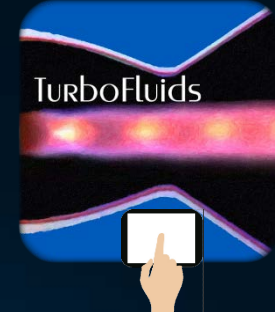




Mécanique des fluides



La force des écoulements



OBJECTIFS

- Décrire les notions d'écoulement **laminaire** et **turbulent** distingués par le nombre de Reynolds (Re)
- Montrer une expression pour calculer un coefficient f permettant l'évaluation des **pertes par frottement** h_f requises dans **l'équation de l'énergie** appliquée aux réseaux hydrauliques
- Présenter des **formules explicites** et le **diagramme de Moody** pour calculer le coefficient de frottement f

Chap 6: Écoulement interne

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.1 Écoulement et nombre de Reynolds

6.2 Écoulement interne versus écoulement externe

6.3 Le coefficient de friction de Darcy

6.4 Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

6.5 Modélisation de la turbulence

6.6 Écoulement turbulent dans une conduite cylindrique

Préambule

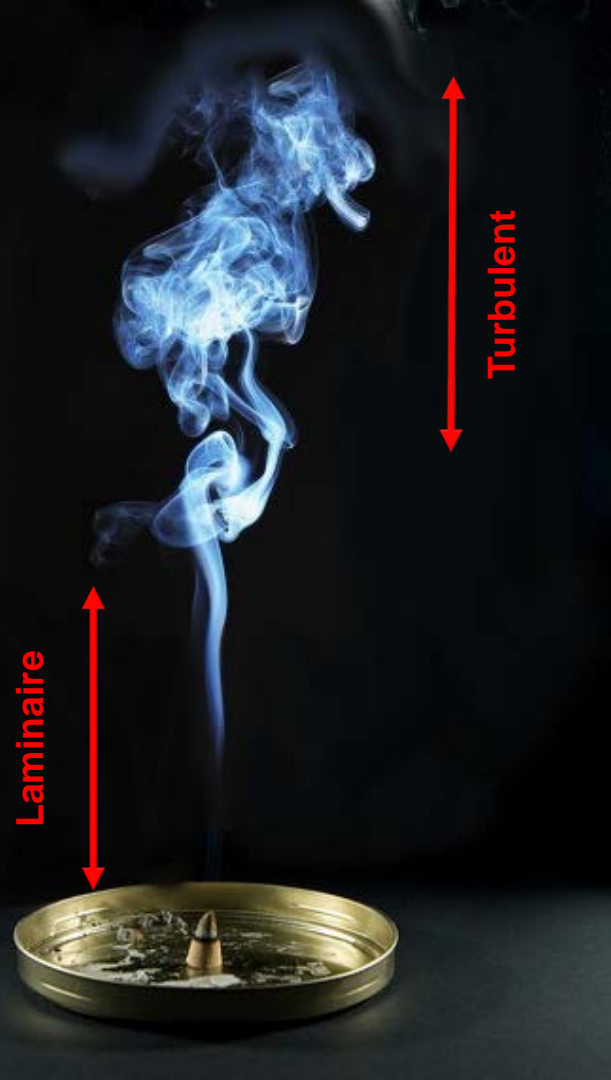
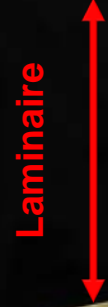
Dans cette partie on s'intéresse aux **écoulements internes**, tel que le transport d'eau dans un réseau de distribution ou bien celui du pétrole dans un oléoduc

Essentiellement on vise le calcul du frottement à la paroi pour évaluer les pertes d'énergie entre deux points d'une conduite

Pour ce faire, on portera une attention particulière au **nombre de Reynolds** $Re = \rho u L / \mu$, qui quantifie **le rapport entre les forces d'inertie et les forces de frottement**

Ce nombre adimensionnel nous permettra de distinguer deux types d'écoulements: **laminaire** (Re faible) et **turbulent** (Re élevé)

Laminaire



Turbulent



Écoulement et nombre de Reynolds

6.1 Écoulement..

Les conditions qui déterminent **si un écoulement sera laminaire ou turbulent** sont liées à un fragile équilibre entre les forces visqueuses, qui essaient de dissiper les perturbations, et l'accélération du fluide (l'inertie), qui favorise leur propagation.

Écoulement et nombre de Reynolds

6.1 Écoulement..

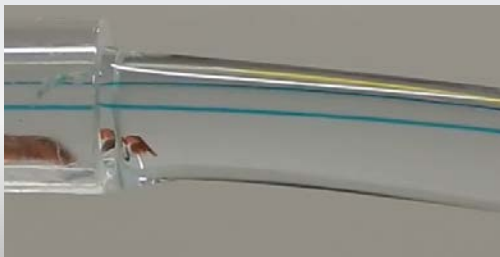
La fumée sortant de la cigarette est plus chaude que l'air environnant. À partir d'une vitesse nulle, elle démarre son déplacement vers le haut de manière ordonnée et sans diffusion. Cet écoulement est dit **laminaire** et s'accélère progressivement jusqu'à atteindre une vitesse critique. L'écoulement passe alors par une zone de transition pour devenir finalement chaotique dont sa prédiction est difficile. Il s'agit d'un écoulement **turbulent**



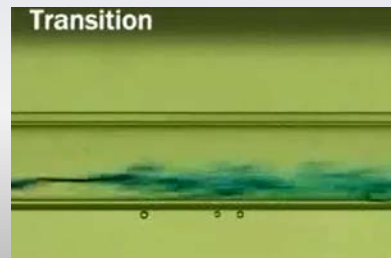
Écoulement et nombre de Reynolds

6.1 Écoulement..

Le cas d'un jet d'eau ne diffère substantiellement pas de la fumée produite par un cigarette. En augmentant progressivement le débit (ou la vitesse) on passe d'un comportement **laminaire** vers à un comportement **turbulent**. Le passage, qui s'étale sur une gamme de vitesses, est appelé **transition**. Pendant la transition les deux régimes peuvent coexister, la turbulence peut spontanément apparaître puis disparaître jusqu'à obtenir un régime turbulent continu.



Laminaire



Turbulent



Mechanical TV



Courtesy of
BBC Richard Hammond's Engineering Connections - Burj Al Arab

Éléments historiques



G. H. Ludwig **Hagen** a été le premier à rapporter en 1839 qu'il pouvait exister deux types de régimes lors de l'écoulement d'un fluide.

Son expérience consistait à mesurer la perte de pression dans une conduite cylindrique en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement

À basse vitesse la perte de pression était directement proportionnelle à la vitesse moyenne, tandis qu'à haute vitesse celle-ci était proportionnelle au carré de la vitesse.

Osborne Reynolds



En 1883 Osborne Reynolds a réalisé une étude systématique sur les écoulements dans une conduite en fonction du débit, de la viscosité cinématique et de la géométrie. Il a montré que le changement de régime ne dépendait pas des paramètres séparément, mais d'une quantité sans dimension les regroupant tous. C'était la naissance du **nombre de Reynolds**.

REPORT ON PROF. O. REYNOLDS'S PAPER.

I CONSIDER PROFESSOR REYNOLDS'S PAPER A VALUABLE ONE, WHICH I RECOMMEND SHOULD BE PRINTED IN THE PHIL. TRANS. HE SHOWS FOR THE FIRST TIME THAT THE DISTINCTION BETWEEN REGULAR AND EDDYING MOTION DEPENDS ON A RELATION BETWEEN THE DIMENSIONS OF SPACE AND VELOCITY, OR WHAT COMES TO THE SAME OF SPACE AND TIME, INVOLVED IN THE EXPERIMENTS; A ~~PRO~~^{relat} DISTINCTION POINTED OUT BY THE KNOWN EQUATIONS OF MOTION OF A VISCOUS FLUID. HE SHOWS ALSO THAT THE ONE CHASS OF MOTIONS PASSES INTO THE OTHER WITH AN UNEXPECTED SUDDENNESS.

IN ONE PART THE LANGUAGE SEEMS TO IMPLY THAT HE HAD DISCOVERED NEW DIMENSIONAL PROPERTIES OF FLUIDS, AND MIGHT EVEN LEAD TO THE SUPPOSITION THAT HE SUPPOSED THAT HE HAD SHOWN ^{that} ANOTHER CONSTANT BEYOND THOSE RECOGNISED WAS NECESSARY IN ORDER TO DEFINE A FLUID MECHANICALLY. THIS CERTAINLY IS NOT THE CASE; THE DIMENSIONAL PROPERTIES ARE ALREADY ^{obviously} INVOLVED IN THE EQUATIONS OF MOTION; AND THERE IS ABSOLUTELY NOTHING TO PROVE THAT HE HAS DISCOVERED THE NECESSITY OF AN ADDITIONAL CONSTANT TO DEFINE A FLUID.

G. G. Stokes

19 April 1883



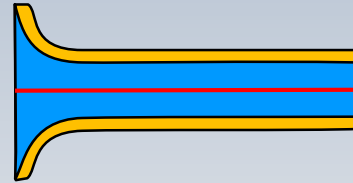
Figure 2

Sir George Stokes' review of Reynolds' 1883 paper. Copyright, The Royal Society; Archive Ref. 188.

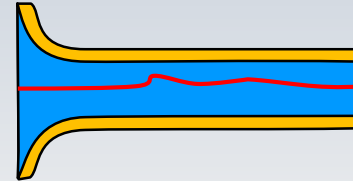
Expérience de Reynolds

Dans une conduite cylindrique, il a injecté un colorant et a identifié les régimes suivants:

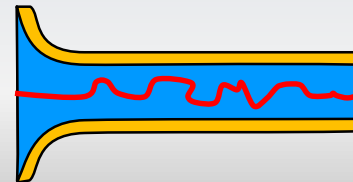
Laminaire $Re < 2300$



Transition $2300 < Re < 4200$



Turbulent $4200 < Re$



$$Re = \frac{\rho V d}{\mu}$$



Re=1500
V=0.0148 m/s
Q=1.2 x10⁻⁴ m³/s

Re=2100
V=0.0207m/s
Q=1.68 x10⁻⁴ m³/s

Re=4000
V=0.0395m/s
Q=3.2 x10⁻⁴ m³/s

v=1.003x10⁻⁶ m²/s

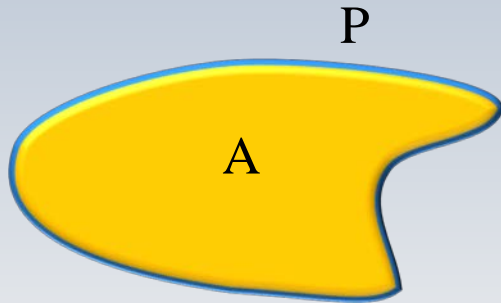
$$Re = \frac{\rho V d}{\mu}$$

Diamètre hydraulique

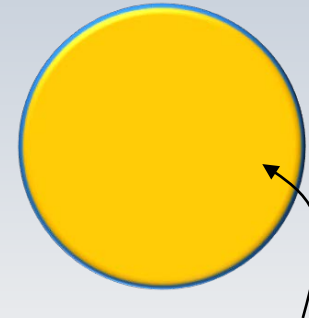
6.1 Écoulement..

