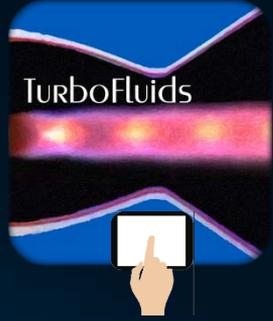




Mécanique des fluides



La force des écoulements



Chapitre 7: Écoulements externes

7.1

7.2

7.1 Solides placés dans un écoulement

7.2 Calcul de la traînée sur une plaque plane

Dans la section précédente nous avons étudié les écoulements (internes) dans des conduites et regardé une méthodologie pratique pour évaluer les pertes par frottement

Nous allons considérer maintenant **les écoulements autour de corps solides**

L'étude conduira à l'obtention des expressions équivalentes à celles développées pour les conduites, permettant également **le calcul de forces et des pertes énergétiques**

OBJECTIFS

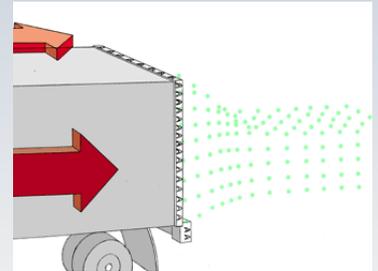
- Étudier les écoulements autour de solides
- Déterminer les forces de traînée et de portance sur des objets immergés dans des fluides en mouvement.
- Identifier la force de traînée due aux frottement visqueux ainsi que celle générée par les corps épais
- Comprendre la notion de couche limite ainsi que l'origine des formules pour le calcul du frottement sur une plaque plane

Par opposition à un **écoulement confinée** dans une conduite (interne), le phénomène, dans lequel le fluide est en contact ou limité par une corps, mais que son déplacement est illimité dans les autres directions, est appelé **écoulement externe**.

En génie, on trouve ce type d'écoulements autour de véhicules terrestres (voitures trains), en aérodynamique traditionnelle, (avions, fusées), en hydrodynamique (navires,) ou dans le domaine des éoliennes et des bâtiments (urbains et industriels)

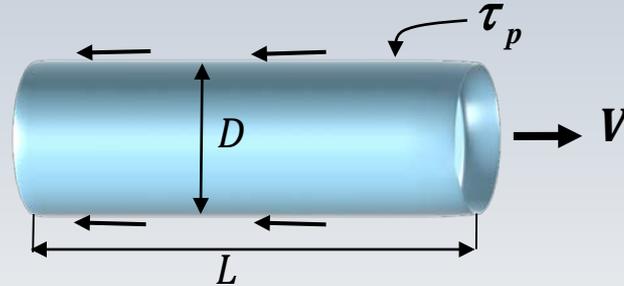
Un écoulement externe est caractérisé par le mouvement relatif entre un fluide et un corps solide

Cette interaction mène à **une force F exercé par le fluide sur le corps** (le corps exerce une force égale et opposée sur le fluide).



Externe vs interne

Dans le cadre **les écoulements internes**, les **pertes par frottement** sur les parois sont basées sur l'obtention du coefficient f . Pour un écoulement **laminaire**, la formule pour son calcul est $f = 64/Re$, où la longueur caractéristique c'est le diamètre D



Une fois f connue, on peut évaluer $\tau_p = f\rho V^2/8$ ainsi que les pertes $h_f = f(L/D)V^2/2g$

Externe vs interne

Dans le cadre **les écoulements externes**, nous sommes également intéressés aux **pertes par frottement**. Pour une plaque plane dans un écoulement **laminaire**, il est possible d'obtenir une formule théorique pour un coefficient comparable à f



Ce coefficient, dont **la théorie est à voir**, est $C_D = 1.328 Re_L^{-1/2}$,
où la longueur caractéristique pour évaluer Re_L c'est L

Force de pression

Pour les **écoulements externes**, en plus des forces de cisaillement présentes dans la seconde loi de Newton, on doit aussi tenir compte des **forces de pression**

$$\left. \frac{d(m\vec{u})}{dt} \right|_{\text{syst}} = \vec{F}_{\text{gravité}} + \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{cisaillement}}$$

Ces forces : $\vec{F}_{\text{press.}}$ et $\vec{F}_{\text{cisail.}}$ ont des visages particuliers



Visage des forces

La force $\vec{F}_{\text{cisaillement}}$, considérée selon la direction de l'écoulement reçoit le nom de **traînée visqueuse**

$$\left. \frac{d(m\vec{u})}{dt} \right|_{\text{syst}} = \vec{F}_{\text{gravité}} + \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{cisaillement}}$$



Traînée visqueuse

Visage des forces

La force $\vec{F}_{pression}$ est décomposée **selon la direction de l'écoulement** et selon la **direction transversale** à celui-ci. Les composantes respectives sont nommées **traînée de pression** (ou de forme) et **portance***

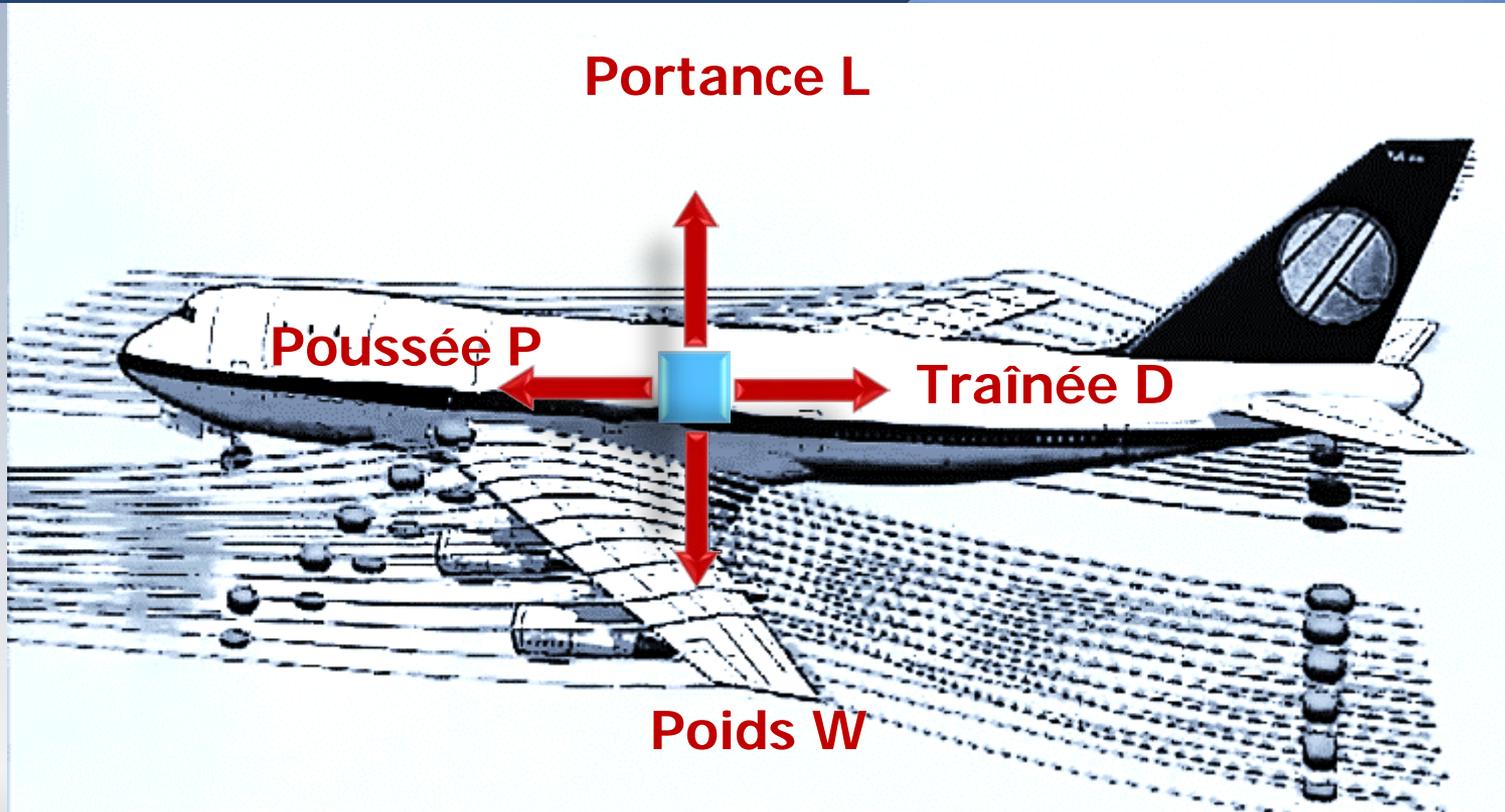
$$\left. \frac{d(m\vec{u})}{dt} \right|_{syst} = \vec{F}_{gravité} + \vec{F}_{pression} + \vec{F}_{cisaillement}$$

* La composante transversale de la force de cisaillement est négligée dans cette définition de portance

On note que dans le domaine de **l'aéronautique** on retrouve ces forces accompagnées de la poussée et du poids de l'appareil

Forces aérodynamiques

7.1 Solides dans...



A380: 79,8 m envergure, **73 m** longueur **24,1 m** hauteur **845 m²** surface des ailes, **560 tonnes** à pleine charge. **Prix 403.9x10⁶ \$\$\$\$\$**

Dans cette section l'intérêt est essentiellement porté sur:

- **la traînée** D , dans la direction de l'écoulement
- **la portance** L , dans la direction transversale à l'écoulement

Traînée D

7.1 Solides placés dans....

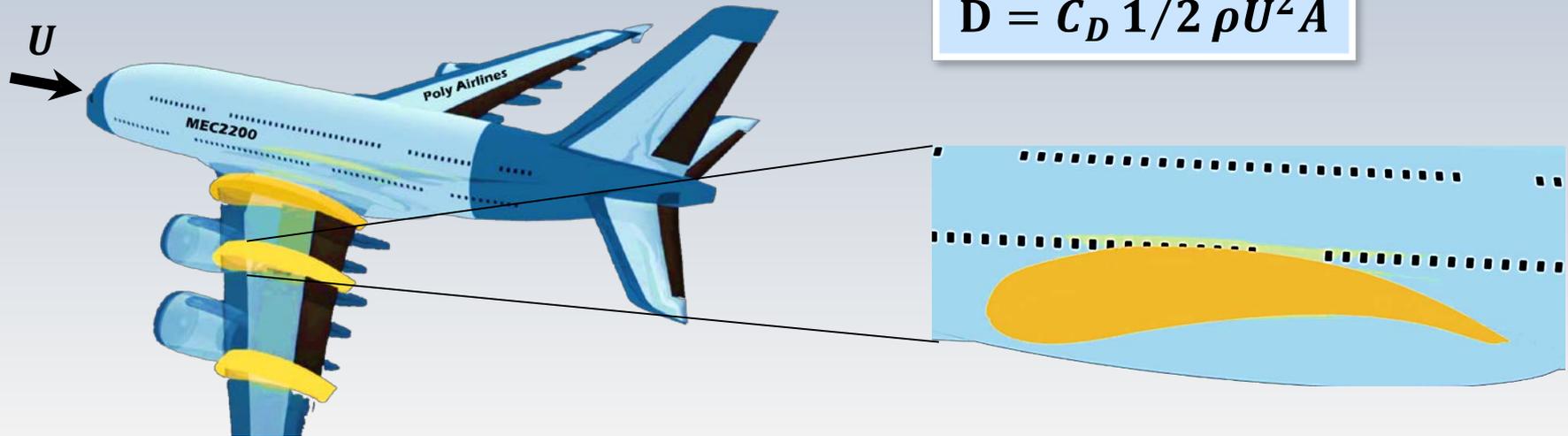


Traînée D

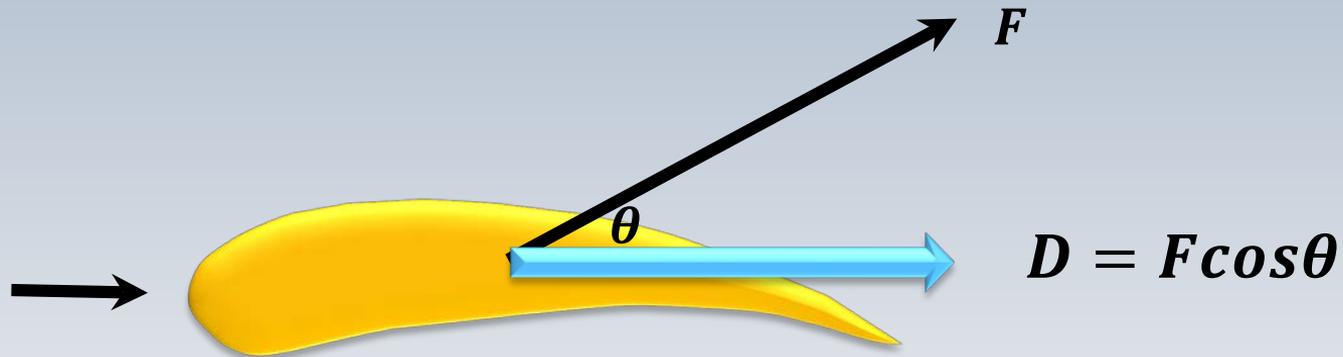
$$D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

La définition de la nomenclature se retrouve dans les diapositives suivantes

On note que la force de traînée D est exprimée en fonction d'un coefficient adimensionnel C_D , de la pression dynamique $1/2\rho U^2$ et d'une aire caractéristique A



$$D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 A$$



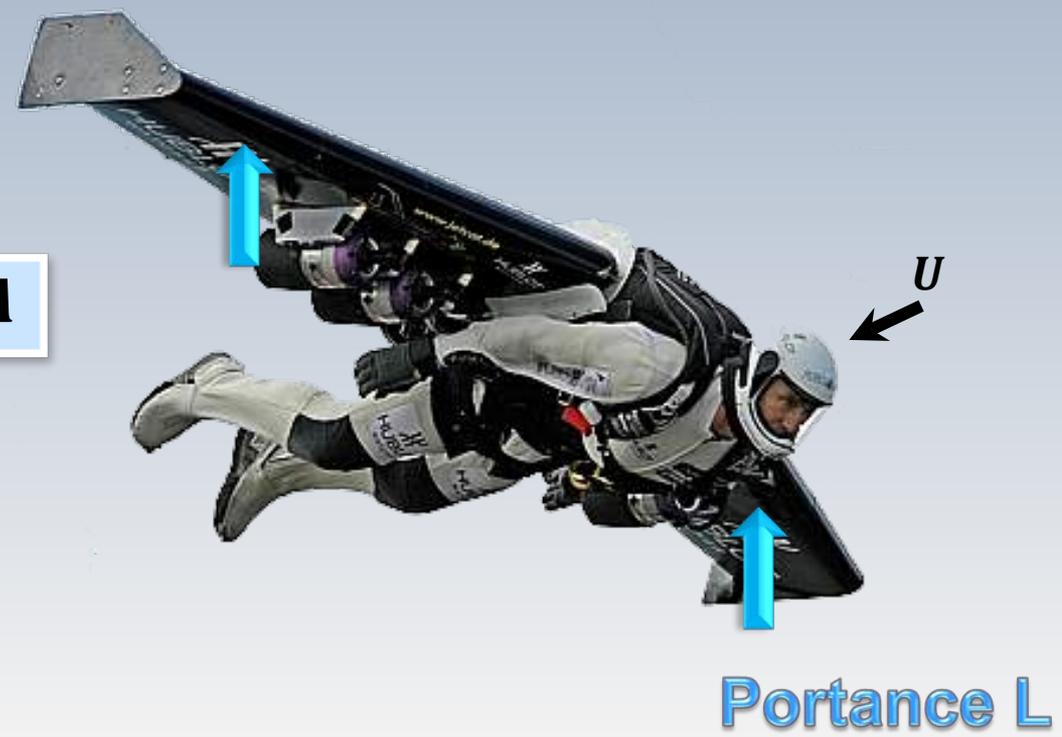
$$D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

Portance L

7.1 Solides placés dans....

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

C_L : coefficient
adimensionnel



La définition de la nomenclature se retrouve dans les diapositives suivantes

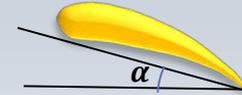
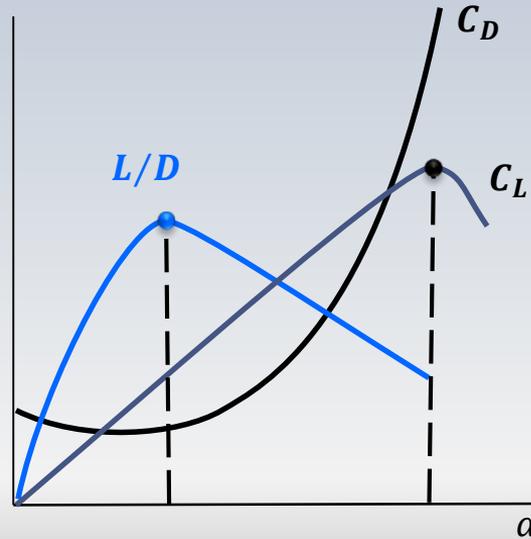
Le rêve d'Icare



Deux forces, en aviation



En aéronautique, on analyse les deux forces (ou coefficients) ensemble pour trouver un optimum en fonction de l'angle d'attaque α



Deux forces, deux équations



Des deux forces aérodynamiques, nous allons présenter davantage des éléments sur **la traînée D** . Celle-ci est directement liée à la **consommation d'énergie** dont le enjeux économiques et environnementaux sont importants.

Une fois que la **force de traînée D** , est connue, on peut calculer la puissance (énergie) **$P = DU$** associée au déplacement d'un corps (véhicule) à une vitesse **U**

Notons que la traînée aérodynamique d'une voiture de taille moyenne qui roule à 100 km/h, contribue entre 75% et 80% à la résistance totale à l'avancement

Réduire la consommation des véhicules de transport est une priorité!





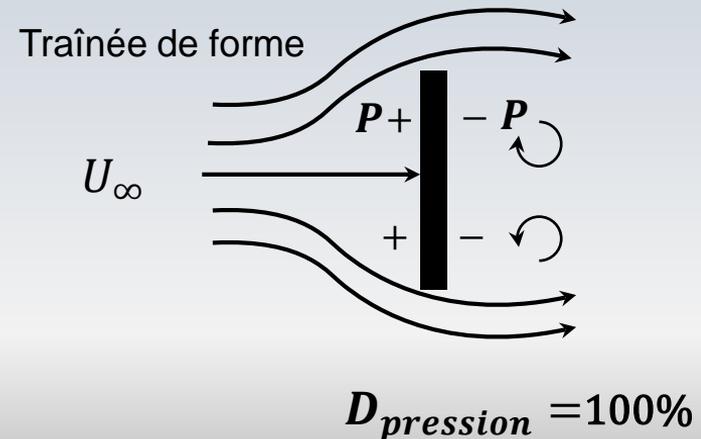
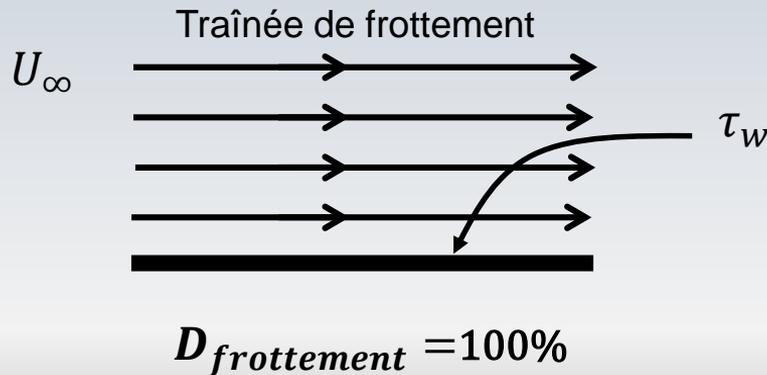
Ancien "aéronef" des Mayas

Différents types de phénomènes contribuent principalement à la traînée:

- la traînée de frottement ou traînée visqueuse
- la traînée de forme ou traînée de pression
- la traînée induite
- la traînée d'onde

La **traînée de frottement**, $D_{frottement}$, correspond à la force produite par le cisaillement à la paroi τ_w

La **traînée de forme** (de pression), $D_{pression}$, est une conséquence directe de la distribution de pression P autour d'un objet



Dans le cadre présent, nous allons considérer que la traînée totale D est seulement composée de ces deux traînées, soit :

$$D = D_{\text{pression}} + D_{\text{frottement}}$$

La dominance d'une force par rapport à l'autre sera fonction de la forme et/ou de l'orientation du corps par rapport à l'écoulement

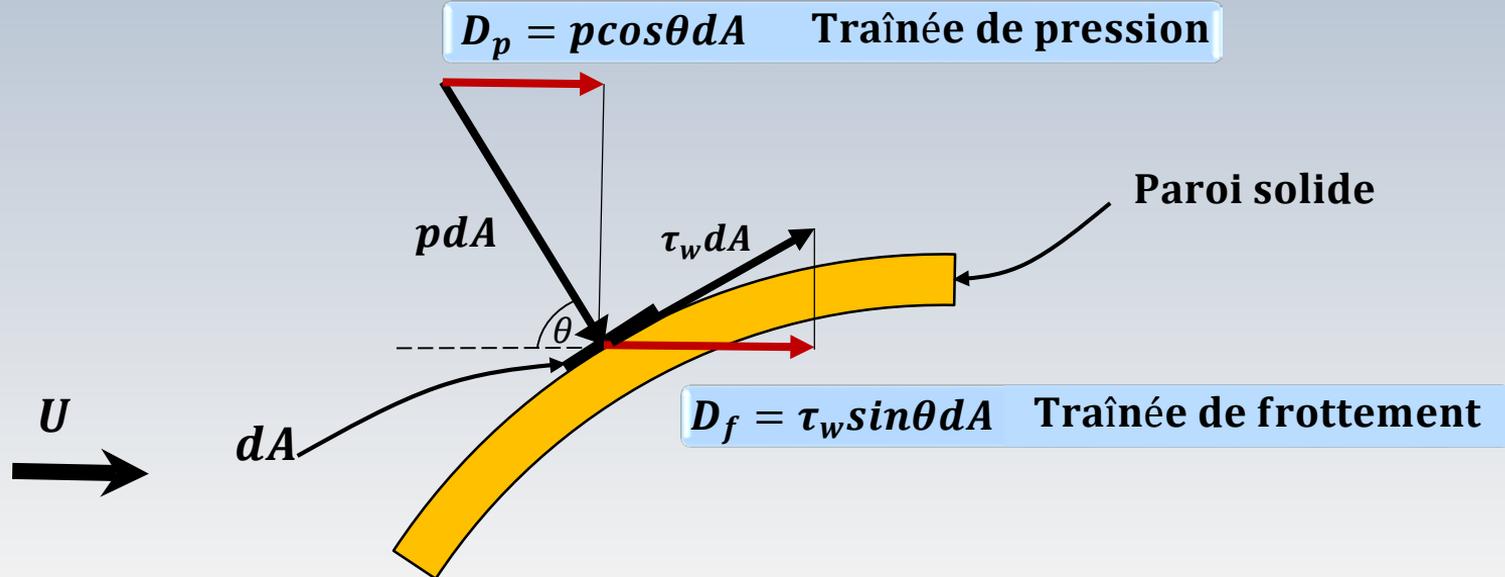
Cliquez pour voir d'autres formes de traînée

Certains aspects sur les deux autres types de traînée se retrouvent en annexe

Deux traînées

7.1 Solides placés dans.....

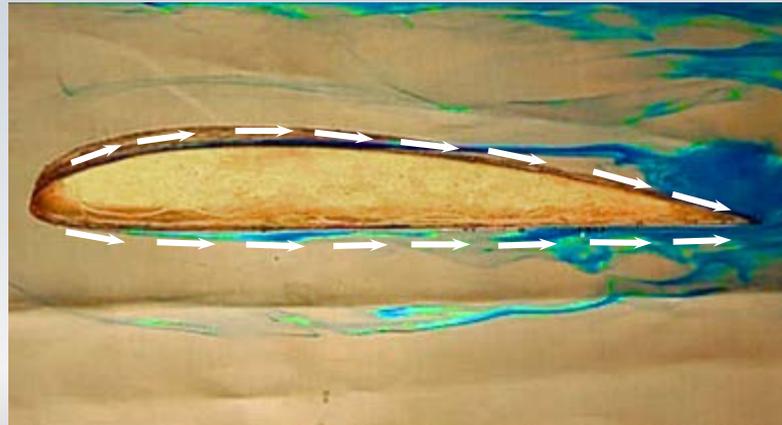
$$D = D_{\text{pression}} + D_{\text{frottement}}$$



Traînée de frottement D_f

7.1 Solides placés dans..

Pour un corps profilé (aéro ou hydrodynamique), le frottement tangentiel à la surface du corps, est dominant. La pondération de cette **traînée de frottement D_f** diminue pour un corps épais.



Traînée de forme D_p

Pour un corps émoussé, le fluide se détache, ce qui entraîne une chute de pression en aval d'un obstacle. Cette dissymétrie de la pression engendre la **traînée de forme** ou de pression D_p



Disque



Sphère



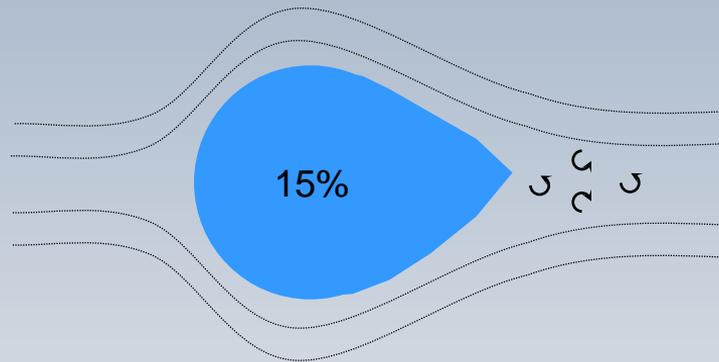
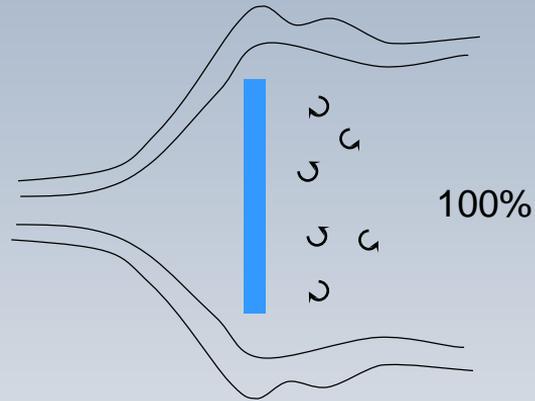
Demi-sphère



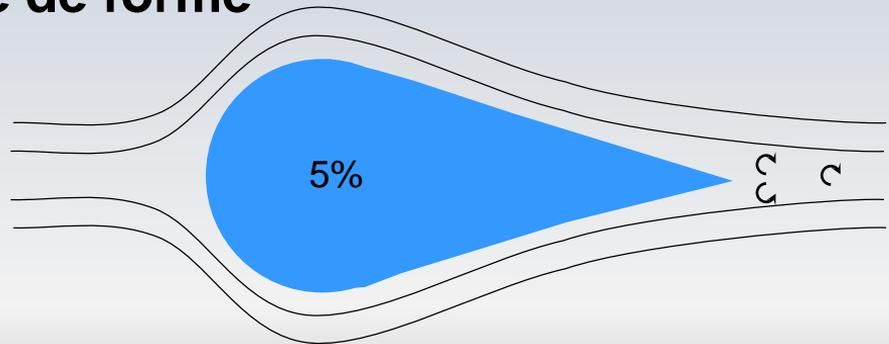
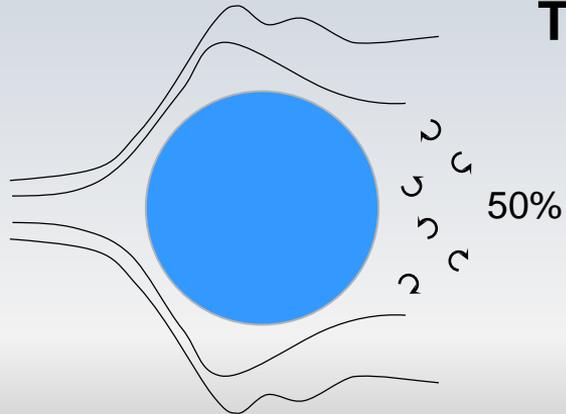
Goutte d'eau



Impact de la forme



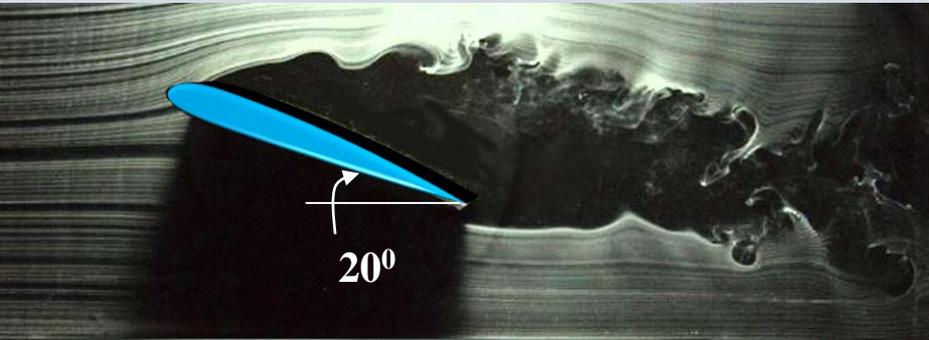
Traînée de forme



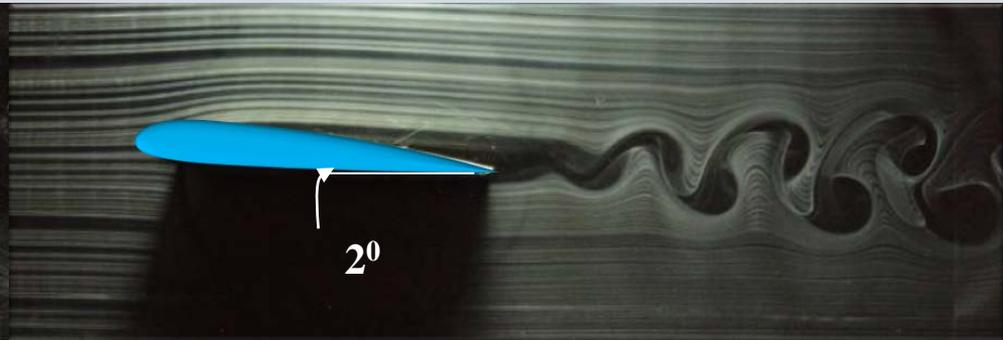
La traînée dépend alors fortement de la forme du corps

- Pour un corps mal profilé, la traînée de forme ou de pression est prépondérante.
- Pour un corps bien profilé, la traînée de frottement ou visqueuse est dominante.
- Sur un corps émoussé il y a un décollement garanti et la traînée est beaucoup plus forte que sur un corps bien profilé.

