du fluide lié à une onde acoustique est isentropique.

Finalement, la vitesse d'une onde acoustique, ou vitesse du son, est donnée par

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \sqrt{\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{\rho}}\right)_{\boldsymbol{s}}}}$$

À être utilisée plus tard

Dénote entropie constante

Une onde acoustique a lieu si les gradients de vitesse et de température produits par l'onde deviennent si petits que les contraintes de cisaillement et le transfert de chaleur sont négligeables

Vitesse du son: gaz idéal

Relation **isentropique** pour un gaz idéal

$$p/\rho^k = cnst$$

$$p = \rho RT$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = cnst \times k \times \rho^{k-1} = \boxed{k \times cnst} \times \rho^k/\rho = k\frac{p}{\rho}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = RT = \frac{p}{\rho}$$

de sorte que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = k\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = kRT$$

$$a = \left(\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{kRT}}$$

(T est en K)

Vitesse du son dans un gaz idéal

Vitesse du son a

La vitesse du son $\boldsymbol{a}$ dans un gaz idéal est donnée par:

$$\boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{kRT}}$$

Exemple 9.2

On a du monoxide de carbone à: $p = 200\,kPa, T = 300^0C.$ On doit estimer la vitesse du son.

Solution

Les propriétés du CO sont $R = 297\ m^2/(s^2\,K)$ $et\ k = 1.4$

$$T = 300 + 273 = 573\,K$$

Vitesse du son

$$a = \sqrt{kRT} = 488\ m/s$$

Chapitre 9: Écoulements compressibles

9.1 | 9.2 | 9.3 | 9.4 | 9.5 | 9.6

Remarque

Lorsqu’on tient compte de l’énergie, on découvre une **couche limite thermique (CLT)** semblable à la couche limite dynamique.

L'épaisseur de la CLT ($\neq$ de celui de la couche limite dynamique) dépends aussi de la vitesse de l'écoulement.

Le paramètre adimensionnel connu sous le nom de **nombre de Prandtl** relie les épaisseurs des deux couches limites

Dans cette partie l’intérêt est porté uniquement sur des phénomènes **sans la présence d’une couche limite**

L’étude d’un écoulement compressible présentée par la suite comporte diverses hypothèses additionnelles

Hypothèses

- L'écoulement est **permanent**: aucune grandeur physique ne dépend du temps.
- Les **forces de gravité sont négligeables** devant les forces de pression et les forces d'inertie.
- Le **fluide est parfait** (non visqueux): à des grands nombres de Reynolds l'inertie est prédominante et les contraintes visqueuses sont négligeables.
- L'écoulement est **adiabatique**: les échanges de chaleur n'ont pas le temps de s'opérer.
- L'écoulement est **réversible,** donc **isentropique** (s'il n'y a pas d'onde de choc)

Écoulement isentropique I

Ces hypothèses nous amènent à formuler l'équation unidimensionnelle de conservation de l'énergie entre deux points comme:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 - Q + W_s$$

Puisqu'on considère une paroi adiabatique ($\boldsymbol{Q = 0}$), si l'on néglige la variation d'énergie potentielle ($\boldsymbol{g\Delta z = 0}$), et en absence d'un travail à l'arbre ($\boldsymbol{W_s = 0}$), on trouve:

Grandeur d'arrêt

$$\Longrightarrow \quad h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = cnste$$

Grandeur d'arrêt: on appelle état d'arrêt, total, ou de stagnation, l'état que prend toute variable de l'écoulement si on l'amenait au repos de manière adiabatique et réversible, donc isentropique

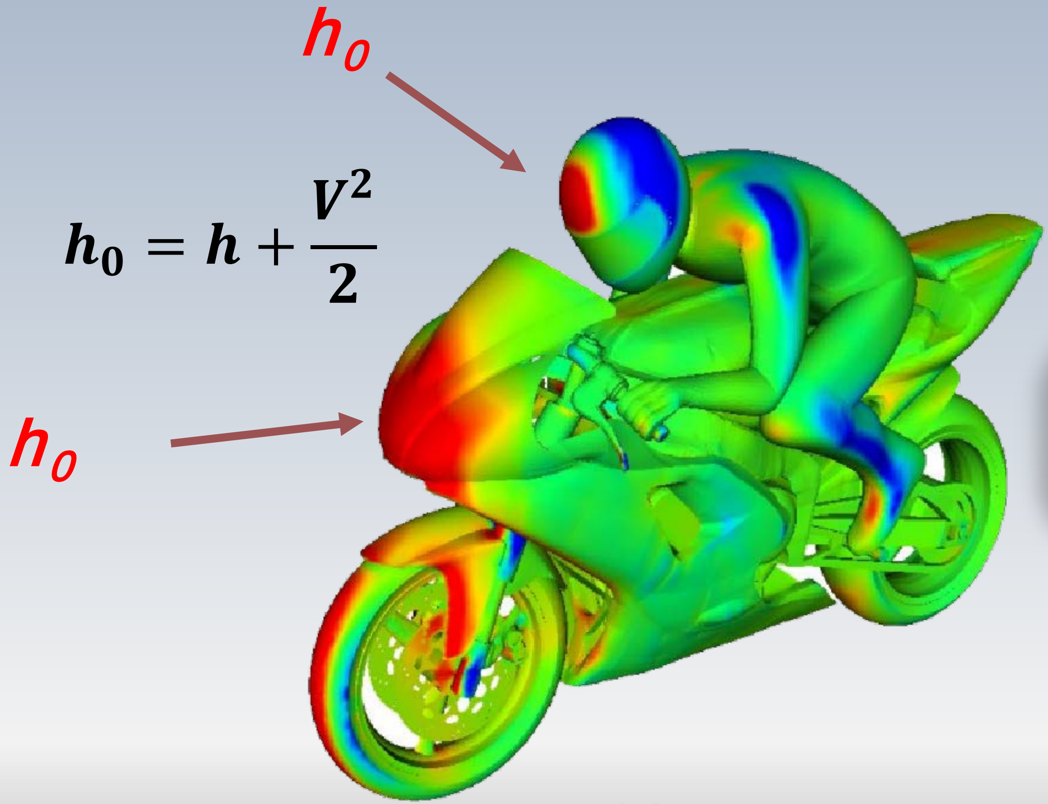
On note par $\boldsymbol{h_0}$ **l'enthalpie d'arrêt, totale, ou de stagnation**. Elle représente la combinaison de l'énergie cinétique avec l'enthalpie

$$\boldsymbol{h_0 = h + \frac{V^2}{2}}$$

L'enthalpie totale se conserve **même si l'écoulement est irréversible!**

Enthalpie totale

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$



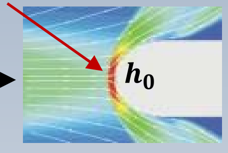
Au cours du processus d'arrêt, l'énergie cinétique est convertie en enthalpie!

Température totale

Enthalpie totale

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

$V \longrightarrow$



Température totale

$$\int_h^{h_0} dh = \int_T^{T_0} c_p \, dT \quad \Longrightarrow \quad h_0 - h = c_p (T_0 - T)$$

$$\boxed{T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p}}$$

La température T_0 reçoit le nom de: stagnation, arrêt, ou totale

Température totale

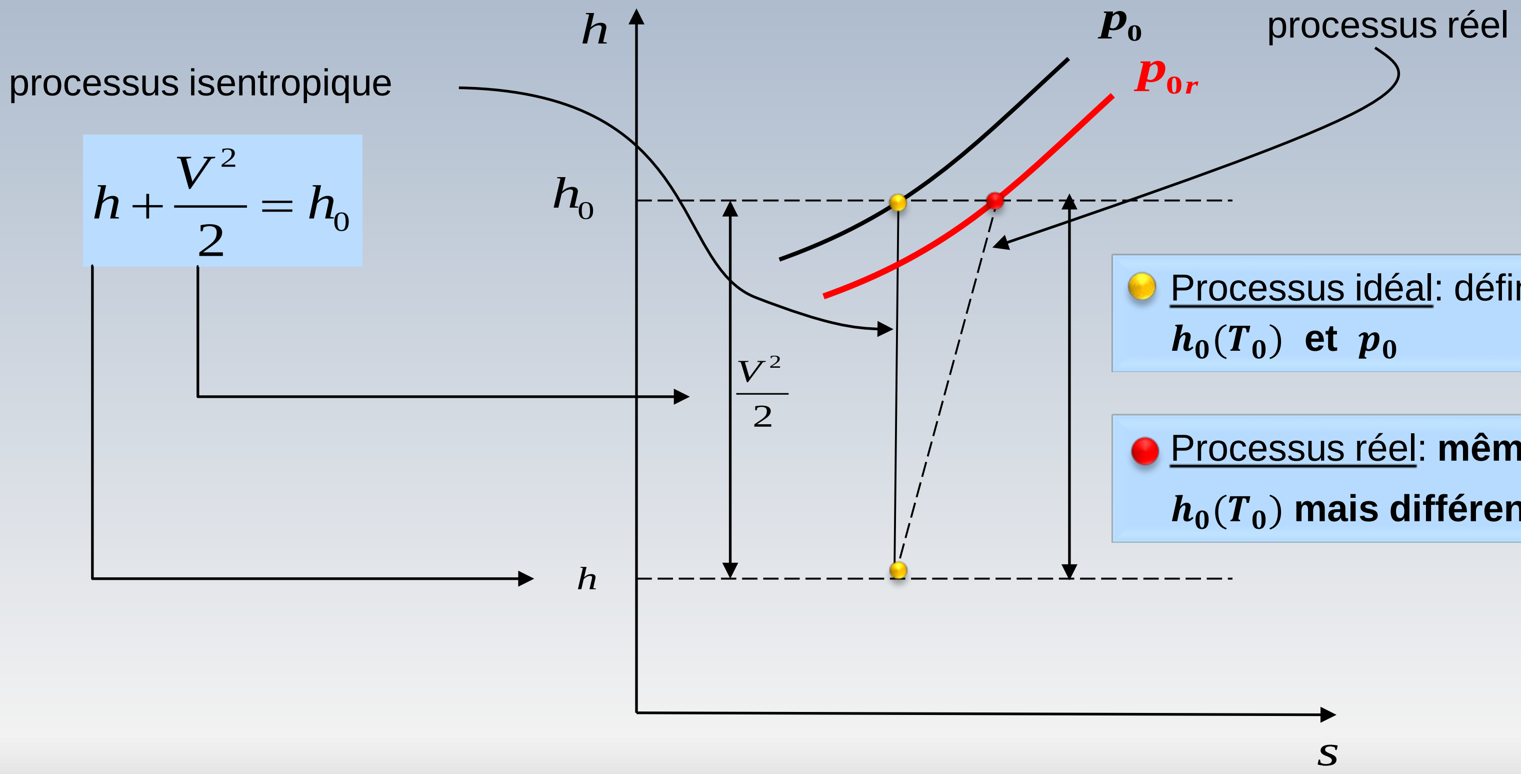
$$\boldsymbol{h_0 = h + \frac{V^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{T_0 = \mathrm{T} + \frac{V^2}{2c_p}}$$

On note que ces relations sont **valables pour tout écoulement adiabatique**. Donc, aussi valide dans un écoulement avec génération d'entropie (frottement), du moment qu'il n'y a pas transfert de chaleur.

Ceci est particulièrement important dans un écoulement présentant une **onde de choc, à travers laquelle l'entropie augmente, mais la température totale T_0 demeure constante**

Écoulement: isentropique/réel



$$h + \frac{V^2}{2} = h_0$$

Processus idéal: définie à $h_0(T_0)$ et p_0

Processus réel: **même** $h_0(T_0)$ **mais différent** p_{0r}

Relation avec le nombre de Mach

Par définition **le nombre de Mach est** $\boldsymbol{Ma = V/a}$ où $\boldsymbol{V}$ indique la vitesse de l'écoulement et $\boldsymbol{a}$ **la vitesse du son**

Ce nombre est fondamental pour les écoulements compressibles!

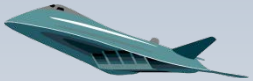
En effet, le comportement d'un écoulement est entièrement différent selon qu'il soit supérieur (régime supersonique) ou inférieur à 1 (régime subsonique).

$$\boxed{\boldsymbol{a = \sqrt{kRT}}}$$

Vitesse du son dans un gaz idéal

Paliers pour le nombre de Mach

$$\text{Nombre de Mach} = \frac{\text{vitesse de l'objet (de l'écoulement)}}{\text{vitesse du son}}$$



3.0< Ma
Écoulement hypersonique

1.2< Ma <3.0
Écoulement supersonique

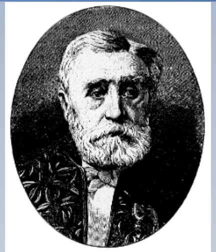
0.8< Ma <1.2
Écoulement transsonique

0.3< Ma <0.8
Écoulement subsonique

Ma <0.3
Écoulement incompressible

Température totale et nombre de Mach

Au 19ième siècle, *de Saint Venant* à introduit un formule qui relie la température adimensionnelle T_0/T au nombre de Mach



Jean Claude Barré de Saint-Venant 1797-1886

$$\left.\begin{array}{l} Ma = \dfrac{V}{a} \\[2ex] a = \sqrt{kRT} \\[2ex] c_p = \dfrac{kR}{k-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2}$$

Équation de Saint-Venant

Température totale et nombre de Mach

L'équation de J.C. Barré de Saint-Venant est pratique puisqu'elle relie directement la température totale au nombre de Mach en un point de l'écoulement.