Rayon hydraulique $R_h = \frac{A}{P}$

Diamètre hydraulique $D_h = \frac{4A}{P}$



P:perimètre mouillé
A:section transversale



$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4\pi D^2 / 4}{\pi D} = D$$

Exemple 6.1

Pour l'écoulement dans une conduite de 5 cm de diamètre, à quelle vitesse le nombre de Reynolds critique sera-t-il atteint à 20°C pour (a) l'écoulement de l'air et (b) l'écoulement de l'eau?

Solution

Pour les calculs dans une conduite, la règle est d'utiliser la vitesse débitante, $V=Q/A$, et le diamètre, d , pour définir, respectivement, la vitesse et la longueur de référence.

$$(a) \text{ Air: } \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{(1.205)V(0.05)}{1.80 \times 10^{-5}} = 2300 \Rightarrow V = 0.7 \frac{m}{s}$$

$$(b) \text{ Eau: } \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{(998)V(0.05)}{0.001} = 2300 \Rightarrow V = 0.046 \frac{m}{s}$$

Le nombre de Reynolds critique de l'écoulement dans une conduite cylindrique est $Re_{crit} \approx 2300$. Au delà de cette valeur l'écoulement est turbulent.

Chap 6: Écoulement interne

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.1 Écoulement et Nombre de Reynolds

6.2 Écoulement interne versus écoulement externe

6.3 Le coefficient de friction de Darcy

6.4 Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

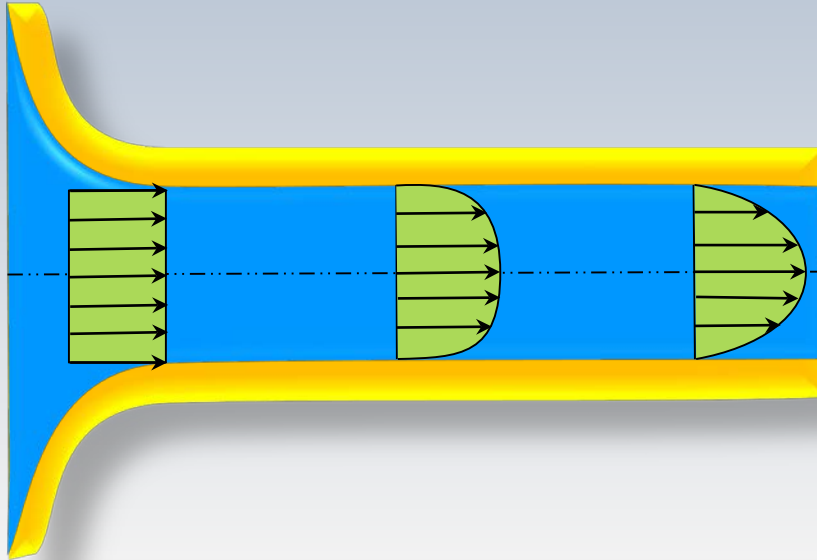
6.5 Modélisation de la turbulence

6.6 Écoulement turbulent dans une conduite cylindrique

Écoulement interne vs. externe

6.2 Écoulement..

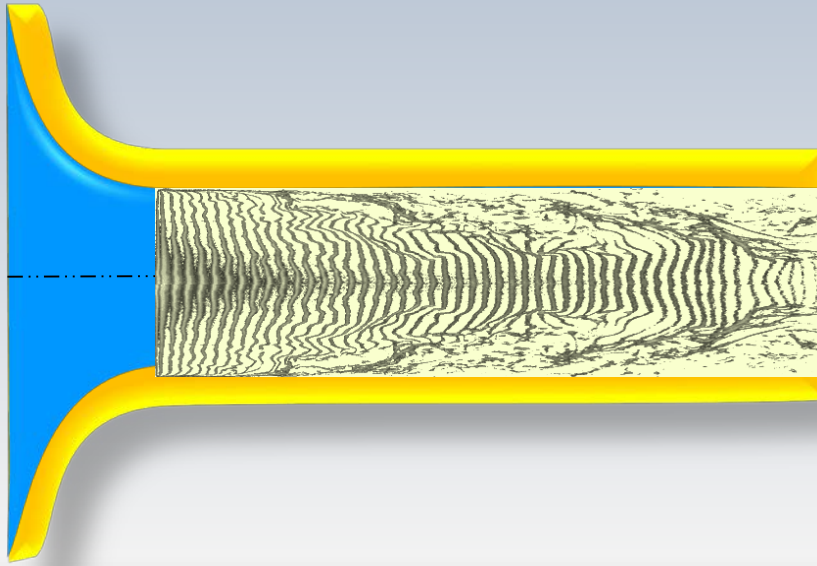
Un élément distinctif d'un écoulement interne pleinement développé est l'absence d'un cœur potentiel



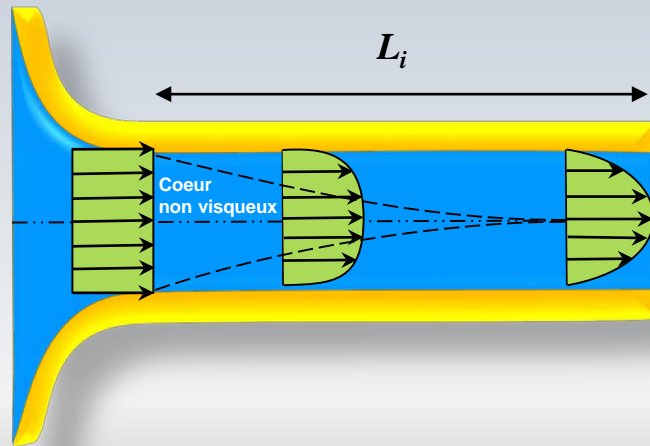
Écoulement interne vs. externe

6.2 Écoulement..

Un élément distinctif d'un écoulement interne pleinement développé est l'absence d'un cœur potentiel

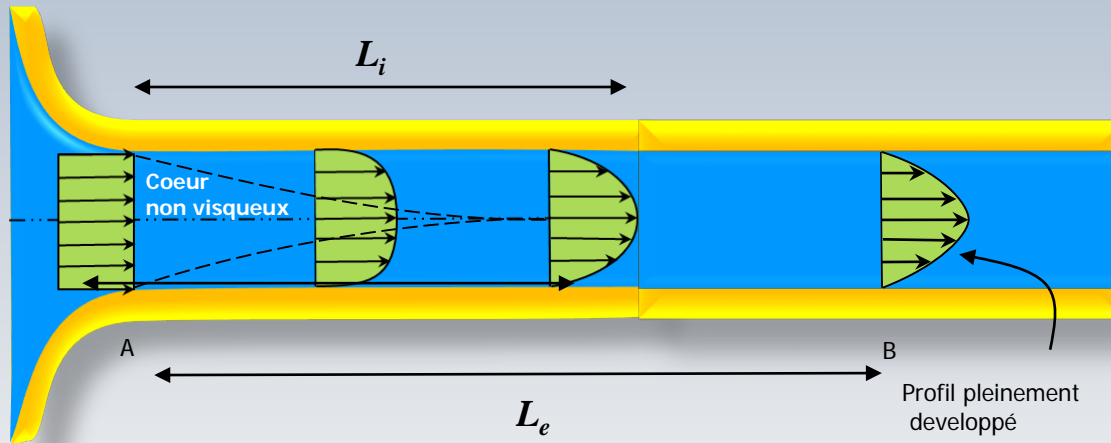


L'écoulement à l'entrée d'une conduite se développe grâce aux effets du cisaillement près de la paroi et à l'accélération du fluide dans la région centrale. En conséquence, le gradient de pression à l'entrée est plus grand.



L_i : longueur du cœur
potentiel non visqueux

Longueur de développement L_e : la distance nécessaire pour qu'un profil de vitesse uniforme se transforme en un profil de vitesse pleinement développé



La longueur de développement dans une conduite, L_e , est fonction du diamètre de la conduite D de la vitesse débitante V , de la densité et de la viscosité du fluide.

La longueur du cœur potentiel non visqueux L_i est plus ou moins la moitié de L_e . Pour un **écoulement laminaire** dans un tuyau, avec un profil de vitesse uniforme à l'entrée:

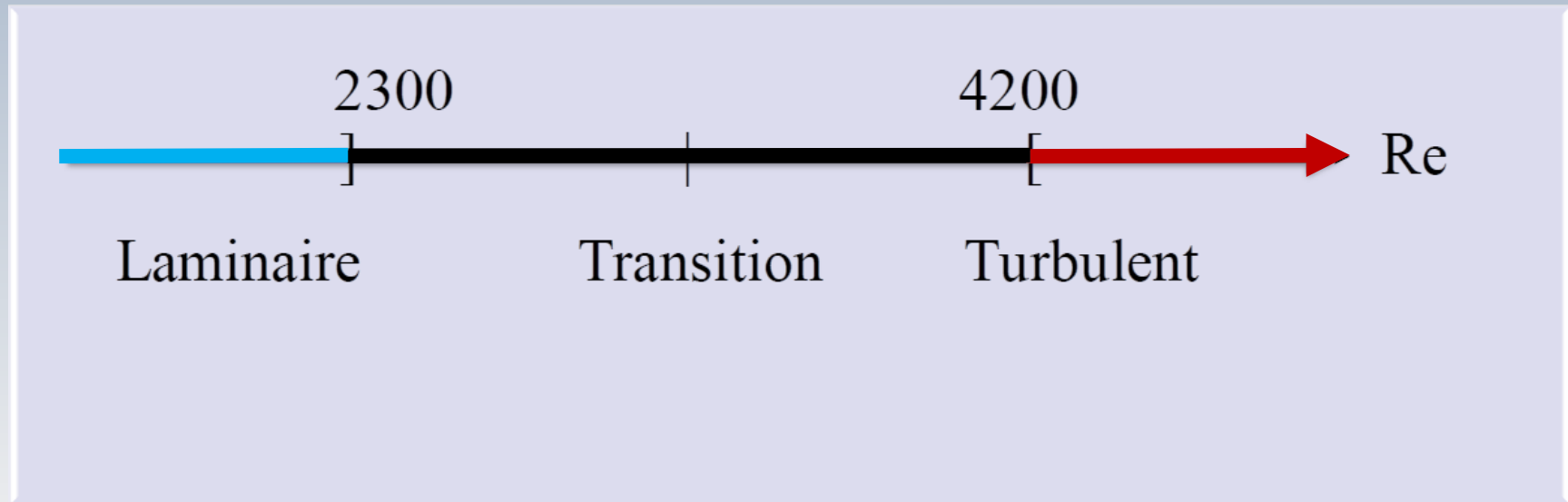
$$\frac{L_e}{D} = 0.065$$

avec V la vitesse moyenne (débitante) D le diamètre de la conduite, et ν la viscosité cinématique du fluide. Pour des **écoulements turbulents**, on a trouvé la relation

$$\frac{L_e}{D} = 1.6\text{Re}^{1/4} \qquad \text{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

Régimes dans une conduite

6.2 Écoulement..