Il faut noter, cependant, que pour un corps profilé, la pondération entre cisaillement et forme concernant les forces aéro(hydro) dynamiques, dépend aussi de la position du profil. Spécifiquement, de l'angle formé entre le profil et la direction de l'écoulement



traînée de forme



traînée dans le sillage

Maintenant que nous avons identifié la nature et l'importance des forces aéro(hydro) dynamiques, nous pouvons passer aux équations

De façon générale, les forces aéro(hydro)dynamiques sont fonction de la rugosité, de la géométrie du corps et des rapports entre la force d'inertie et les forces: visqueuses, gravitationnelles et élastiques (*les nombres de Reynolds ,Froude et Mach*).

Dans cette partie, on regardera davantage les **écoulements incompressibles** avec une force gravitationnelle négligeable.

Ainsi, **le nombre de Reynolds et la géométrie**, et/ ou la position d'un corps par rapport à l'écoulement, joueront un rôle central

Dépendant du type de problème on pourra distinguer si la traînée de frottement est la plus significative, ou bien si la traînée de forme est celle qui prédomine

De manière similaire aux écoulements internes il est possible d'obtenir un **coefficient adimensionnel C_D** , dans ce cas,, **pour quantifier la traînée** produite lorsqu'un solide est placé dans un écoulement

- le coefficient C_D **comprend les deux formes de traînée**: de pression et de frottement
- le coefficient de traînée est toujours **associé à une surface caractéristique**

Expression pour le coefficient C_D

7.1 Solides placés...

C_D : coefficient de traînée (adim.)

D : force de traînée

ρ : masse volumique

A : surface caractéristique

U : **vitesse relative** écoulement-corps

$$C_D = D / (1/2 \rho U^2 A)$$

$\frac{1}{2} \rho U^2$: pression dynamique

Pour un objet au repos, la vitesse relative U devient U_∞ , la vitesse au loin en amont

*Les relations définissant les coefficients de traînée et de portance C_D et C_L sont issues de l'analyse dimensionnel

Surface caractéristique

7.1 Solides placés...



Surface caractéristique



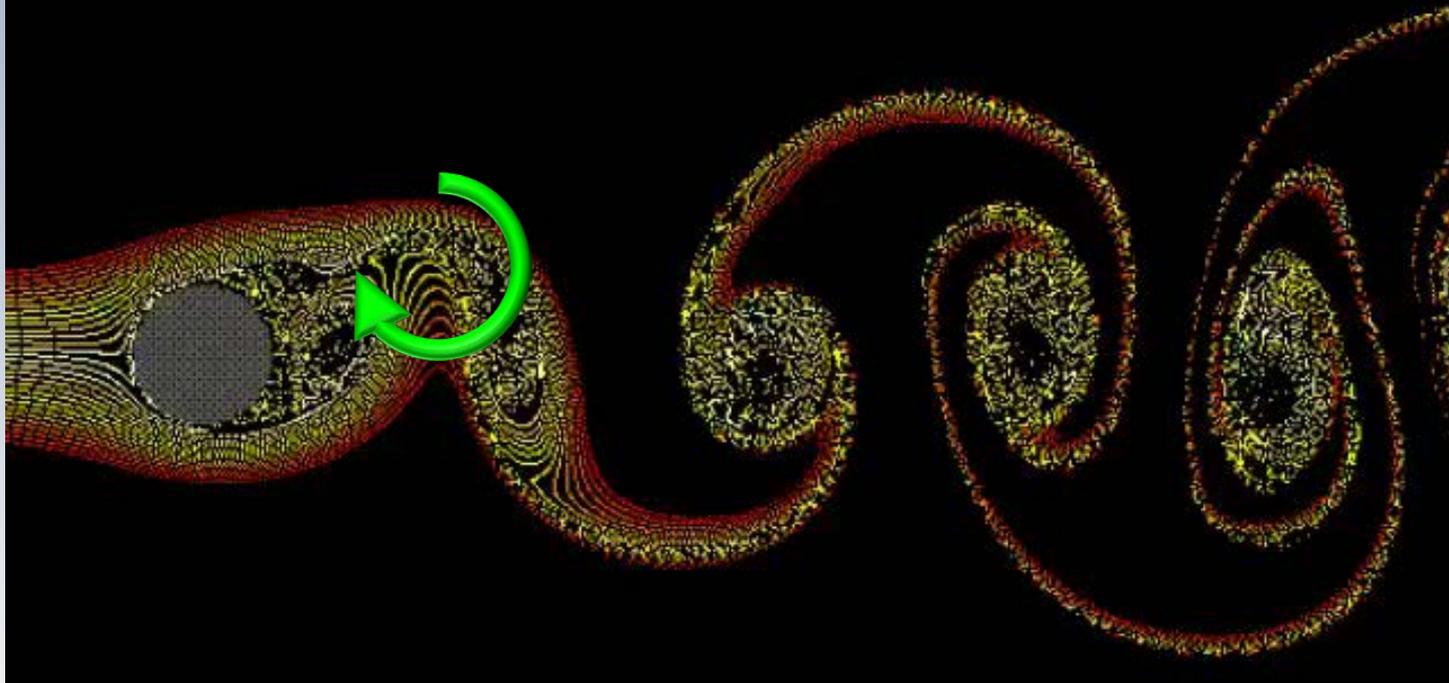
1. La **surface frontale** pour des objets tels que cylindres, voitures, avions, sphères, etc.
2. La **surface mouillée** pour les bateaux, radeaux, etc

Pour obtenir le coefficient adimensionnel de traînée C_D , on peut utiliser des relations empiriques basées sur des données expérimentales

Le cylindre dans les applications industrielles (câbles, poteaux, faisceaux de tubes) et **la sphère** dans le domaine du sport, (soccer, tennis etc.) sont des cas classiques employées dans l'étude de la traînée

Structure tourbillonnaire

Solides placés ..



C

Pour un écoulement rampant, en négligeant l'inertie, G. Stokes a obtenu la solution analytique de la distribution de pression et de vitesse autour d'une sphère.

Il a trouvé que la traînée D produite par une sphère de rayon R placée dans un écoulement uniforme et parallèle d'un fluide avec une viscosité μ et une vitesse U , est donnée par

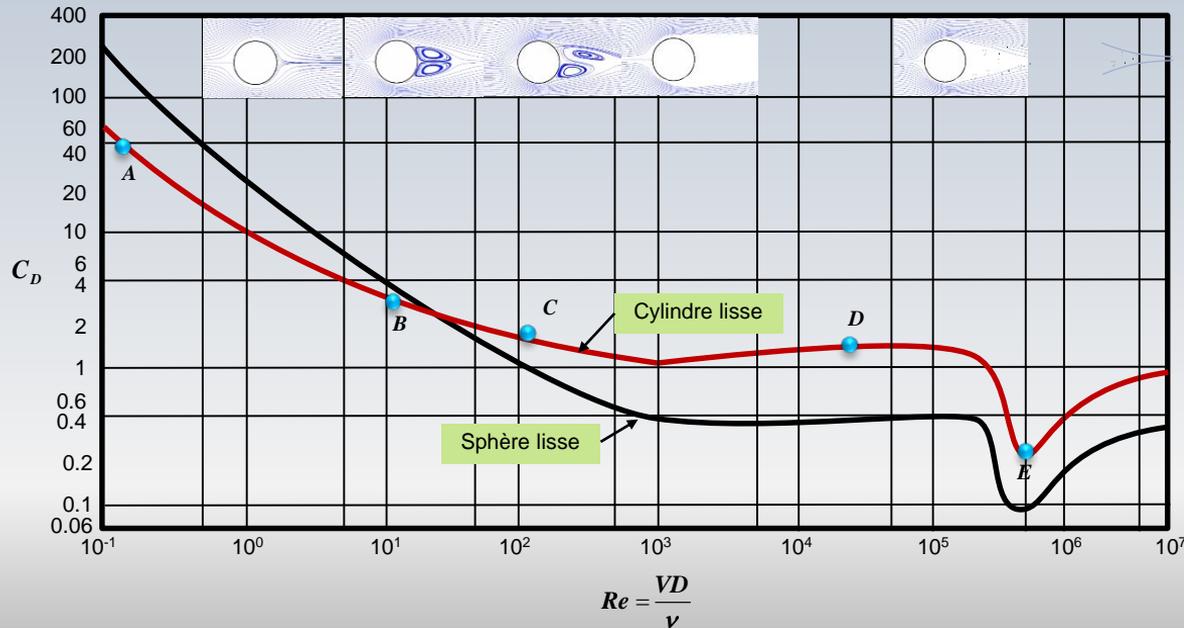
$$D = 6\pi\mu RU$$

Ce résultat implique que $C_D = 24/Re$

La figure suivante représente la dépendance du coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds $Re = Ud/\nu$, où d est **le diamètre du cylindre (sphère)** et U **la vitesse relative de l'écoulement par rapport à l'objet**

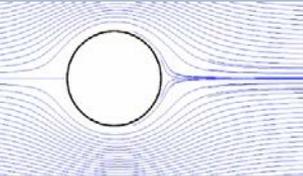
Le cylindre et la sphère

On note que C_D diminue considérablement à partir de faibles valeurs de Re , jusqu'à atteindre un plateau ($C_D \approx 1$) pour $Re > 10^3$. Pour ces corps, on distingue cinq types régimes:

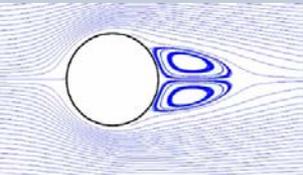


Le cylindre et la sphère

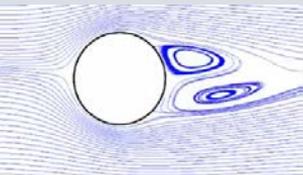
7.1 Solides placés...



$Re < 1$, les contraintes visqueuses sont dominantes (un corps allongé peut produire une plus grande traînée) et il n'y a pas de décollement



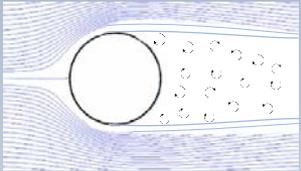
$Re \sim 10$, un décollement a lieu et deux tourbillons stables se forment derrière l'objet. La pression chute fortement en arrière de l'objet, ce qui augmente la traînée. Un rallongement du corps restreint le phénomène et la traînée diminue.



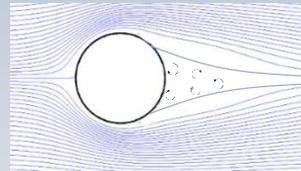
$Re > 100$, les deux tourbillons sont devenus trop grands pour coexister en même temps. Ils ne sont plus stables et une émission alternée se produit: c'est *l'allée de von Karman* (ce phénomène cause l'oscillation de structures). Un rallongement du corps diminue la traînée.

Le cylindre et la sphère

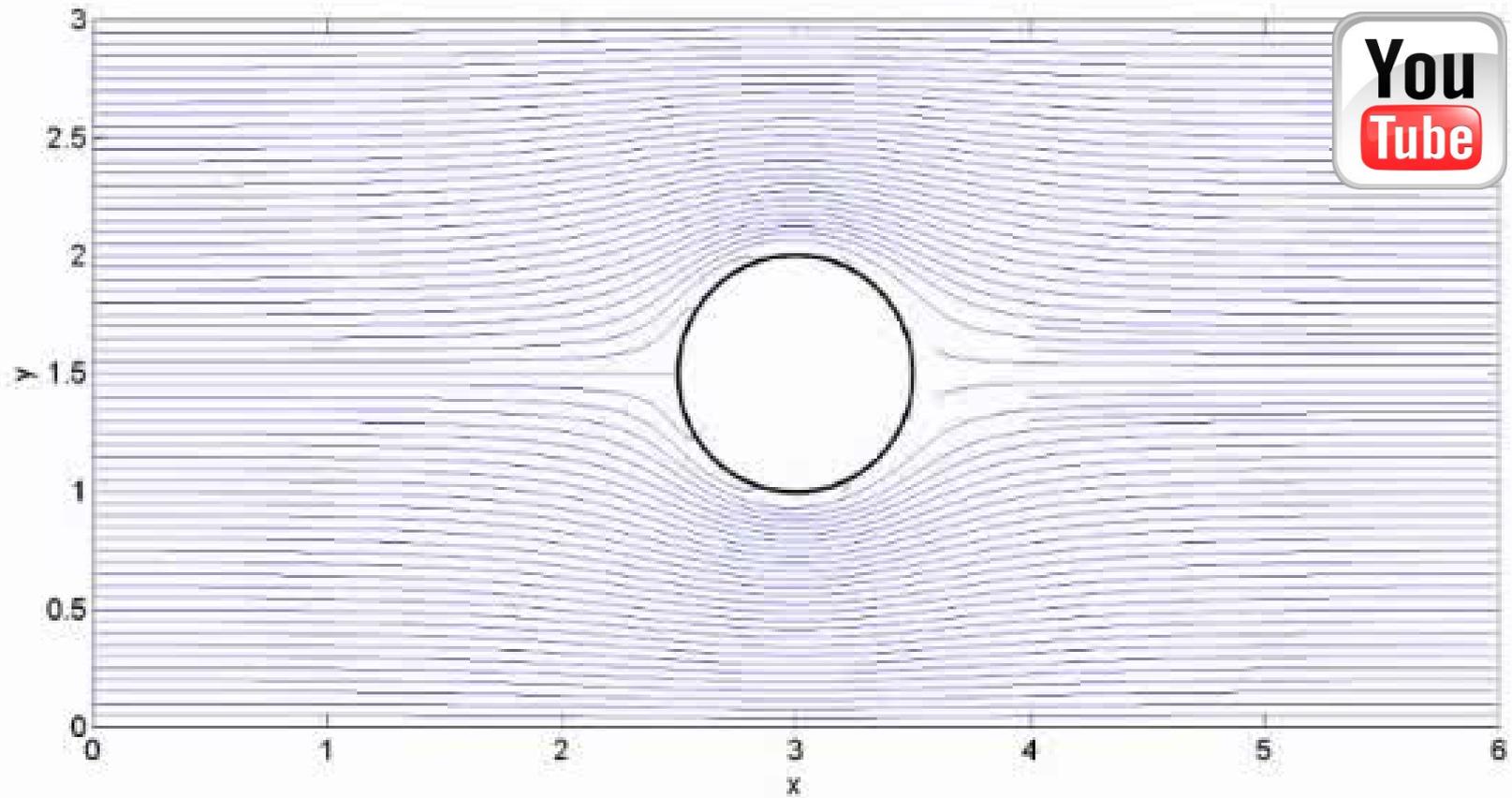
7.1 Solides placés...



$Re > 10000$, la couche limite autour du cylindre demeure laminaire du côté amont et devient turbulente à partir d'un point de décollement ($\theta \approx 80^\circ$) On remarque un grand sillage turbulent

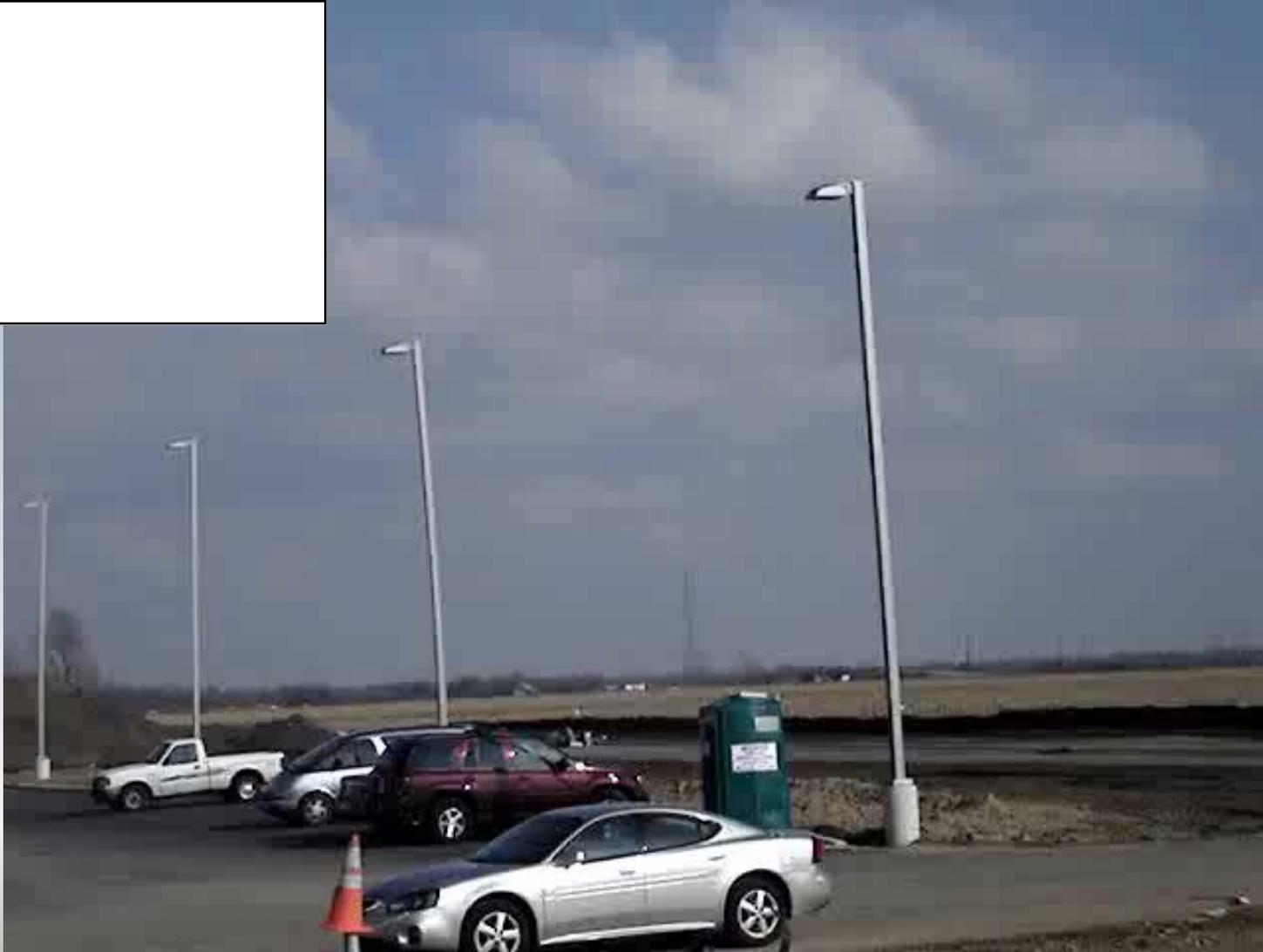


Au-delà d'un nombre de **Reynolds critique** ($\approx 2 \times 10^5$), le décollement s'effectue plus en aval. Le profil de vitesse dans la couche limite turbulente oppose plus de résistance au gradient de pression défavorable. Le sillage devient plus étroit et la force de traînée chute fortement à la transition, parfois dite "crise de traînée".



Re = 272

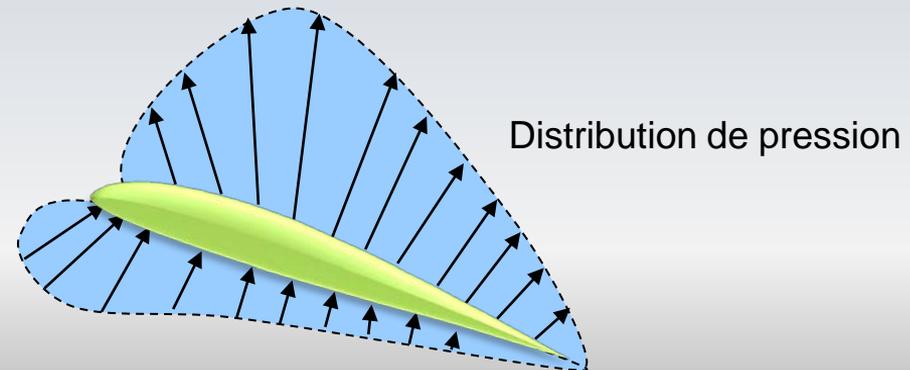
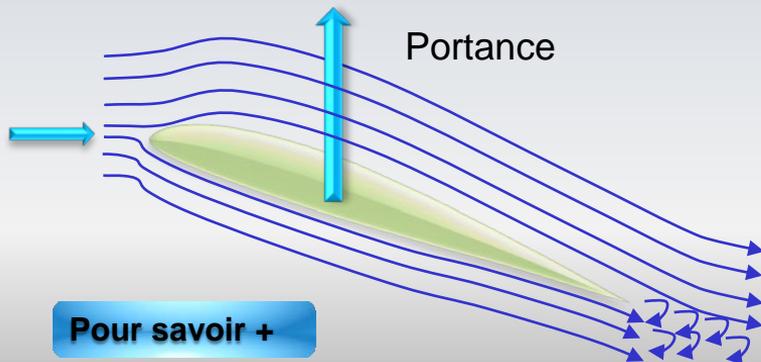




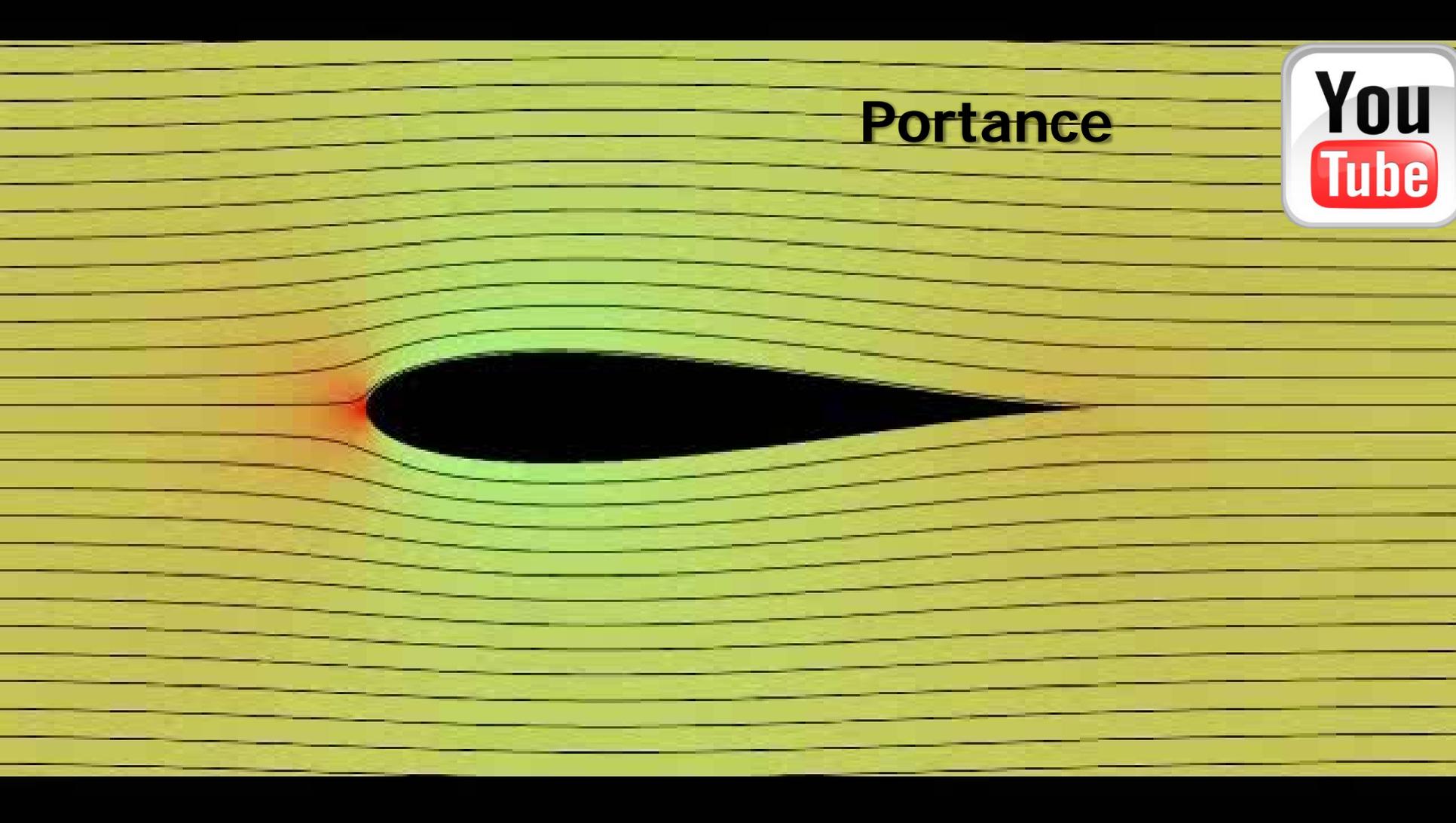
La **force de portance L** est une conséquence de la **distribution de pression** que le fluide impose à la surface du corps.

Elle est définie dans la **direction perpendiculaire** à celle de l'écoulement

La **force de portance** est fondamentalement **générée par l'asymétrie de l'écoulement par rapport à la géométrie**



Portance

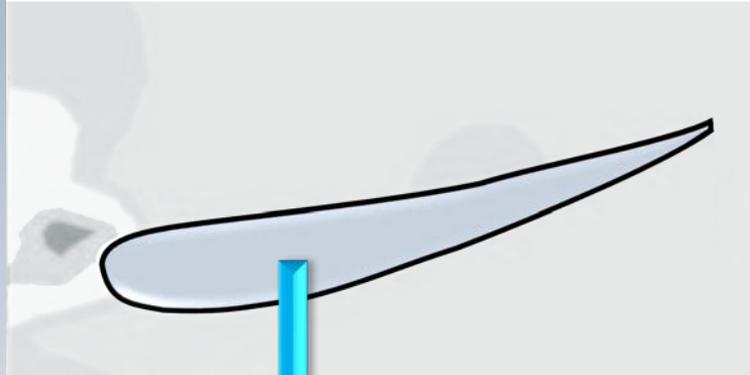




Dans le domaine de la compétition automobile on effectue également des études, complémentaires à la réduction de la traînée, pour agir aussi sur **la déportance** (*portance négative*) et augmenter ainsi la stabilité de la voiture. Pour ce faire, on utilise des ailerons ayant la forme de profils d'aile d'avion.