Elle permet aussi d'établir des relations pour d'autres variables, telle que la pression et la masse volumique

L'utilisation des relations d'un écoulement isentropique avec la relation de Saint-Venant, permet d' écrire

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{k-1/k}$$

P_0, ρ_0, T_0 - P, ρ, T:

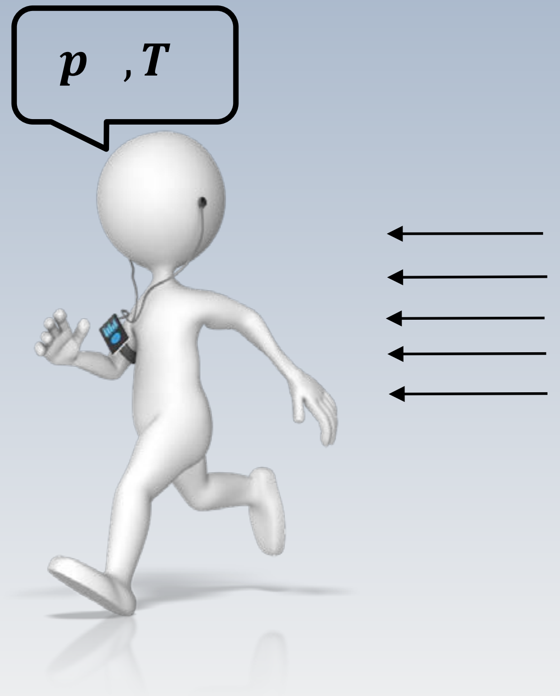
$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{k/k-1}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{1/k-1}$$

$$\left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right] = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{k-1/k}$$

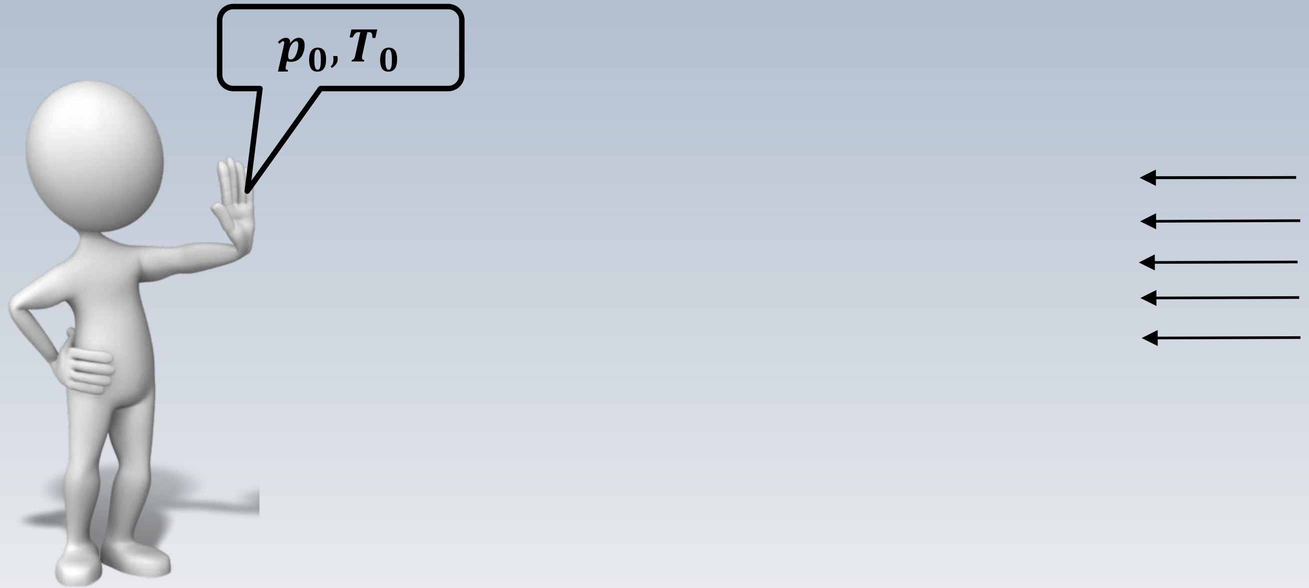
Formule ``trois pour un''

Conditions statiques p, ρ , T



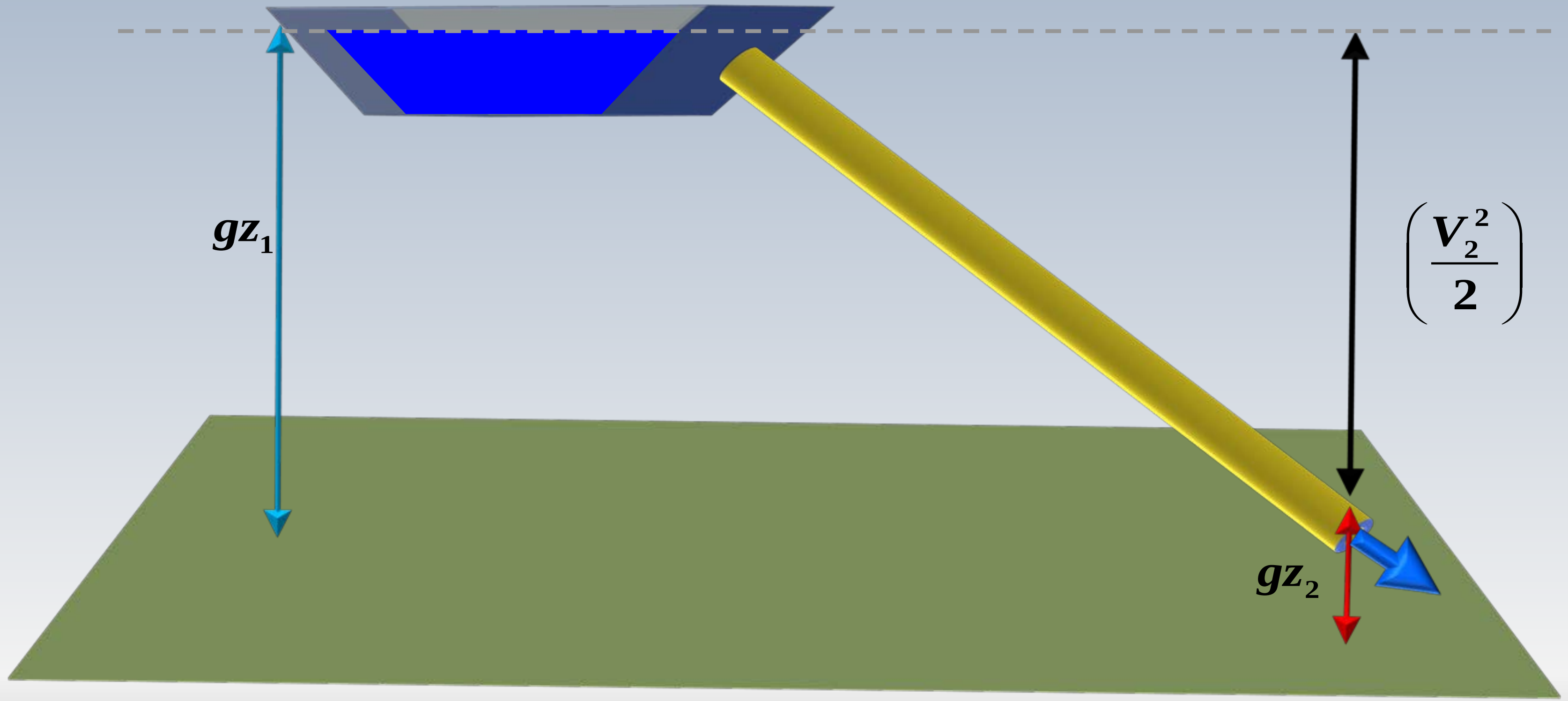
Les conditions statiques correspondent à celles qu’on enregistrerait si on se déplaçait à la même vitesse que l’écoulement

Conditions totales p_0, ρ_0, T_0

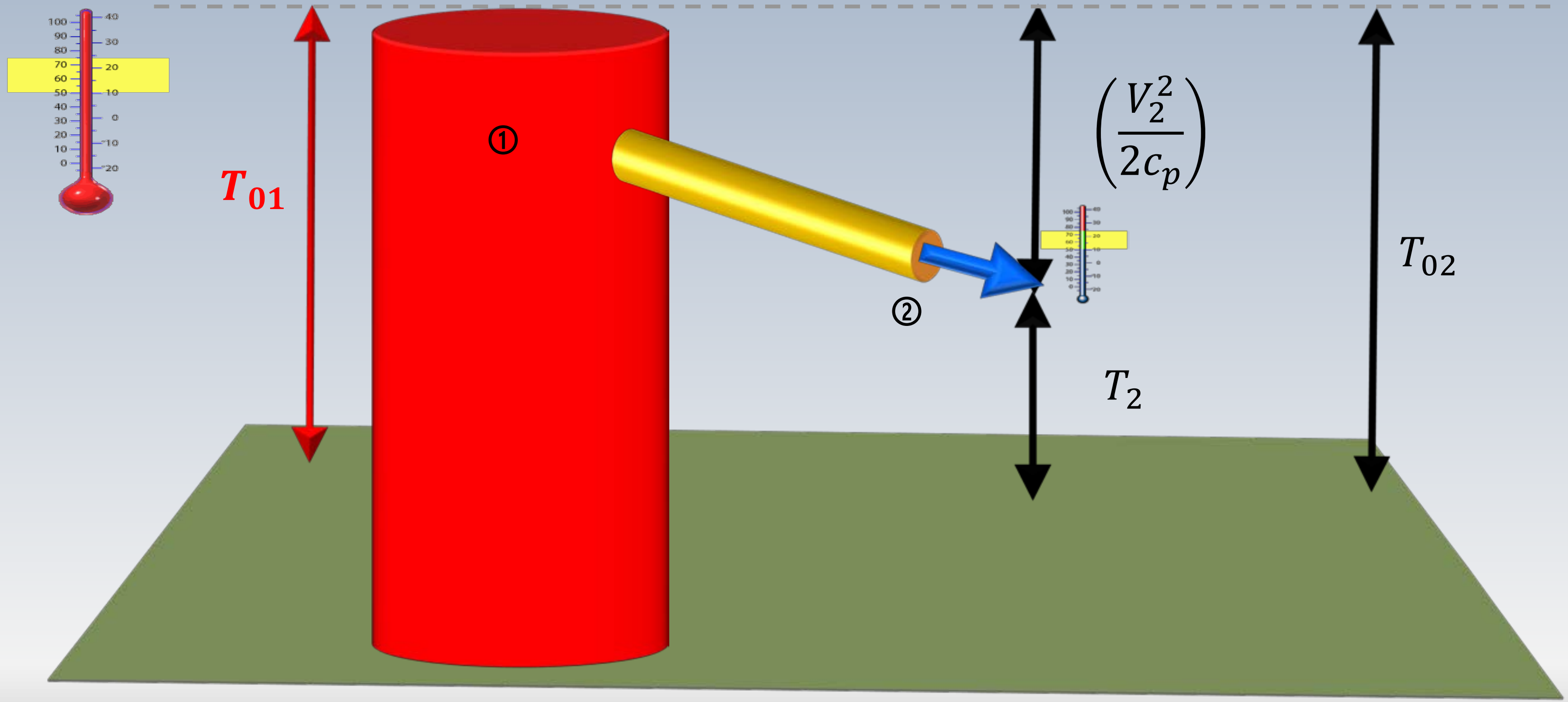


Les conditions totales correspondent à celles qu'on enregistrerait si on arrêtait complétement l'écoulement

Analogie



Analogie



Remarques

- Pour un processus isentropique, l'entropie de l'état de stagnation est la même que celle du fluide au repos

- La température de stagnation $\boldsymbol{T_0}$ est supérieure à la température statique $\boldsymbol{T}$. Leur différence: $\boldsymbol{T_0 - T = V^2/2c_p}$ provient de l'énergie cinétique du fluide

- La température d'arrêt $\boldsymbol{T_0}$ est une grandeur représentative du niveau énergétique d'un fluide en mouvement

Vitesse du son d'arrêt

$$a = \sqrt{kRT} \quad et \quad a_0 = \sqrt{kRT_0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_0}{a} = \sqrt{\frac{T_0}{T}}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{a_0}{a} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} Ma^2}}$$

Conditions critiques (M=1)

Par définition, les **quantités critiques** correspondent à un point de l’écoulement où la vitesse est sonique, soit **lorsque** $\boldsymbol{Ma = 1}$
Des équations pour les quantités critiques peuvent facilement être établies grâce à la formule ``*trois pour un*’’ en introduisant $\boldsymbol{Ma = 1}$ dans cette expression:

$$\boldsymbol{Ma = 1} \Longrightarrow \boxed{1+\frac{k-1}{2}Ma^2=\frac{T_0}{T}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1}=\left(\frac{p_0}{p}\right)^{k-1/k}}$$

Les quantités critiques seront notées avec un astérisque

Conditions critiques (M=1)

$$\boldsymbol{Ma = 1} \Longrightarrow T_0 = T\left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right) \rightarrow T_0 = T^*\left(1 + \frac{k-1}{2}\right)$$

$$\downarrow$$

$T*$ température critique $\longrightarrow$

$$\frac{T^*}{T_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)$$

$V*$ vitesse critique

$a*$ vitesse du son crítique

$$V^* = a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_0}$$

Conditions critiques (M=1)

$$\frac{p^*}{p_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/k-1} \qquad \frac{\rho^*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/k-1} \qquad \frac{T^*}{T_0}=\left(\frac{2}{k+1}\right) \qquad \frac{a^*}{a_0}=\sqrt{\frac{T^*}{T_0}}=\sqrt{\frac{2}{k+1}}$$

Pour **l'air avec *k*=1.4** on a

$$\frac{p^*}{p_0}=0.5275, \quad \frac{\rho^*}{\rho_0}=0.6343, \quad \frac{T^*}{T_0}=0.8316, \quad \frac{a^*}{a_0}=0.9119$$

Seuil de compressibilité

Dans des sections précédentes, on avait avancé que l'étude des écoulements des fluides compressibles à faible vitesse pouvait être abordée en considérant le phénomène comme s'il s'agissait d'un écoulement incompressible.