Dans une conduite, la valeur de $Re = 2300$ est utilisée comme limite supérieure pour un écoulement laminaire

$$\frac{L_e}{D} = 0.065, \quad \frac{L_e}{D} = 1.6\text{Re}^{1/4}$$

Exemple 6.2

De l'eau s'écoule à 20°C dans un conduit cylindrique de $D=0.5$ po de diamètre et de $L=60$ pi de longueur. Le débit est de $Q=5$ gal/min. En pourcentage, quelle est la fraction du conduit occupé par la longueur d'entrée, L_e ?

Solution

$$Q = 5 \text{ gal/min} \rightarrow$$

$$Q = 0.01083 \text{ pi}^3 / \text{s}$$

$$V = Q/A = 0.0108/A = 8.17 \text{ pi} / \text{s}$$

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \mathbf{31300}$$

$$1 \text{ gal/min} = 0.002167 \text{ pi}^3 / \text{s}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 1.09 \times 10^{-5} \text{ pi}^2 / \text{s}$$

$$D = 0.5/12 = 0.04167 \text{ pi}$$

L'écoulement est pleinement **turbulent** car le nombre de Reynolds est supérieur à **4200**. Nous pouvons donc utiliser la relation:

$$\frac{L_e}{D} = 1.6\text{Re}^{1/4} = 21 \quad \frac{L}{D} = \frac{60}{0.5/12} = 1440 \quad \frac{L_e}{L} = \frac{21}{1440} = 0.015 = 1.5\%$$

Chap 6: Écoulement interne

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.1 Écoulement et Nombre de Reynolds

6.2 Écoulement interne versus écoulement externe

6.3 Le coefficient de friction de Darcy

6.4 Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

6.5 Modélisation de la turbulence

6.6 Écoulement turbulent dans une conduite cylindrique

On regardera des bilans entre l'entrée (1) et la sortie (2) d'un écoulement **pleinement développé** dans un **conduit de section constante**

Le but est l'obtention **d'une expression** pour le calcul des pertes par frottement (h_f). Dans ce cas, l'équation de l'énergie devient:

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{ent} + \cancel{h_{pompe}} - \cancel{h_{turbine}} - h_f = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{sort}$$

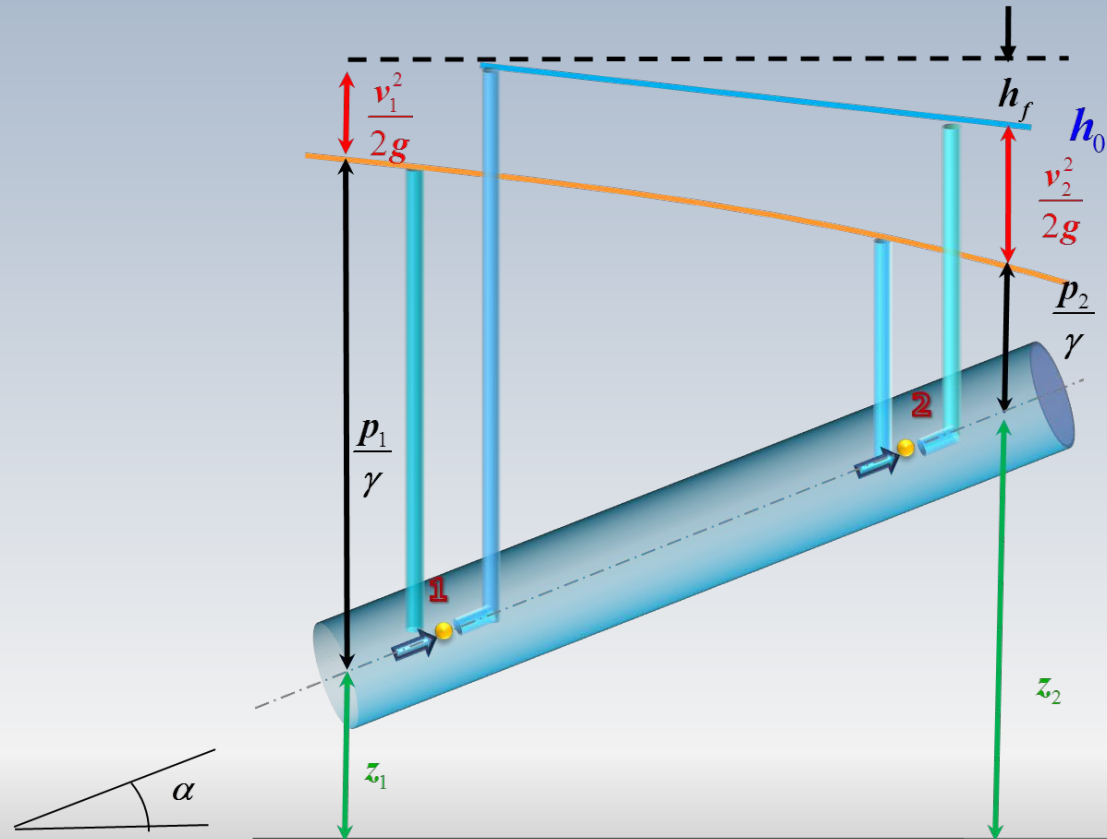
Remarque: pour une section constante, l'équation de continuité indique que $V_1 = V_2$

Visualisation des pertes

6.3 Le coefficient de..

$$h_0 = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \neq \text{cnste}$$

$$H = h_0 + h_f = \text{cnste}$$

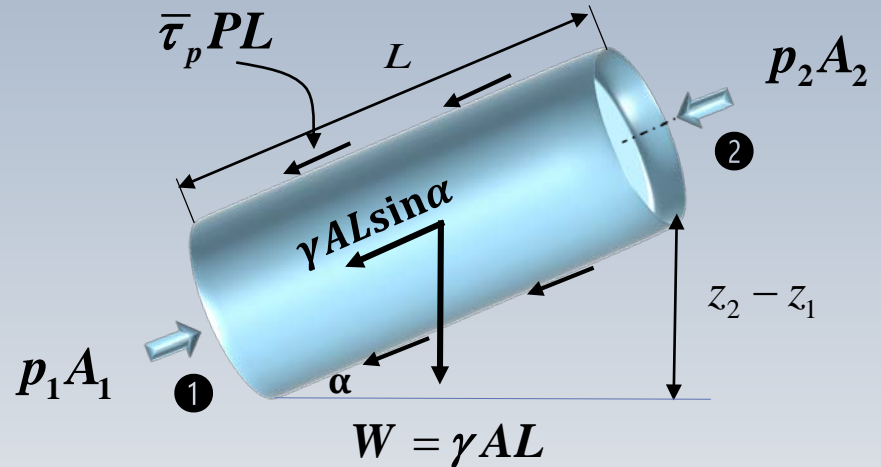
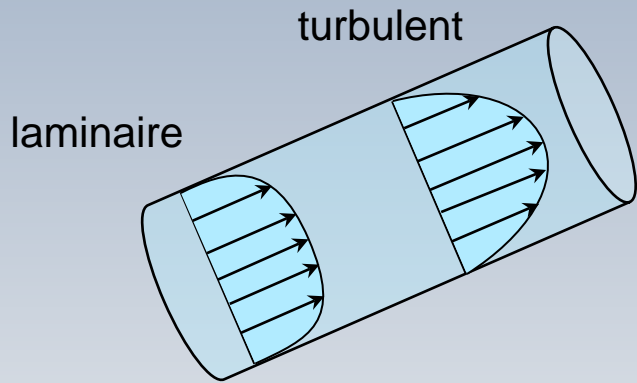


Bilan de la Q. de mouvement

6.3 Le coefficient de..

Le bilan des forces (la quantité de mouvement) agissant dans une conduite à section constante permettra de trouver **une relation entre le cisaillement τ_p à la paroi et les pertes de pression**

Bilan de la Q. de mouvement



$$\sum \vec{F} = p_1 A_1 - p_2 A_2 - \gamma A L \sin \alpha - \bar{\tau}_p P L = \dot{m} (V_2 - V_1) \quad (V_2 = V_1, A_1 = A_2)$$

Bilan de la Q. de mouvement

$$\sin \alpha = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

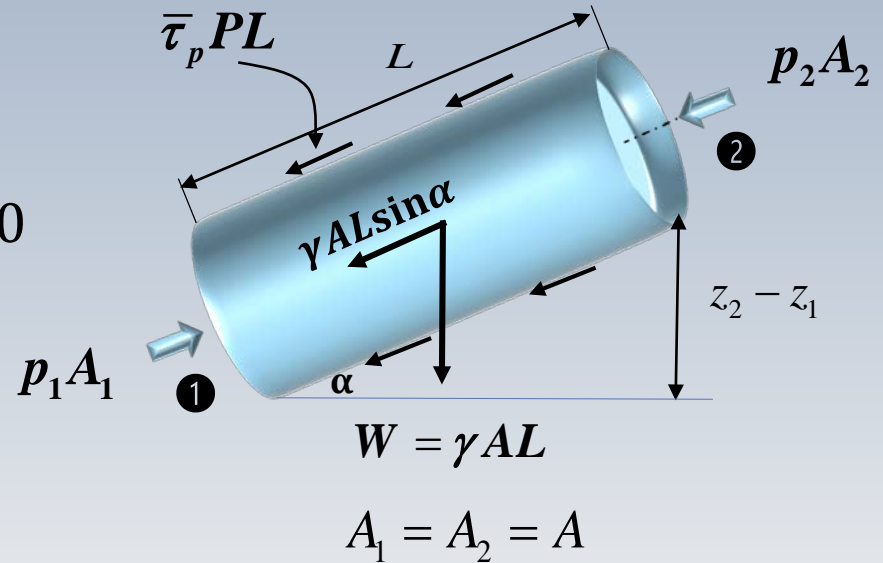
$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - \gamma A L \sin \alpha - \bar{\tau}_p P L = 0$$