En effet, une portance (positive) élevée est clairement bénéfique pour un avion, mais elle pourrait être nuisible sur une voiture, puisque dans ce cas on veut garder l'adhérence du véhicule à la route.

Ailerons d'une F1

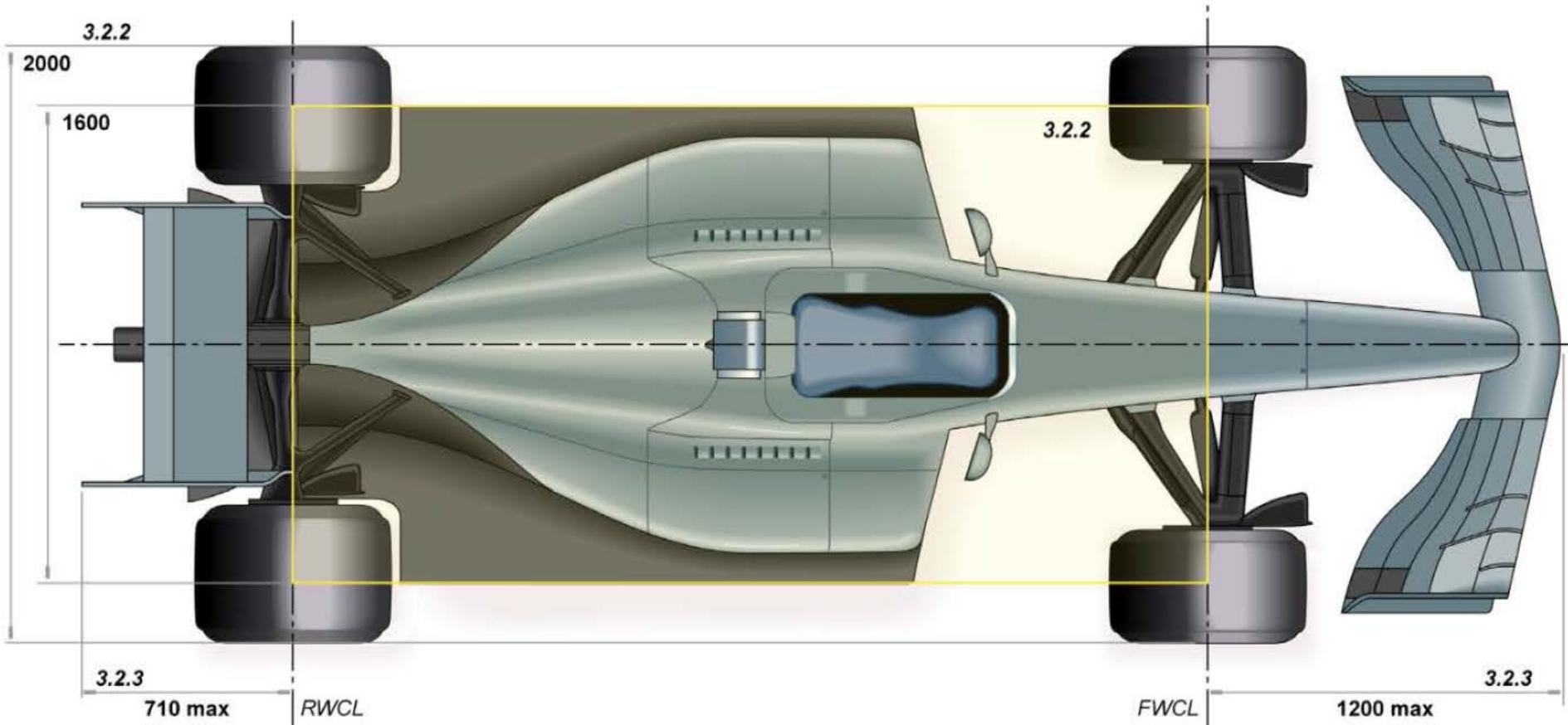


Aileron avant produit environ
1/3 de la déportance

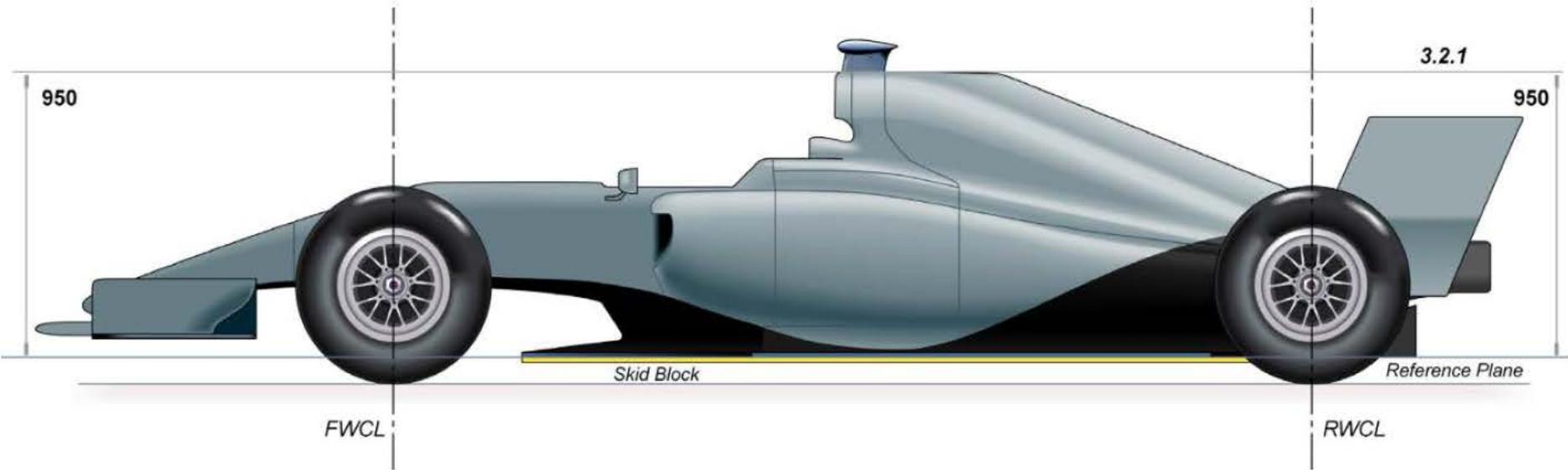
Déportance

Aileron arrière produit environ
30-35% de la déportance totale

Dimensions F1 2018

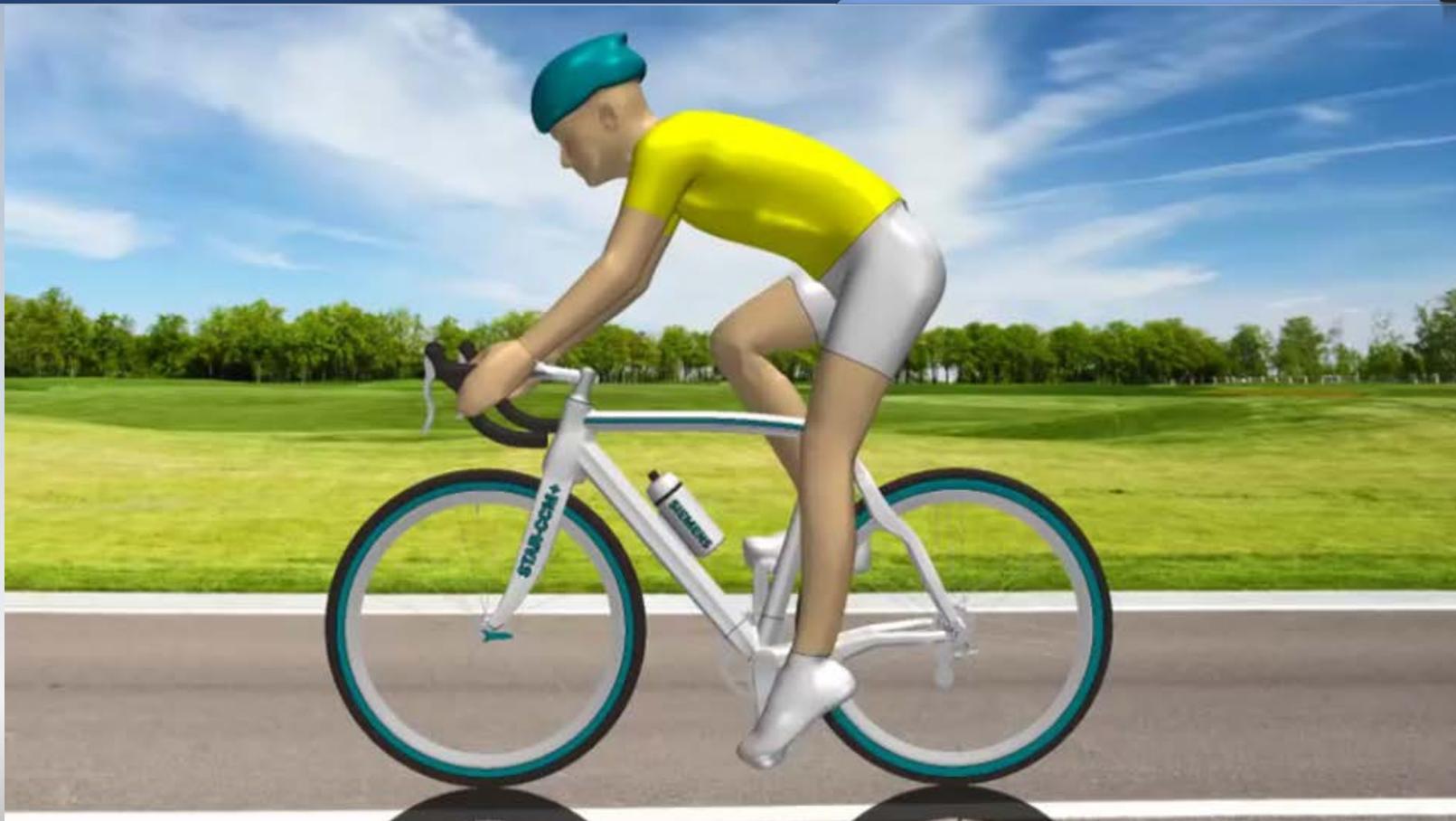


Dimensions F1 2018





Cyclistes





VROOMEN.WHITE.DESIGN

UNC TV

HUMAN POWERED VEHICLE PERFORMANCE

DESCRIPTION				FORCES AT 20 MPH (POUNDS) <small>(NORMATIVE RANGE = 1 LB/1")</small>	AERODYNAMIC DATA			LEVEL GROUND, NO WINDS			EFFECT OF HILLS			
					DRAG COEFFICIENT C_D	FRONTAL AREA (FT ²) A	EFFECTIVE FRONTAL AREA (FT ²) $C_D A$	ROLLING RESISTANCE COEFFICIENT C_R	HORSEPOWER REQUIRED AT 20 MPH AS A PERCENTAGE OF THE TOURING (ARMS STRAIGHT) BICYCLIST	ALL DAY TOURING SPEED AT 0.1 HORSE-POWER OUTPUT (MPH)	MAXIMUM SPEED WITH 1.0 HORSE-POWER OUTPUT (MPH)	STEADY SPEED UP A 5% GRADE AT 0.4 HORSE-POWER OUTPUT (MPH)	STEADY SPEED COASTING DOWN A 5% GRADE (MPH)	
STANDARD BICYCLES	BMX (YOUTH OFF ROAD RACER)	30 LB BIKE 120 LB RIDER 20" DIA. 40PSI KNOBBY TIRES			5.52 2.10	1.1	4.9	5.4	.014	146%	10.1	27.8	12.2	19.8
	EUROPEAN UPRIGHT COMMUTER	40 LB BIKE 160 LB RIDER 27" DIA. 40 PSI TIRES			6.14 1.20	1.1	5.5	6.0	.006	140%	11.3	27.6	10.9	24.0
	TOURING (ARMS STRAIGHT)	25 LB BIKE 160 LB RIDER 27" DIA. 90 PSI CLINCHER TIRES			4.40 .83	1.0	4.3	4.3	.0045	100%	13.1	31.1	12.2	27.7
	RACING (FULLY CROUCHED)	20 LB BIKE 160 LB RIDER 27" DIA. 105 PSI SEWUP TIRES			3.48 .54	.88	3.9	3.4	.003	77%	14.7	33.9	13.0	31.2
PROVED PRODUCTION	AEROCOMPONENT (FULLY CROUCHED)	20 LB BIKE 160 LB RIDER 27" DIA. 105 PSI SEWUP TIRES			3.27 .54	.83	3.9	3.2	.003	73%	15.0	34.6	13.0	32.2
	PARTIAL FAIRING (ZIPPER) CROUCHED	21 LB BIKE 160 LB RIDER 27" DIA. 105 PSI SEWUP TIRES			2.97 .54	.70	4.1	2.9	.003	67%	15.4	35.7	13.1	33.9
	RECUMBENT (EASY RACER)	27 LB BIKE 160 LB RIDER 27" REAR 20" FRONT 90 PSI CLINCHERS			2.97 .94	.77	3.8	2.9	.005	75%	14.4	35.2	12.5	33.7
	TANDEM	42 LB BIKE TWO 160 LB RIDERS 27" DIA. 90 PSI CLINCHERS (181 LBS PER PERSON)			5.32 (2.66) 1.62 (.81)	1.0	5.2	5.2 (2.6 per person)	.0045	66%	15.2	36.6	13.0	35.2
	DRAFTING (CLOSELY FOLLOWING ANOTHER BICYCLIST)	20 LB BIKE 160 LB RIDER 27" DIA. 105 PSI SEWUP TIRES			1.94 .54	.50	3.9	1.9	.003	47%	17.5	41.0	13.6	41.7



Exemple

On cherche à déterminer la puissance requise pour rouler à **30 km/heure** en en vélo en position de course (fully crouched) lorsqu'on a un vent a) favorable, b) défavorable de **15 km/heure**. On considère $\rho_{\text{air}} = 1.2 \text{ kg/m}^3$ et on estime l'aire frontale comme **$A = 0.45 \text{ m}^2$** .

$$U_b = 30 \text{ km/h}, \quad U_v = 15 \text{ km/h}$$

$$\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3, \quad A = 0.45 \text{ m}^2$$

→ Table

$$C_D \approx 0.8$$



Example

$$U_b = 30 \text{ km/h}, \quad U_v = 15 \text{ km/h}$$

$$\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3 \quad A = 0.45 \text{ m}^2$$

$$C_D \approx 0.8$$

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

a) favorable

$$D_f = 0.8 \times \frac{1}{2} \times (1.2 \text{ kg/m}^3) \times \\ \times [(30 - 15) \times (10^3/3600) \text{ m/s}]^2 \times 0.45 \text{ m}^2$$

$$D_f = 3.75 \text{ N} \quad P = D_f V = 31.25 \text{ Watt}$$



Exemple

$$U_b = 30 \text{ km/h}, \quad U_v = 15 \text{ km/h}$$

$$\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3 \quad A = 0.45 \text{ m}^2$$

$$C_D \approx 0.8$$

$$D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

b) défavorable

$$D_f = 0.8 \times \frac{1}{2} \times (1.2 \text{ kg/m}^3) \times \\ \times [(30 + 15) \times (10^3/3600) \text{ m/s}]^2 \times 0.45 \text{ m}^2$$

$$D_f = 33.75 \text{ N} \quad P = D_f V = 281 \text{ Watt}$$



Réduction de la traînée

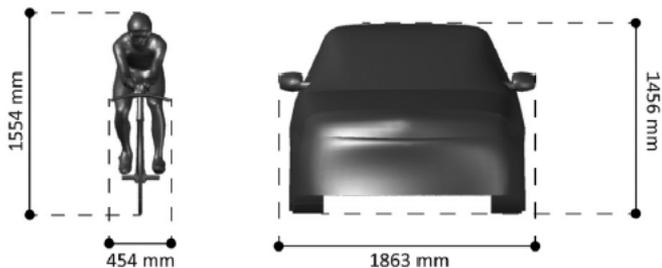
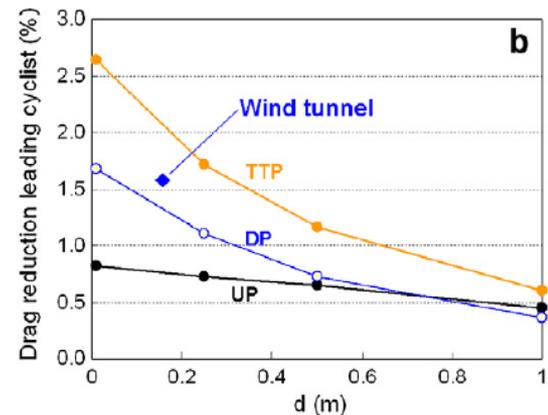
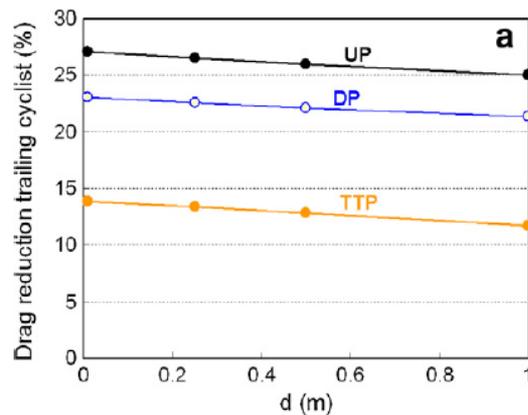
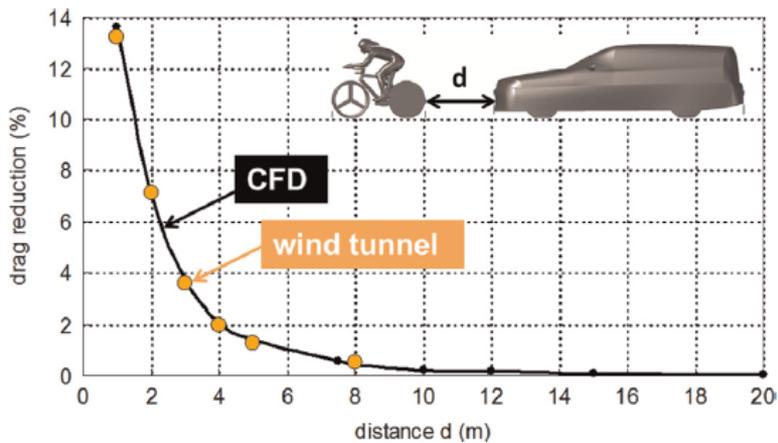
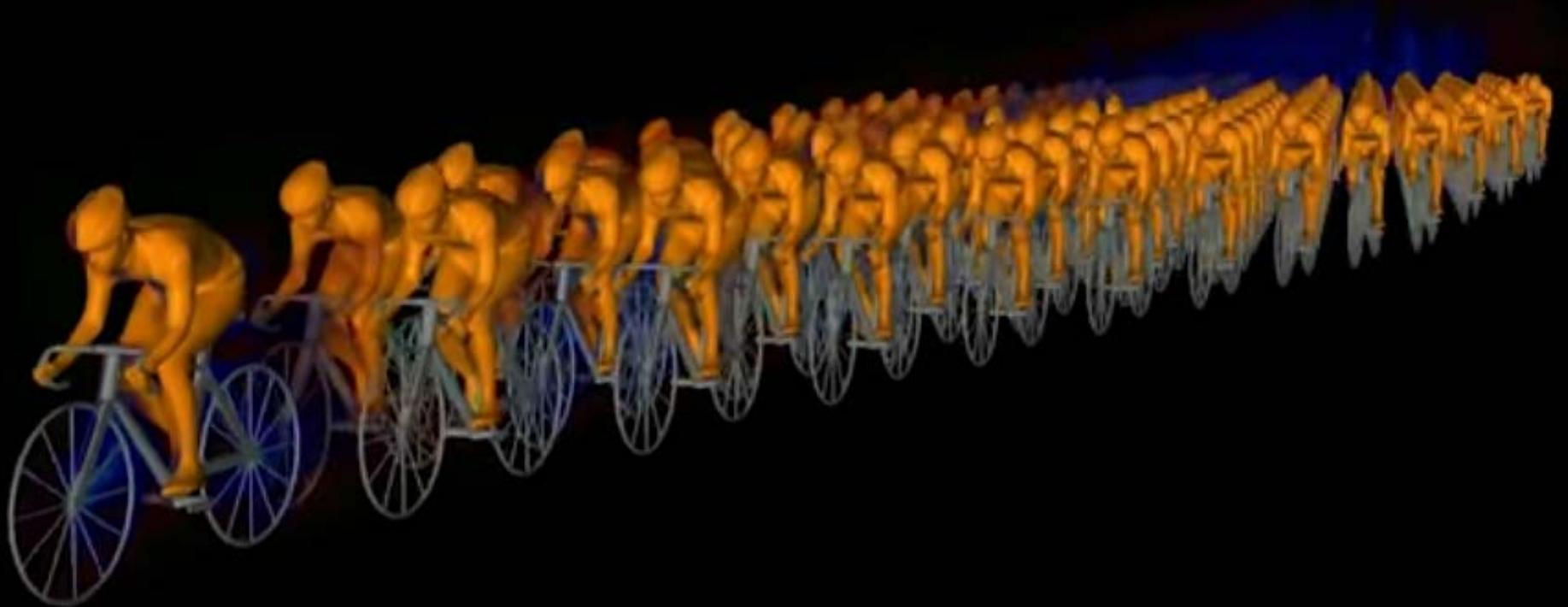
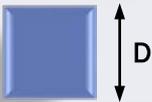


Fig. 2. Three cyclist positions (Person A): (a) upright position (UP); (b) dropped position (DP); (c) time-trial position (TTP).

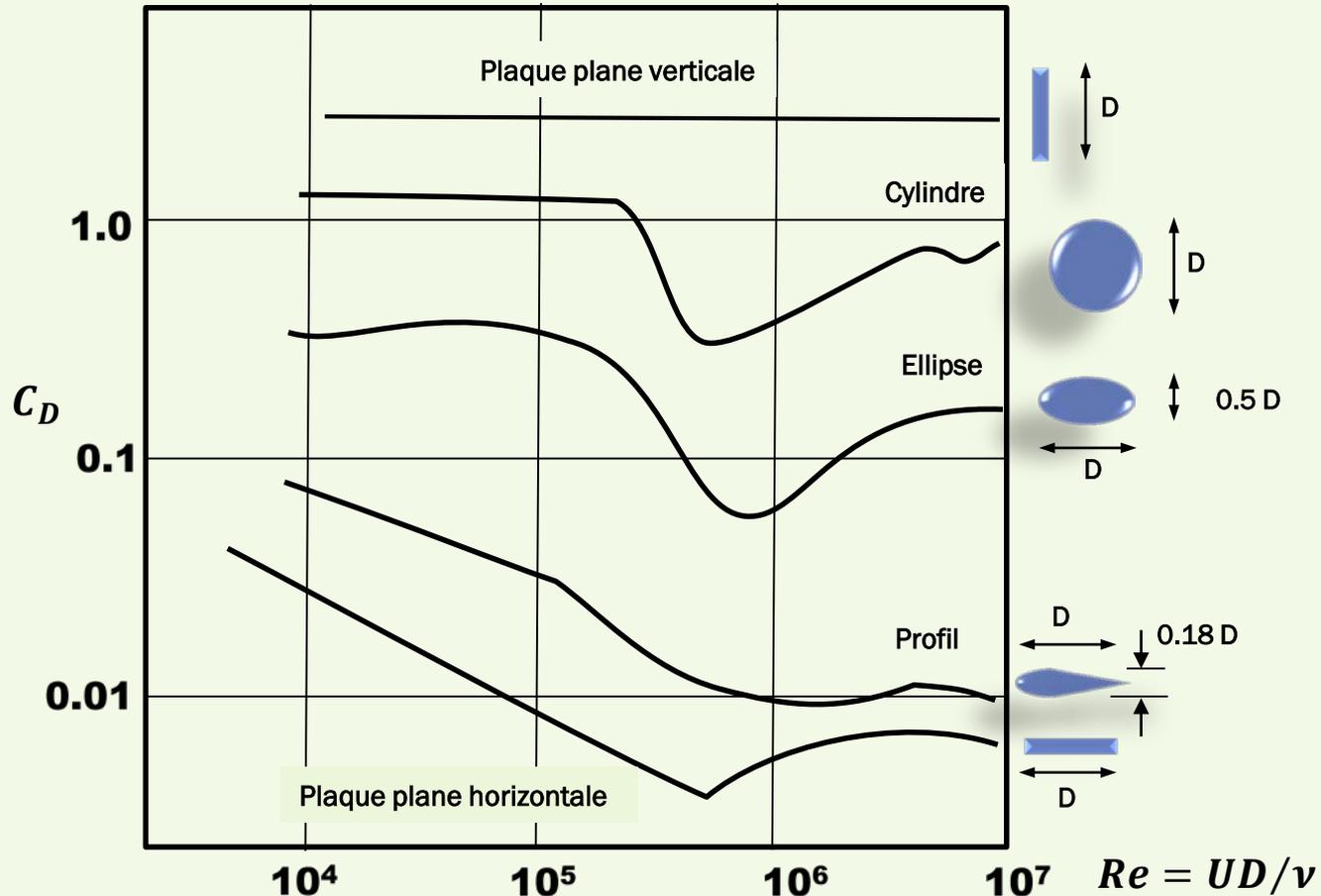


Quelques coefficients

Géométrie	Surface	Re	C_D
Plaque 	bD	$>10^4$	2.0
Carré 	bD	$>10^4$	2.1
Cylindre 	bD	$<10^5$ (lam.) $>5 \times 10^5$ (turb.)	1.2 0.3
Demi cylindre 	bD	$>10^4$	1.2
	bD		1.7
Hexagone 	bD	$>10^4$	1.0

**Coefficient de traînée
de quelques objets**

Coefficients $f(Re)$

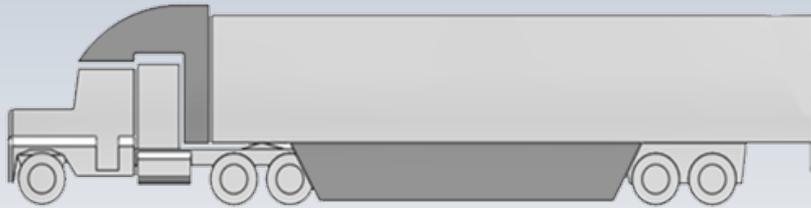


C_D dans le transport industriel

7.6 Écoulement ..



$$C_D = 0.96$$



$$C_D = 0.58$$



$$C_D = 0.34$$

C_D variés

$C_D=0.75$



$C_D=0.29$



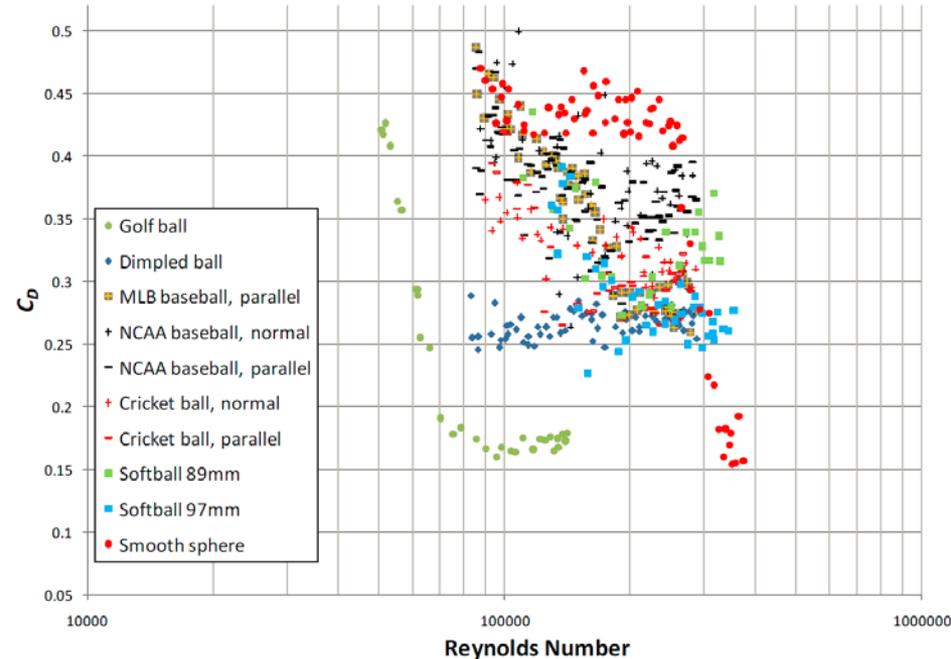
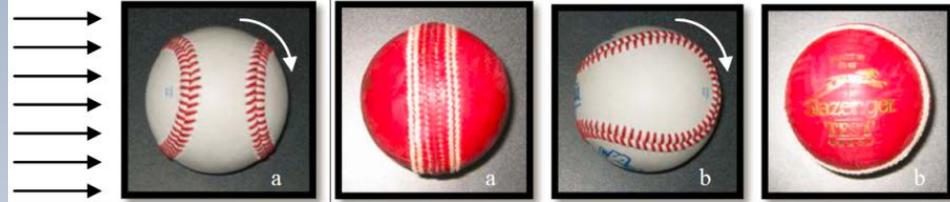
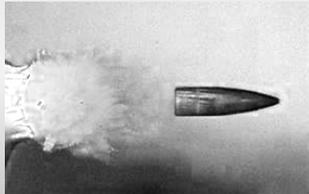
$C_D=0.3$