On dispose maintenant des relations pour caractériser les effets de compressibilité et l'énergie provenant de l'élasticité du fluide.

On peut ainsi se demander, **à partir de quelle vitesse on ne peut plus considérer l'écoulement d'un fluide compressible comme étant incompressible?**

Relation avec Bernoulli

La réponse à cette question peut être trouvée en regardant la relation entre la pression statique et la pression totale (d'arrêt ou de stagnation)

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{k/k-1}$$

Après quelques étapes de développement, on peut constater que pour $Ma < 0.3$ la relation $p_0 \approx p + \rho V^2/2$ est valable

Je veux regarder le développement

Abrégé de formules f(Ma,k)

	Air (k=1.4)	Valeurs critiques: Ma=1, air (k=1.4)
$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2$	$\frac{T_0}{T} = 1 + 0.2Ma^2$	$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} = 0.8333$
$\frac{a_0}{a} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} Ma^2} = \sqrt{\frac{T_0}{T}}$	$\frac{a_0}{a} = \sqrt{1 + 0.2Ma^2}$	$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} = 0.9129$
$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$	$\frac{p_0}{p} = (1 + 0.2Ma^2)^{3.5}$	$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0.5283$
$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$	$\frac{\rho_0}{\rho} = (1 + 0.2Ma^2)^{2.5}$	$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} = 0.6339$

Exemple 9.3

De l'air s'écoule dans un tube sans transfert de chaleur (adiabatique). Au point 1 $p_1 = 170\ kPa, T_1 = 320K,\ V_1 = 240\ m/s$. Au point 2 $p_2 = 145\ kPa, V_2 = 290\ m/s$

Estimer (a) T_{01}, (b) p_{01} , (c) ρ_{01}, (d) Ma_1, (e) V_{max}, (f) V^* , et (g) p_{02}.

Solution

Les propriétés de l'air $R = 287\ \ m^2/(s^2\ K)$, $k = 1.4,\ c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$

a) Calcul de T_{01}:

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 349K \Longrightarrow V_{\max} = \sqrt{2c_p T_{01}} = 837\ m/s$$

(e)

(f)

$$V^* = a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_{01}} = 342\ m/s$$

Exemple 9.3 (suite)

$R = 287\ m^2/(s^2 K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$

$p_2 = 145\ kPa$,
$V_2 = 290\ m/s$
$T_1 = 320K$
$p_1 = 170\ kPa$
$T_{01} = 349K$
$T_{02} = 349K$

p_{01}, ρ_{01}, Ma_1, p_{02} ?

Solution

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 \qquad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$Ma_1 = \sqrt{5\left(\frac{T_{01}}{T_1} - 1\right)} = 0.67$$

$$p_{01} = p_1(1 + 0.2 Ma_1^2)^{3.5} = 230kPa$$

$$\rho_{01} = \frac{p_{01}}{RT_{01}} = 2.29\ kg/m^3$$

$$T_{02} = T_{01} \Rightarrow$$

Calcul de T_2, p_2

$$T_2 = T_{02} - \frac{V_2^2}{2c_p} = 307K \qquad p_{02} = p_2\left(\frac{T_{02}}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 212\ kPa$$

Forme alternative

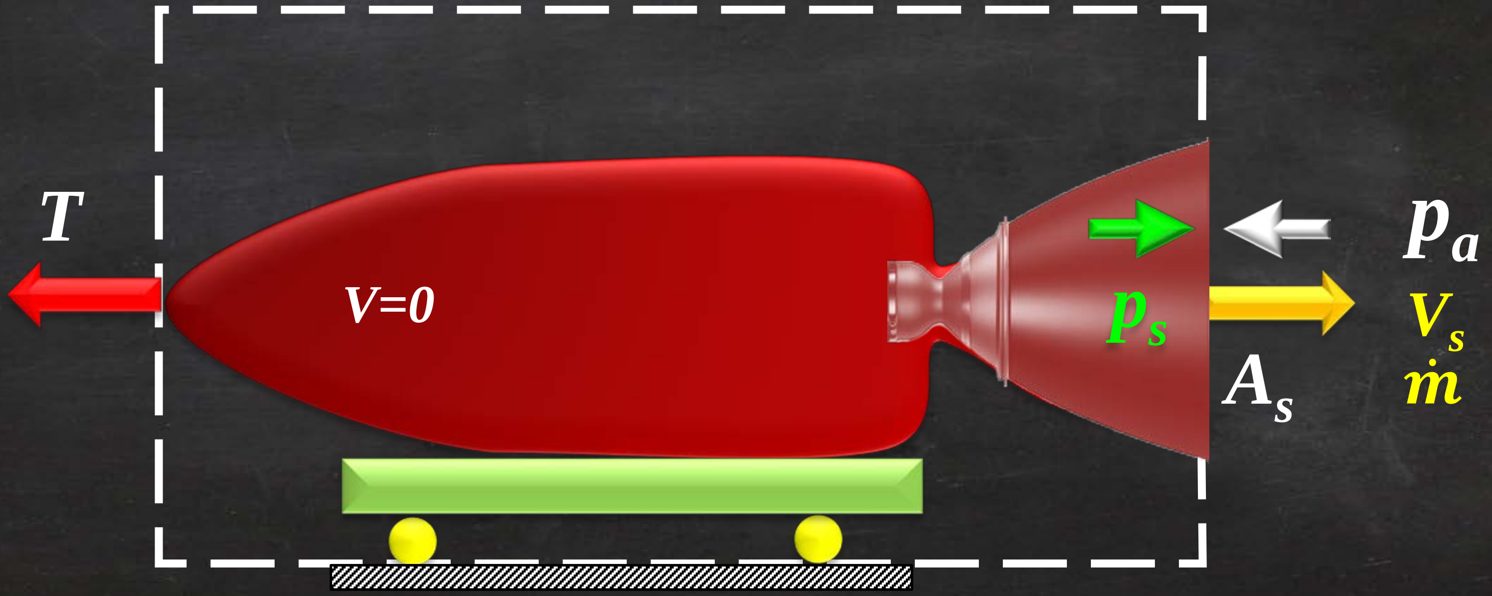
$$Ma_2 = \sqrt{5\left(\frac{T_{02}}{T_2} - 1\right)} = 0.83$$

$$p_{02} = p_2(1 + 0.2 Ma_2^2)^{3.5} = 212kPa$$

$p_{02} < p_{01}$: l'écoulement n'est pas isentropique entre 1 et 2

Écoulement 1D, stationnaire, pesanteur négligeable, fluide non visqueux

$$T = \dot{m}V_s + (p_s - p_a)A_s$$



Chapitre 9: Écoulements compressibles

Vitesse-masse volumique

Énergie (1D, stationnaire, pesanteur négligeable, fluide non visqueux)

$$\hbar + V^2/2 = cnste \quad \Rightarrow \quad dh + VdV = 0$$

Relation Tds

$$Tds = dh - vdp \quad \xRightarrow[ds=0]{} \quad dh = vdp = dp/\rho$$

$$\boxed{VdV + \frac{dp}{\rho} = 0}$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dp = a^2 d\rho}$$

$\Rightarrow$

Remarque: La relation $\mathrm{VdV} + dp/\rho$ peut aussi être déduite à partir de l’équation de la quantité de mouvement : écoulement 1D, stationnaire, pesanteur négligeable, fluide non visqueux

Vitesse-masse volumique

$$dp = a^2 d\rho$$

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0$$

$$(V^2/a^2)dV/V = -d\rho/\rho$$

$$\boxed{Ma^2 dV/V = -d\rho/\rho}$$

Remarque: Ce résultat est issu de la combinaison de l'équation de conservation de l'énergie (ou quantité de mouvement) avec celle pour la vitesse du son

Vitesse-masse volumique

$$\boxed{Ma^2 \boldsymbol{dV/V} = -\boldsymbol{d\rho/\rho}}$$

Dans le contexte courant, le but c'est l'augmentation de la vitesse d'un écoulement (génération de poussée). Cette équation indique que **si la vitesse V augmente, la masse volumique ρ diminue**

Deux cas peuvent être analysés:

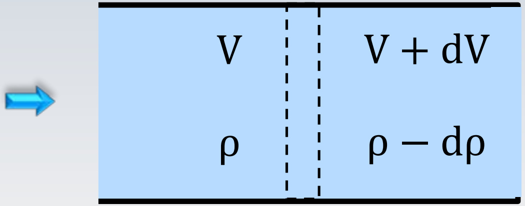
- écoulement **subsonique** $(\boldsymbol{Ma < 1})$
- écoulement **supersonique** $(\boldsymbol{Ma > 1})$

Remarque: Le nombre de Mach est une fonction du rapport entre la dilatation de la masse volumique et la dilatation de la vitesse. Il est lié donc à l'élasticité de l'écoulement

Régime subsonique Ma<1

$$\boxed{Ma^2 dV/V = -d\rho/\rho}$$

Cette équation indique qu'en **régime subsonique** $(Ma < 1)$ **la masse volumique** ρ **diminue moins rapidement que la vitesse** V **augmente**$(|d\rho/\rho| < |dV/V|)$



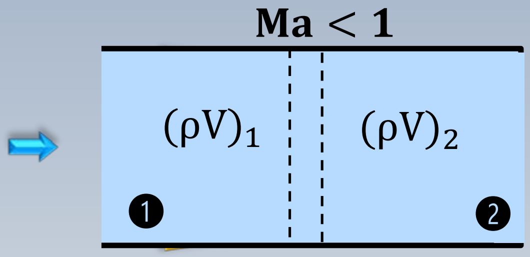
$dV/V +$

$d\rho/\rho -$

$\mathbf{Ma < 1}$

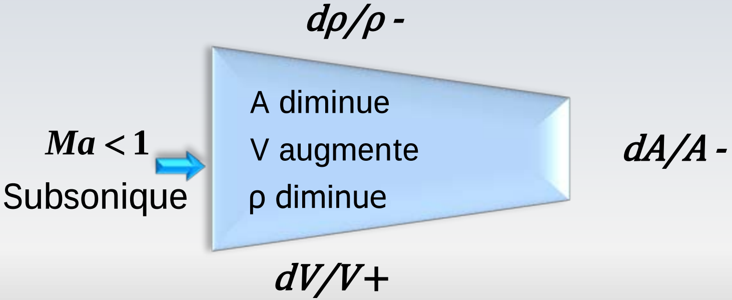
$|d\rho/\rho| < |dV/V|$

Régime subsonique Ma<1



$$(\boldsymbol{\rho V})_2 > (\boldsymbol{\rho V})_1$$

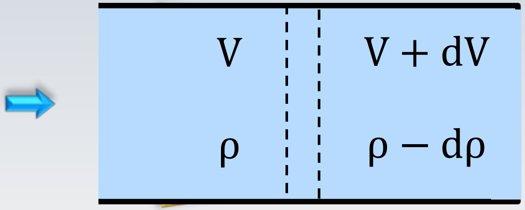
En régime **subsonique,** le produit ρV **augmente** dans la direction de l'écoulement**.** La conservation de la masse $\dot{m} = \rho V A = cnste$ indique alors que l'aire A **doit diminuer**$(A_2 < A_1)$



Régime supersonique Ma>1

$$\boxed{Ma^2 dV/V = -d\rho/\rho}$$

Cette équation indique qu’en **régime supersonique** ($\boldsymbol{Ma > 1}$) **la diminution** de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ est **plus forte** que **l’augmentation** de la vitesse $\boldsymbol{V}$ ($|\boldsymbol{d\rho/\rho}| > |\boldsymbol{dV/V}|$)