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - \gamma A (z_2 - z_1) - \bar{\tau}_p P L = 0$$

$$p_1 - p_2 = \bar{\tau}_p P L / A + \gamma (z_2 - z_1)$$

Lorsque $A = \pi D^2 / 4$ et $P = \pi D$

$$p_1 - p_2 = 4 \bar{\tau}_p \left(\frac{L}{D} \right) + \gamma (z_2 - z_1)$$



Bilan d'énergie

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_1 - h_f = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_2$$

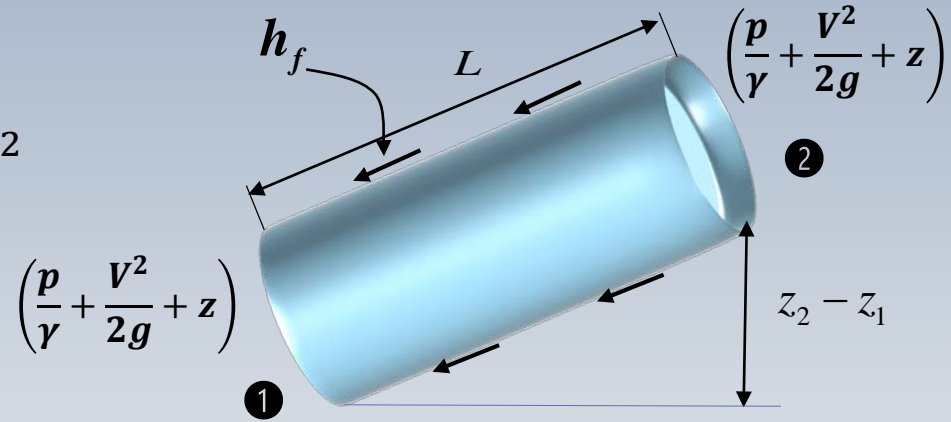
$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = z_2 - z_1 + h_f$$

$$p_1 - p_2 = 4\bar{\tau}_p \left(\frac{L}{D}\right) + \gamma(z_2 - z_1)$$

$$h_f = \frac{4\bar{\tau}_p}{\gamma} \left(\frac{L}{D}\right)$$

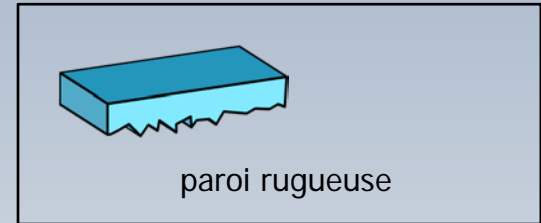
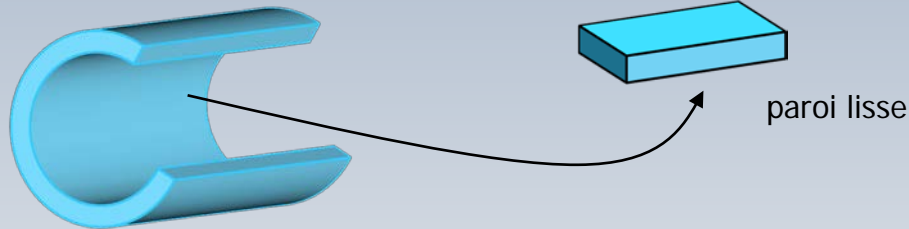


$$h_f = \frac{4\bar{\tau}_p}{\rho g} \left(\frac{L}{D}\right)$$



Analyse dimensionnelle

6.3 Le coefficient de..



$$\bar{\tau}_p = f(\rho, \mu, V, R_h)$$

	μ	τ_p	ρ	R_h	V
M	1	1	1	0	0
L	-1	-1	-3	1	1
T	-1	-2	0	0	-1



	π_1	π_2	ρ	R_h	V
	$\mu/\rho R_h V$	$\tau_p/\rho V^2$			
M	0	0	1	0	0
L	0	0	-3	1	1
T	0	0	0	0	-1

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho R_h V}$$

$$\pi_2 = \frac{\bar{\tau}_p}{\rho V^2}$$



$$C_f = \frac{\bar{\tau}_p}{\rho V^2 / 2}$$



$$h_f = \frac{4\bar{\tau}_p}{\rho g} \left(\frac{L}{D} \right)$$



$$h_f = \frac{4\bar{\tau}_p}{\rho g} \left[\frac{2 V^2}{V^2} \frac{1}{2} \right] \left(\frac{L}{D} \right) = \frac{8\bar{\tau}_p}{\rho V^2} \frac{V^2}{2g} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$f = \frac{8\bar{\tau}_p}{\rho V^2}$$

Coefficient adimensionnel

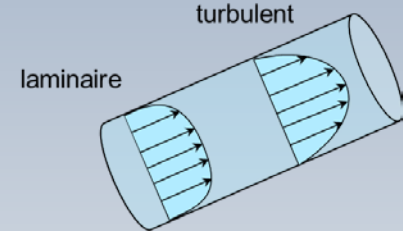


Équation de Darcy-Weisbach

6.3 Le coefficient de..



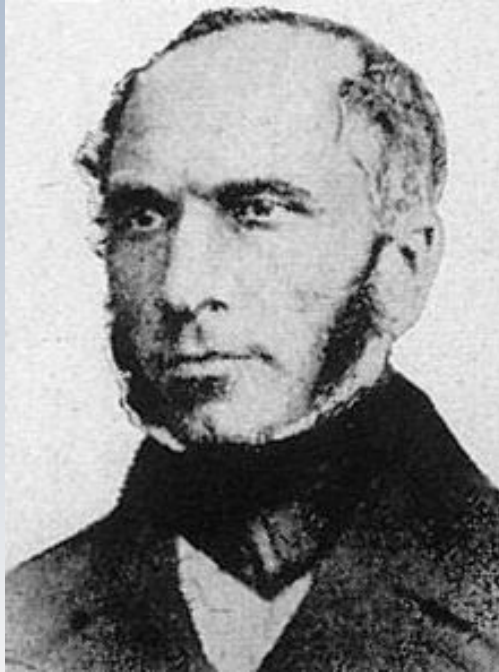
$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$



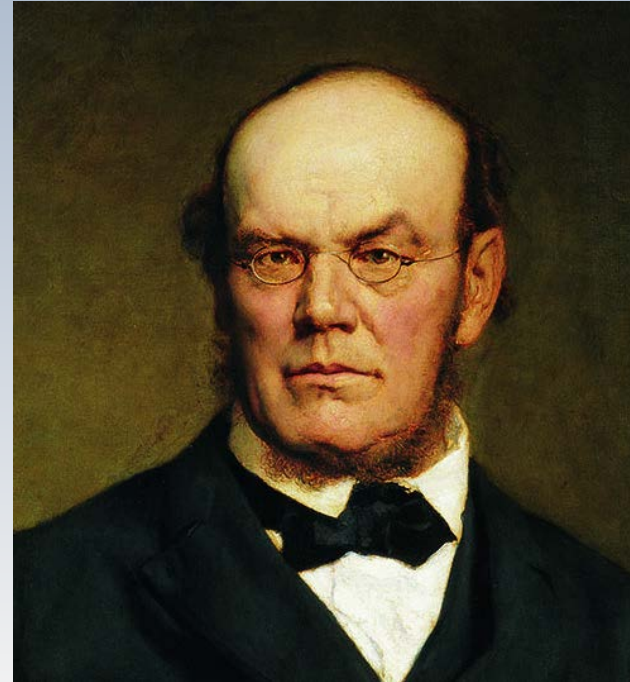
L'équation de Darcy-Weisbach, pour évaluer les pertes par frottement dans des conduites circulaires, est valable tant pour des écoulements laminaires que pour des écoulements turbulents. Maintenant **il faut trouver f**

H. Darcy et J. Weisbach

6.3 Le coefficient de..



Henry Darcy
(1803-1858)



Julius Weisbach
(1806-1871)

Chap 6: Écoulement interne

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.1 Écoulement et Nombre de Reynolds

6.2 Écoulement interne versus écoulement externe

6.3 Le coefficient de friction de Darcy

6.4 Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

6.5 Modélisation de la turbulence

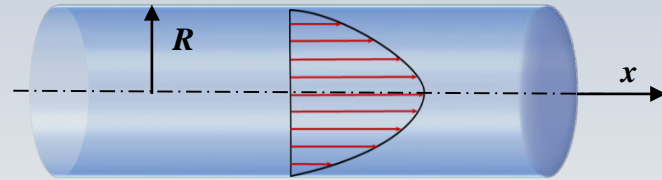
6.6 Écoulement turbulent dans une conduite cylindrique

Pour commencer, nous allons utiliser une solution exacte des équations de Navier-Stokes, en régime stationnaire et incompressible, afin de trouver **une formule pratique** pour l'analyse d'écoulements dans des conduites en **régime laminaire**

En particulier, nous regarderons **l'écoulement de Poiseuille**, qui permet de trouver le profil de vitesses et par la suite les pertes par cisaillement (ainsi que d'autres quantités).

La solution de *l'écoulement de Poiseuille*, dans une conduite cylindrique, similaire à celle trouvée entre deux plaques planes, est

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2)$$



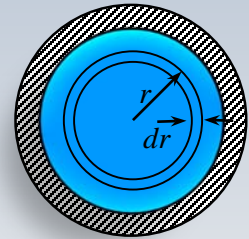
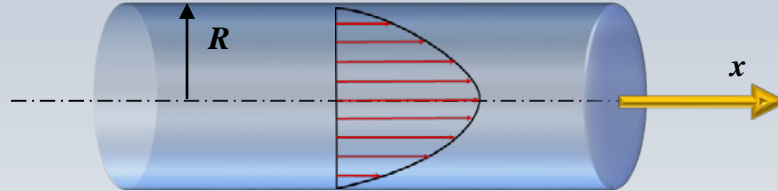
Débit et vitesse moyenne

6.4 Écoulement laminaire..

$$Q = \int_0^R u ds = \int_0^R u 2\pi r dr$$

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2)$$

$$Q = \int_0^R \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2) 2\pi r dr$$



$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\bar{V} = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{dp}{dx} \bigg/ \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) = -\frac{D^2}{32\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{R^2}{8}$$



Débit et vitesse moyenne

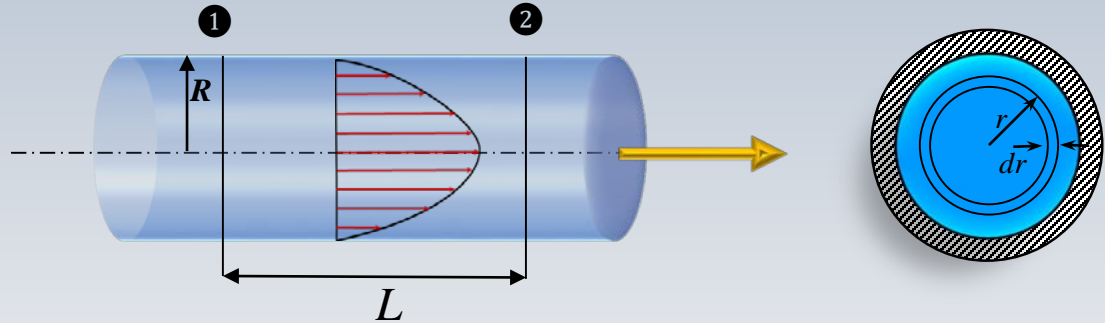
6.4 Écoulement laminaire..