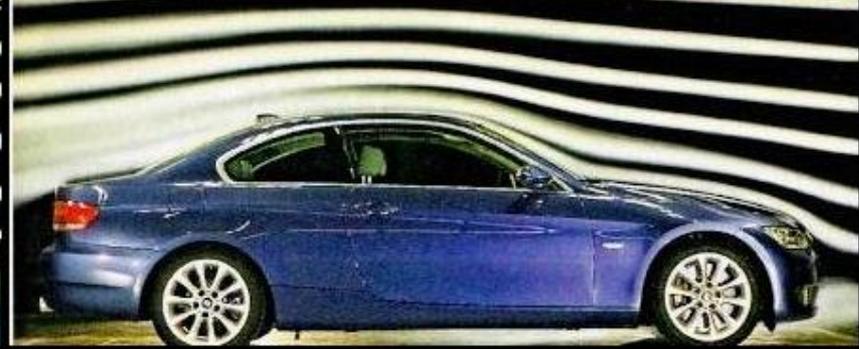
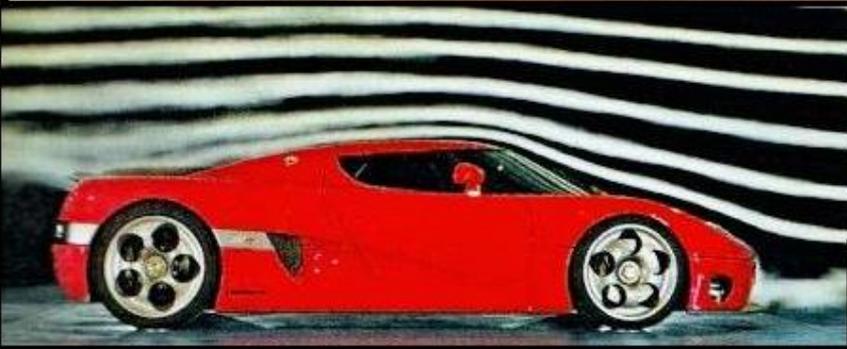
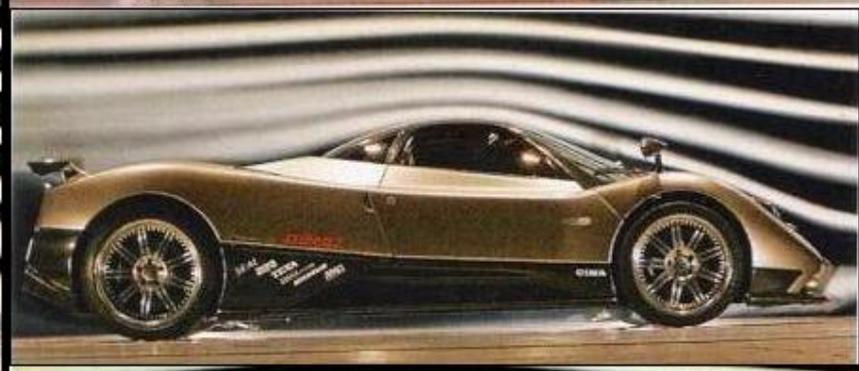
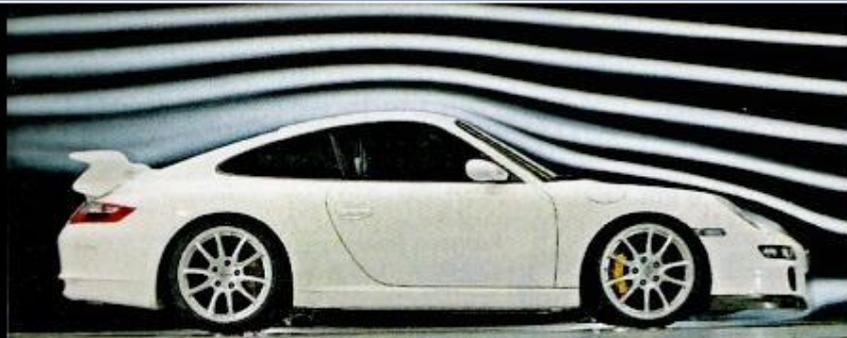


$C_D=0.5-0.3$

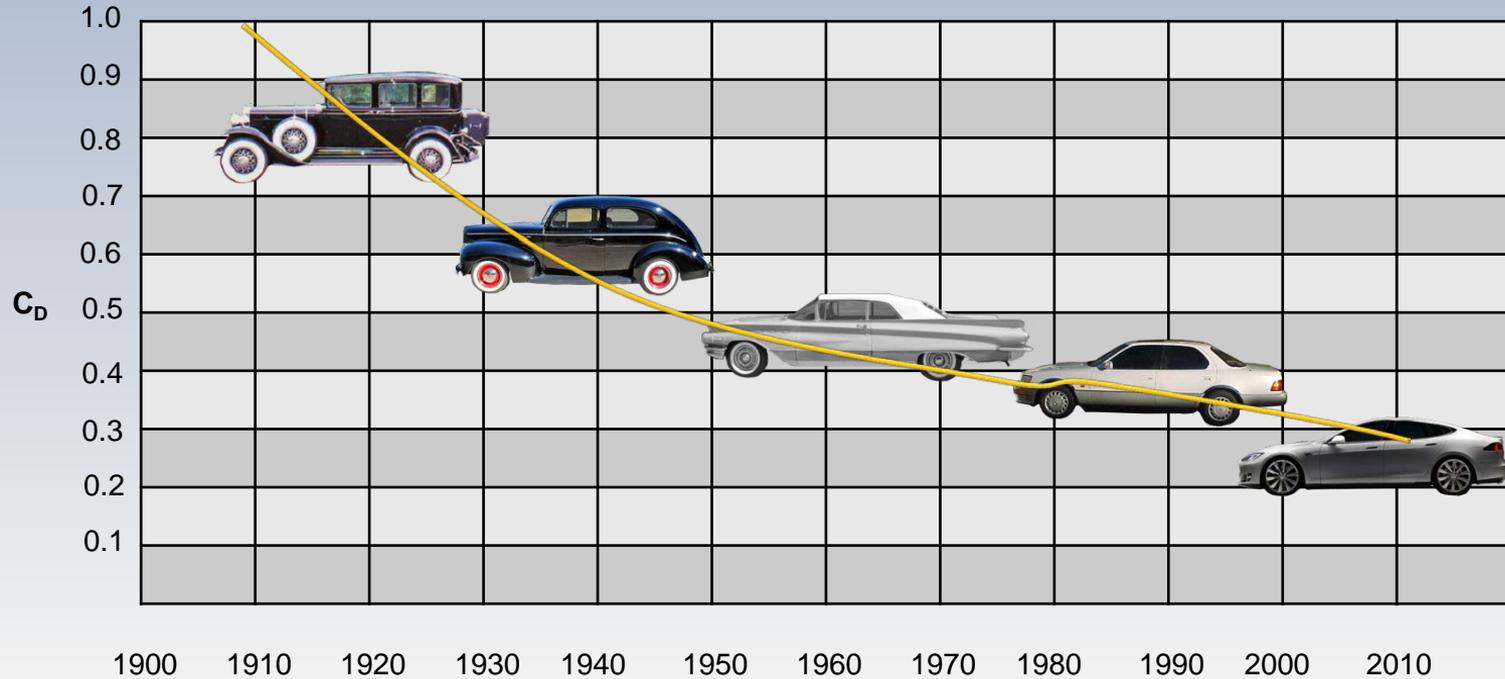


$C_D=0.29$





Évolution du C_D dans les voitures



Mercedes Benz CL E Class, $C_D=0.24$



Exemple

Determiner **la puissance** necessaire pour vaincre la traînée de deux automobiles dont l'aire frontale de chacun d'eux est $A = 2.8 \text{ m}^2$. La vitesses des vehicules est $U = 80 \text{ km/h}$ (22,22 m/s). L'un des véhicules est de 1920(collection), tandis que l'autre a été construit en 2010. Considérez, $\rho_{\text{air}} = 1.23 \text{ kg/m}^3$

Solution:

80 km/h



1920



$C_D \approx 0.8$



2010



$C_D \approx 0.3$



$$A = 2.8 \text{ m}^2, U = 80 \text{ km/h} (22.22 \text{ m/s}), \rho_{\text{air}} = 1.23 \text{ kg/m}^3$$

$$C_D \approx 0.8$$

Exemple

Puissance:

$$P = F_D \times U$$

$$\rightarrow P = C_D \frac{1}{2} \rho U^3 A$$

Traînée:

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

$$P = 0.8 \times \frac{1}{2} \times 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(22.22 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^3 \times 2.8 \text{ m}^2 = 15.11 \text{ kW} \quad 1920$$

$$P = 0.3 \times \frac{1}{2} \times 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \left(22.22 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^3 \times 2.8 \text{ m}^2 = 5.67 \text{ kW} \quad 2010$$

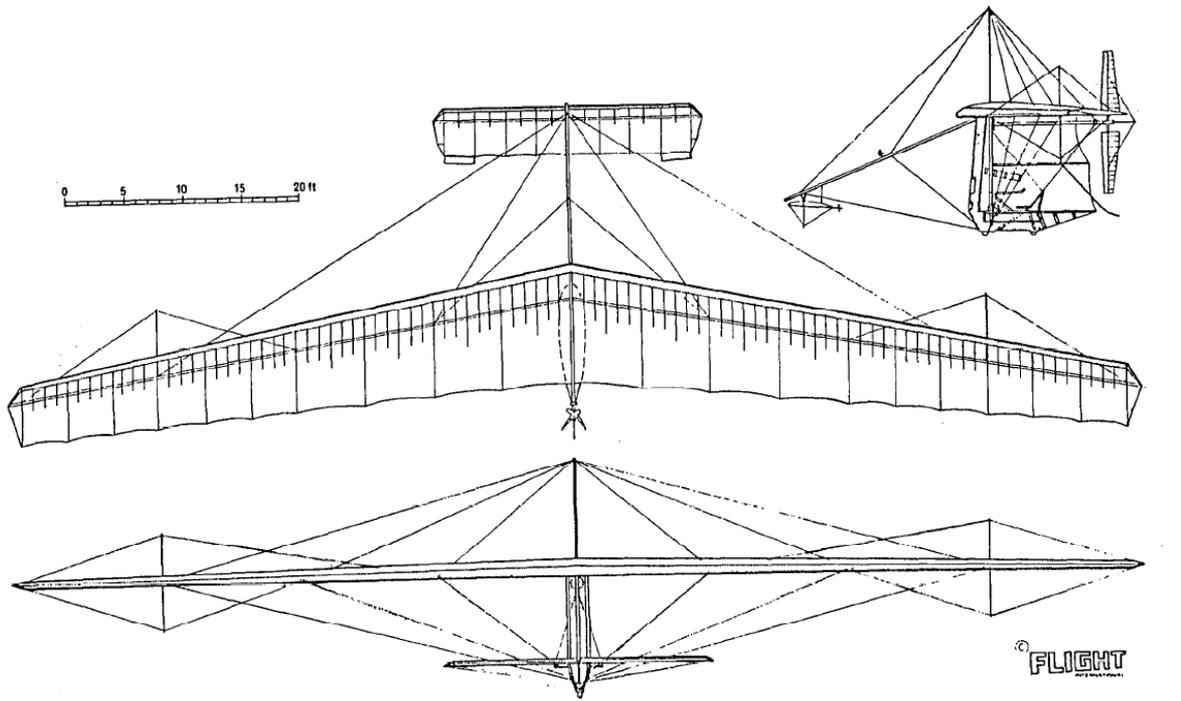


Exemple

On dispose des données suivantes pour l'avion à propulsion humaine Gossamer Condor (Paul MacCready, 1977, prix Kremer):

Voilure (longueur des ailes) :	$l = 29.28 \text{ m}$
Corde (largeur des ailes) :	$c = 2.37 \text{ m}$
Poids (incluant le pilote) :	$W = 934 \text{ N}$
Coefficient de traînée:	$C_d = 0.77$
Vitesse de l'avion:	$U = 4.6 \text{ m/s}$
Masse volumique:	$\rho_{\text{air}} = 1.23 \text{ kg/m}^3$

On veut obtenir le coefficient de portance C_L et la charge q sur les ailes. Pour ce calcul on néglige le reste des composantes de l'avion



L'avion a été construit à partir de tubes en aluminium, mousse de plastique, cordes de piano, pièces de bicyclette, et d'aluminium mylar

C_L et la charge q (N/m^2) ?

$$l=29.28 \text{ m}, c=2.37 \text{ m}, W=934 \text{ N}, \\ C_d=0.77, U=4.6 \text{ m/s}, \rho_{\text{air}}=1.23 \text{ kg/m}^3$$

Portance

$$L = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

$$\Rightarrow C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A}$$

$$A = l \times c = 29.28 \times 2.37 = 69.39 \text{ m}^2$$



$$L = W = 934 \text{ N}$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho U^2 A} = \frac{2 \times 934 \text{ N}}{1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \left(4.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \times 69.39 \text{ m}^2} = 1.034$$

Charge

$$q = \frac{W}{A} = \frac{934 \text{ N}}{69.39 \text{ m}^2} = 13.45 \text{ N/m}^2$$



Exemple

Une véhicule se déplaçant à $U_0=100$ m/s freine à l'aide d'un parachute
Calculer la distance S parcourue par le véhicule ainsi que sa vitesse V
après 1, 10, 100 et 1000 s.

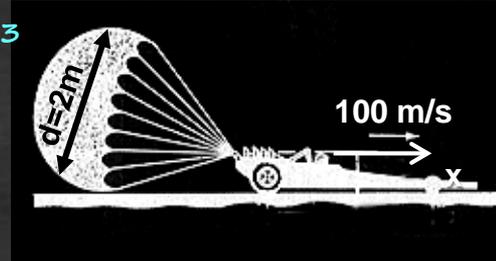
Données: $m = 2000$ Kg; $C_{Dv} = 0.3$; $A_v = 1$ m², $\rho_{air}=1.2$ kg/m³

Solution:

Nous devons trouver une expression pour décrire la position S en fonction du temps t . Le problème est alors en régime transitoire

Si nous trouvons une expression pour la vitesse U , nous pourrions par la suite l'intégrer pour trouver la position S

La loi de la conservation de la quantité de mouvement nous aidera à trouver le comportement de la vitesse



Exemple

2ème loi de Newton, selon x

$$\sum F_x = m \frac{dV}{dt}$$

Les forces appliquées sont la traînée du parachute F_p et celle du véhicule F_v

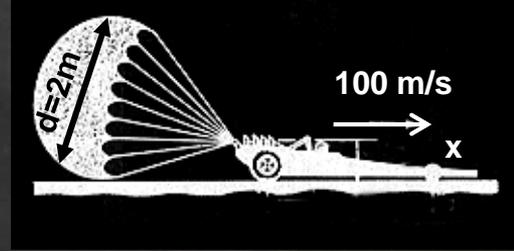
La formule pour calculer chacune de ces forces est

$$F_D = C_D \frac{1}{2} \rho U^2 A$$

de sorte que la traînée totale, $F_D = F_v + F_p$, est:

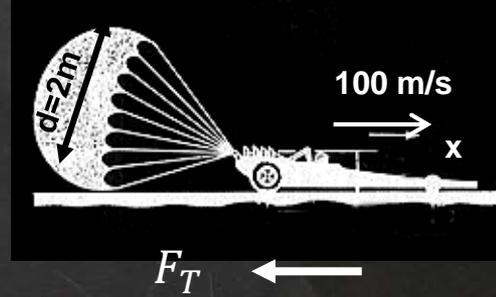
$$F_D = C_{DV} \frac{1}{2} \rho U^2 A_V + C_{DP} \frac{1}{2} \rho U^2 A_P = \frac{1}{2} \rho U^2 (C_{DV} A_V + C_{DP} A_P)$$

Le coefficient de traînée du parachute est trouvé en le modélisant comme un demi cylindre, soit $C_{DP} = 1.2$



Exemple

$$m = 2000 \text{ Kg}; C_{Dv} = 0.3; C_{Dp} = 1.2;$$
$$A_v = 1 \text{ m}^2, \rho_{\text{air}} = 1.2 \text{ kg/m}^3, U_0 = 100 \text{ m/s}$$



L'aire du parachute est $A_p = \pi d^2 / 4$. Alors:

$$1/2 \rho (C_{Dv} A_v + C_{Dp} A_p) = 0.6 \text{ kg/m}^3 (0.3 \times 1 \text{ m}^2 + 1.2 \times \pi (2 \text{ m})^2 / 4) = 2.44 \text{ kg/m}$$

Nous pouvons revenir maintenant à la conservation de la quantité de mouvement avec la force totale $F_T = -2.44 U^2$

$$\sum F_x = m \frac{dU}{dt} \quad \rightarrow \quad -2.44 U^2 = 2000 \frac{dU}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dU}{U^2} = -0.00122 dt$$

(K = 0.0012)

$$\int_{U_0}^U \frac{dU}{U^2} = -K \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad U_0^{-1} - U^{-1} = -Kt \quad \rightarrow \quad U = \frac{U_0}{1 + KU_0 t}$$

Exemple

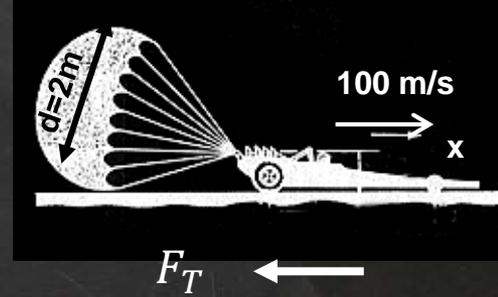
L'intégrale de $U = \frac{U_0}{1 + KU_0 t}$

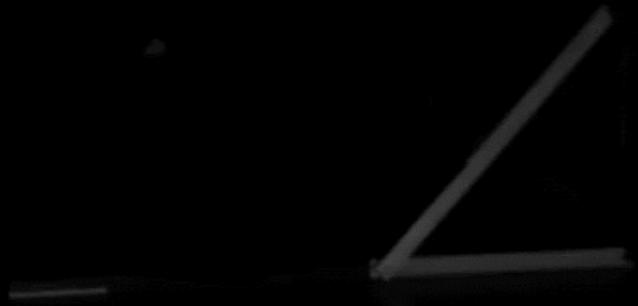
→ $S = \frac{U_0}{\alpha} \ln(1 + \alpha t)$ ($\alpha = KU_0$)

$K = 0.0012 \left[\frac{1}{m} \right], U_0 = 100 \left[\frac{m}{s} \right]$ → $\alpha = 0.12 \left[\frac{1}{s} \right]$

$$S = \frac{100}{0.12} \ln(1 + 0.12t)$$

t(s)	1	10	100	1000
U (m/s)	89	45	7.6	0.8
S (m)	94	654	2110	3940





Chapitre 7: Écoulements externes

7.1

7.2

7.1 Solides placés dans un écoulement

7.2 Calcul de la traînée sur une plaque plane

Les effets visqueux sont beaucoup plus importants dans le sillage et dans une mince région proche des parois. Cette région est appelée **couche limite**.

Dans cette couche, la vitesse de l'écoulement ralentit au fur et à mesure qu'on s'en approche des objets pour finalement s'annuler aux parois.

Couche limite et cisaillement

Alors, pour quantifier les pertes causées par le déplacement d'un objet immergé dues au **frottement**, on utilise **la théorie de la couche limite**

Ce modèle propose **des équations de Navier-Stokes simplifiées** valides dans une mince région près de la paroi.

Dans la suite on étudiera l'écoulement au voisinage **d'une plaque plane** pour en déduire des **formules pour le coefficient de traînée** C_D en fonction du **nombre de Reynolds**.



SKIN FRICTION DRAG





PLAQUE PLANE

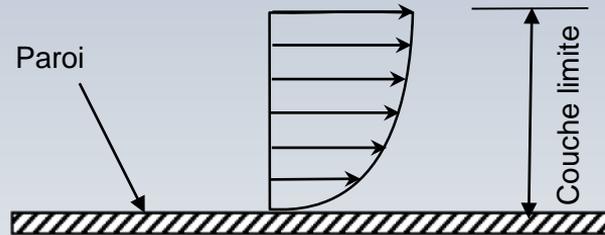
FLAT PLATE





Re=100000

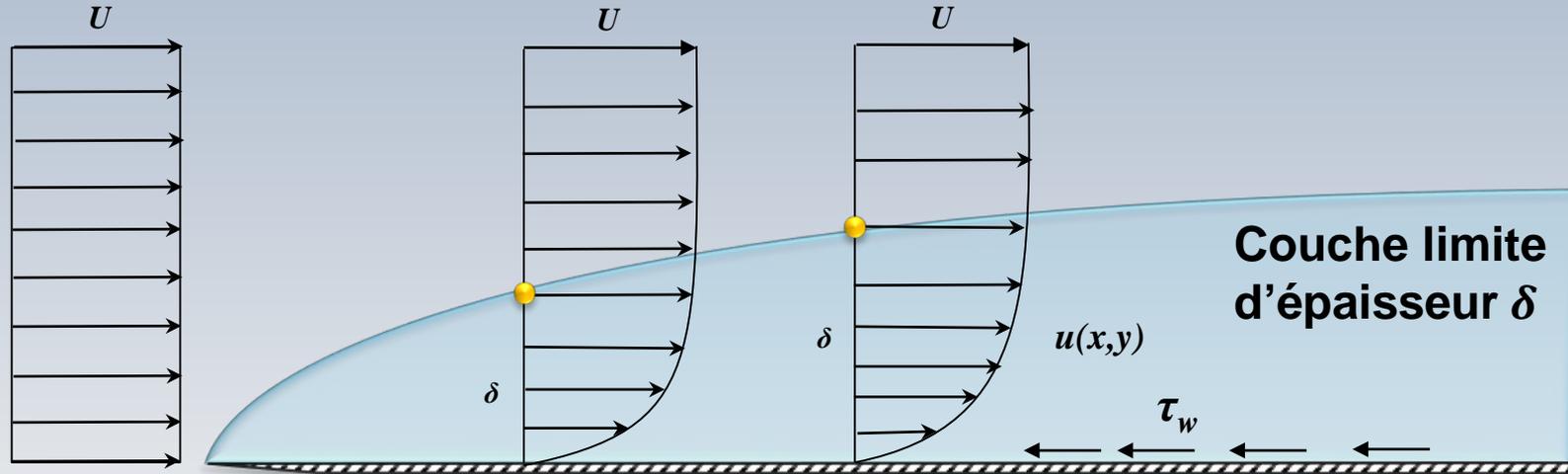
Couche limite: la région proche des parois solides où la vitesse de l'écoulement dévient progressivement nulle



Cette région s'amincit au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

La couche limite sur une plaque plane

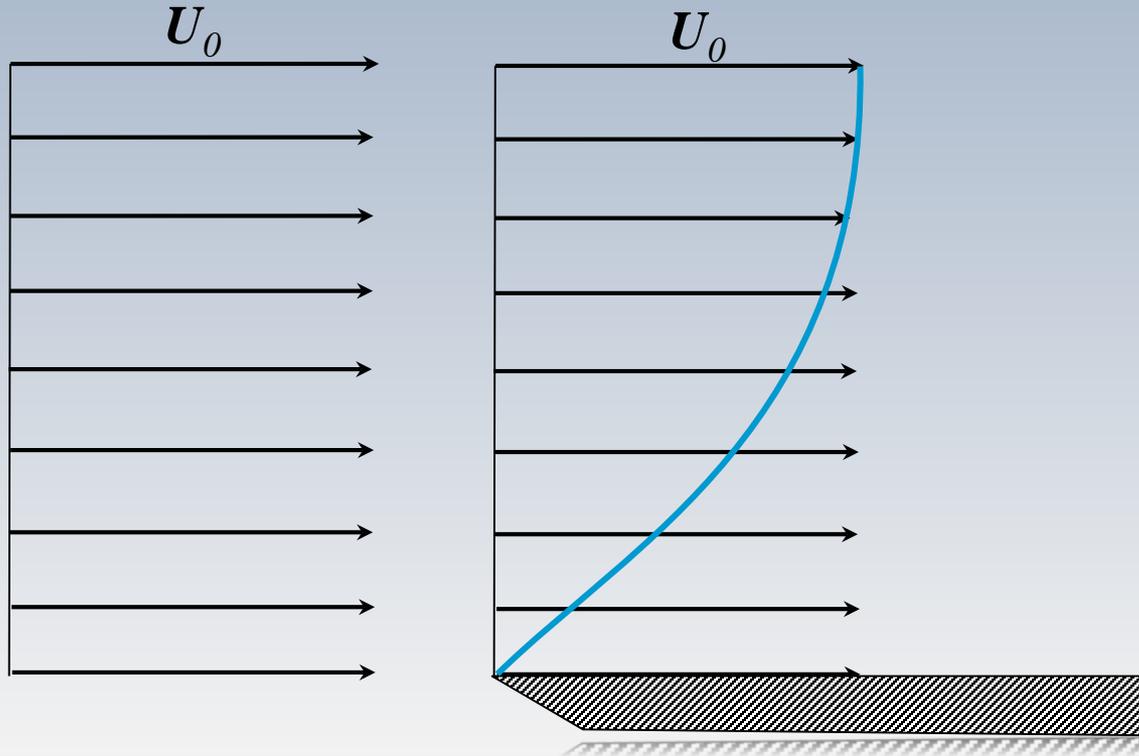
7.2 Calcul de



Pour une vitesse donnée en amont U , la loi de variation de la vitesse $u(x,y)$ dans la couche limite dépend de la viscosité du fluide qui induit un frottement entre les couches voisines: les couches les plus lentes tendent à freiner les couches les plus rapides.

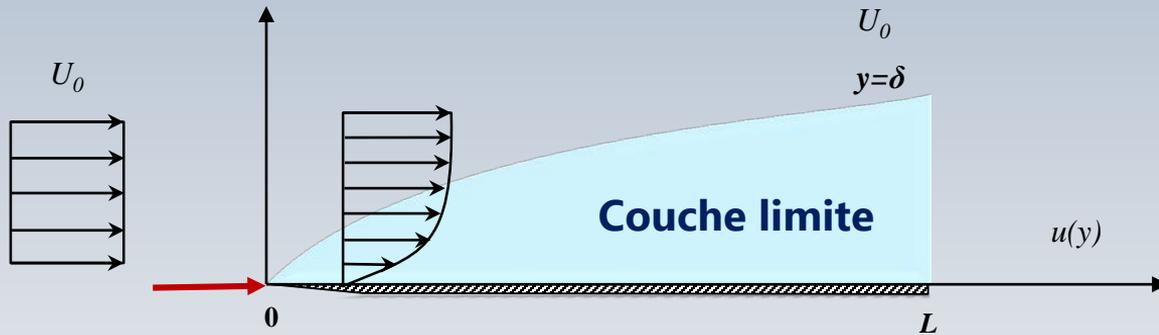
La couche limite: développement I

7.2 Calcul de la...



La couche limite: développement II

7.2 Calcul de la...



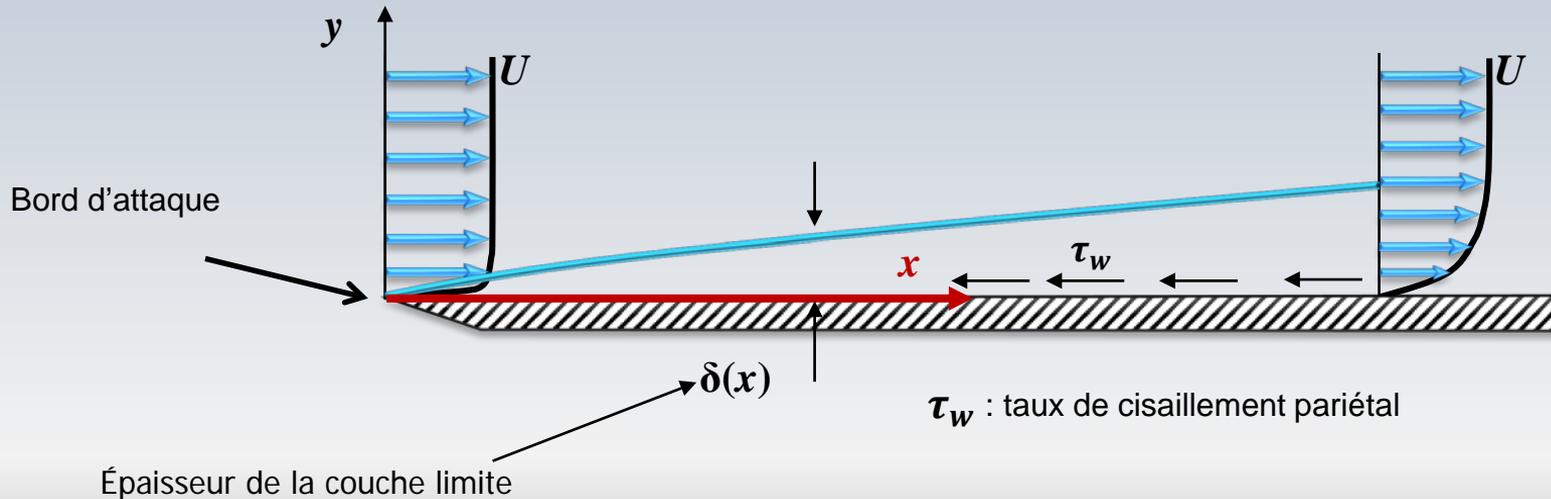
Par convention, l'épaisseur de la couche limite est une distance δ telle que $u(y) = 99\%U_0$

L'échelle verticale dans les dessins pour expliquer la couche limite est **très exagérée**. Par exemple, sur un avion la couche limite est de l'ordre *du dixième de millimètre* au nez du fuselage ou au bord d'attaque des ailes, et *atteint plusieurs centimètres* en queue de l'avion.