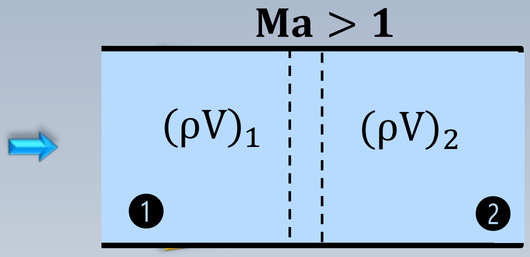
dV/V +

$d\rho/\rho$ −

Ma > 1

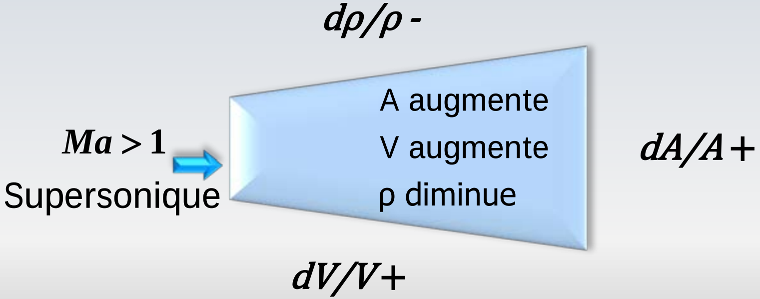
$|\boldsymbol{d\rho/\rho}| > |\boldsymbol{dV/V}|$

Régime supersonique Ma>1



$$(\rho V)_2 < (\rho V)_1$$

En régime **supersonique** le produit ρV **diminue** dans la direction de l'écoulement**.** La conservation de la masse $\dot{m} = \rho V A = cnste$ indique alors que l'aire A **doit augmenter** $(A_2 > A_1)$



L'aire dans la formule

Pour compléter l'analyse de l'effet de la variation de la section d'une conduite, il est d'usage de combiner l'équation de conservation de la masse, $\dot{m} = \rho V A = cnste.$, avec l'équation précédente (quantité de mouvement (énergie)). Notamment:

$$\boldsymbol{d(\rho V A) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad \longrightarrow$$

L'aire dans la formule

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0}$$

$$\boxed{-Ma^2 dV/V = d\rho/\rho}$$

$$-Ma^2\frac{dV}{V} + \frac{dV}{V} + \frac{\mathrm{dA}}{A} = 0$$

$$\frac{\mathrm{dA}}{A} = \frac{dV}{V}(Ma^2 - 1)$$

L'aire dans la formule

$$V\,dV + \frac{dp}{\rho} = 0$$

$$\frac{\mathrm{dA}}{A} = (Ma^2 - 1)\frac{dV}{V} = -(Ma^2 - 1)\frac{dp}{\rho V^2}$$

Ce résultat révèle **immédiatement**, selon que l'écoulement soit subsonique ou supersonique, **la forme à donner à la conduite pour effectuer une compression ou une détente**

Relation section-vitesse IV

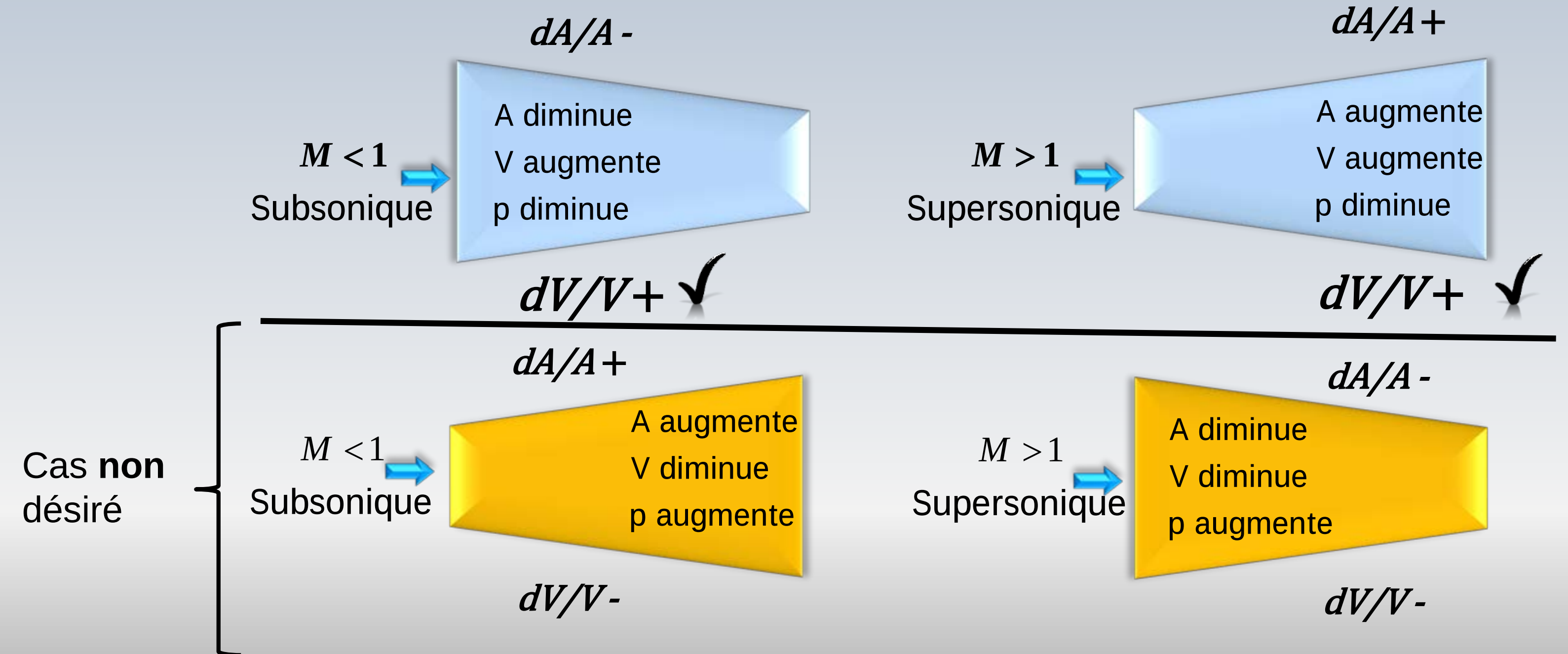
$$\frac{\mathrm{dA}}{A} = (Ma^2 - 1)\frac{dV}{V} = -(Ma^2 - 1)\frac{dp}{\rho V^2}$$

Pour **une tuyère**, conçue pour **accélérer** un fluide (une détente), elle doit être:

- **convergente** $(\boldsymbol{dA < 0 \rightarrow dp < 0})$, si l'écoulement est **subsonique** $(\boldsymbol{Ma < 1})$
- **divergente** $(\boldsymbol{dA > 0 \rightarrow dp < 0})$, si l'écoulement est **supersonique** $(\boldsymbol{Ma > 1})$

Résumé

$$\frac{\mathbf{dA}}{A} = \left(Ma^2 - 1\right)\frac{dV}{V}$$



Singularité mathématique

On note que l'équation précédente donne une accélération infinie au point sonique ($\boldsymbol{Ma} = \mathbf{1}$). Mathématiquement, il s'agit d'une singularité!

$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A}\frac{1}{Ma^2 - 1}$$

La seule solution est $\boldsymbol{dA} = \mathbf{0}$ à $\boldsymbol{Ma} = \mathbf{1}$. C'est-à dire pour un minimum ou un maximum de $\boldsymbol{A}$.

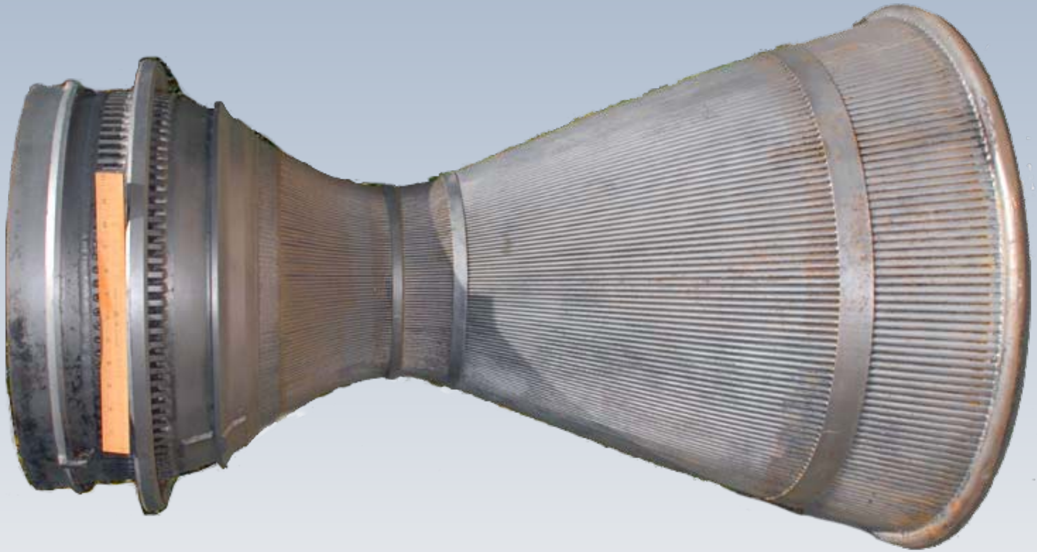
Conclusion: le col

Dans la combinaison d'un **convergent suivi d'un divergent, à section minimale:**

- le **convergent** entraîne l'augmentation du nombre de Mach lors d'un écoulement **subsonique**
- le **divergent** fait augmenter le nombre de Mach, s'il s'agit d'un écoulement **supersonique**
- il peut donc y avoir **un écoulement sonique pour cette combinaison à section minimale**

Dans un divergent suivi d'un convergent (combinaison à section maximale) un écoulement sonique **ne peut pas avoir lieu**

Tuyère convergente-divergente



Pour rendre **un écoulement supersonique**, cela ne peut se faire qu'avec **une tuyère convergente-divergente**

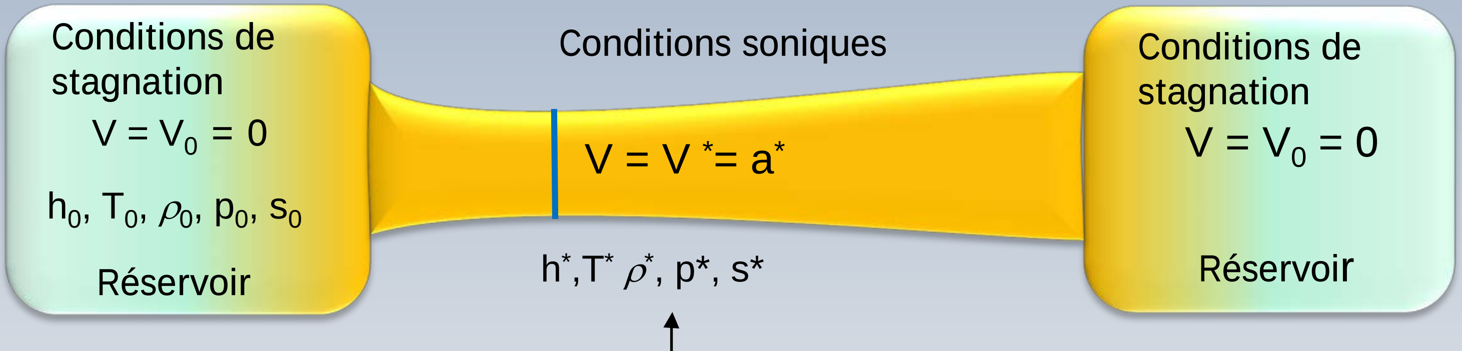
En aval du col

Un col sonique $(\boldsymbol{Ma} = \mathbf{1})$, ne garantie cependant pas que l'écoulement après le col soit toujours supersonique

En effet, l'écoulement peut être soit subsonique, soit supersonique en fonction de la valeur de la pression en aval du divergent

Ces cas seront expliquées un peu plus tard dans cette section

Résumé



Grandeurs de stagnation ou d'arrêt

Une propriété ou grandeur de stagnation est définie en un point de l'écoulement où la vitesse est nulle

Notation $\mathbf{h_0, T_0, \rho_0, p_0, s_0}$

Caractéristique $V = \mathbf{V_0 = 0}$

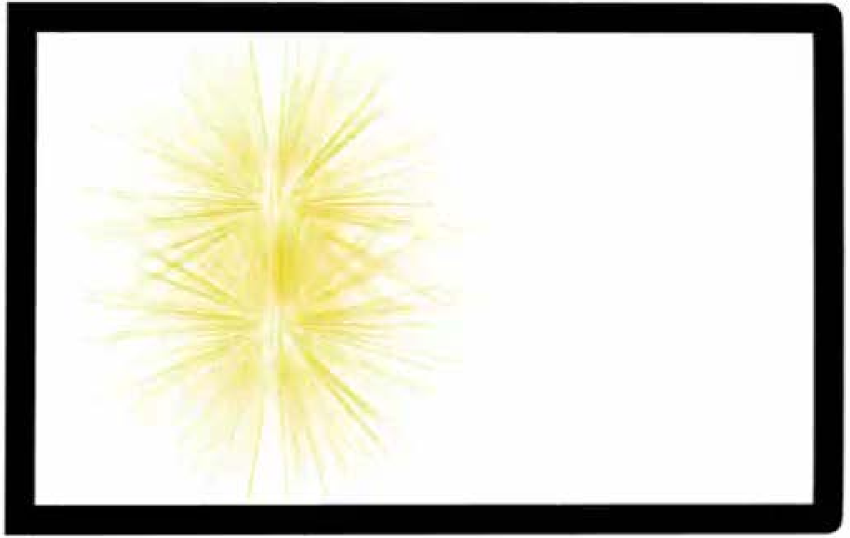
Grandeurs soniques (critiques)