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\bar{V} = -\frac{dp}{dx} \frac{R^2}{8\mu}$$

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta P_{2-1}}{L} = -\frac{\Delta P_{1-2}}{L}$$



$$\bar{V} = \frac{\Delta P_{1-2}}{L} \frac{R^2}{8\mu}$$

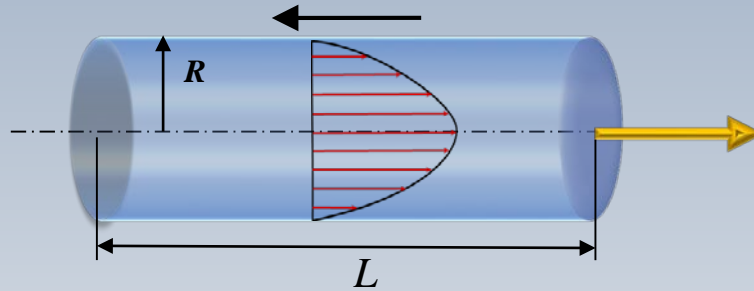
$$\frac{\Delta P_{1-2}}{L} = \frac{8\mu\bar{V}}{R^2}$$



La contrainte pariétale

6.4 Écoulement laminaire..

$$\tau_p = \left| \mu \frac{du}{dr} \right|_{r=R}$$



$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2)$$



$$\tau_p = \left| \mu \frac{du}{dr} \right|_{r=R} = \frac{R}{2} \left| \frac{dp}{dx} \right|$$

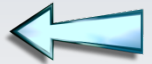
$$\left| \frac{dp}{dx} \right| = \frac{\Delta P_{1-2}}{L}$$



$$\tau_p = \frac{R}{2} \frac{\Delta P_{1-2}}{L}$$



$$\frac{\Delta P_{1-2}}{L} = \frac{8\mu \bar{V}}{R^2}$$



Le facteur de frottement

→ $\tau_p = \frac{R \Delta P_{1-2}}{2 L} = \frac{R 8\bar{V} \mu}{2 R^2} = \frac{4\bar{V} \mu}{R}$ → $\tau_p = \frac{8\bar{V} \mu}{D}$

→ $f = \frac{8\bar{\tau}_p}{\rho \bar{V}^2}$ → $f = \frac{64\mu}{\rho \bar{V} D}$ $Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}$

Facteur de frottement

$f = \frac{64}{Re}$

Le facteur (adimensionnel) de frottement $f=64/Re$, employé pour le calcul des pertes dans les conduites, **n'est valable que pour un écoulement laminaire!**

L'évaluation des pertes par frottement avec la formule:

$$h_f = f \left(\frac{L}{D} \right) \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad \left(f = \frac{64}{Re} \right)$$

permet d'appliquer facilement l'équation de l'énergie,

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + z \right)_{ent} + h_{pompe} - h_{turbine} - h_{frott.} = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + z \right)_{sort}$$

Pour l'instant pour des écoulements laminaires avec ($\alpha=2$)

Écoulement dans un tuyau

6.4 Écoulement laminaire..

1	Le débit volumique	$Q = -\frac{\pi dp}{\mu dx} \left(\frac{R^4}{8} \right)$
2	La vitesse débitante	$u_m = -\frac{1 dp}{\mu dx} \left(\frac{R^2}{8} \right)$
3	Le cisaillement pariétal en $r=R$	$\vec{\tau}_w = -\mu \left(\frac{du}{dr} \right)_{r=R} \quad \vec{i} = \frac{R}{2} \left(\frac{dp}{dx} \right) \vec{i} \quad \tau_w = \frac{R}{2} \left \frac{dp}{dx} \right $
4	Cisaillement et vitesse débitante	$\tau_w = 4 \frac{\mu}{R} u_m $
5	Le coefficient de charge	$f_{lam} = \frac{8\tau_w}{\rho u_m^2} = \frac{64}{Re} \left(Re = \frac{\rho u_m 2R}{\mu} \right)$
6	Puissance requise pour déplacer le fluide	$\dot{W} = - \int_{SC} p \vec{n} \cdot \vec{V} dA = (p_e - p_s) Q$

Les suffixes e et s désignent respectivement les plans d'entrée et de sortie du tuyau

On peut noter que le gradient de pression* est commun à plusieurs expressions. En particulier, on note que la variation de pression au long d'une conduite permet de calculer le cisaillement et vice-versa.

Les pertes prédites par la formule de Hagen-Poiseuille permettent d'obtenir alors la variation de pression

*La pression inclut la pesanteur

Exemple 6.3

De l'huile s'écoule vers le haut dans un conduit incliné. La pression et l'élévation sont connues aux sections 1 et 2, à 10 m l'une de l'autre.

En supposant que l'écoulement soit laminaire, (a) vérifier que l'écoulement s'écoule vers le haut, (b) calculer h_f entre 1 et 2, et calculer (c) Q , (d) V , et (e) Re . Est-ce que l'écoulement est vraiment laminaire?

Solution

$$\rho = 900 \text{ kg/m}^3 \text{ et } \nu = 0.0002 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\gamma = \rho g = 8.829 \text{ N/m}^3$$

$$E_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = 39.64 \text{ m}$$

$$E_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = 34.75 \text{ m}$$

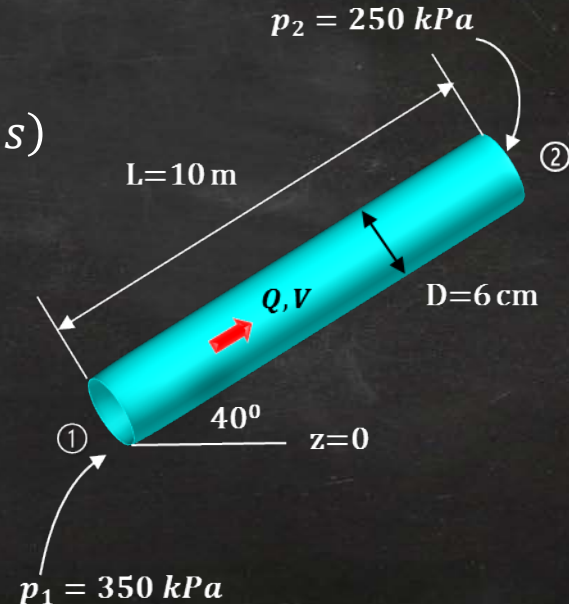
$$V_1 = V_2 \text{ (ainsi } V^2/2g, \text{ n'a pas été ajouté)}$$

$$\mu = \rho \nu = 0.18 \text{ kg/(m s)}$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = L \sin(40) = 6.43 \text{ m}$$

$E_1 > E_2$: l'écoulement est vers le haut (a)



Exemple 6.3

Solution

$$f = \left(\frac{64}{\text{Re}} \right) \Rightarrow h_f = f \left(\frac{L}{D} \right) \frac{V^2}{2g} \Rightarrow h_f = \frac{128 \mu L Q}{\pi \rho g D^4}$$

$$E_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = 39.05 \text{ m}$$

(b)



$$h_f = E_1 - E_2 = 4.9 \text{ m}$$

$$E_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = 34.75 \text{ m}$$

(c),(d)

$$Q = 0.0076 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_f = \frac{128 \mu L Q}{\pi \rho g D^4}$$



$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = 2.7 \text{ m/s}$$

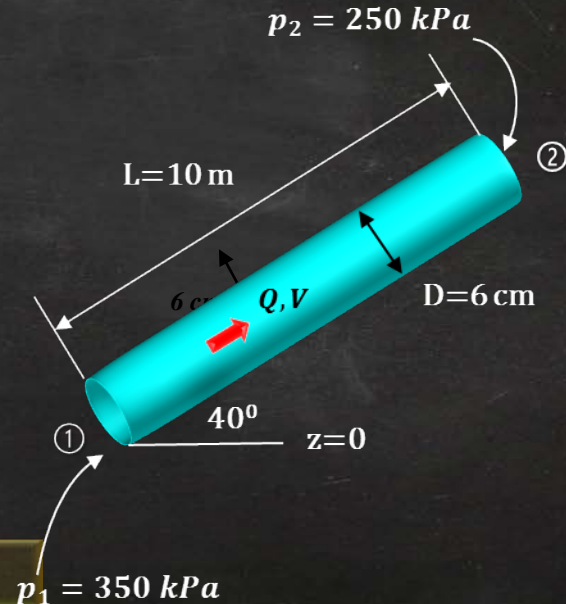
Vérification du régime de l'écoulement

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = 810 < 2300$$



(e)

L'écoulement est laminaire!



Exemple 6.4

Un liquide avec $\gamma = \rho g = 58 \text{ lbf/pi}^3$ s'écoule d'un réservoir dans un tube capillaire de $L = 1 \text{ pi}$ à un débit de $Q = 0.15 \text{ pi}^3/\text{h}$. Les sections 1 et 2 sont à la pression atmosphérique.

Calculer la viscosité μ du fluide en supposant que l'écoulement est pleinement développé dans tout le capillaire.