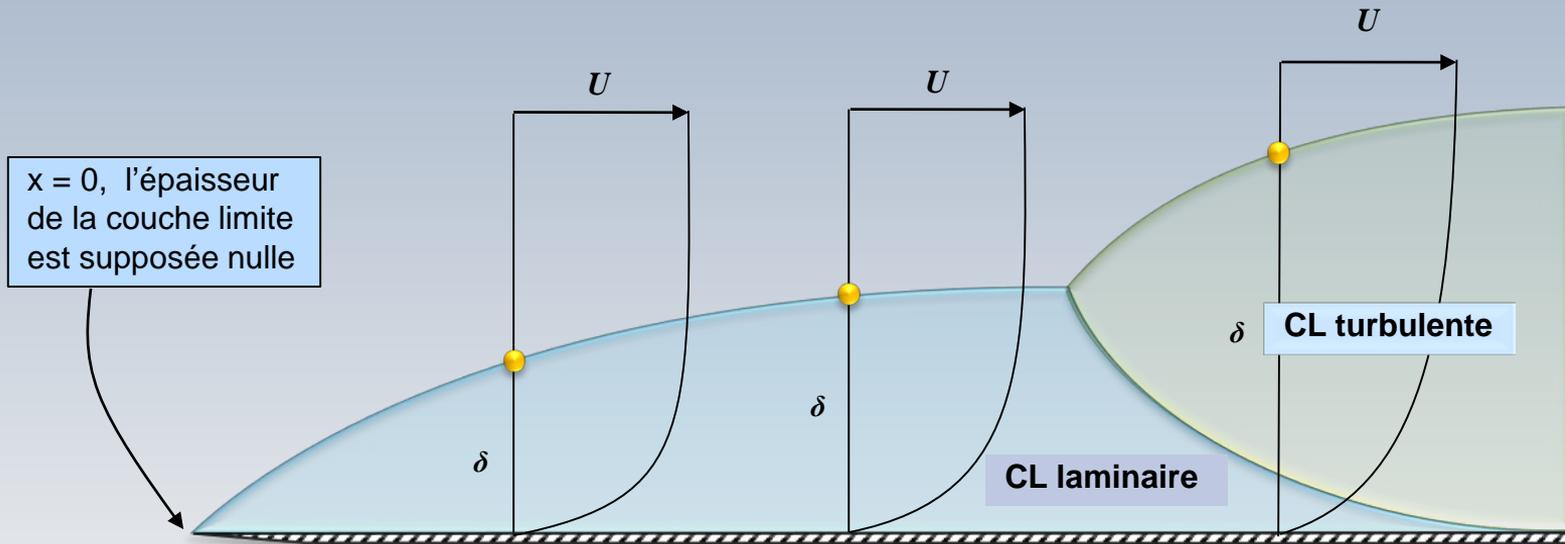
Nombre de Reynolds

7.2 Calcul de la traînée sur une plaque

Le nombre de Reynolds $Re_x = (\rho U x / \mu)$, est **défini à partir du bord d'attaque de la plaque**, et sa valeur change en fonction de la position x

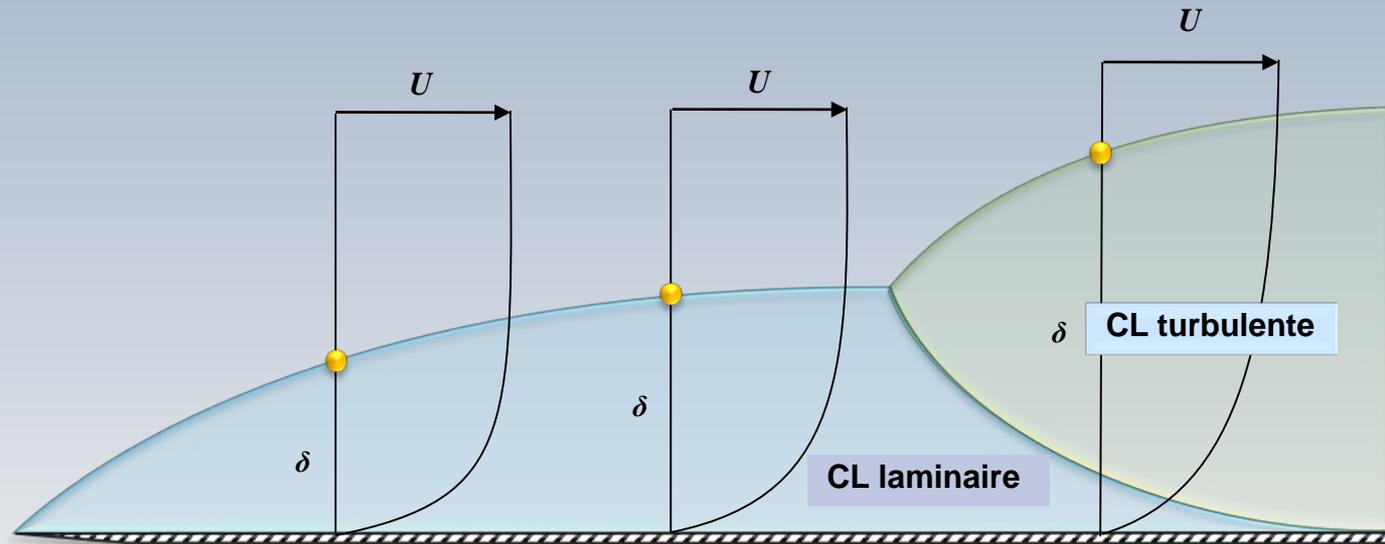


La couche limite sur une plaque plane



De façon similaire à l'étude de l'écoulement dans une conduite, l'évolution de l'épaisseur de la couche limite est fonction du régime de l'écoulement.

La couche limite sur une plaque plane



La **transition** d'une couche limite laminaire à turbulente a lieu approximativement à Reynolds $Re_x = 5 \times 10^5$ ($Re_x = \rho U x / \mu$)



Entry #: V0056

A Computational Laboratory for the Study of Transitional and Turbulent Boundary Layers

Jin Lee & Tamer A. Zaki



JOHNS HOPKINS

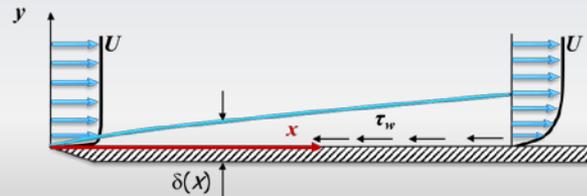
WHITING SCHOOL
of ENGINEERING

Épaisseur δ et nombre de Reynolds

Si on estime que l'épaisseur de la couche limite peut s'exprimer comme $\delta = f(\rho, \mu, x, U)$, l'analyse dimensionnelle conduit à

$$\frac{\delta}{x} = f(Re_x)$$

avec $Re_x = (\rho U x / \mu)$ le nombre de Reynolds, qui est fonction de la position x sur la plaque



Épaisseur δ et nombre de Reynolds

Résultat: Les relations suivantes caractérisant la croissance de la couche limite en fonction de la distance x , mesurée à partir du bord d'attaque

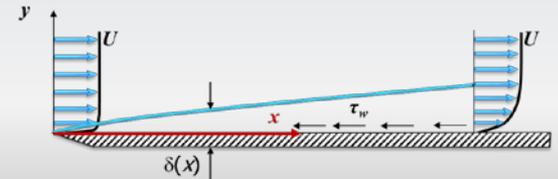


$$\frac{\delta}{x} \approx \begin{cases} \frac{5}{Re_x^{1/2}} \\ \frac{0.16}{Re_x^{1/7}} \end{cases}$$

Laminaire $10^3 < Re_x < 10^6$ Théorie de Blasius

Turbulent $10^6 < Re_x$ Théorie de Prandtl

$$Re_x = \rho U x / \mu$$



Exemple

Un écoulement d'eau (à 68°F , $\nu_{\text{eau}} = 1.09 \times 10^{-5} \text{pi}^2/\text{s}$) se développe parallèlement à une plaque plane avec une vitesse de $20 \text{ pi}/\text{s}$.

A partir de quelle distance x du bord d'attaque de la plaque l'épaisseur de la couche limite atteint $\delta = 1 \text{ po}$?

Formule	$\frac{\delta}{x} \sim \frac{5}{Re_x^{1/2}}$	}	Laminaire	$10^3 < Re_x < 10^6$
donnée			$\frac{0.16}{Re_x^{1/7}}$	Turbulent

Solution

Si on suppose un **écoulement laminaire**, on utilise $\delta/x = 5/(Ux/\nu)^{1/2}$, de sorte que:

$$x = \frac{\delta^2 U / \nu}{5^2} = \frac{(1/12)^2 \times 20 / 1.09 \times 10^{-5}}{5^2} = 511 \text{ pi}$$

$$Re_x = (Ux/\nu) = 9.4 \times 10^8 \quad \longrightarrow \quad \text{Turbulent !}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.16}{Re_x^{1/7}} \quad \longrightarrow \quad x = \left[\frac{\delta(U/\nu)^{1/7}}{0.16} \right]^{7/6} = 5.17 \text{ pi}$$

$$U = 20 \text{ pi/s}$$

$$\delta = 1 \text{ po}$$

$$\nu_{\text{eau}} = 1.09 \times 10^{-5} \text{ pi}^2/\text{s}$$

Les **pertes par frottement** sont concentrées dans la **région pariétale**. Pour estimer le frottement, on regarde alors **la couche limite (CL)**

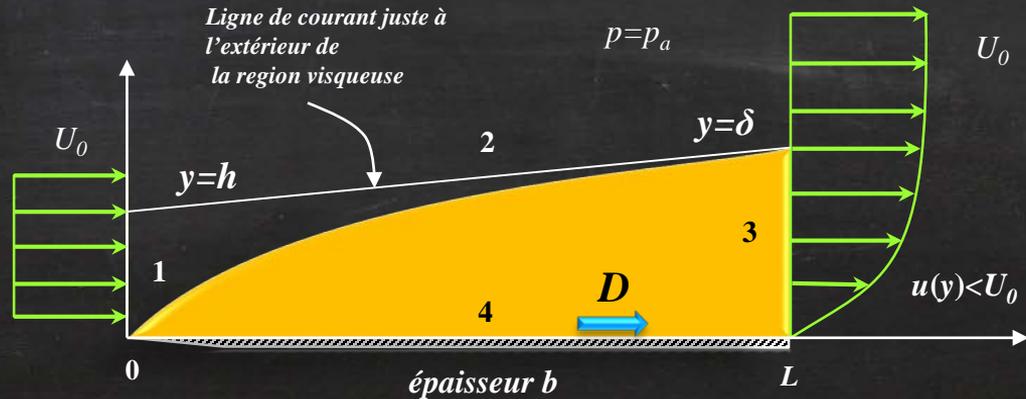
On distingue deux alternatives pour effectuer l'analyse:

- l'approche intégrale de *Théodore Von Karman*,
- la solution de *Heinrich Blasius* sur la forme réduite des équations de Navier-Stokes proposée par *Ludwig Prandtl*.

Les deux approches considèrent d'abord un écoulement laminaire

CALCUL DE LA TRAÎNÉE

Pour calculer la **trainée D de frottement** sur une plaque plane de longueur L et d'épaisseur b , générée par l'arrivée d'un écoulement avec une vitesse uniforme $V = U_0 \hat{i}$, on peut effectuer une analyse intégrale sur la couche limite d'épaisseur δ . L'hypothèse d'un gradient de pression dans la direction de l'écoulement nul est appliquée.



On considère l'état stationnaire et on applique des bilans sur le trapézoïde 1-2-3-4

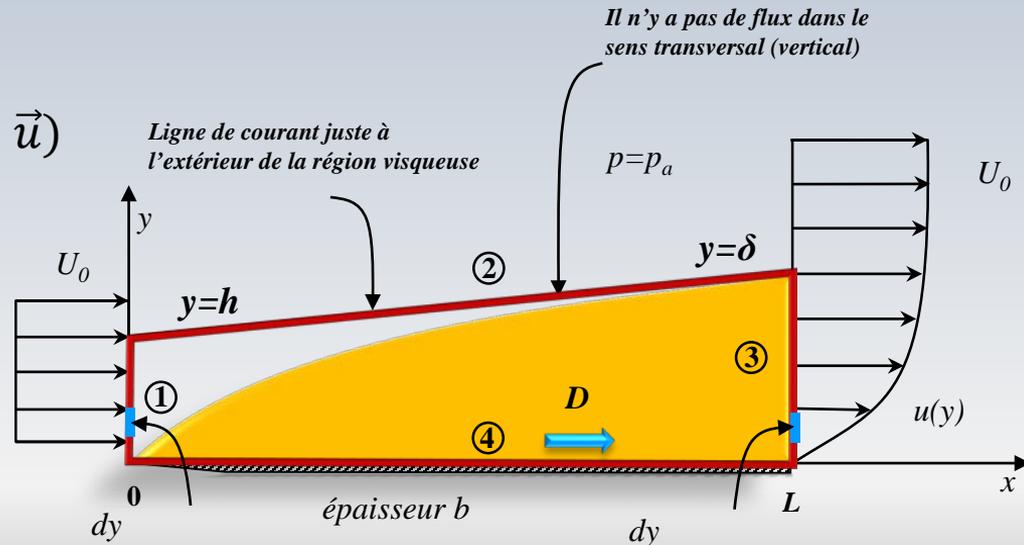
Conservation de la masse

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (\vec{u}_r = \vec{u})$$

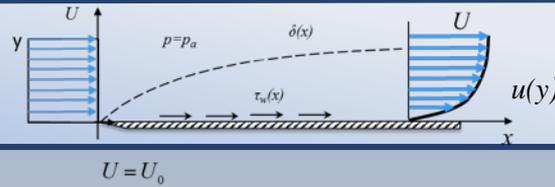
$$\int_0^\delta u(y) dy = U_0 h \quad \Rightarrow \quad h = \int_0^\delta \frac{u(y)}{U_0} dy$$

Sortie

Entrée



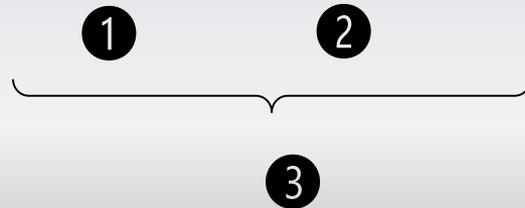
3 amigos



7.2 Calcul de la traînée sur une plaque

Trois quantités: ❶ épaisseur de la couche limite, ❷ épaisseur de déplacement et ❸ épaisseur de la quantité de mouvement ont été définis pour interpréter cette équation pour la traînée

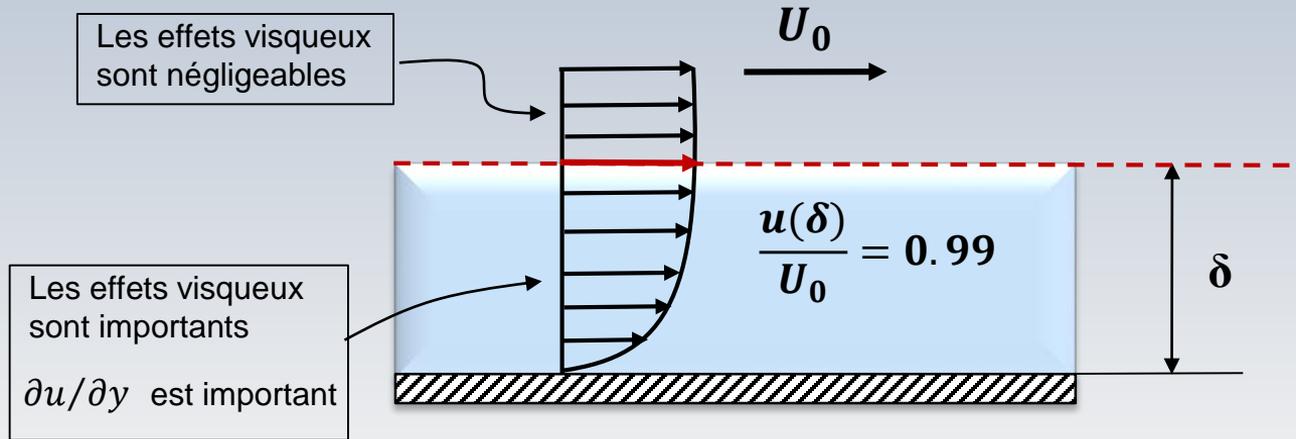
$$D = \rho b U_0^2 \int_0^{\delta} \frac{u(y)}{U_0} \left(1 - \frac{u(y)}{U_0} \right) dy$$



Épaisseur de la couche limite ①



- ① **Épaisseur δ** : distance à la paroi à partir de laquelle la vitesse devient **99%** de la vitesse de l'écoulement uniforme U_0



Épaisseur de déplacement ②

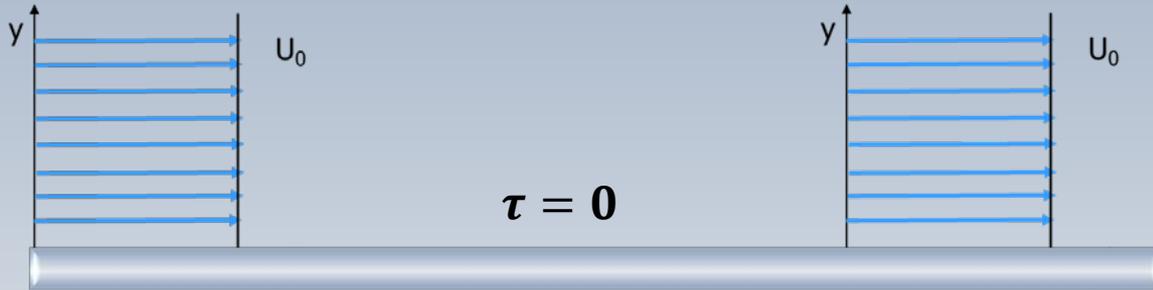


À cause de la condition d'adhérence à la paroi, la vitesse dans la couche limite est inférieure à celle qui aurait lieu si l'écoulement était non visqueux (glissement à la paroi).

Cette réduction de la vitesse entraîne une **diminution du débit**

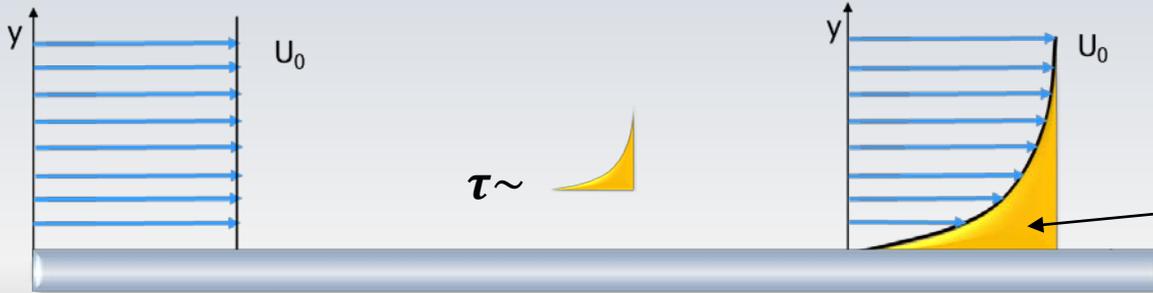
Les figures suivantes illustrent cette réduction

Épaisseur de déplacement ②



Amont

Fluide idéal, non visqueux



Amont

Fluide réel, visqueux

Déficit de débit et
de Q. de Mouv.

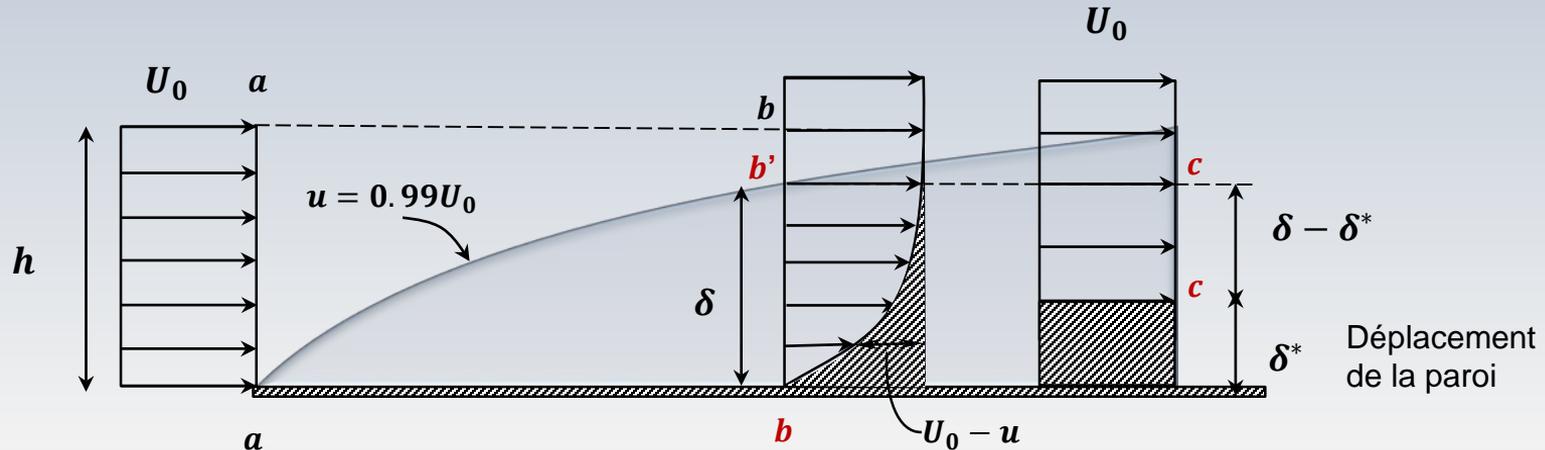


② Pour caractériser **la perte de débit**, on imagine une **distance** δ^* qui indique de combien devrait être déplacé une paroi, dans le sens vertical, pour réduire le débit d'un écoulement inviscide afin qu'il soit équivalent à celui produit par la couche limite visqueuse
La distance δ^* a été appelée **épaisseur de déplacement**

Interprétation de δ^*



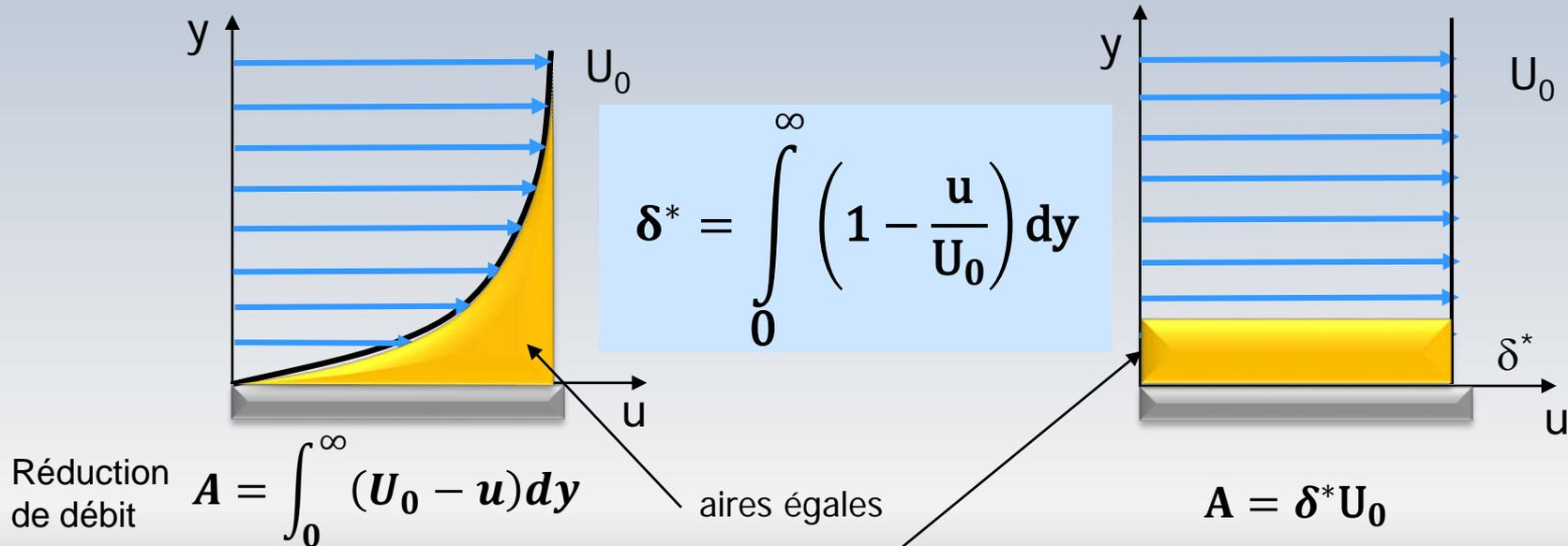
Le débit traversant la face $b-b$ est plus petit que celui traversant la face $a-a$. On imagine alors que la paroi est déplacée d'une épaisseur δ^* , afin que le débit sur la face $(c-c)$ soit le même que celui dans la couche limite $(b-b')$



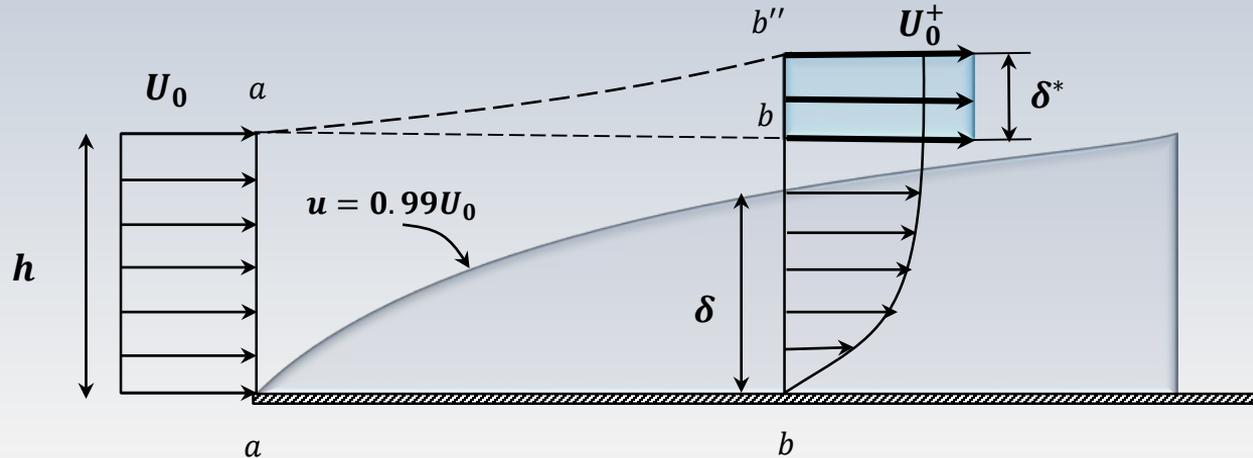
Formule pour δ^*



Une formule pour δ^* peut être déduite en regardant la perte de débit causée par la présence de la couche limite



L'épaisseur de déplacement δ^* n'est qu'une interprétation. En réalité la couche limite induit un débit $U_0 \delta^*$ qui s'ajoute à l'écoulement externe. L'effet de ce débit en incompressible se traduit par une augmentation de la vitesse ($U_0 \rightarrow U_0^+$)



Épaisseur de la Q. de M. ③

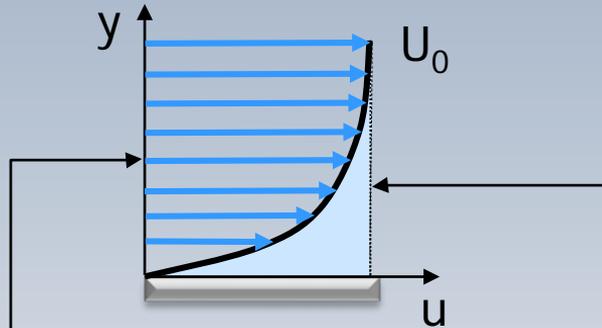


③ L'épaisseur de la quantité de mouvement θ est une **distance** permettant de mesurer les effets visqueux près des parois solides sur la quantité de mouvement

Tel que l'épaisseur de déplacement δ^* caractérise une perte de débit, **l'épaisseur de la quantité de mouvement θ** quantifie une perte de quantité de mouvement

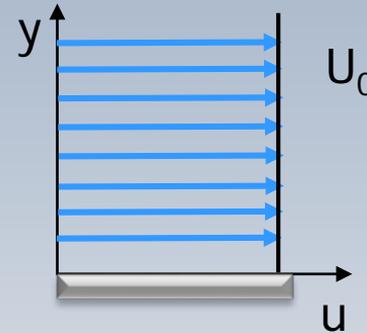
La perte de quantité de mouvement est causé par le ralentissement du fluide proche de la paroi. Cette perte correspond au produit de **θ fois le carré de la vitesse en amont**

Épaisseur de la Q. de M: θ



Réduction de Q. de M.

$$M = \int_0^{\infty} \rho u (U_0 - u) dy$$



$$\rho U_0^2$$

Q. de M. en amont

Quantité équivalente.

$$M = \rho U_0^2 \theta$$

Facteur de réduction de
la Q. de M = Épaisseur de
Q. de M.