Une propriété ou grandeur critique (sonique) est définie en un point où la vitesse est égale à la vitesse locale du son

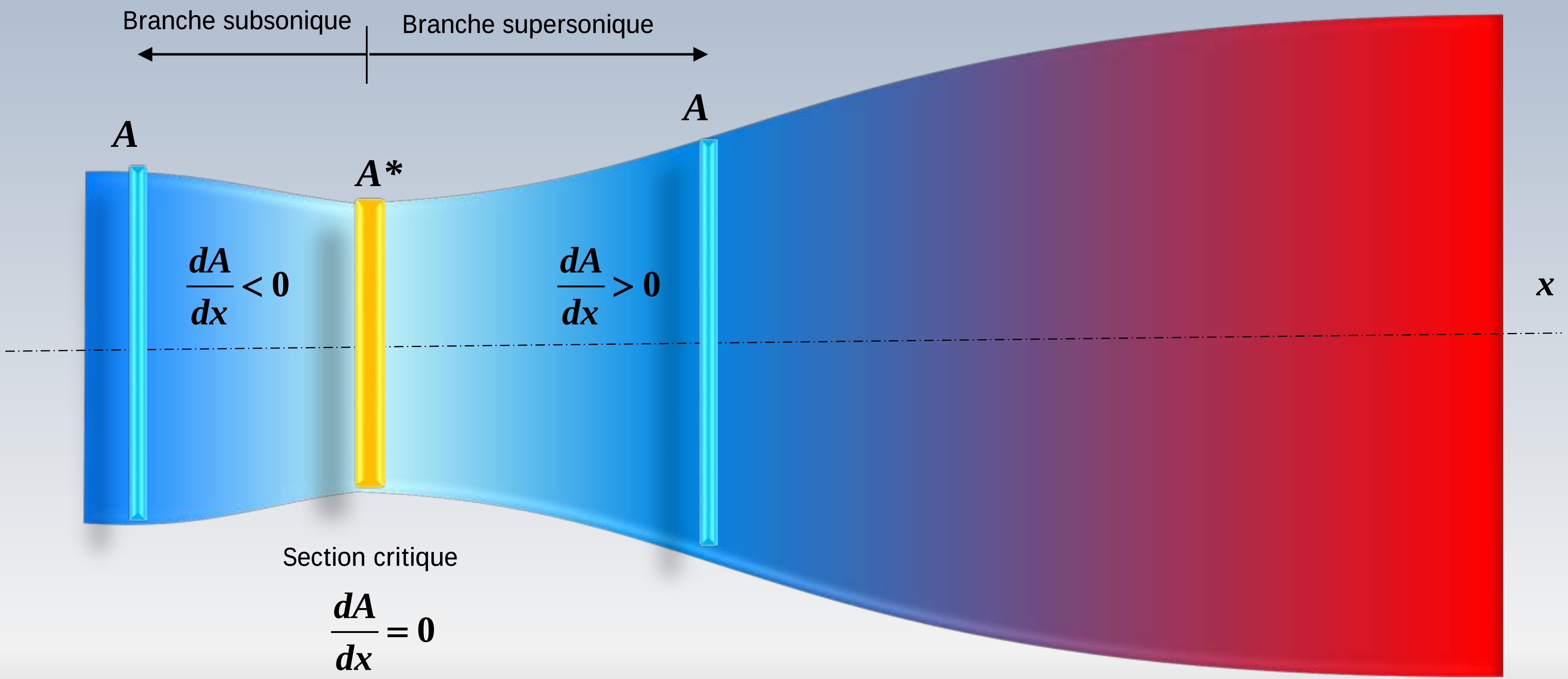
Notation $\mathbf{h^*, T^*, \rho^*, p^*, s^*}$

Caractéristique $V = \mathbf{V^* = a^*}$

9 minutes



Sections et branches



Section et nombre de Mach

Il est pratique de **relier le nombre de Mach à une section donnée A, à l'aire de cette même section référée à l'aire critique du col A^*.** Ceci peut s'obtenir en considérant la conservation du débit massique le long de la conduite

Au col, $M = 1$ (conditions soniques) Reste de la tuyère, $M \neq 1$

$$\rho^*, A^*, V^* \qquad \dot{m} = \rho V A = \rho^* V^* A^* \qquad \rho, V, A$$

$$\boxed{\frac{A}{A^*}} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{V^*}{V} = \frac{\rho^*}{\rho}\frac{a^*}{V} \boxed{= \frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{a^*}{V}}$$

Section et nombre de Mach

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{a^*}{V}$$

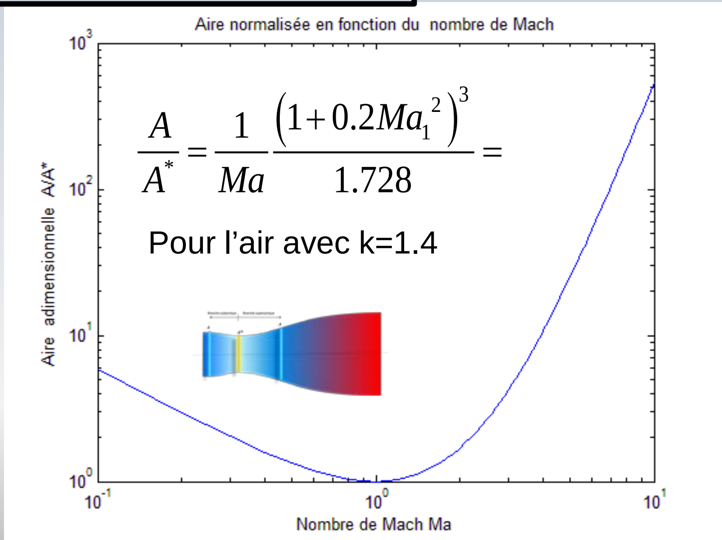
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/k-1}$$

$$\frac{a^*}{V} = \frac{a}{V}\frac{a^*}{a_0}\frac{a_0}{a}$$

$$\boldsymbol{\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma}\left(\frac{1 + \frac{k-1}{2}Ma^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}$$

Aire adimensionnelle référée à l'aire critique



Vitesse et nombre de Mach

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/k-1}$$

Au col, $M = 1$ (conditions soniques)

ρ^*, V^*, A^*

Reste de la tuyère, $M \neq 1$

ρ, V, A

$$\frac{V}{V^*} = \frac{A^*}{A}\frac{\rho^*}{\rho}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left(\frac{p^*}{p}\right)^{1/k} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/k-1}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/k}$$

$$\frac{V}{V^*} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\left(1 + \frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{1}{k-1}} Ma \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2}Ma^2}{\frac{k+1}{2}}\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

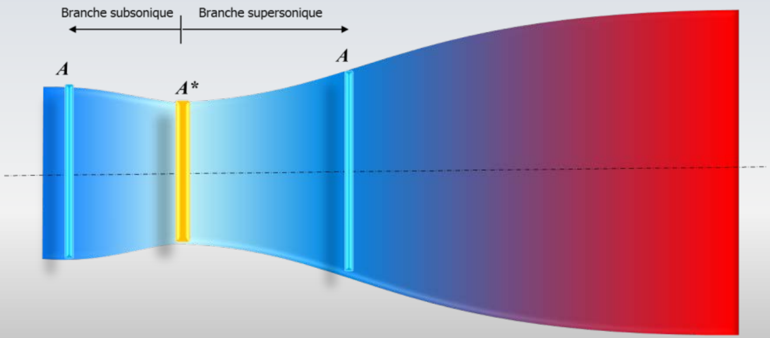
Vitesse adimensionnelle référée à la vitesse critique

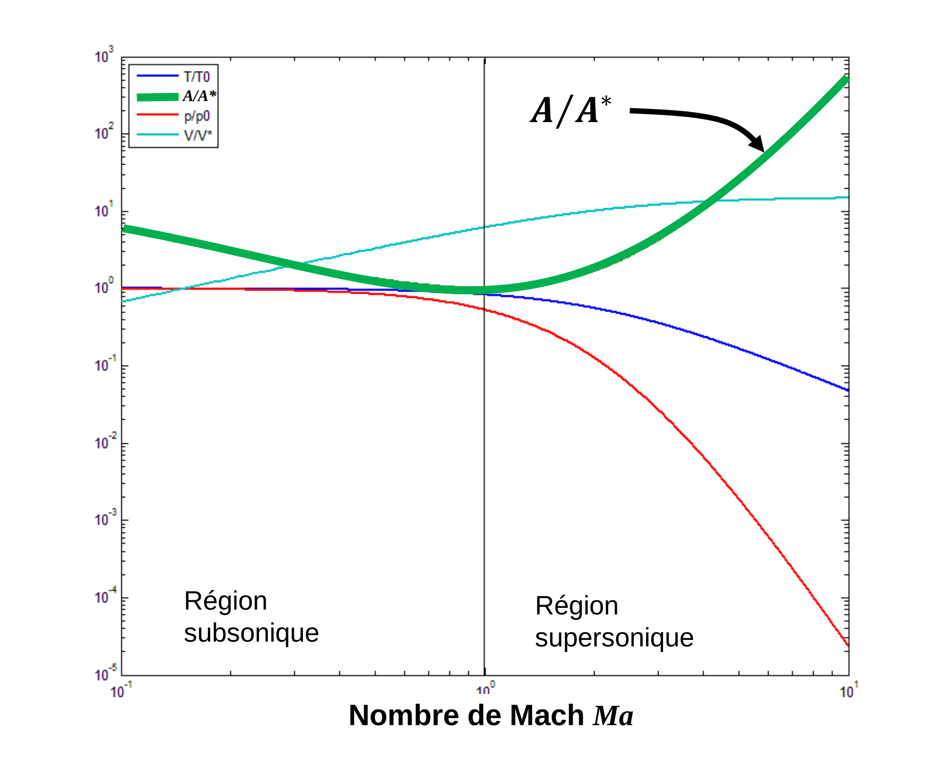
Vitesse et nombre de Mach

Toutes les variables sans dimension peuvent être exprimées en fonction d'une seule: le nombre de Mach $\boldsymbol{Ma}$

Le rapport A/A^* est minimum si $\boldsymbol{Ma} = \mathbf{1}$

Un même rapport A/A^* peut correspondre à un écoulement subsonique et à un écoulement supersonique.





Tables: écoulements isentropiques

Subsonique

M	A/A*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	V/V*
0	Inf	1.0000	1.0000	1.0000	0
0.0500	11.5914	0.9983	0.9988	0.9995	0.0548
0.1000	5.8218	0.9930	0.9950	0.9980	0.1094
0.1500	3.9103	0.9844	0.9888	0.9955	0.1639
0.2000	2.9635	0.9725	0.9803	0.9921	0.2182
0.2500	2.4027	0.9575	0.9694	0.9877	0.2722
0.3000	2.0351	0.9395	0.9564	0.9823	0.3257
0.3500	1.7780	0.9188	0.9413	0.9761	0.3788
0.4000	1.5901	0.8956	0.9243	0.9690	0.4313
0.4500	1.4487	0.8703	0.9055	0.9611	0.4833
0.5000	1.3398	0.8430	0.8852	0.9524	0.5345
0.5500	1.2549	0.8142	0.8634	0.9430	0.5851
0.6000	1.1882	0.7840	0.8405	0.9328	0.6348
0.6500	1.1356	0.7528	0.8164	0.9221	0.6837
0.7000	1.0944	0.7209	0.7916	0.9107	0.7318
0.7500	1.0624	0.6886	0.7660	0.8989	0.7789
0.8000	1.0382	0.6560	0.7400	0.8865	0.8251
0.8500	1.0207	0.6235	0.7136	0.8737	0.8704
0.9000	1.0089	0.5913	0.6870	0.8606	0.9146
0.9500	1.0021	0.5595	0.6604	0.8471	0.9578

Supersonique

M	A/A*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	V/V*
1.0000	1.0000	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
1.0500	1.0020	0.4979	0.6077	0.8193	1.0411
1.1000	1.0079	0.4684	0.5817	0.8052	1.0812
1.1500	1.0175	0.4398	0.5562	0.7908	1.1203
1.2000	1.0304	0.4124	0.5311	0.7764	1.1583
1.2500	1.0468	0.3861	0.5067	0.7619	1.1952
1.3000	1.0663	0.3609	0.4829	0.7474	1.2311
1.3500	1.0890	0.3370	0.4598	0.7329	1.2660
1.4000	1.1149	0.3142	0.4374	0.7184	1.2999
1.4500	1.1440	0.2927	0.4158	0.7040	1.3327
1.5000	1.1762	0.2724	0.3950	0.6897	1.3646
1.5500	1.2116	0.2533	0.3750	0.6754	1.3955
1.6000	1.2502	0.2353	0.3557	0.6614	1.4254
1.6500	1.2922	0.2184	0.3373	0.6475	1.4544
1.7000	1.3376	0.2026	0.3197	0.6337	1.4825
1.7500	1.3865	0.1878	0.3029	0.6202	1.5097
1.8000	1.4390	0.1740	0.2868	0.6068	1.5360
1.8500	1.4952	0.1612	0.2715	0.5936	1.5614
1.9000	1.5553	0.1492	0.2570	0.5807	1.5861
1.9500	1.6193	0.1381	0.2432	0.5680	1.6099
2.0000	1.6875	0.1278	0.2300	0.5556	1.6330