Solution

$$\rho g = 58 \text{ lbf / pi}^3 \quad \rightarrow$$

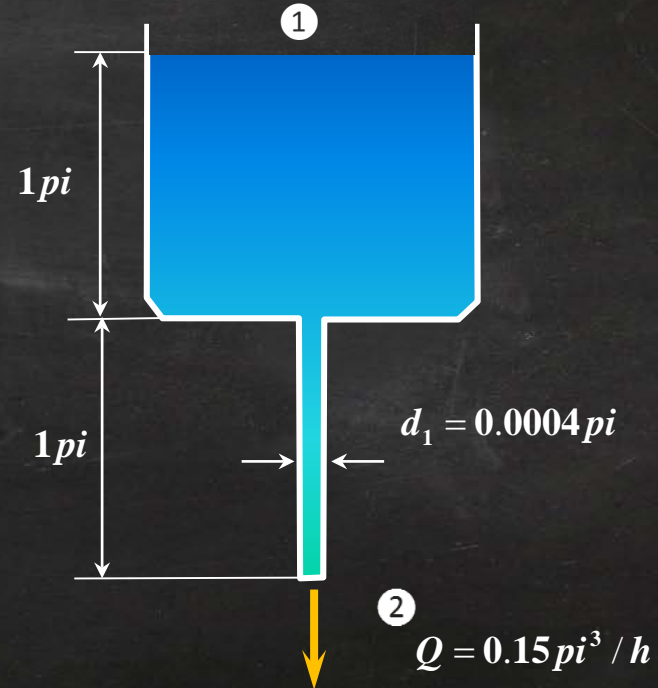
$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = 3.32 \text{ pi / s} \quad \alpha_2 = 2 \text{ Laminaire!}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \quad \rightarrow$$

On note que $p_1 = p_2 = p_{atm}$, alors

$$h_f = z_1 - z_2 - \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = 1.66 \text{ pi}$$

Vers 6.8



Exemple 6.4

$$\rho g = 58 \text{ lbf} / \text{pi}^3$$
$$g = 32.2 \text{ pi} / \text{s}^2$$

Solution $h_f = 1.66 \text{ pi}$ $\rho = 58 / 32.2 = 1.80 \text{ slug} / \text{pi}^3$

$$h_f = 1.66 \text{ pi} = \frac{32 \mu L V}{\rho g d^2} = \frac{128 \mu L Q}{\pi \rho g d^4} \quad \longrightarrow \quad \mu = 1.45 \times 10^{-5} \frac{\text{slug}}{\text{pi} - \text{s}}$$

$L = 1 \text{ pi}$ La longueur du capillaire. Pourquoi?

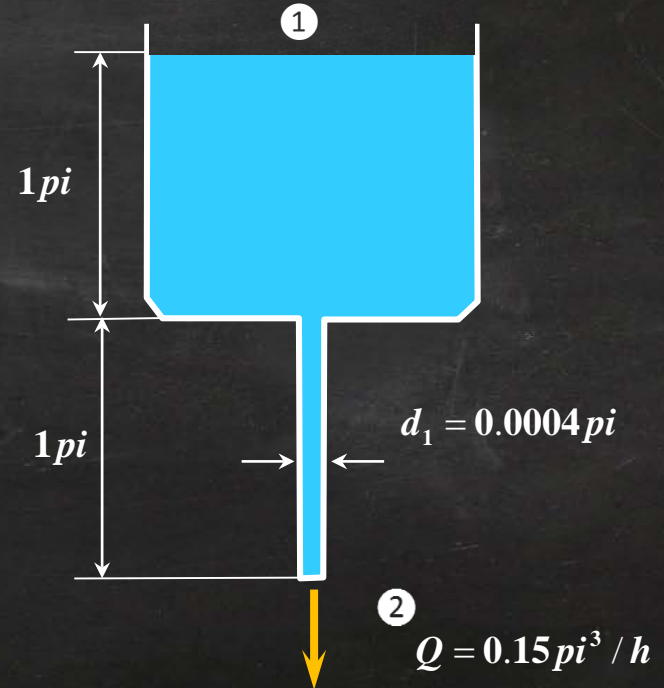
Vérification du régime de l'écoulement

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} = \mathbf{1650} < \mathbf{2300} \quad \longrightarrow$$

L'écoulement est laminaire!

Il existe également une solution turbulente!

Vers 6.8



Chap 6: Écoulement interne

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.1 Écoulement et Nombre de Reynolds

6.2 Écoulement interne versus écoulement externe

6.3 Le coefficient de friction de Darcy

6.4 Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

6.5 Modélisation de la turbulence

6.6 Écoulement turbulent dans une conduite cylindrique

La loi de Poiseuille ne suffit pas pour étudier les pertes dans des conduites **puisque une grande partie des écoulements pratiques sont turbulents!**

Ainsi, en plus de $f = 64/Re$, valable pour le régime laminaire, il faut une modélisation pour décrire les écoulements à grand Reynolds pour calculer le f nécessaire dans la formule de *Darcy-Weisbach*

$$h_f = f \left(\frac{L}{D} \right) \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

La turbulence est un phénomène complexe dont le fluide manifeste un caractère tourbillonnaire. La taille et la position des tourbillons varient constamment, de sorte que l'évolution des écoulements turbulents est difficilement prévisible.

Les écoulements turbulents apparaissent **lorsque les forces d'inertie sont grandes devant les forces de viscosité**, qui s'opposent au déplacement du fluide. Pour ces écoulements le **nombre de Reynolds est élevé**.

Pour un écoulement turbulent nous devons considérer aussi une contrainte de cisaillement associée aux effets tourbillonnaires.

Dans ce cas, on peut dire que le cisaillement τ est généré par la combinaison de deux sources de viscosité, une moléculaire μ et l'autre turbulente μ_t :

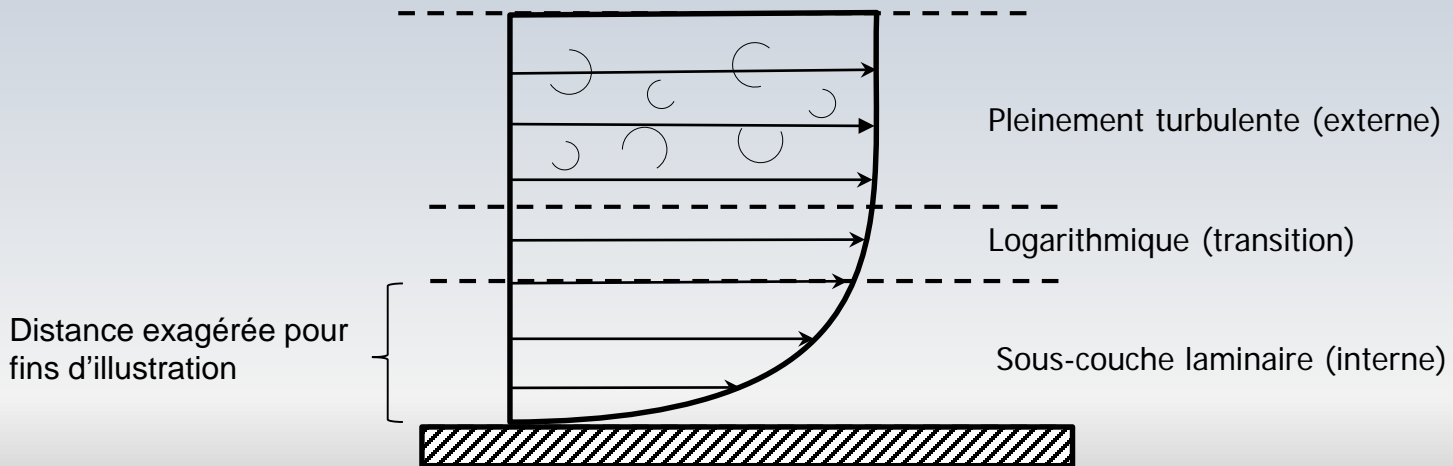
$$\tau = \tau_{lam} + \tau_{turb}$$

Le problème requiert d'exprimer analytiquement $\mu_t (v_t)$. L'étude de la turbulence est hors du cadre de ce cours. Seulement quelques éléments sont donnés en annexe.

Structure d'un écoulement turbulent

6.5 Modélisation de la..

L'analyse des écoulements turbulents a permis de mettre en évidence trois zones (couches) près des parois: une zone interne, une zone de transition et un zone externe

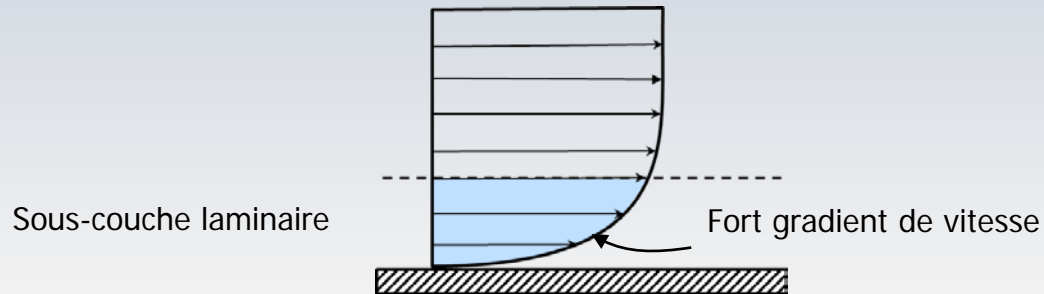


Structure d'un écoulement turbulent

6.5 Modélisation de la..

La couche la plus interne, valable très près de la paroi, est très fine et elle est appelée **sous-couche visqueuse**, ou **sous-couche laminaire**.

Le profil de vitesse est quasi-linéaire et le gradient est fort La viscosité moléculaire μ est dominante et τ est quasi-constant.

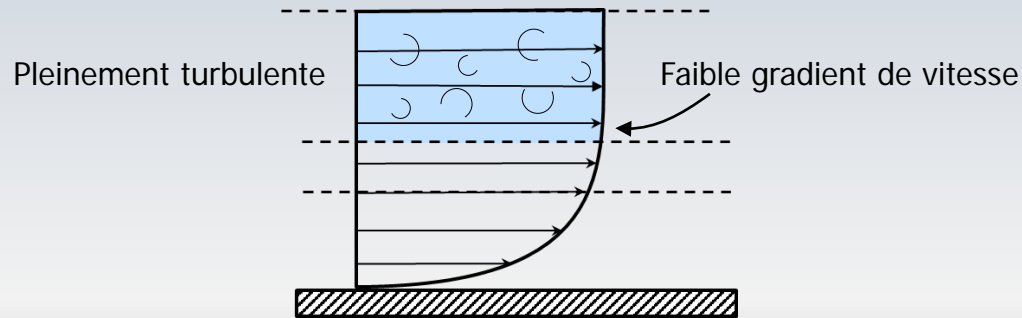


*Une idée du concept de viscosité turbulente est donnée en annexe

Structure d'un écoulement turbulent

6.5 Modélisation de la..

Dans la couche extérieure, appelée "pleinement turbulente", la viscosité turbulente μ_t joue un rôle majeur et le gradient de vitesse est faible.