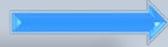
$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0} \right) dy$$

Le cisaillement τ_w et θ

7.2 Calcul de la traînée sur une plaque

Dans l'expression pour la traînée $D(x)$ on distingue le terme θ

$$D(x) = \rho b U_0^2 \underbrace{\int_0^{\delta} \frac{u(y)}{U_0} \left(1 - \frac{u(y)}{U_0} \right) dy}_{\theta}$$

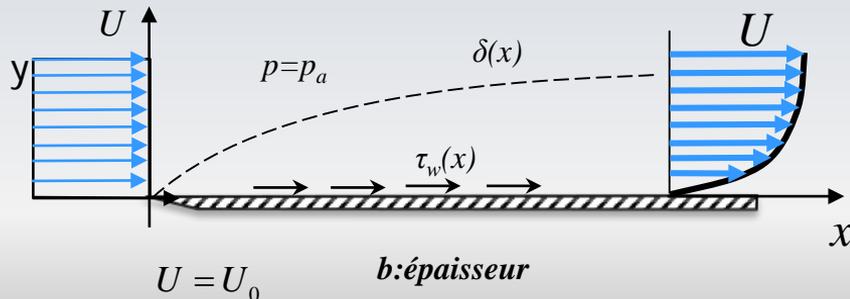


$$D(x) = \rho b U_0^2 \theta$$

mais



$$D(x) = b \int_0^x \tau_w(x) dx$$



Le cisaillement τ_w et θ

7.2 Expressions de...

$$\begin{cases} D(x) = \rho b U_0^2 \theta \\ D(x) = b \int_0^x \tau_w(x) dx \end{cases}$$



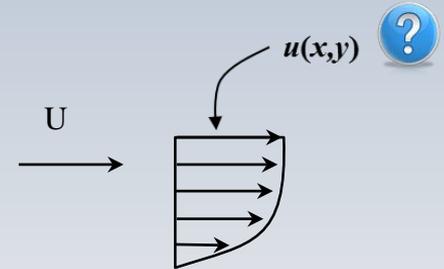
$$\frac{dD}{dx} = \rho b U_0^2 \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{dD}{dx} = b \tau_w$$



$$\tau_w = \rho U_0^2 \frac{d\theta}{dx}$$

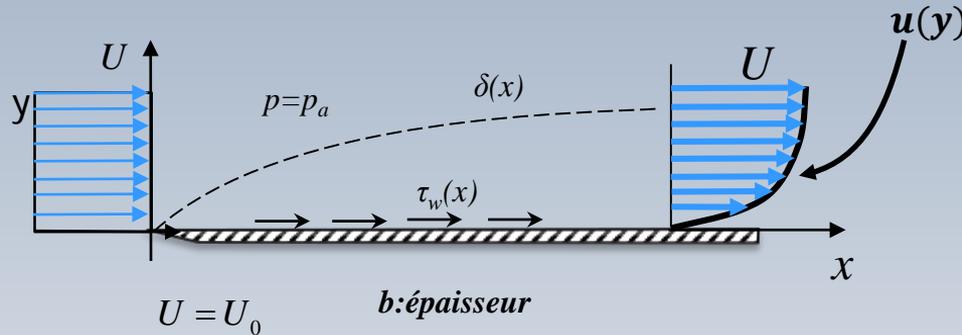
Cisaillement à la paroi



$$\left(\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0} \right) dy \right)$$

Le cisaillement τ_w et θ

7.2 Expressions de...



$$\tau_w = \rho U_0^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Alors, si l'on connaît le profil de vitesse $u(y)/U_0$, on peut évaluer $\theta(x)$, et par la suite $\tau_w(x)$ et $D(x)$

On note que la traînée $D(x)$ est une conséquence de la réduction de la quantité mouvement, représentée par une augmentation de θ

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy$$

Résumé de formules I

7.2 Calcul de la ...

Paramètre	Définition
U_0	Vitesse extérieure à la couche limite
x, y	Coordonnées alignée (x) et transversale (y) par rapport à la plaque
$u(x, y)$	Vitesse parallèle à la plaque
$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$	Nombre de Reynolds
$\delta(x)$	Épaisseur de la couche limite
$\delta^*(x) = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy$	Épaisseur de déplacement

Résumé de formules II

7.2 Calcul de la ...

Paramètre	Définition
$\theta(x) = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy$	Épaisseur de quantité de mouvement
$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right _{y=0} = \rho U_0^2 \frac{d\theta}{dx}$	Contrainte de frottement pariétale
$C_f(x) = \tau_w / (1/2 \rho U_0^2)$	Coefficient de frottement (local)
$D(x) = b \int_0^x \tau_w dx = \rho b U_0^2 \theta(x)$	Force de traînée exercée sur une plaque de longueur x et de largeur b
$C_D = \frac{D(L)_w}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 b L} = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(x) dx$	Coefficient de traînée pour une plaque de longueur L et de largeur b

Solution de von Kármán



Les formules précédentes ne sont utiles que si l'on dispose d'une expression (analytique ou numérique) pour la vitesse de l'écoulement $u(x,y)$ * dans la couche limite pour calculer $\theta(x)$.

Pour **un écoulement laminaire**, von Kármán a proposé **un profil parabolique** décrivant la vitesse dans la couche limite

$$u(x, y) = U \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)$$

*Les profils de vitesse sont similaires d'une position x à l'autre

Solution de von Kármán



Après développement, la solution de von Karman même à :

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5.5}{Re_x^{1/2}}$$


$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{1/2 \rho U^2} = \frac{0.73}{Re_x^{1/2}}$$

Coefficient de traînée local

Pour voir le développement

$$\delta^* = \frac{\delta}{3}$$

$$\theta = \frac{2}{15} \delta$$

$$\tau_w = \mu \frac{2}{\delta} U$$

$$Re_x^{1/2} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{1/2}$$

Exemple 7.2

Un écoulement de type couche limite sur une plaque plane est étudié pour une vitesse extérieure $U = 1 \text{ pi/s}$. La longueur de la plaque est de $L=1 \text{ pi}$. Calculer l'épaisseur δ de la CL au niveau du bord de fuite de la plaque pour : a) de l'air à 68°F b) de l'eau à 68°F : $\nu_{\text{air}}=1.61 \times 10^{-4} \text{ pi}^2/\text{s}$, $\nu_{\text{eau}}=1.08 \times 10^{-5} \text{ pi}^2/\text{s}$

Solution

a)

$$\text{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = 6200 \quad \longrightarrow \quad \text{Écoulement laminaire} \quad \frac{\delta}{x} \approx \frac{5.0}{\text{Re}_x^{1/2}} = 0.0634 \quad \xrightarrow{x = 1\text{pi}} \quad \delta \approx 0.76 \text{ po}$$

b)

$$\text{Re}_L = \frac{UL}{\nu} = 92600 \quad \longrightarrow \quad \text{Écoulement laminaire} \quad \frac{\delta}{x} \approx \frac{5.0}{\text{Re}_x^{1/2}} = 0.0164 \quad \xrightarrow{x = 1\text{pi}} \quad \delta \approx 0.20 \text{ po}$$

L'approche de Prandtl-Blasius se base sur la résolution des équations de Navier-Stokes simplifiées près de la paroi.

Le concept, qui a révolutionné la mécanique des fluides, a été présenté en 1904 au Congrès International de Mathématiques à Heidelberg. Le titre original du travail historique de Ludwig Prandtl était "*Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*"

Ludwig Prandtl 1875-1953

7.2 Calcul de la traînée sur



Sonderabdruck
aus den „Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses,
Heidelberg 1904.“
Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1905, S. 484 bis 491.

Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.

Von

L. PRANDTL aus Hannover.

(Hierzu eine Figurentafel.)

In der klassischen Hydrodynamik wird vorwiegend die Bewegung der *reibunglosen* Flüssigkeit behandelt. Von der *reibenden Flüssigkeit* besitzt man die Differentialgleichung der Bewegung, deren Ansatz durch physikalische Beobachtungen wohl bestätigt ist. An Lösungen dieser Differentialgleichung hat man außer eindimensionalen Problemen, wie sie u. a. von Lord Rayleigh*) gegeben wurden, nur solche, bei denen die Trägheit der Flüssigkeit vernachlässigt ist, oder wenigstens keine Rolle spielt. Das zwei- und dreidimensionale Problem mit Berücksichtigung von Reibung *und* Trägheit harret noch der Lösung. Der Grund hierfür liegt wohl in den unangenehmen Eigenschaften der Differentialgleichung. Diese lautet in Gibbsscher Vektorsymbolik**)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \circ \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla (V + p) = k \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

(\mathbf{v} Geschwindigkeit, ρ Dichte, V Kräftefunktion, p Druck, k Reibungskonstante); dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung: für inkompressible Flüssigkeiten, die hier allein behandelt werden sollen, wird einfach

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Suite à l'hypothèse d'une épaisseur de la couche limite δ très petite par rapport à la longueur L ($\delta/L \ll 1$), Prandtl a montré que certains termes dans les équations de Navier-Stokes jouent un rôle négligeable par rapport à d'autres. Après plusieurs étapes de simplification, on peut trouver pour un écoulement stationnaire, $2D$, en régime incompressible, les équations simplifiées:

Les équations de la CL

7.2 Calcul de la traînée sur

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Conditions aux limites

en $y = 0$: $u = v = 0$ (adhérence à la paroi)

en $y = \delta(x)$: $u = U(x)$

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx}$$

à l'extérieur de la CL

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = p(x)$$



GRENZSCHICHTEN IN FLÜSSIGKEITEN
MIT KLEINER REIBUNG

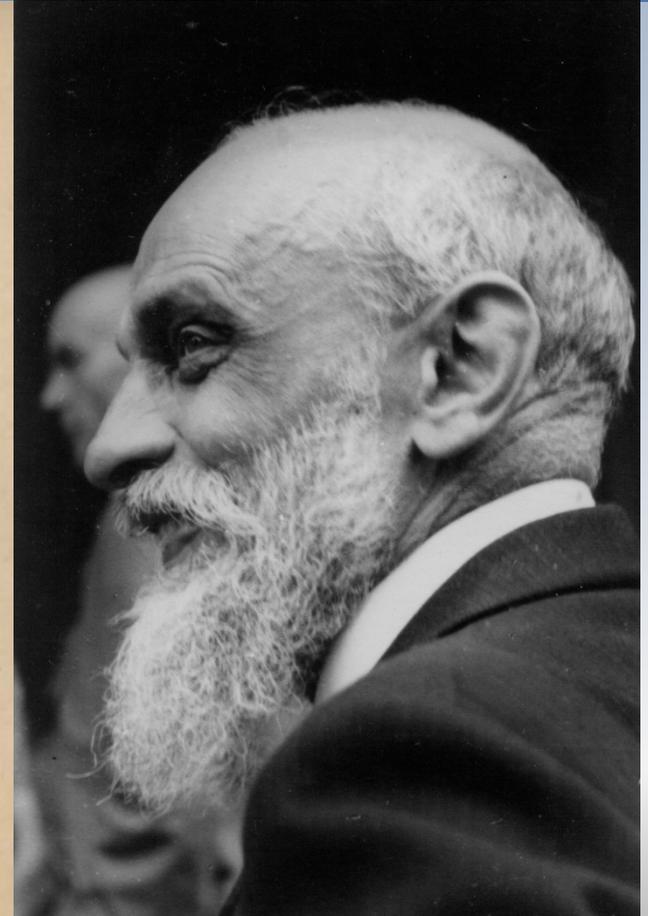
INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT GEORGIA AUGUSTA
ZU GÖTTINGEN

VORGELEGT VON

H. BLASIUS

AUS BERLIN



Solution de Blasius (1908)

H. Blasius (élève de Prandtl) a montré que, si on utilisait un changement de variable basé sur la fonction de courant, **tous les profils de vitesse dans la couche limite pouvaient être obtenus d'une seule solution.** Il a trouvé l'expression

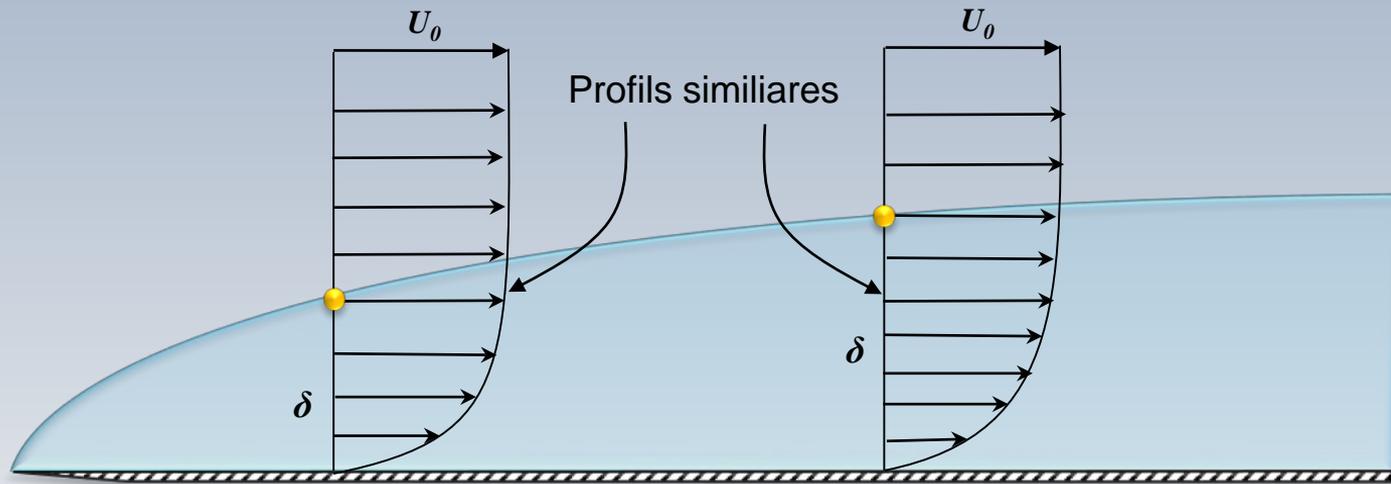
$$\frac{u}{U} = f'(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = y \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2}$$

Où η représente une distance adimensionnelle.

En substituant dans les équations de la couche limite en **2D**, Blasius a obtenu une équation différentielle ordinaire pour f .
Notamment:

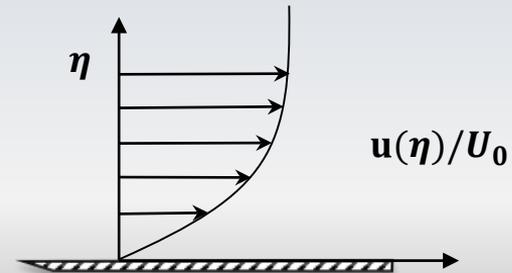
Solution de Blasius (1908)

7.2 Calcul de la traînée sur



$$\eta = y \left(\frac{U_0}{\nu x} \right)^{1/2}$$

Un seul profil



Solution de Blasius (1908)

7.2 Calcul de la traînée sur

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



$$f''' + \frac{f f''}{2} = 0$$

Équation différentielle
de troisième ordre

$$\eta = 0, f = f' = 0$$
$$\eta \rightarrow \infty, f'(\infty) = 1$$

Conditions aux frontières

Sst.\$# Col%!& Fk*

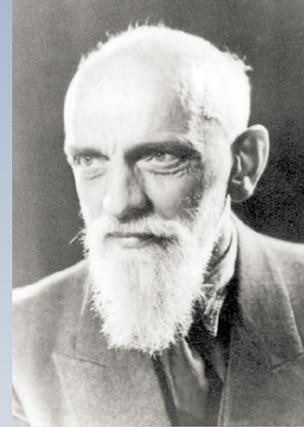


Tableau pour la
solution laminaire

$$\eta = y \left(\frac{U_0}{\nu x} \right)^{1/2}$$

Écoulement laminaire sur une plaque plane

η : distance normalisée à la paroi

η	η - $f(\eta)$	$f(\eta)$	$f^{(1)}(\eta)$	$f^{(2)}(\eta)$
0	0	0	0	0.3321
1	0.8344	0.1656	0.3298	0.3230
2	1.6032	0.6500	0.6298	0.2667
3	1.6942	1.3968	0.8461	0.1613
4	1.7166	2.3058	0.9555	0.0643
5	1.7202	3.2834	0.9916	0.0159
6	1.7206	4.2798	0.9990	0.0024
7	1.7205	5.2794	1.0000	0.0002
8	1.7205	6.2795	1.0000	0.0000
9	1.7204	7.2795	1.0000	0.0000
10	1.7157	8.2796	1.0000	0.0000

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.0}{\text{Re}_x^{1/2}}$$



$$\delta_{99\%} \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} \approx 5.0$$

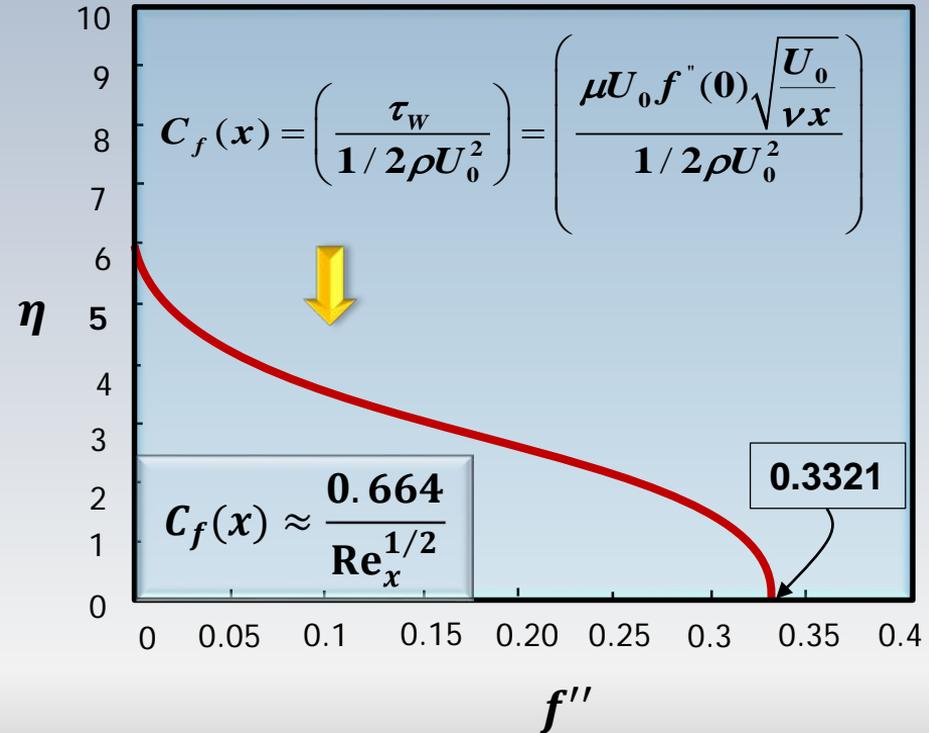
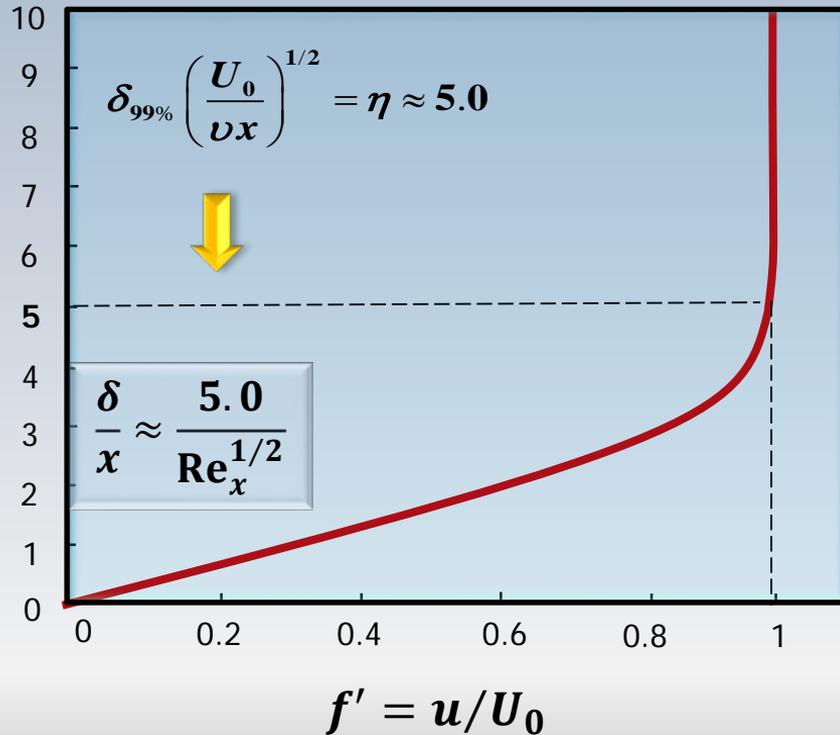
$$f^{(1)}(\eta) = \frac{u}{U_0}$$

$$f^{(2)}(0) = \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_0$$

→ τ

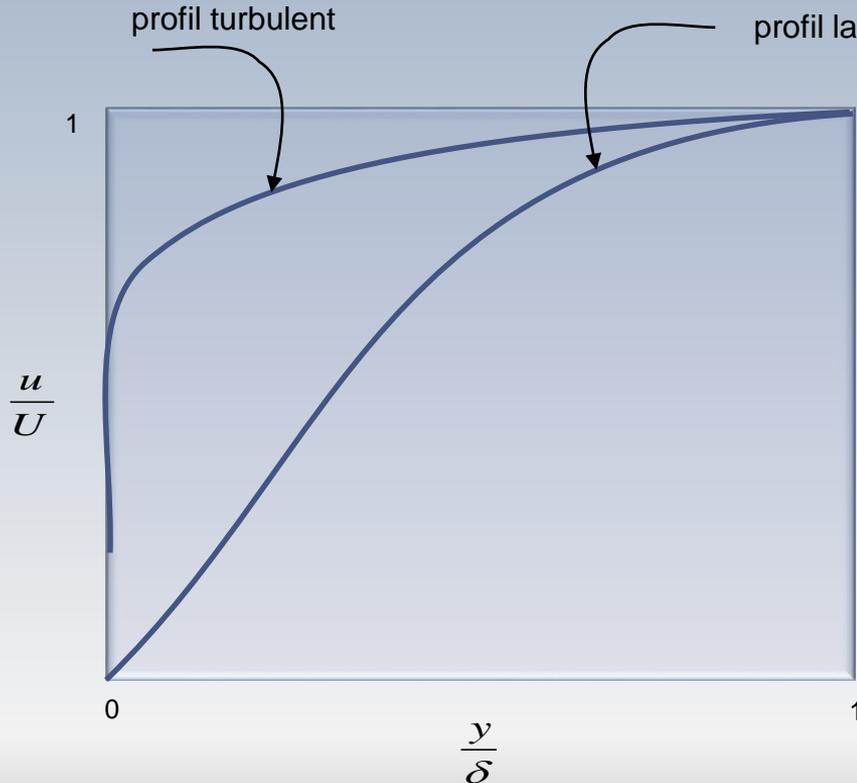
Solution de Blasius (1908)

$$\eta = y \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2}$$



La couche limite sur une plaque plane

7.2 Calcul de



- La solution de Blasius est similaire à celle qu'on obtient si on suppose un profil parabolique pour décrire la couche limite. Ce n'est pas le cas pour les profils turbulents (profils plats)
- Avec un profil parabolique imposé, l'épaisseur de la quantité de mouvement est obtenue à 10% près

Solution de Blasius

La solution de Blasius, mène a:

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5}{Re_x^{1/2}}$$

$$\frac{\delta^*(x)}{x} = \frac{1.721}{Re_x^{1/2}},$$

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}$$

$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{1/2 \rho U^2} = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \tau_w dx = \rho U^2 \left(\frac{0.332}{Re_x^{1/2}} \right) dx \Rightarrow$$

Coefficient de traînée local

$$Re_x^{1/2} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{1/2}$$

La force totale de traînée sur une plaque de longueur L , par unité de profondeur, est alors donnée par

$$\Rightarrow D = 0.332\rho U^2 \int_0^L \left(\frac{v}{Ux}\right)^{1/2} dx \quad \Rightarrow \quad D = 0.664\rho U^2 L \left(\frac{v}{UL}\right)^{1/2}$$