Débit massique local= f(Mach,k)

Comme pour la vitesse, il est pratique d'exprimer d'autres quantités en fonction du nombre de Mach, en particulier **le débit massique $\dot{m}$**

$$\dot{m} = \rho V A = \boxed{\frac{p}{RT}} V A \quad \Rightarrow \quad \dot{m} = \frac{pk}{kRT} V A = \frac{p}{kRT} k \underbrace{\boxed{aMa}}_{V} A$$

$$\dot{m} = \frac{p}{kRT} k \underbrace{\sqrt{kRT}}_{a} MaA = \frac{p}{\sqrt{kRT}} kMaA$$

$$\boxed{\dot{m} = \frac{p}{\sqrt{kRT}} kMaA} \Rightarrow$$

Débit massique local= f(Mach,k)

$$\dot{m} = \frac{p}{\sqrt{kRT}} kMa \quad \Leftarrow \quad 1 + \frac{k-1}{2} Ma^2 = \frac{T_0}{T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{k-1/k}$$

$$\boxed{\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0 A} = Ma\sqrt{k}\left[1 + \frac{k-1}{2} Ma^2\right]^{-\frac{k+1}{2(k-1)}}}$$

- Le débit massique (adimensionnel) $\dot{m}\sqrt{RT_0}/p_0 A$ à une section donnée est fonction du nombre Mach en ce point. Il est référé aux **conditions de stagnation (ou d'arrêt) T_0, p_0 qui ne varient pas le long d'un écoulement isentropique**
- Si l'écoulement est **sonique au col** d'une tuyère, le **débit** massique est alors **maximal**: on dit alors que **l'écoulement est bloqué (choked)**

Blocage sonique (débit max)

La formule générale du calcul du débit, se simplifie lorsque **l'écoulement est bloqué** ($\boldsymbol{Ma = 1}$ et $\boldsymbol{A = A^*}$ dans la formule précédente):

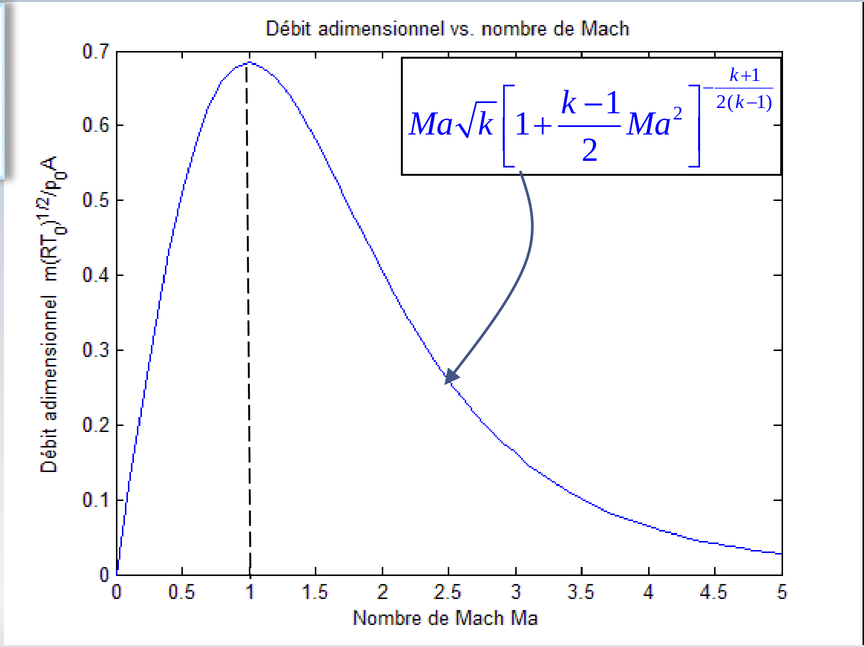
$$\boldsymbol{\dot{m}_{\max} = \rho^* A^* V^* = p_0 A^* \sqrt{\frac{k}{RT_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}}}$$

On note alors que **le débit massique** peut être facilement déterminé en fonction des **conditions de stagnation** ou d'arrêt (indice 0) et de **l'aire critique** $\boldsymbol{A^*}$

Débit massique limite (bloqué)

Pour **l'air (k=1.4)**, cette formule devient:

$$\dot{m}_{\max} = 0.6847\ \rho_0\sqrt{RT_0}A^* = \frac{0.6847p_0}{\sqrt{RT_0}}A^*$$



Débit massique local f(p/p_0)

Le débit massique (adimensionnel) $\dot{m}\sqrt{RT_0}/p_0A$ à une section donnée peut être aussi exprimé en fonction du rapport entre la pression p à cette section et la pression d'arrêt p_0. Notamment:

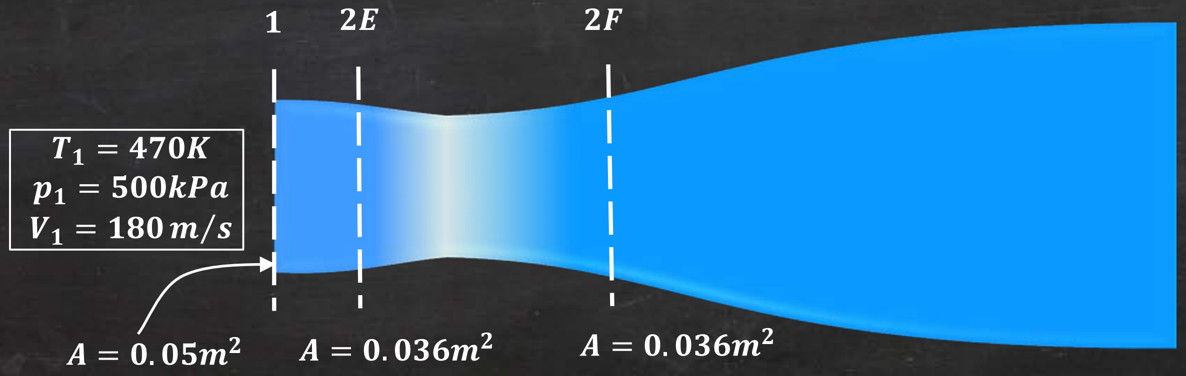
$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{p_0A} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \left\{\frac{2k}{\mathrm{k}-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{(k-1)}{k}}\right]\right\}^{1/2}$$

Exemple

Exemple 9.4

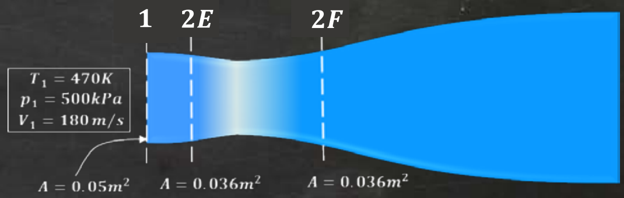
De l'air s'écoule isentropiquement dans une conduite. À la section 1 on a $p_1 = 500\ kPa, T_1 = 470K,\ V_1 = 180\ m/s\ \ A_1 = 0.05m^2$.

a)Estimez $p_{01}, T_{01}, Ma_1, A^*, \dot{m}$, b) Au point 2E(subsonique) $A = 0.036m^2$, on doit trouver p_2, Ma_2, c) Au point 2F(supersonique) $A = 0.036m^2$, on doit trouver p_2, Ma_2



Exemple 9.4 (suite I)

$p_1 = 500\ kPa, T_1 = 470K,$
$V_1 = 180\ m/s\ \ A_1 = 0.05m^2$



Solution $\quad p_{01}, T_{01}, Ma_1, A^*, \dot{m}$?

Les propriétés de l'air $\quad R = 287\ m^2/(s^2 K)\ ,\ k = 1.4, c_p = 1005\,m^2/(s^2 K)$

a) Calcul de T_{01}:

$$T_{01} = T_1 + \frac{V_1^2}{2c_p} = 486K$$

$$a_1 = \sqrt{kRT_1} = 435\,m/s$$

$$Ma_1 = \frac{V_1}{a_1} = 0.414$$

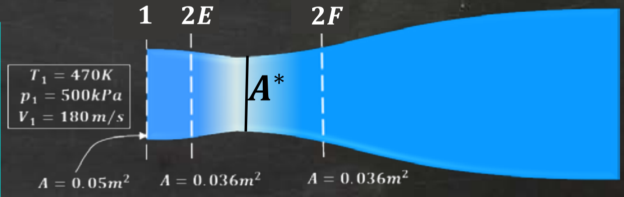
Formule pour l'air

$$p_{01} = p_1(1 + 0.2Ma_1^2)^{3.5} = 563kPa$$

$$\rho_1 = \frac{RT_1}{p_1} = 3.71kg/m^3$$

Exemple 9.4 (suite II)

$Ma_1 = 0.414$, $\rho_1 = 3.71 kg/m^3$
$p_1 = 500\ kPa, T_1 = 470K$,
$V_1 = 180\ m/s$ $A_1 = 0.05m^2$



Solution $A^*, \dot{m}$?

$p_{01} = 563kPa$

$T_{01} = 486K$

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{Ma_1}\frac{(1+0.2Ma_1^2)^3}{1.728} = 1.547$$

$$A^* = \frac{A_1}{1.547} = 0.0323m^2$$

Calcul du débit massique au point 1: méthode 1 $\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = 33.4kg/s$

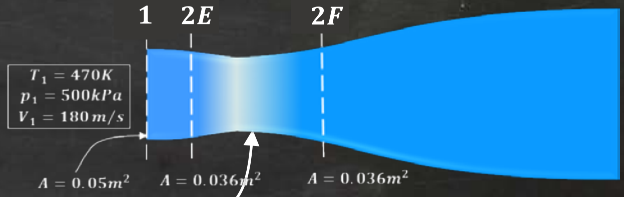
Calcul du débit massique au point *: méthode 2 $\dot{m} = 0.6847\dfrac{p_{01}A^*}{\sqrt{RT_{01}}} = 33.4kg/s$

Calcul du débit massique au point 1: méthode 3

$$\dot{m} = A_1\frac{p_{01}}{\sqrt{RT_{01}}}\sqrt{\frac{2k}{k-1}\left(\frac{p_1}{p_{01}}\right)^{2/k}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} = 33.4kg/s$$

Exemple 9.4 (suite III)

p_2, Ma_2 ?



$A^* = 0.0323m^2$

$A_2 = 0.036m^2$
$p_{01} = 563kPa$

Solution

Pour déterminer le nombre de Mach au point 2, on doit résoudre une **équation non linéaire**. Pour ce faire, on peut appliquer une méthode numérique ou bien utiliser des tables

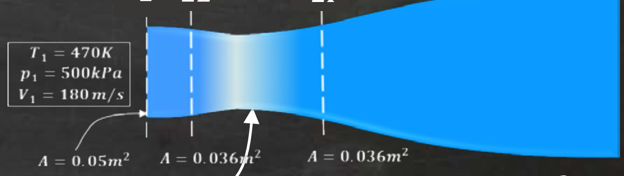
?

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{0.036}{0.0323} = \mathbf{1.115} = \frac{1}{Ma_2}\,\frac{\left(1 + 0.2Ma_2^2\right)^3}{1.728}$$

?

Exemple 9.4 (suite III)

p_2, Ma_2 ?