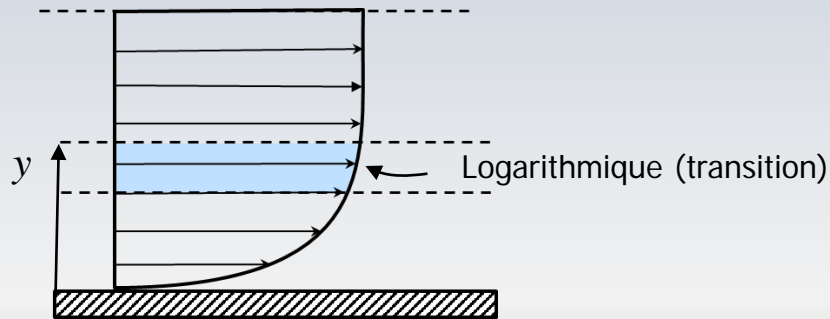


*Une idée du concept de viscosité turbulente est donnée en annexe

Structure d'un écoulement turbulent

6.5 Modélisation de la..

La couche connue comme zone logarithmique, fait la jonction entre la périphérie et la partie centrale d'un écoulement. Dans cette région la viscosité turbulente μ_t prend progressivement le dessus sur la viscosité moléculaire μ .



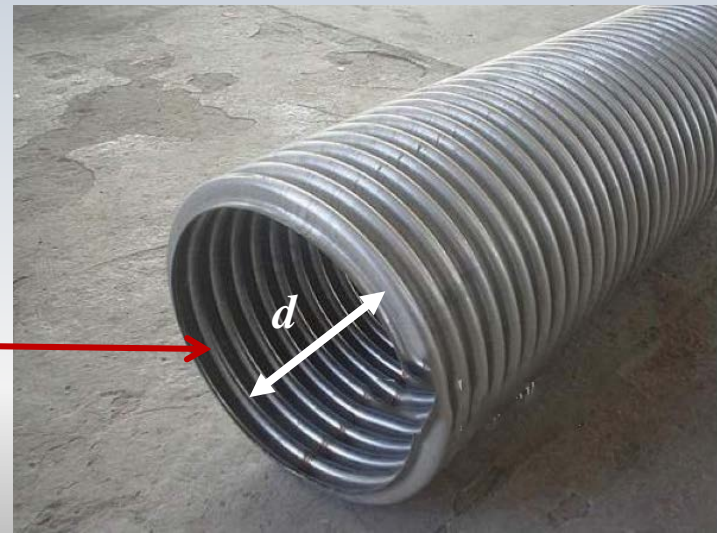
*Une idée du concept de viscosité turbulente est donnée en annexe

Qualité d'une surface

6.5 Modélisation de la..

La qualité du fini de surface à une influence sur l'effort le cisaillement à la paroi qui freine un écoulement. On nomme habituellement par ε la mesure *rms* de la variation de la surface d'une paroi. L'influence réelle du fini de surface est relative au diamètre de la conduite: ε/d

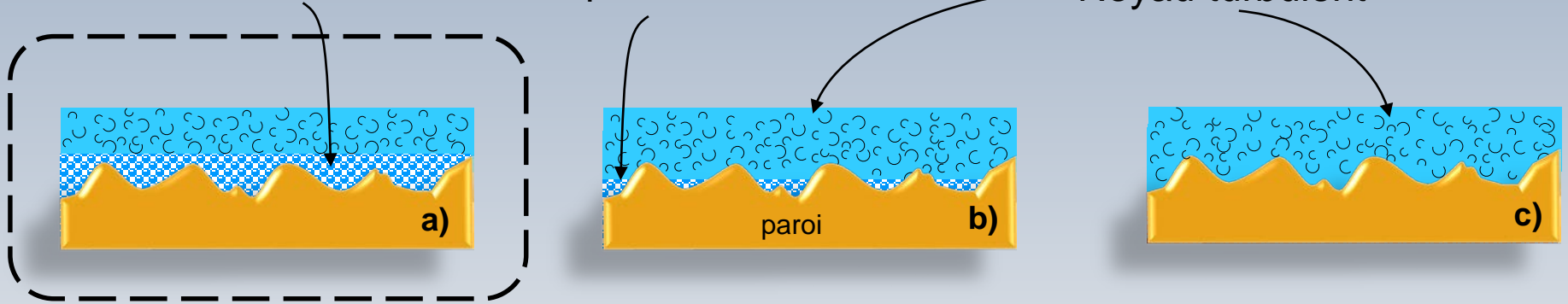
ε



La sous-couche et le type de paroi

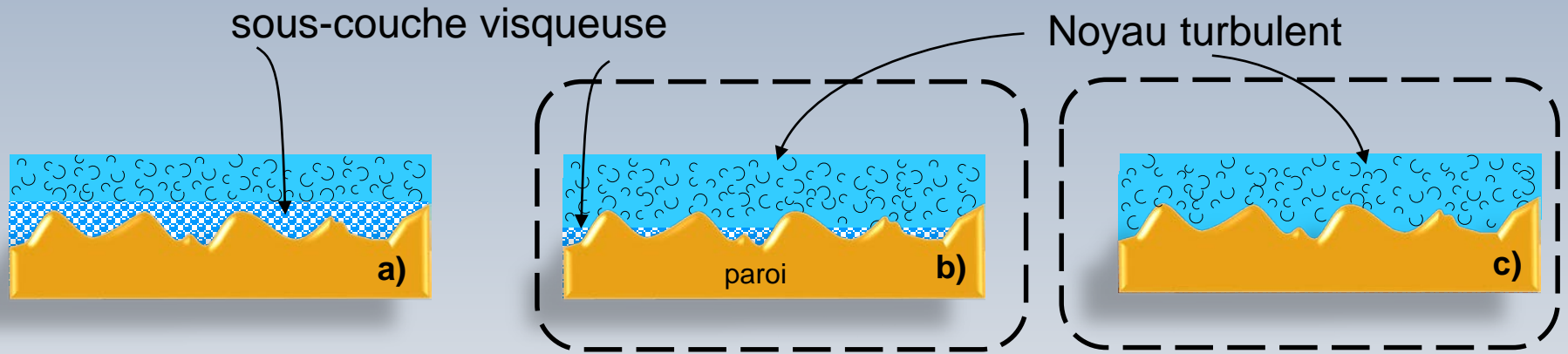
sous-couche visqueuse

Noyau turbulent



Dans le cas **a)**, la rugosité est imbibée dans la sous-couche visqueuse et le tuyau est considéré comme étant **hydrauliquement lisse**. On peut dire que le fluide glisse en quelque sorte sur lui-même

La sous-couche et le type de paroi



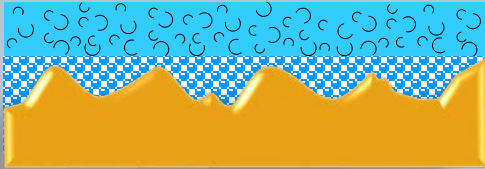
Dans le cas **b)**, il y en a un effet mixte sur l'écoulement produit de la rugosité à la paroi et de la sous-couche visqueuse.

Dans le cas **c)**, l'écoulement est complètement dominé par la rugosité à la paroi. Il est **hydrauliquement turbulent**

Le coefficient f et le type de paroi

6.5 Modélisation de la..

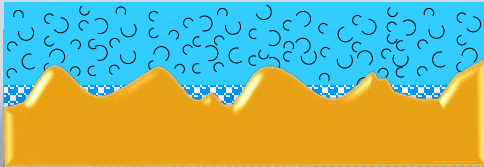
a) Conduite hydrauliquement lisse



$$f = f(Re)$$

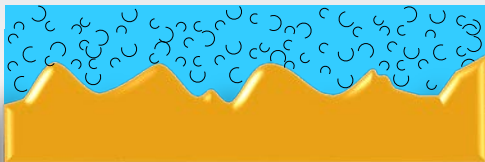
f : frottement
 ε : rugosité
 D : diamètre

b) Conduite partiellement rugueuse



$$f = f(Re, \varepsilon / D)$$

c) Conduite totalement rugueuse



$$f = f(\varepsilon / D)$$

Chap 6: Écoulement interne

6.1

6.2

6.3

6.4

6.5

6.6

6.1 Écoulement et Nombre de Reynolds

6.2 Écoulement interne versus écoulement externe

6.3 Le coefficient de friction de Darcy

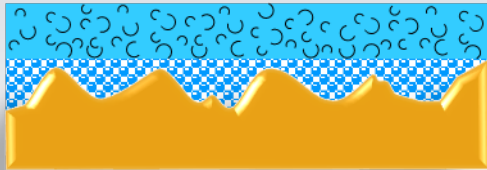
6.4 Écoulement laminaire dans une conduite cylindrique

6.5 Modélisation de la turbulence

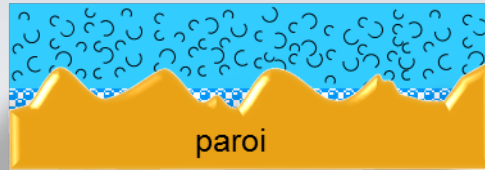
6.6 Écoulement turbulent dans une conduite cylindrique

Initialement, des formules individuelles ont été proposées pour séparer l'influence de la rugosité à la paroi sur le comportement d'une conduite vis-à-vis l'écoulement. Notamment:

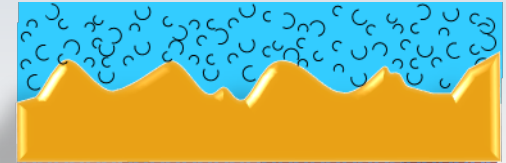
- a) *hydrauliquement lisse*, b) *partiellement rugueuse*, c) *Conduite totalement rugueuse*



a)



b)



c)

Formules paroi lisse-rugueuse

6.6 Écoulement. turbulent.

$$\frac{\varepsilon u^*}{\nu} \leq 5$$

Paroi hydrauliquement lisse.
Aucun effet de la rugosité sur la friction



$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(\text{Re}_d \sqrt{f}) - 0.8$$

$$5 \leq \frac{\varepsilon u^*}{\nu} \leq 70$$

Paroi semi rugueuse. La rugosité et le nombre de Reynolds ont un effet sur la friction



$$\frac{1}{\sqrt{f/2}} = 2.457 \ln \left(\left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{0.9} + 0.27 \frac{\varepsilon}{D} \right)^{-1}$$

$$70 \leq \frac{\varepsilon u^*}{\nu}$$

Paroi totalement rugueuse
La friction est indépendante du nombre de Reynolds



Nikuradse

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3.71} \right)$$

$$u^* = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{vitesse de frottement}$$

Comment savoir s'il faut effectuer un calcul avec la formule pour paroi lisse ou avec la formule pour paroi rugueuse?



Cyril Colebrook (1939) a intégré en une seule relation les résultats pour les parois lisses et totalement rugueuses. On peut ainsi calculer le coefficient de frottement f sans avoir à distinguer le type de paroi

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon / d}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$



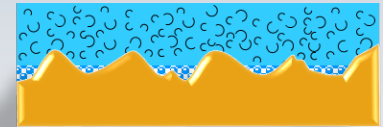
On note, cependant, que l'inconnue apparait dans les deux membres de cette équation non linéaire. Il faut donc procéder par itération pour trouver f

Paper No. 5204.