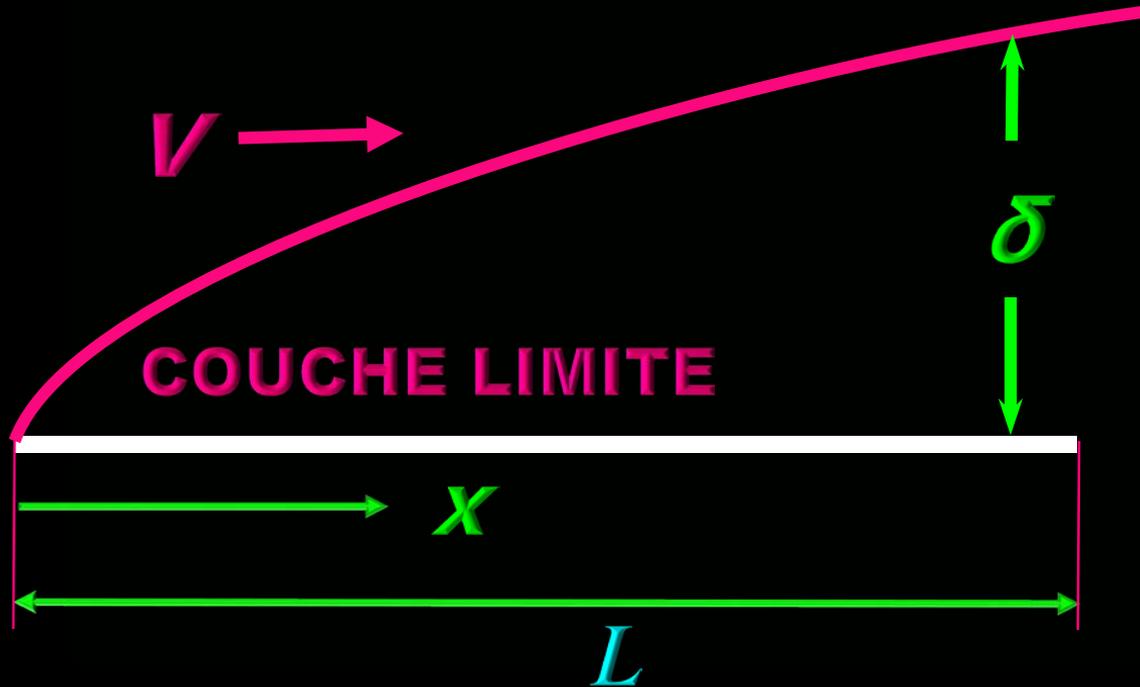
$Re_x^{-1/2}$

On peut définir alors **le coefficient de friction global** comme le rapport entre *la force de traînée* D et la force qui serait exercée par **la pression dynamique** $\rho U^2/2$ sur la plaque, soit:

$$C_D = \frac{D}{1/2 (\rho U^2)L} = 1.328 Re_L^{-1/2}$$

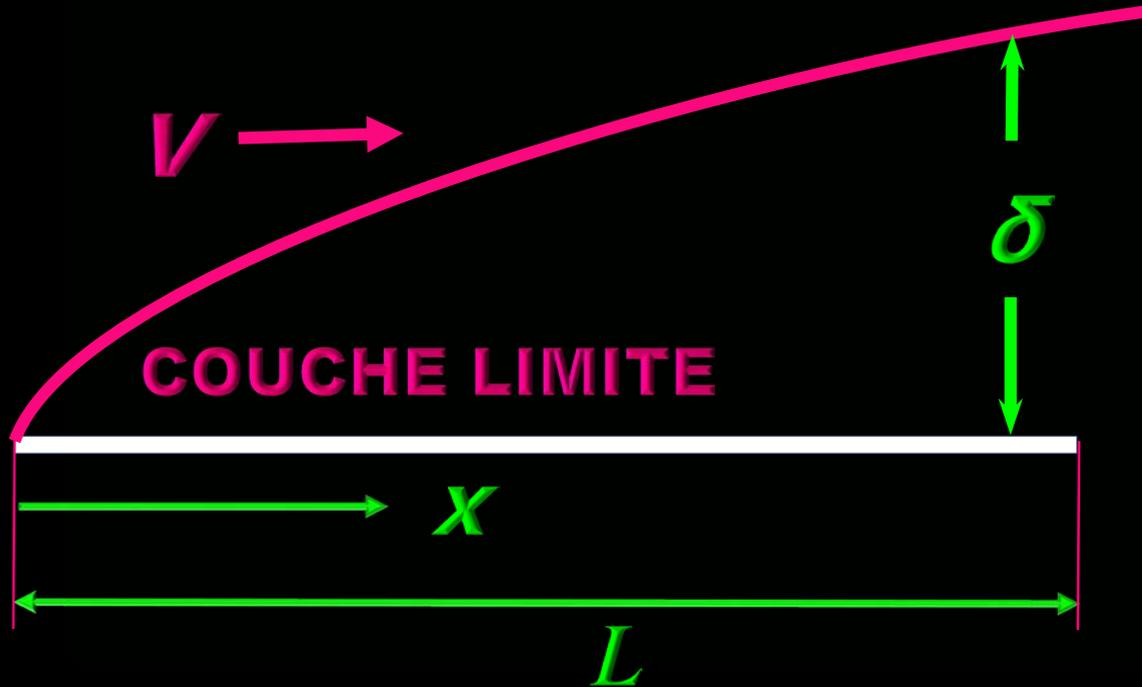
$$\frac{\delta}{L} = \frac{5}{\sqrt{Re_L}}$$

$$Re_x^{1/2} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{1/2}$$



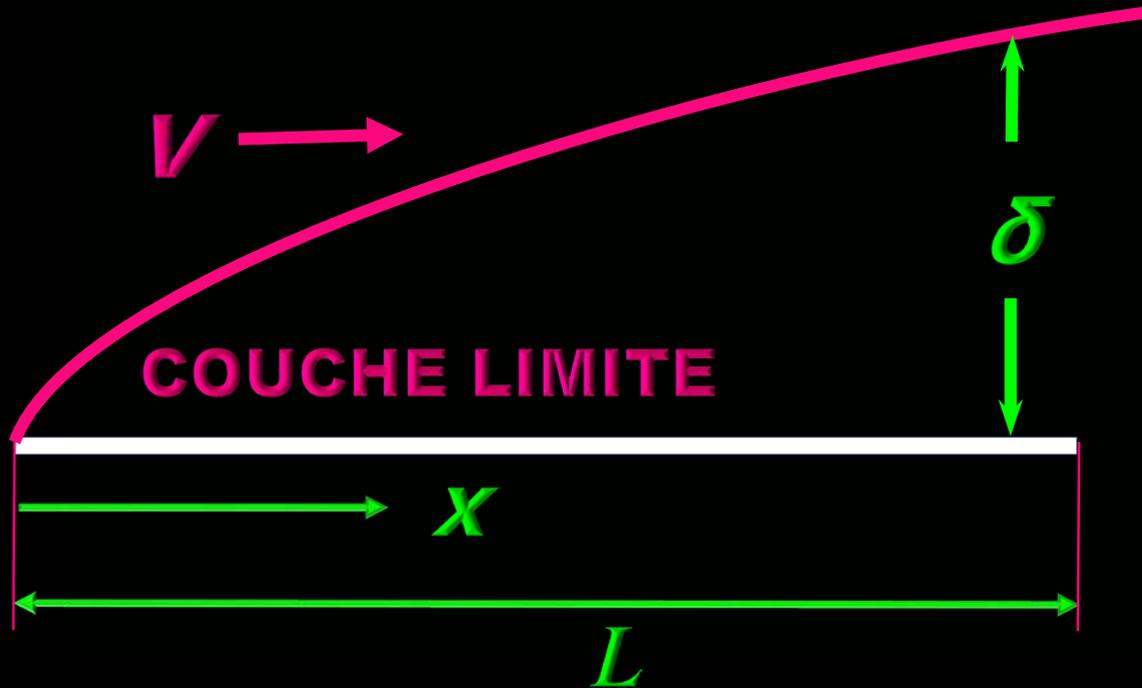
$$C_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}}$$

$$Re_x^{1/2} = \left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{1/2}$$



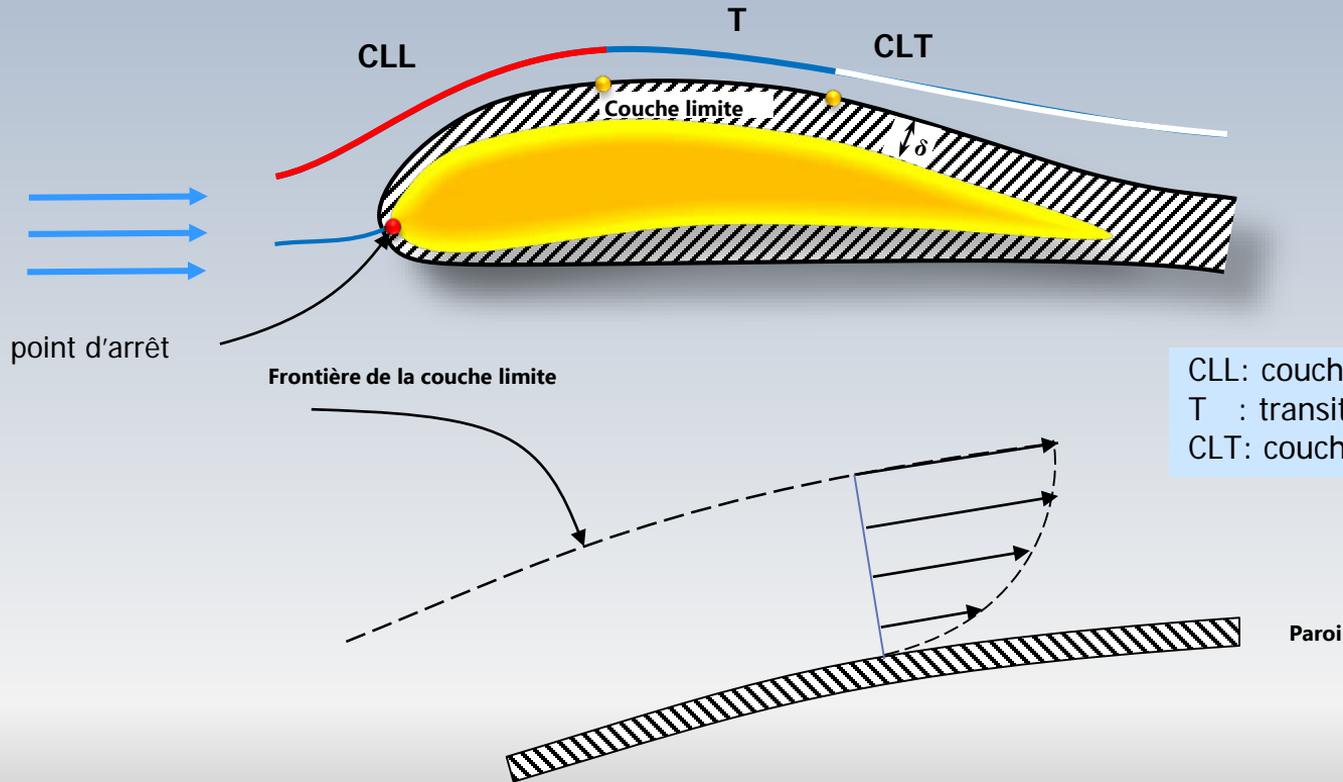
$$D = \frac{0.664 \rho U^2 L}{\sqrt{Re_L}}$$

$$Re_x^{1/2} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{1/2}$$



- Pour des écoulements laminaires, la valeur du coefficient de friction obtenue pour le cas d'une plaque plane, est une bonne approximation pour les corps profilés pourvu que *l'angle entre le corps et la direction de l'écoulement soit faible.*
- Les formules développées pour la plaque plane cessent d'être valables lorsque la couche limite devient turbulente ou bien si l'angle entre le solide et l'écoulement est suffisamment fort pour entraîner un décollement.

CL sur un profil



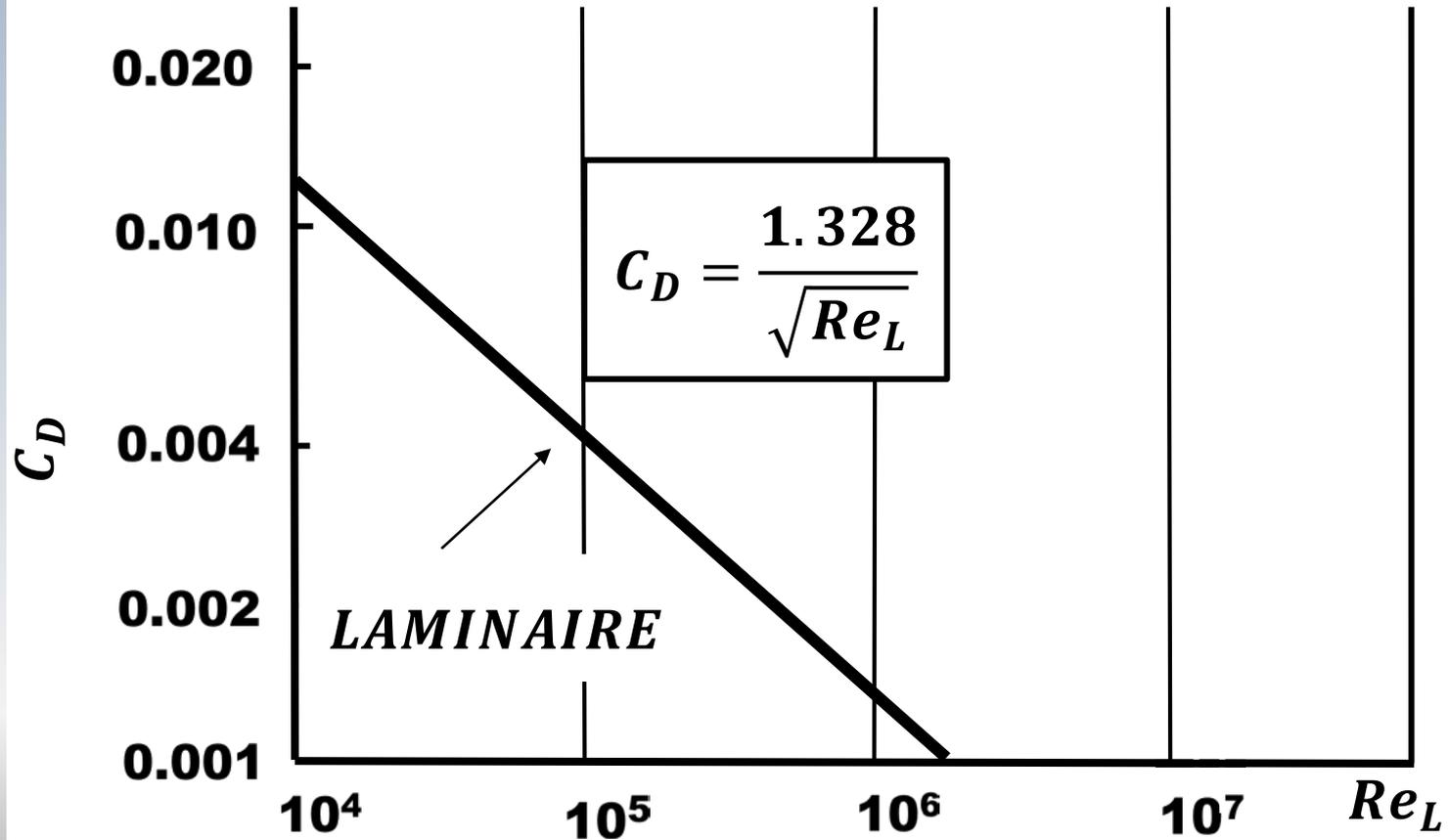
Blasius sur une plaque

Écoulement laminaire

Paramètre	Définition
$\delta(x) = \frac{5x}{Re_x^{1/2}}$	Épaisseur de la couche limite à la position x
$\tau_w = \frac{0.332\rho U_0^2}{Re_x^{1/2}}$	Contrainte locale de cisaillement pariétal
$C_f(x) = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}$	Coefficient de frottement local
$C_D = 1.328Re_L^{-1/2}$	Coefficient de traînée global pour une plaque de longueur L

Coefficient de traînée

Écoulement laminaire



Connaissant la vitesse en amont de l'écoulement U , la viscosité cinématique du fluide ν , ainsi que la longueur de la plaque L , on peut obtenir le nombre Reynolds Re_L et, par la suite, le coefficient de traînée global C_D

$$C_D = 1.328 Re_L^{-\frac{1}{2}}$$

Puisque C_D correspond à la traînée référée au terme $1/2\rho U^2$, **la force de traînée** est simplement donnée par:

$$D = C_D A \rho U^2 / 2$$

Aire caractéristique 

Exemple 7.3

Une **couche limite laminaire** se développe sur une plaque plane d'une longueur $L = 50 \text{ cm}$ et d'une largeur $b = 3 \text{ m}$. La vitesse extérieure est de $U = 2.5 \text{ m/s}$.

Calculer **la traînée** sur une face de la plaque ainsi que **l'épaisseur de la couche limite** au bord de fuite pour:

- a) Air à 20°C et 1 atm (101.3 kPa),
- b) Eau à 20°C et 1 atm

a) Air : $v = 15.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

1) Le nombre de Reynolds

$$\text{Re}_L = \frac{UL}{\nu_{\text{air}}} = 82726 < 5 \times 10^5$$

→ Écoulement laminaire

2) Calcul de la traînée

$$C_D = \frac{1.328}{\text{Re}_L^{1/2}} = 4.6 \times 10^{-3} \rightarrow$$

$$D_{\text{face}} = C_D \frac{\rho}{2} U^2 bL \approx 0.026 \text{ N} \quad \checkmark$$

Exemple 7.3

Une **couche limite laminaire** se développe sur une plaque plane d'une longueur $L = 50 \text{ cm}$ et d'une largeur $b = 3 \text{ m}$. La vitesse extérieure est de $U = 2.5 \text{ m/s}$.

Calculer **la traînée** sur une face de la plaque ainsi que **l'épaisseur de la couche limite** au bord de fuite pour:

- a) Air à 20°C et 1 atm (101.3 kPa),
- b) Eau à 20°C et 1 atm

a) Air : $\nu = 15.1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

3) Calcul de l'épaisseur

$$\text{Re}_L = 82726$$

$$\delta/L = 5/\text{Re}_L^{1/2} = 0.0173$$

$$\delta_{x=L} = 8.7 \text{ mm} \quad \delta_{x=L} = 8.7 \text{ mm}$$

Exemple 7.3

Une **couche limite laminaire** se développe sur une plaque plane d'une longueur $L = 50 \text{ cm}$ et d'une largeur $b = 3 \text{ m}$. La vitesse extérieure est de $U = 2.5 \text{ m/s}$.

Calculer **la traînée** sur une face de la plaque ainsi que **l'épaisseur de la couche limite** au bord de fuite pour:

- a) Air à 20°C et 1 atm (101.3 kPa),
- b) Eau à 20°C et 1 atm

b) Eau : $v = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

1) Le nombre de Reynolds

$$\text{Re}_L = \frac{UL}{\nu_{\text{eau}}} = 1.25 \times 10^6$$

→ Probablement turbulent

2) Calcul de la traînée (laminaire)

$$C_D = \frac{1.328}{\text{Re}_L^{1/2}} = 1.2 \times 10^{-3} \quad \rightarrow$$

$$D_{\text{face}} = C_D \frac{\rho}{2} U^2 bL \approx 5.6 \text{ N} \quad \text{Re} = 1.25 \times 10^6$$

Exemple 7.3

Une **couche limite laminaire** se développe sur une plaque plane d'une longueur $L = 50 \text{ cm}$ et d'une largeur $b = 3 \text{ m}$. La vitesse extérieure est de $U = 2.5 \text{ m/s}$.

Calculer **la traînée** sur une face de la plaque ainsi que **l'épaisseur de la couche limite** au bord de fuite pour:

- a) Air à 20°C et 1 atm (101.3 kPa),
- b) Eau à 20°C et 1 atm

b) Eau : $\nu = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

3) Calcul de l'épaisseur

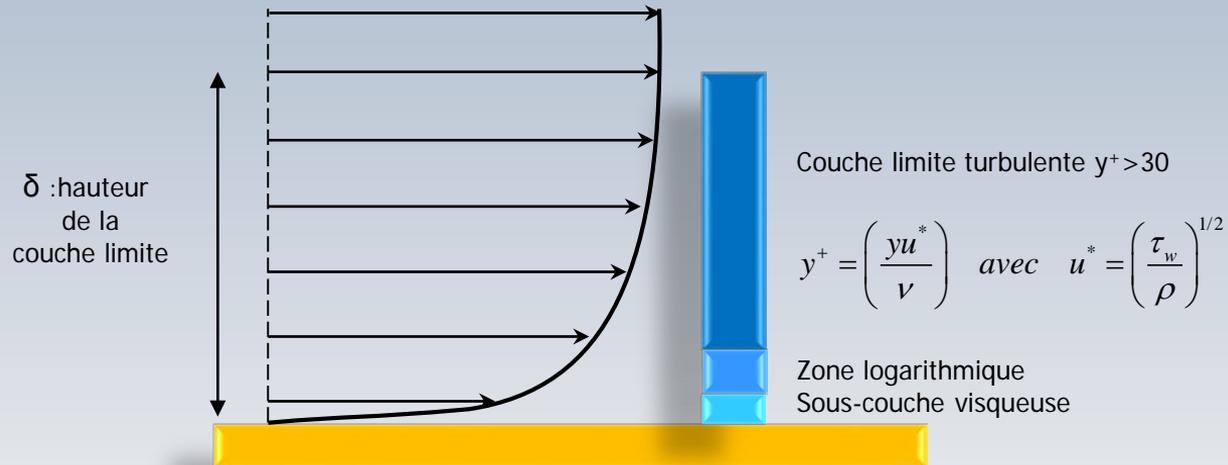
$$\text{Re}_L = 1.25 \times 10^6$$

$$\delta/L = 5/\text{Re}_L^{1/2} = 0.00448$$

$$\delta_{x=L} = 2.2 \text{ mm} \quad \checkmark$$

Couche limite turbulente

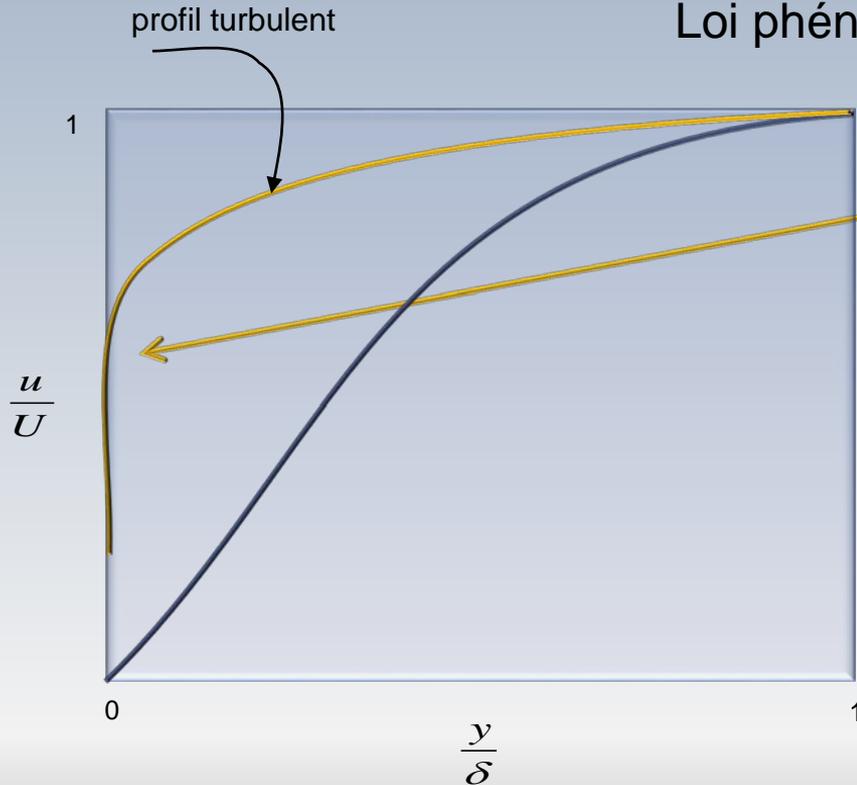
7.2 Calcul de la traînée sur



Couche limite turbulente

7.2 Calcul de la traînée sur

Loi phénoménologique suggérée par l'expérience



$$\left(\frac{u}{U}\right)_{turb} \approx \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (\text{Prandtl})$$