$A^* = 0.0323m^2$

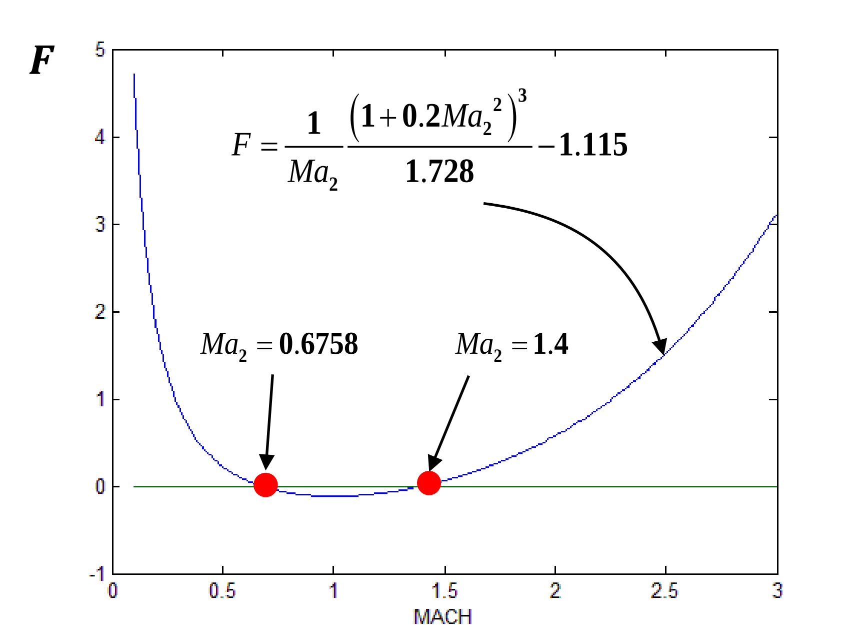
$A_2 = 0.036m^2$

Solution (2E) En régime subsonique (équations)

$$\frac{A_2}{A^*} = 1.115 = \frac{1}{Ma_2}\frac{\left(1+0.2Ma_2^2\right)^3}{1.728}$$

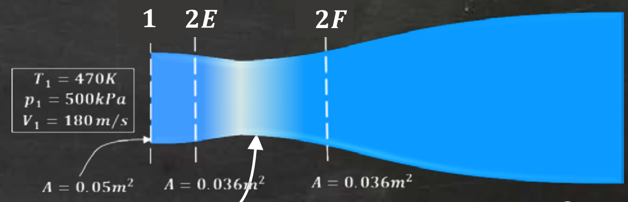
$$Ma_2 = 0.6758$$

$$p_2 = \frac{p_{01}}{\left(1+0.2Ma_2^2\right)^{3.5}} = 415kPa$$



Exemple 9.4 (suite IV)

$p_{01} = 563kPa$



$A^* = 0.0323m^2$ $\qquad$ $A_2 = 0.036m^2$

Solution au point 2E(subsonique): avec la table

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{0.036}{0.0323} = 1.115$$

$$Ma_2 = 0.65 + \frac{0.7-0.65}{1.0944-1.1356}(1.0944 - 1.115) =$$

$$= 0.675$$

$$p_2 = \frac{p_{01}}{\left(1 + 0.2Ma_2^2\right)^{3.5}} = 415kPa$$

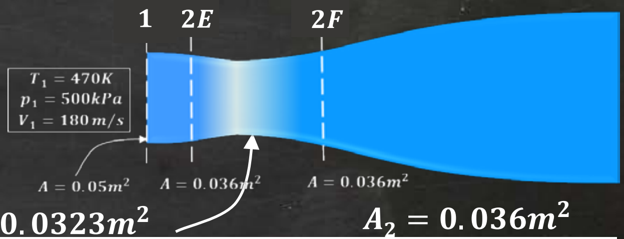
$A/A^* = 1.115$

Subsonique

M	A/A*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	V/V*
0	Inf	1.0000	1.0000	1.0000	0
0.0500	11.5914	0.9983	0.9988	0.9995	0.0548
0.1000	5.8218	0.9930	0.9950	0.9980	0.1094
0.1500	3.9103	0.9844	0.9888	0.9955	0.1639
0.2000	2.9635	0.9725	0.9803	0.9921	0.2182
0.2500	2.4027	0.9575	0.9694	0.9877	0.2722
0.3000	2.0351	0.9395	0.9564	0.9823	0.3257
0.3500	1.7780	0.9188	0.9413	0.9761	0.3788
0.4000	1.5901	0.8956	0.9243	0.9690	0.4313
0.4500	1.4487	0.8703	0.9055	0.9611	0.4833
0.5000	1.3398	0.8430	0.8852	0.9524	0.5345
0.5500	1.2549	0.8142	0.8634	0.9430	0.5851
0.6000	1.1882	0.7840	0.8405	0.9328	0.6348
0.6500	1.1356	0.7528	0.8164	0.9221	0.6837
0.7000	1.0944	0.7209	0.7916	0.9107	0.7318
0.7500	1.0624	0.6886	0.7660	0.8989	0.7789
0.8000	1.0382	0.6560	0.7400	0.8865	0.8251
0.8500	1.0207	0.6235	0.7136	0.8737	0.8704
0.9000	1.0089	0.5913	0.6870	0.8606	0.9146
0.9500	1.0021	0.5595	0.6604	0.8471	0.9578

Exemple 9.4 (suite V)

$p_{01} = 563kPa$



Solution au point 2F (supersonique): avec la table

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{0.036}{0.0323} = 1.115$$

$$Ma_2 = 1.4$$

$$A/A^* = 1.115$$

$$p_2 = \frac{p_{01}}{(1+0.2Ma_2^2)^{3.5}} = 177kPa$$

Supersonique

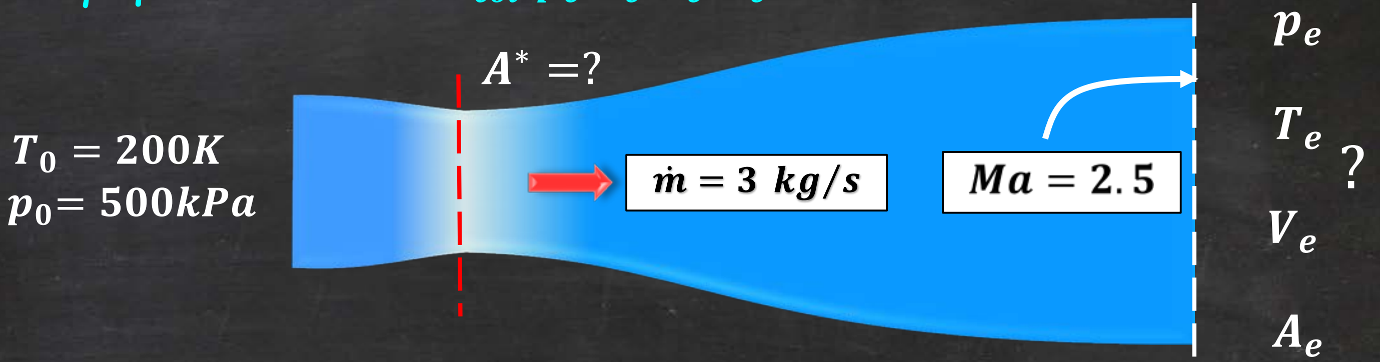
M	A/A*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	V/V*
1.0000	1.0000	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
1.0500	1.0020	0.4979	0.6077	0.8193	1.0411
1.1000	1.0079	0.4684	0.5817	0.8052	1.0812
1.1500	1.0175	0.4398	0.5562	0.7908	1.1203
1.2000	1.0304	0.4124	0.5311	0.7764	1.1583
1.2500	1.0468	0.3861	0.5067	0.7619	1.1952
1.3000	1.0663	0.3609	0.4829	0.7474	1.2311
1.3500	1.0890	0.3370	0.4598	0.7329	1.2660
1.4000	1.1149	0.3142	0.4374	0.7184	1.2999
1.4500	1.1440	0.2927	0.4158	0.7040	1.3327
1.5000	1.1762	0.2724	0.3950	0.6897	1.3646
1.5500	1.2116	0.2533	0.3750	0.6754	1.3955
1.6000	1.2502	0.2353	0.3557	0.6614	1.4254
1.6500	1.2922	0.2184	0.3373	0.6475	1.4544
1.7000	1.3376	0.2026	0.3197	0.6337	1.4825
1.7500	1.3865	0.1878	0.3029	0.6202	1.5097
1.8000	1.4390	0.1740	0.2868	0.6068	1.5360
1.8500	1.4952	0.1612	0.2715	0.5936	1.5614
1.9000	1.5553	0.1492	0.2570	0.5807	1.5861
1.9500	1.6193	0.1381	0.2432	0.5680	1.6099
2.0000	1.6875	0.1278	0.2300	0.5556	1.6330

Exemple 9.5

$R = 287\ m^2/(s^2 K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005\ m^2/(s^2 K)$

On désire accélérer de l'air **(k=1.4)** du repos à $p_0 = 200\ kPa$, $T_0 = 500K$, au travers un col, jusqu'à $Ma = 2.5$ à la sortie(e), Le débit massique est $\dot{m} = 3 kg/s$. Considérez un écoulent isentropique et estimez $A_{col}, p_e, T_e, V_e, A_e$

Solution



Sortie supersonique => col sonique => $A_{col} = A^*$

$$\dot{m} = 0.6847\ \frac{p_0 A^*}{\sqrt{RT_0}} = 3\ kg/s \Rightarrow A_{col} = A^* = 0.00830 m^2$$

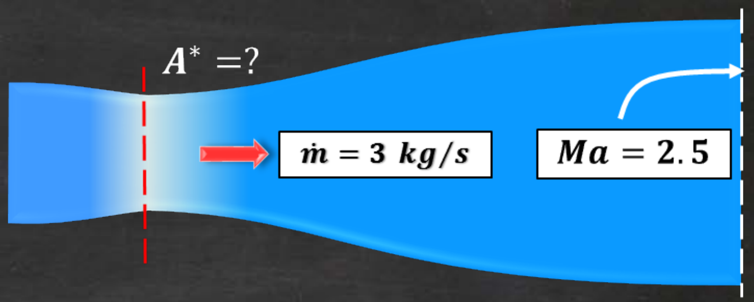
Formule pour l'air: débit max

Exemple 9.5 (suite)

$R = 287\ m^2/(s^2\,K)$, $k = 1.4$, $c_p = 1005\,m^2/(s^2K)$

$A_{col}, p_e, T_e, V_e, A_e$?

$T_0 = 200K$
$p_0 = 500kPa$



p_e
T_e ?
V_e
A_e

$$A_{col} = A^* = 0.00830m^2$$

$$p_e = \frac{p_0}{(1+0.2Ma^2)^{3.5}} = 11.7kPa \quad \checkmark$$

$Ma = 2.5$

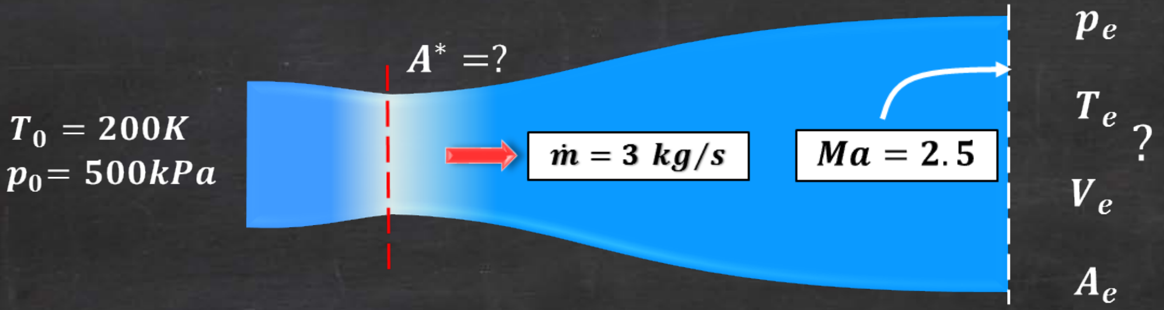
$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{Ma}\frac{\left(1+0.2Ma^2\right)^3}{1.728} = 2.64 \quad \Rightarrow \quad A_e = 2.64A^* = 0.0219m^2 \quad \checkmark$$

Exemple 9.5 (suite)

$R = 287\ m^2/(s^2 K)$, $k = 1.4, c_p = 1005\, m^2/(s^2 K)$

$p_0 = 200\ kPa,\ T_0 = 500K,\ Ma = 2.5$

T_e, V_e, A_e?



$$T_e = \frac{T_0}{1 + 0.2Ma^2} = 222K$$

$$a_e = \sqrt{kRT_e} = 299\, m/s$$

$$V_e = a_e Ma = 747\, m/s$$

La poussée

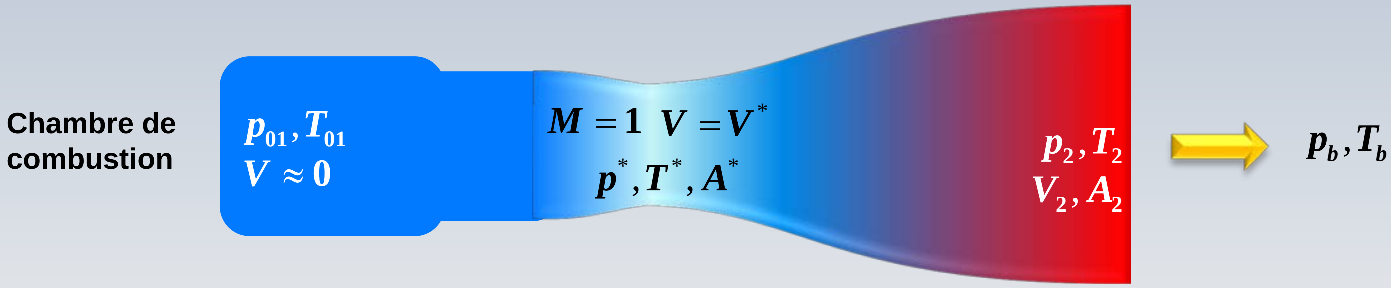
L’objectif d’une tuyère est l’accélération d’un gaz à haute enthalpie **pour générer une poussée**. Le développement de formules spécifiques pour le calcul de cette force est **en dehors du cadre de ce cours**

Quelques éléments seront cependant présentés pour mieux saisir l’enjeu entre la pression générée à la sortie par les gaz chauds, la pression atmosphérique régnant, et la poussée produite

Dans certains cas, une différence entre la pression de gaz et la pression atmosphérique peut produire un choc et/ou un décollement du fluide de la paroi. Ces deux phénomènes sont nuisibles à l’opération de la tuyère

La poussée +

La poussée produite par une tuyère peut être déterminée à partir du bilan de la quantité de mouvement (section volumes de contrôle)



$$\boxed{F = \dot{m}V_2 + A_2(p_2 - p_b)}$$

Stations
 * ≡ le col
01 ≡ la chambre de combustion
2 ≡ plan de sortie de la tuyère
b ≡ environnement à la décharge

La poussée +

La vitesse $\boldsymbol{V_2}$ au plan de sortie peut être calculée considérant la relation de température totale

$$T_{01} = T_{02} = T_2 + \frac{V_2^2}{2c_p} \Rightarrow V_2 = \sqrt{2c_p T_{01}\left(1 - \frac{T_2}{T_{01}}\right)}$$

Pour un gaz parfait, **si l'écoulement est isentropique** entre les stations **01** et **2**, on peut écrire

$$V_2 = \sqrt{2\left(\frac{kR}{k-1}\right)T_{01}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}$$

La poussée

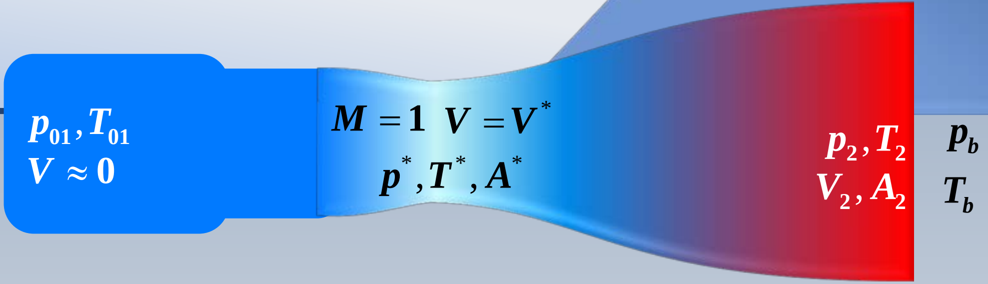
En supposant que la tuyère opère à débit maximal (vitesse sonique au col), on a:

$$\dot{m} = p_{01} A^* \sqrt{\frac{k}{RT_{01}} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}}$$

de sorte que $F = \dot{m} V_2 + A_2(p_2 - p_b)$ devient:

$$F = \underbrace{\frac{A^* p_{01}}{\sqrt{T_{01}}} \sqrt{\frac{k}{R} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}}}_{\dot{\boldsymbol{m}}} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{2k}{k-1}\right) RT_{01} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)}}_{\boldsymbol{V_2}} + A_{\ 2}(p_2 - p_b)$$

La poussée



ou encore

$$C_F = \frac{F}{A^* p_{01}} = k\sqrt{\left(\frac{2}{k-1}\right)\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{(k-1)}}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right)} + (p_2 - p_b)\frac{A_2}{p_{01}A^*}$$

- La grandeur de la poussée idéale dépends de la pression dans la chambre de combustion $\boldsymbol{p_{01}}$ et de l'aire du col $\boldsymbol{A^*}$.
- **Au point de design** $\boldsymbol{p_2 = p_b}$ et ce correspond à **un maximum** pour la poussée.

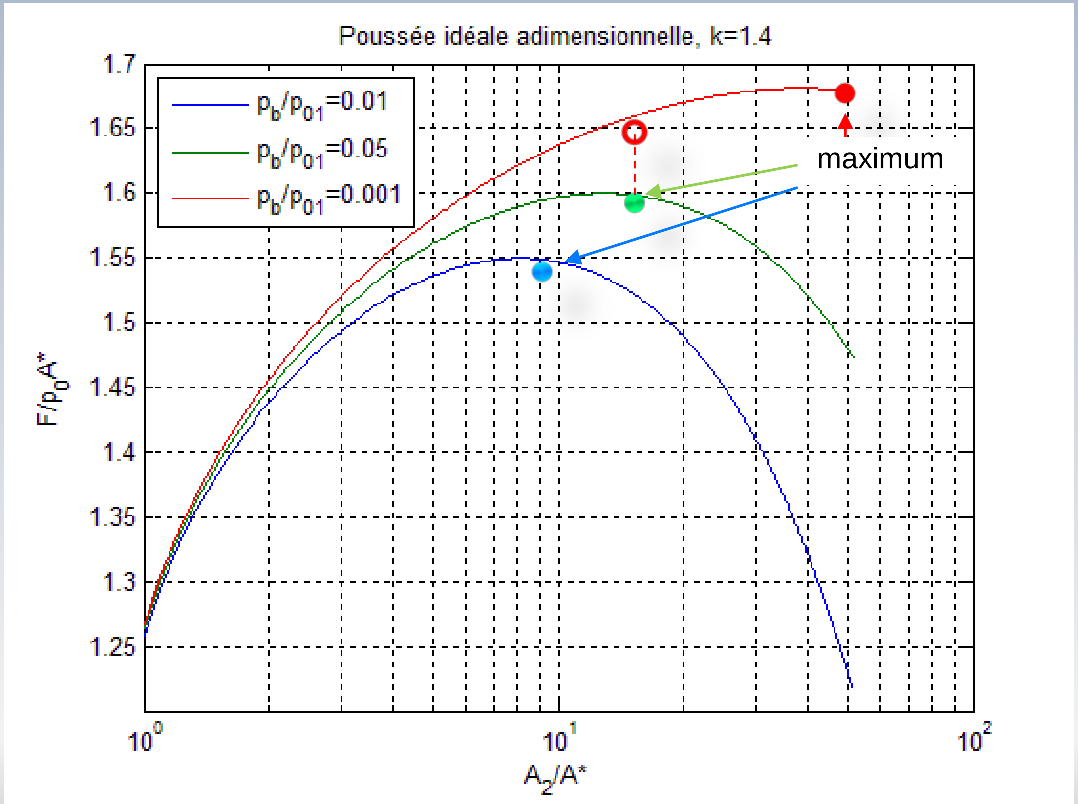
La poussée

On note que le rapport d'aire peut être lié au rapport de pression par l'équation de continuité

$$\frac{A_2}{A^*}=\frac{\rho^* v^*}{\rho_2 v_2}=\sqrt{\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}\frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{1}{k}}\sqrt{1-\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}}}$$

On peut donc analyser la poussée adimensionnelle en fonction de A_2/A^* (ou p_2/p_{01})

La poussée



On constate que pour chaque rapport (p_b/p_{01}), il y a *une valeur optimale de* (A_2/A^*) *qui maximise la poussée.*

Pour une géométrie donnée, le rapport (A_2/A^*) est fixe. Ce chiffre est accompagné d'une pression particulière $p_2 = p_b$ afin d'opérer au point de design.

Si p_b diminue, on constate que la poussée augmente, mais aussi que la tuyère ne fonctionne plus sur le point optimal.

À venir

Dans la seconde partie
Nous allons regarder le choc normal
et les écoulements dans les tuyères
convergentes-divergentes

Équations des gaz parfaits

$$\boxed{p = \rho R T}$$

R est le rapport entre la constante universelle $\boldsymbol{R_u}$**=8314.3 *J/(kmol K)*** et la masse moléculaire du gaz ***M*** : ***R=R $_u$/M***

Énergie interne $\hat{u}$

$$c_v = \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial T}\right)_v = \frac{d\hat{u}}{dT}$$

$$\hat{u}_2 - \hat{u}_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v \, dT$$

Gaz parfait: $\hat{u} = \hat{u}(T)$

Équations des gaz parfaits

Enthalpie *h*

$$h = \hat{u} + \frac{p}{\rho}$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = \frac{dh}{dT}$$

Gaz parfait: $h = h(T)$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p \, dT$$

Relations utiles

$$c_p - c_v = R; \quad c_p = \frac{kR}{k-1}; \quad c_v = \frac{R}{k-1}; \quad k = \frac{c_p}{c_v}$$

Équation Tds (I^er + II^ème principe)

Définition d'entropie

$$ds = \frac{\delta q}{T} \quad (\delta q = \delta q_{rev}) \Longrightarrow \quad \delta q = T d s$$

le premier principe

$$d\hat{u} = \delta \mathrm{q} - p dv$$

s'écrit donc

$$\boldsymbol{d\hat{u} = Tds - p\,d\,v}$$

Équation Tds (I^{er} + II^{ème} principe)

$$(dh = d\hat{u} + pdv + vdp)$$

$$d\hat{u} = Tds - pdv \quad \Longrightarrow \quad dh = Tds + vdp$$

donc,

$$\boxed{Tds = d\hat{u} + pdv = dh - vdp}$$

Formulation du premier principe en fonction de variables d'état uniquement!

Gaz parfait

Variation d'entropie

Pour un gaz parfait, on peut utiliser les équations $\boldsymbol{Tds}$ pour exprimer la variation d'entropie en fonction de la température, la pression et/ou le volume. En particulier:

$$dh = c_p dT \quad \Rightarrow \quad Tds = dh - vdp \quad \Leftarrow \quad v = RT/p$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$$

$$c_p = cnste$$

Gaz parfait

Entropie s

($C_p \cong$ constante et $C_v \cong$ constante)

$$s_2 - s_1 = c_p \, ln \frac{T_2}{T_1} - R \, ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\boxed{s_2 - s_1 = c_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)}$$

$c_v = cnste$

Gaz parfait

Pour établir des équations pratiques, l'hypothèse d'un **écoulement isentropique** est souvent utilisée en dynamique des gaz. Cependant, **ceci n'est pas valide au passage d'une onde de choc.** Alors, pour *un écoulement isentropique* à c_p $(c_v) \cong$ **cnste.**

$$s_2 - s_1 = c_p \, ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R\, ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \quad \Leftarrow \quad c_p = \frac{kR}{k-1}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{s=const.} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Relation isentropique pour un gaz parfait à $c_p(c_v)$ = cste.

Retour

Bernoulli?

Série

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + O(x^3)$$

$$n = \frac{k}{k-1} \qquad x = \frac{k-1}{2}Ma^2$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{nx = \frac{k}{2}Ma^2}$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}Ma^2\right)^{k/k-1}$$

$$\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{k}{2}Ma^2 + \frac{k}{8}Ma^4 + O(Ma^6)$$

Bernoulli?

$$p_0 - p = \frac{1}{2} pkMa^2 \left(1 + \frac{Ma^2}{4} + O(Ma^4) \right)$$

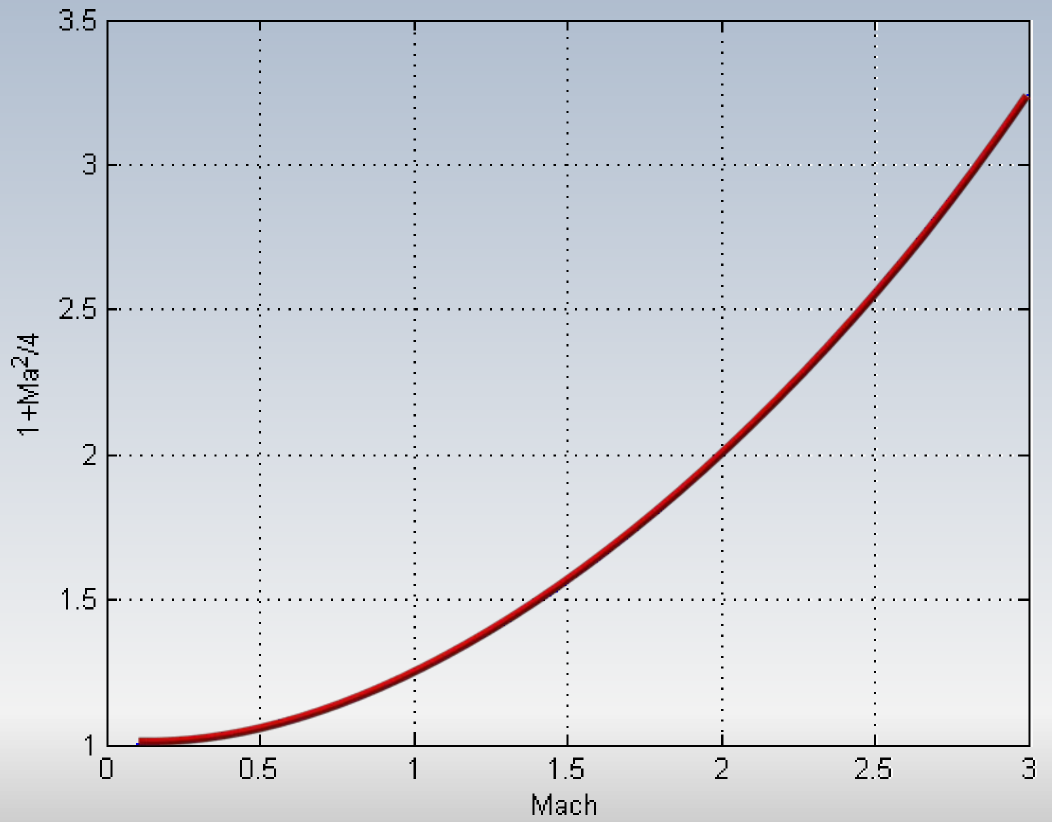
$$\frac{1}{2} pkMa^2 = \frac{1}{2} pk\frac{V^2}{\boxed{a^2}} = \frac{1}{2} \frac{pk}{\boxed{kRT}} V^2 = \frac{1}{2} \rho V^2 \longleftarrow \boxed{\rho = \frac{p}{RT}}$$

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho V^2 \left(1 + \frac{Ma^2}{4} + O(Ma^4) \right)$$

Pour ***Ma* < 0.3** $\Rightarrow$

$$\boxed{p_0 - p \approx \frac{1}{2} \rho V^2}$$

Écoulement compressible ?



Retour