$$\theta = \frac{7}{72} \delta$$

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{\text{Re}_x^{1/7}}$$

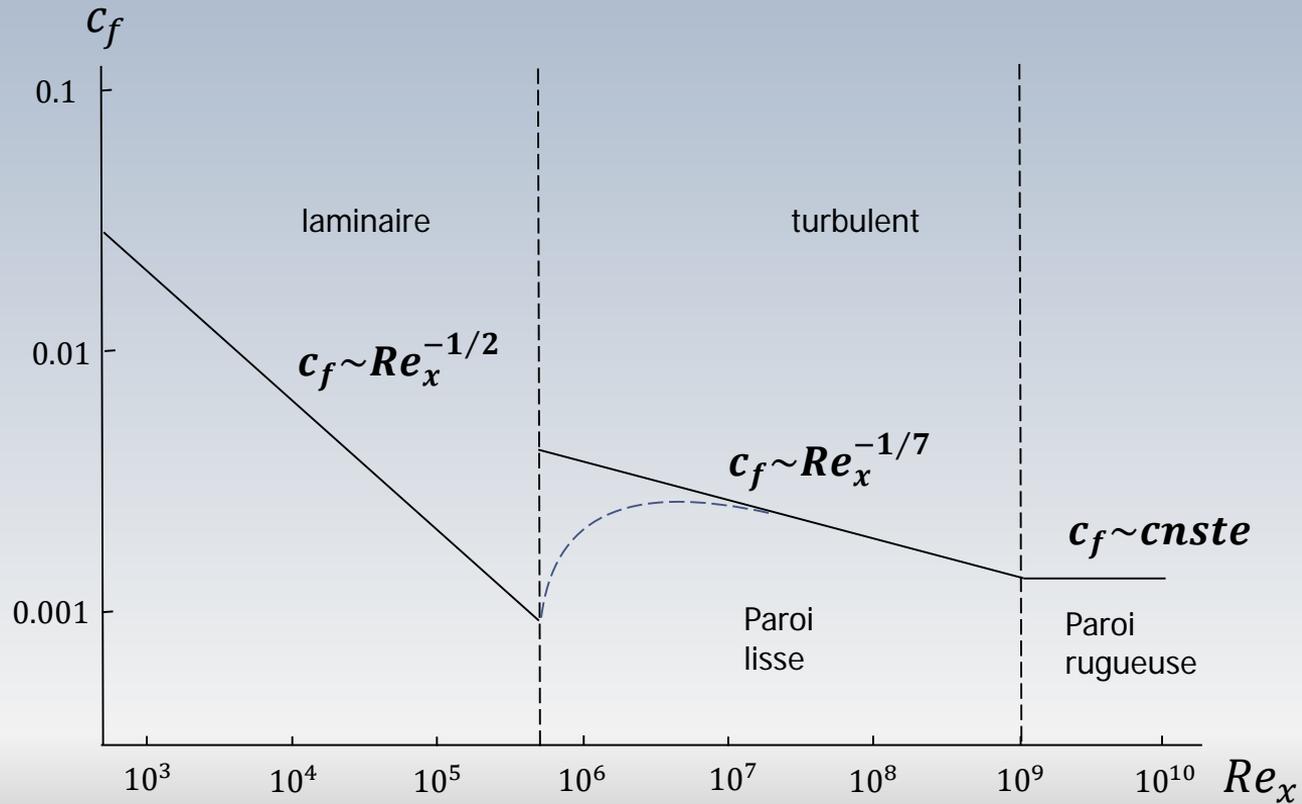
En régime turbulent

Blasius sur une plaque

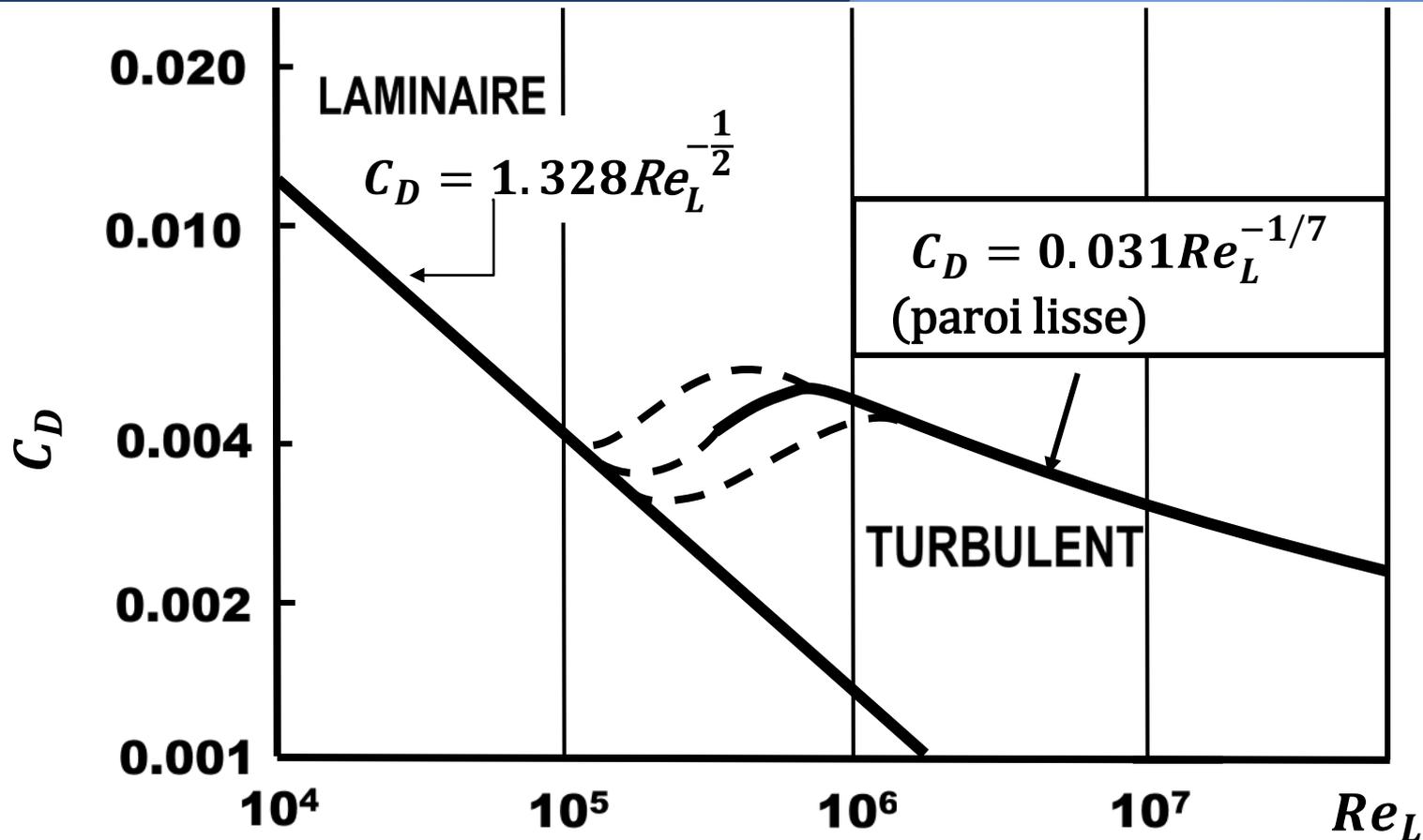
Écoulement turbulent

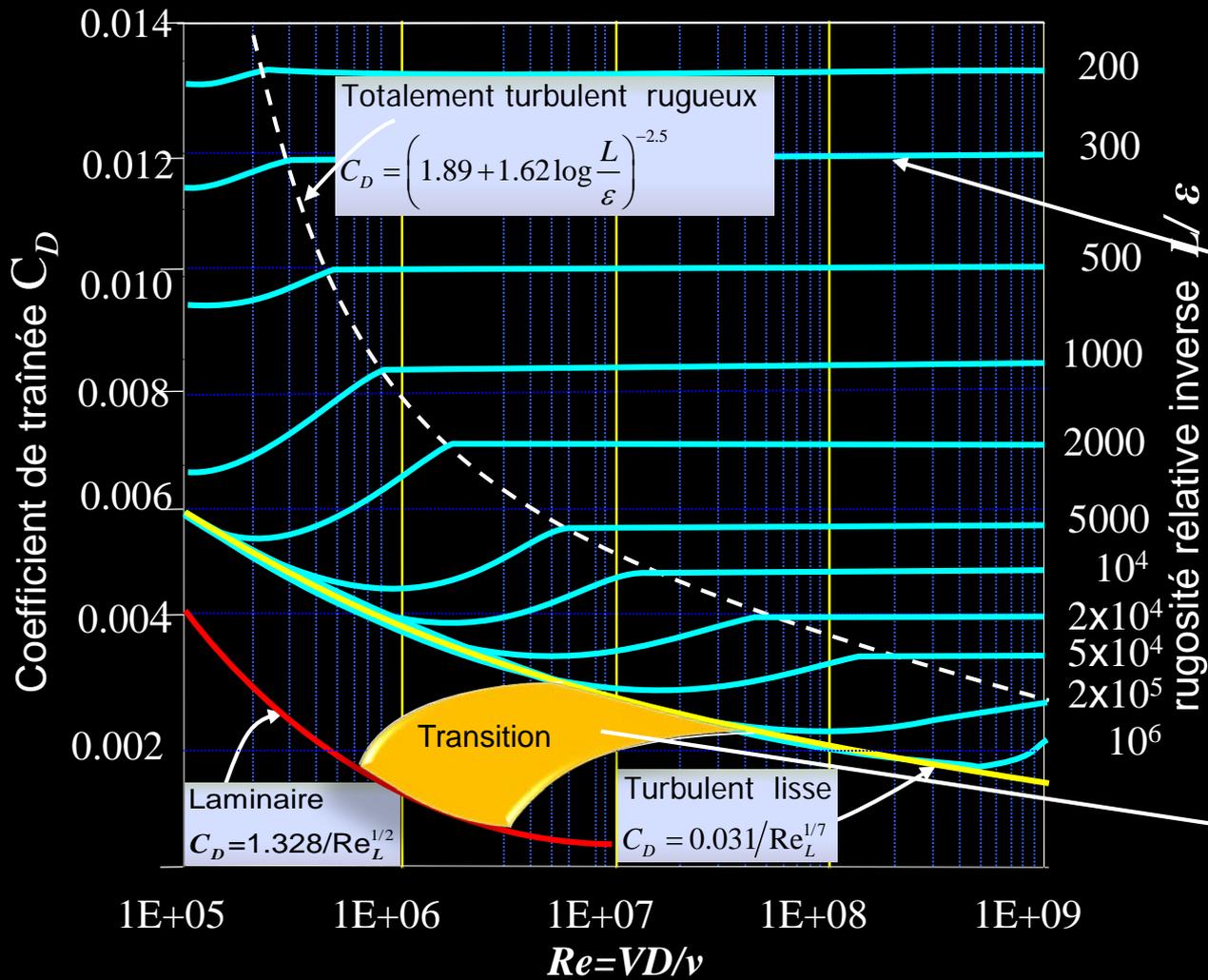
Paramètre	Définition
$\delta(x) = \frac{0.16}{Re_x^{1/7}}$	Épaisseur de la couche limite à la position x
$\tau_w = \frac{0.0075\rho U_0^2}{Re_x^{1/7}}$	Contrainte locale de cisaillement pariétal
$C_f(x) = \frac{0.027}{Re_x^{1/7}}$	Coefficient de frottement local
$C_D = 0.031Re_L^{-1/7}$	Coefficient de traînée global pour une plaque (« lisse ») de longueur L

Coefficient C_f (local)



Coefficient C_D (global)





Coefficient de traînée pour la couche limite sur une plaque plane

$C_D = f(\text{Rugosité})$

$$C_D = \begin{cases} \frac{0.031}{Re_L^{1/7}} - \frac{1440}{Re_L} & Re_{trans} = 5 \times 10^5 \\ \frac{0.031}{Re_L^{1/7}} - \frac{8700}{Re_L} & Re_{trans} = 6 \times 10^5 \end{cases}$$

Régime laminaire		Régime turbulent
KÁRMÁN	BLASIUS	PRANDTL
$\frac{u}{U_0} = \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)$	Solution numérique	$\frac{u}{U_0} = \left(\frac{2y}{\delta} \right)^{1/7}$
$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5.5}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5.0}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.16}{Re_x^{1/7}}$
$\frac{\delta^*(x)}{x} = \frac{1.83}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{\delta^*(x)}{x} = \frac{1.721}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{\delta^*(x)}{x} = \frac{0.02}{Re_x^{1/7}}$
$\frac{\theta}{x} = C_f(x) = \frac{0.73}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{\theta}{x} = C_f(x) = \frac{0.664}{Re_x^{1/2}}$	$\frac{\theta}{x} = \frac{0.015}{Re_x^{1/7}} \quad C_f(x) = \frac{0.027}{Re_x^{1/7}}$
$C_D = 2C_{f(L)} = 1.46Re_L^{-1/2}$	$C_D = 2C_{f(L)} = 1.328Re_L^{-1/2}$	$C_D = 2C_{f(L)} = 0.031Re_L^{-1/7}$ (paroi lisse)
$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.5$	$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.59$	$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 1.3$

On remarque que la valeur du rapport δ^*/θ permet d'établir le type de régime, laminaire ou turbulent

Calcul de la traînée visqueuse

Connaissant les propriétés du fluide (μ, ρ) , la vitesse de l'écoulement U et la longueur L de la plaque:

- 1) Calculer le nombre de Reynolds Re_L
- 2) Si $Re_L < 5 \times 10^5$, l'écoulement est laminaire sur toute la plaque
- 3) Si $Re_L > 5 \times 10^5$, déterminer la rugosité relative et chercher la valeur de C_D à partir de l'abaque ou utiliser les relations empiriques de Prandtl

$$D = C_D A \rho U^2 / 2$$

- 4) Utiliser la valeur de C_D dans la formule

L'aire caractéristique A est connue



**Extrait du vidéo:
The laws of drag in
fluids of high
and low viscosity**



Annexes

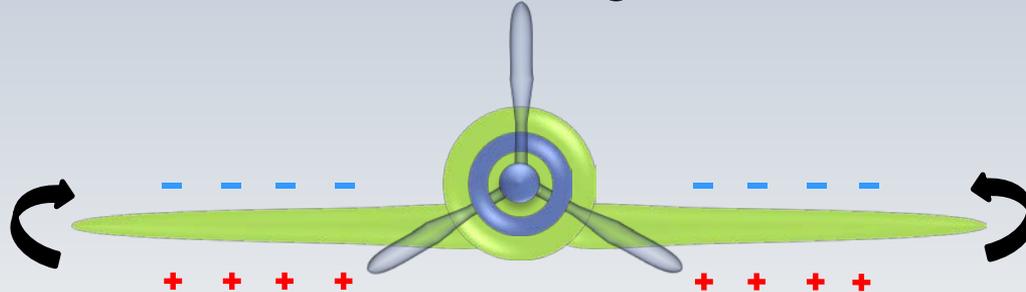


Dans ce module, on ne considérera que ces deux types de traînée. Celles-ci sont présentes en 2D ou en 3D et en régime compressible et/ou incompressible.

On note cependant qu'en régime compressible et dans les écoulements tridimensionnels on retrouve *deux autres formes de traînée*.

Dans le domaine de l'aéronautique, on analyse en particulier la résistance à l'avancement induite par la portance qu'on nomme *traînée induite* .

À cause de la différence de pression entre l'intrados et l'extrados des ailes d'avion, un mouvement tourbillonnaire s'établit aux extrémités des ailes. Ces tourbillons "parasites" sont transportés vers l'aval en consommant de l'énergie.



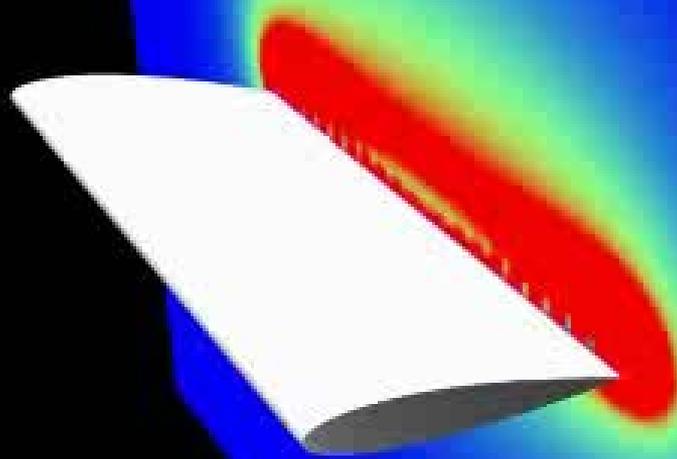
Trainée induite

7.1 Influence....



Les tourbillons marginaux occasionnent des pertes



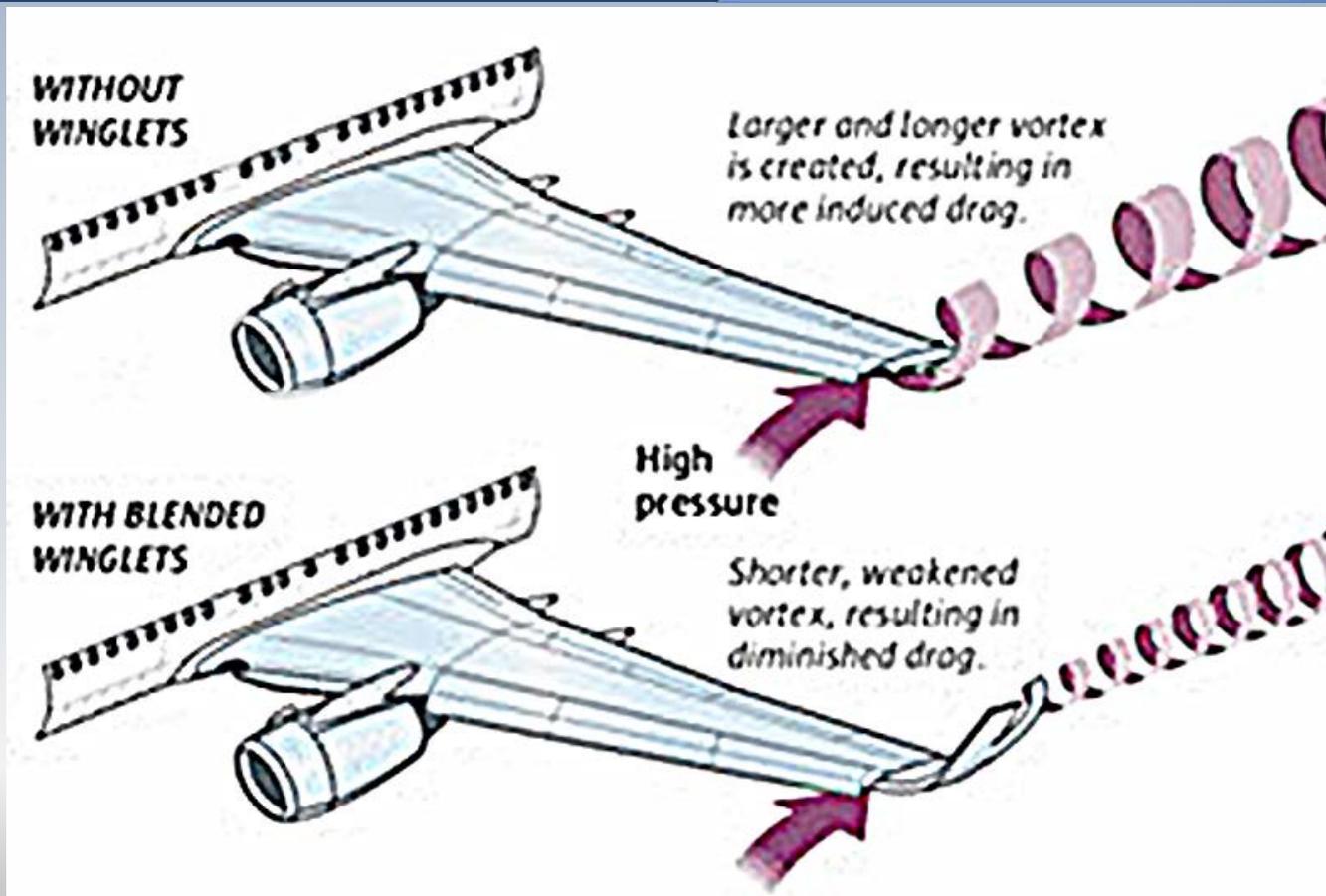


Afin de réduire la trainée induite on utilise des *winglets* aux extrémités des ailes.



Winglets

7.1 Influence....





WINGLETS!
Nous les utilisons depuis toujours!



Lors d'un écoulement compressible, il peut y avoir une force dite traînée d'onde. Celle-ci est reliée à l'approche de la vitesse sonique.

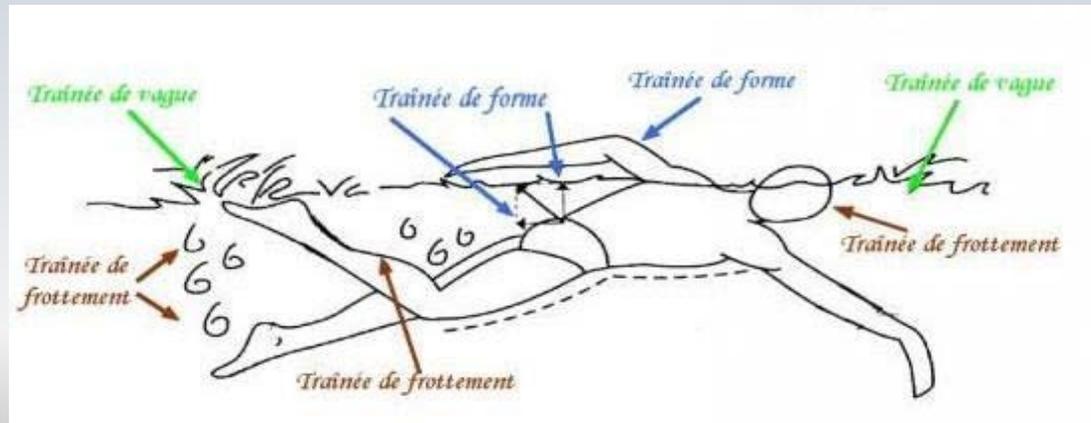
Très sommairement, lors d'un choc normal (module sur les écoulements compressibles), la vitesse de l'écoulement passe fortement de supersonique à subsonique. Ce phénomène engendre une nouvelle traînée et une augmentation de la consommation d'énergie.

En régime transsonique, le choc peut se situer sur l'extrados de l'aile. En régime supersonique, il est détaché devant l'aile.

Trainée de vague (d'onde)

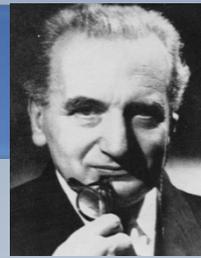
7.1 Influence....

Lorsqu'un objet se déplace sur une surface libre (la surface de l'eau) il génère des vagues, qui sont la contrepartie des ondes dans un écoulement compressible. Les vagues peuvent produire une zone de haute pression ou « mur de vague » devant l'objet qui ralentit son déplacement. Dans ce cas on dit qu'une trainée de vague a lieu.



Retour

Solution de von Kármán

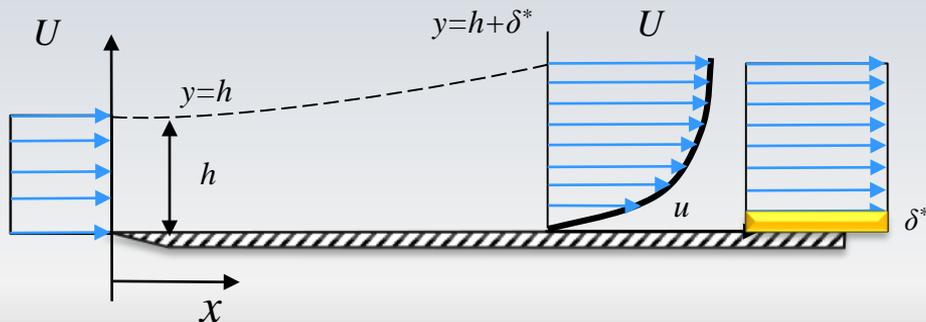


Pour un écoulement laminaire, von Kármán suppose un profil parabolique décrivant la vitesse dans la **CL**

$$u(x, y) = U \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)$$

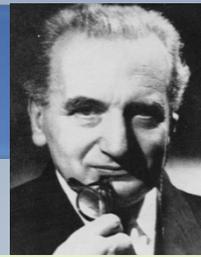
Conservation de la masse entrée-sortie:

δ^* : épaisseur de déplacement de la CL



Quelles sont les valeurs de τ et de δ ?

Solution de von Kármán



$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx}$$

$$u(x, y) = U \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right)$$



$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \frac{\delta}{3}$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \frac{2}{15} \delta$$

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$= \mu \frac{2}{\delta} U = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho U^2 \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx}$$



$$\delta d\delta = \frac{15\mu}{U\rho} dx$$

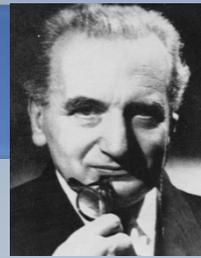
$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{15\nu x}{U}$$

$$\delta(x=0) = 0$$



$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\nu}{Ux}} = \frac{5.5}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

Solution de von Kármán



$$c_f = \frac{\tau_w}{1/2 \rho U^2} = \frac{\mu U (2/\delta)}{1/2 \rho U^2} = \frac{4\mu}{\rho U \sqrt{\frac{30\nu x}{U}}} = \sqrt{\frac{8\nu}{15Ux}} = \sqrt{\frac{8}{15\text{Re}_x}}$$

$$c_f = \frac{0.73}{\text{Re}_x^{1/2}}$$

$$\delta^* = \frac{\delta}{3}$$

$$\theta = \frac{2}{15}\delta$$

$$\tau_w = \mu \frac{2}{\delta} U$$

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{30\nu}{Ux}}$$

Les solutions pour δ/x et c_f proposées par von Kármán sont à 10% près de la solution exacte (à venir).

[Retour](#)



Cisaillement et traînée(Blasius)

7.4 Couche limite sur..

Le cisaillement peut être calculé au moyen du gradient de vitesse à la surface

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$



$$\tau_w = \mu U f''(0) \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} &= f'(\eta) \\ \eta &= y \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} \end{aligned}$$



$$\tau_w = 0.3321 \mu \left(\frac{U}{x} \right) Re_x^{1/2}$$

La valeur 0.3321, pour $f''(0)$ est lue du tableau ($\eta=0$)

Cisaillement et traînée(Blasius)

7.4 Couche limite sur..

Le cisaillement peut être calculé au moyen du gradient de vitesse à la surface

$$\tau_w = 0.3321\mu \left(\frac{U}{x} \right) Re_x^{1/2} \quad \rightarrow \quad \tau_w = 0.3321\rho U^2 / Re_x^{1/2}$$

$$C_f = \frac{\tau_p}{1/2 \rho U^2}$$

$$C_f(x) = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} = \frac{\theta}{x}$$

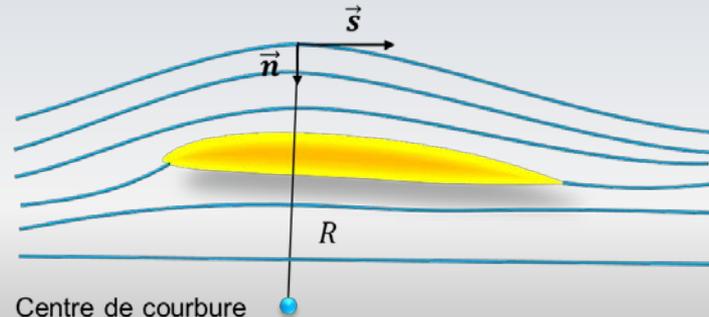
Coefficient de traînée local

Retour



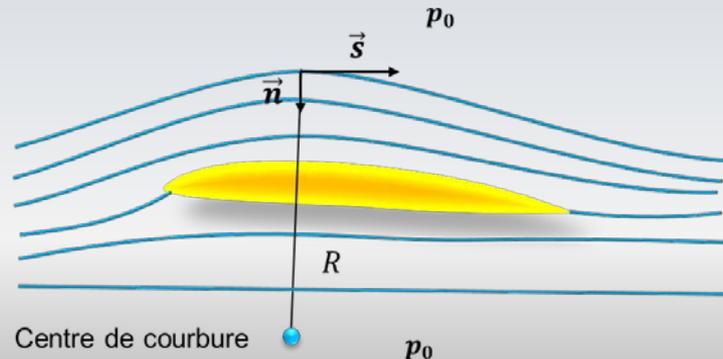
La portance

On peut expliquer la portance comme une conséquence de la forme d'un profil d'aile qui force les lignes de courant à se courber. À partir des équations du mouvement (en coordonnées curvilignes), on sait qu'un gradient de pression, $\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{R}$, conduit à la déformation des les lignes de courant. Dans cette formule R est la courbure de la ligne de courant et V la vitesse.



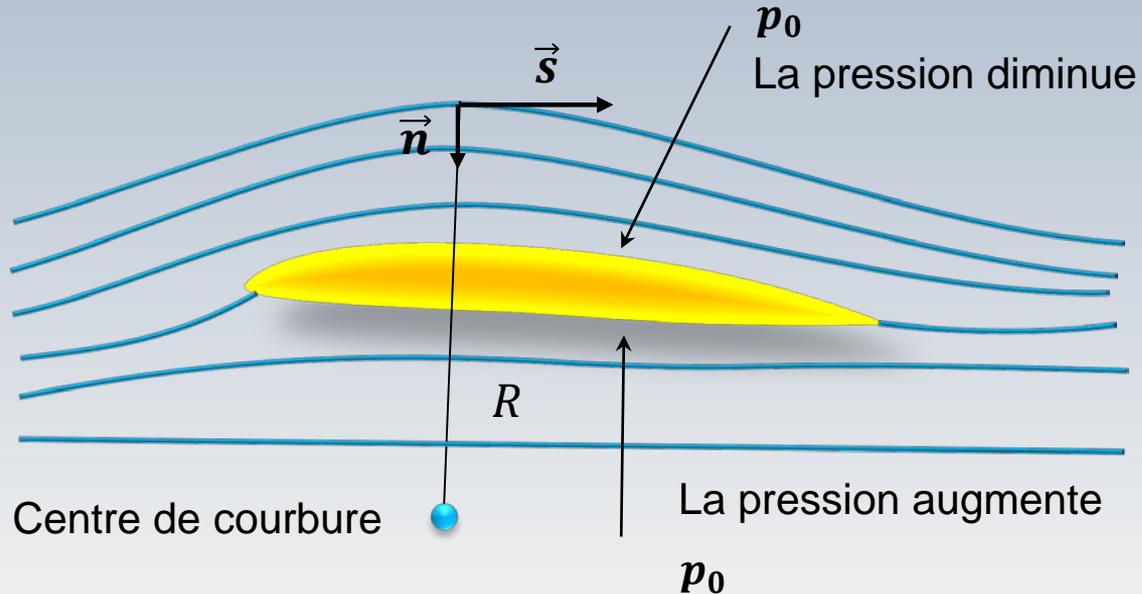
La portance

Ce gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{R}$, agit comme la force centripète produite par un mouvement circulaire. Puisqu'il y a une pression p_0 loin du profil, l'équation nous indique que la pression sur l'extrados est plus faible que p_0 , tandis qu'elle est plus élevée que p_0 sur l'intrados. Cette différence de pression produit alors la force de portance sur le profil.



La portance

La pression augmente lorsqu'on s'éloigne du centre de courbure

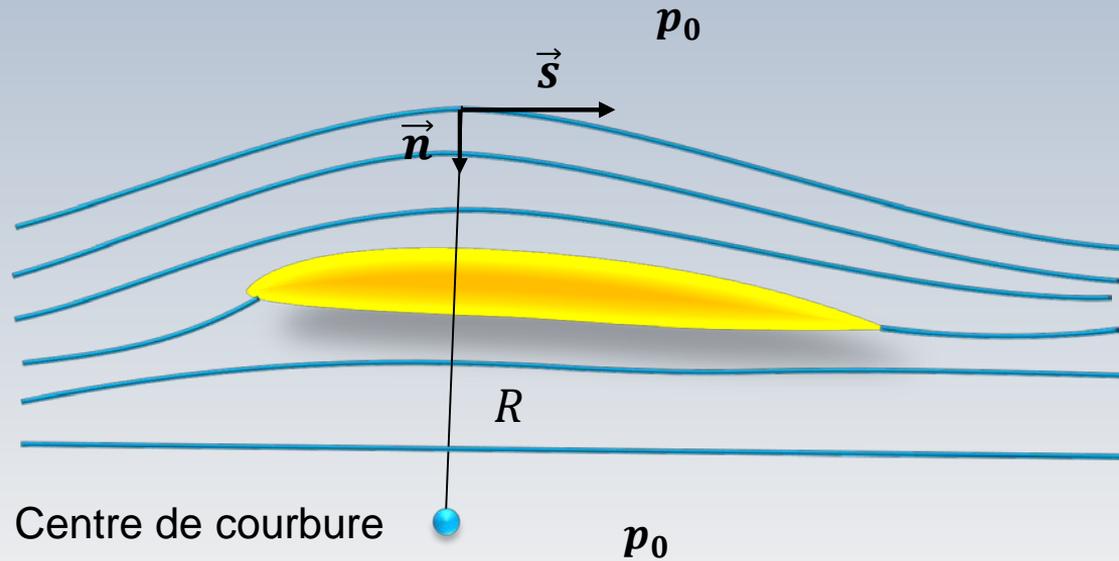


$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{R}$$

Sans tenir compte de la force gravitationnelle

Retour





A 3D rendered white character stands on a light gray surface, casting a soft shadow. The character has its arms slightly out to the sides. A large, white, oval-shaped speech bubble with a thin gray border is positioned above the character's head, pointing towards it. Inside the speech bubble, the text "Fin de la première partie" is written in a bold, blue, sans-serif font. The background is a light blue gradient, and the top of the image features a dark blue horizontal bar with a white diagonal shape on the left side.

**Fin de la
première partie**