"Turbulent Flow in Pipes, with particular reference to the Transition Region between the Smooth and Rough Pipe Laws."

CYRIL FRANK COLEBROOK, Ph.D., B.Sc. (Eng.), Assoc. M. Inst. C.E.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon / d}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}_d \sqrt{f}} \right)$$



Pour faciliter la tâche au niveau pratique, **Lewis .F. Moody (1944)** a tracé la formule Colebrook sous forme d'abaque

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right]$$

Formule de
Colebrook



Abaque de Moody

f : frottement
 ε : rugosité
 D : diamètre
 Re : Reynolds

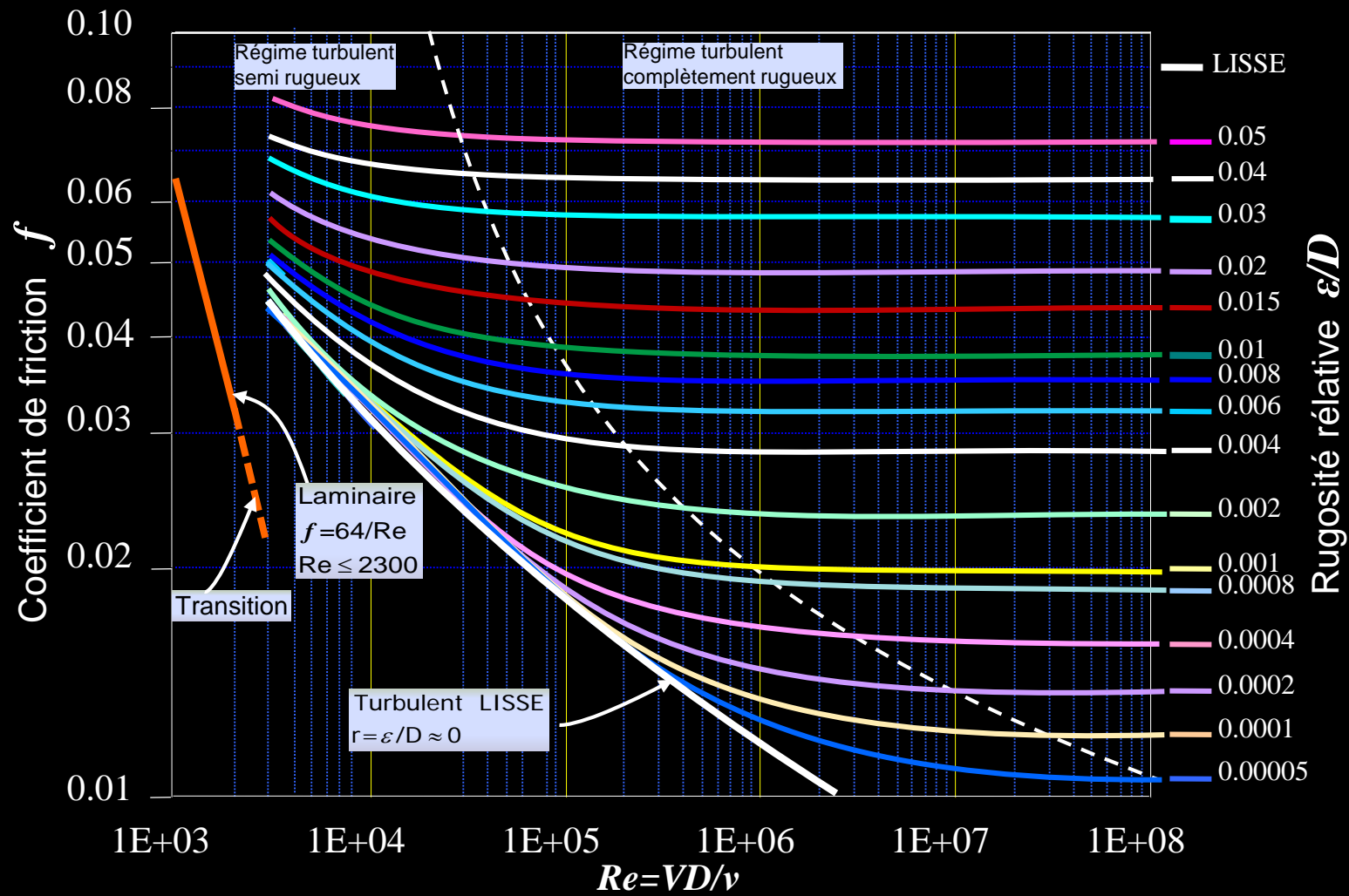
Friction Factors for Pipe Flow

BY LEWIS F. MOODY, PRINCETON, N. J. Transactions of the ASME, 66, 671-684, 1944

The object of this paper is to furnish the engineer with a simple means of estimating the friction factors to be used in computing the loss of head in clean new pipes and in closed conduits running full with steady flow. The modern developments in the application of theoretical hydrodynamics to the fluid-friction problem are impressive and, scattered through an extensive literature. This paper is not intended as a critical survey of this wide field. For a concise review, Professor Bakhinetteff's (1)² small book on the mechanics of fluid flow is an excellent reference. Prandtl and Tietjens (2) and Rouse (3) have also made notable contributions to the subject. The author does not claim to offer anything particularly new or original, his aim merely being to embody the now accepted conclusions in convenient form for engineering use.

The paper was intended for application to normal conditions of engineering practice and specifies a number of qualifications limiting the scope of the charts, such as their restriction to round (straight) new and clean pipes, running full, and with steady flow.

Under such conditions it was stated, as noted by Professor Pardoe, that the friction factor f "is a dimensionless quantity, and at ordinary velocities is a function of two, and only two, other dimensionless quantities, the relative roughness of the surface and the Reynolds number."



- L'évolution du coefficient de friction en **régime laminaire**, affiché sur le côté gauche de la figure, correspond à $f = 64/Re$
- Le facteur de frottement est discontinu et croît fortement lors du passage du régime laminaire vers le régime turbulent
- En régime turbulent, la courbe "turbulent lisse" lorsque la rugosité est imbibée dans la sous-couche visqueuse, produit le plus petit coefficient de frottement
- Pour des nombres de Reynolds élevés, le facteur de frottement ne dépend que de la rugosité relative ε/d

À partir des années 1970, des nouvelles formules explicites, incluant l'effet de la rugosité, ont fait leur apparition pour obtenir le coefficient de friction f défini implicitement dans la formule de Colebrook.

L'une des premières utilisées avec succès a été introduite par *Swamee-Jain* en 1976, suivi par celle de *Haaland* en 1983.

Plusieurs formules similaires ont été proposées par la suite, mais sans établir une différence substantielle sur la précision

Une liste exhaustive de formules en ordre chronologique est fournie dans l'article:

Flow Turbulence Combust (2013) 90:1–27
DOI 10.1007/s10494-012-9419-7

Explicit Friction Factor Accuracy and Computational Efficiency for Turbulent Flow in Pipes

Herbert Keith Winning · Tim Coole

Les formules présentées par les auteurs sont données en annexe

[Pour voir les formules](#)

$$\varepsilon/D = 0.000001-0.05$$

$$\text{Re} = 5 \times 10^3 - 10^8$$

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]^2}$$

$$Q = -2.22D^{5/2} \sqrt{\frac{gh_f}{L}} \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{1.78\nu}{D^{2/3} \sqrt{\frac{gh_f}{L}}} \right)$$

$$D = 0.66 \left(\varepsilon^{1.25} \left(\frac{LQ^2}{gh_f} \right)^{4.75} + \nu Q^{9.4} \left(\frac{L}{gh_f} \right)^{5.2} \right)^{0.04}$$

S. E. Haaland (1983)

6.6 Écoulement. turbulent.

$$\varepsilon/D = 0.000001-0.05$$

$$\text{Re} = 4 \times 10^3 - 10^8$$

$$f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right) \right]^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left[\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right]$$

$$0 \leq \varepsilon/D \leq 0.05$$

$$\text{Re} > 0$$

Cette formule a la particularité d'être valable pour toute la gamme des écoulements: laminaires et turbulents

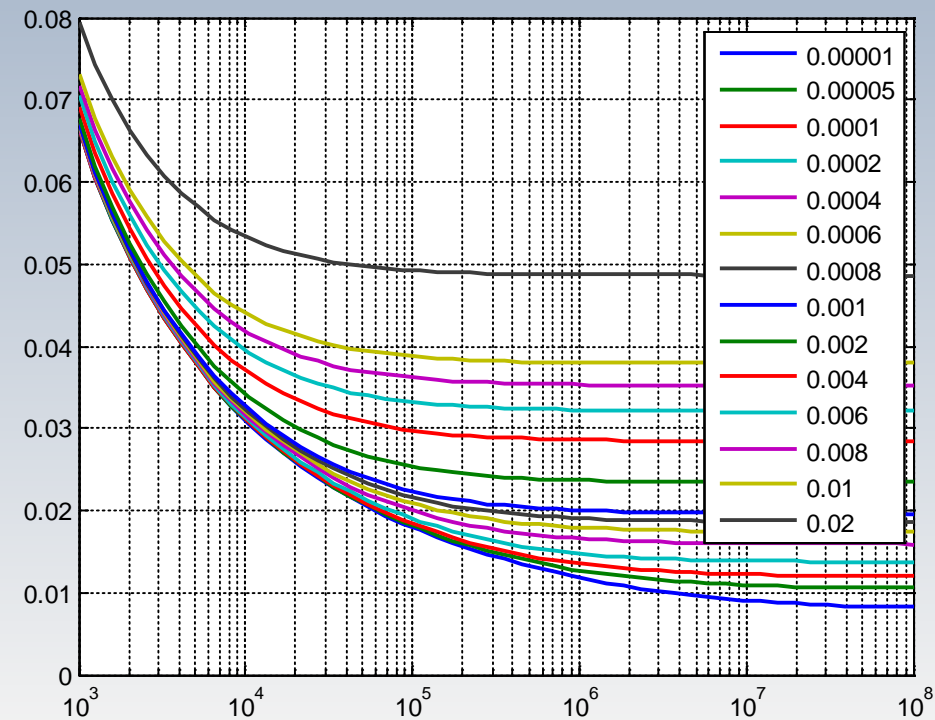
$$f = 8 \left[\left(\frac{8}{\text{Re}} \right)^{12} + (A + B)^{-3/2} \right]^{1/12}$$

$$A = -2 \log \left[\left(\frac{\varepsilon}{3,7D} \right) + \left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{0.9} \right]^{16}$$

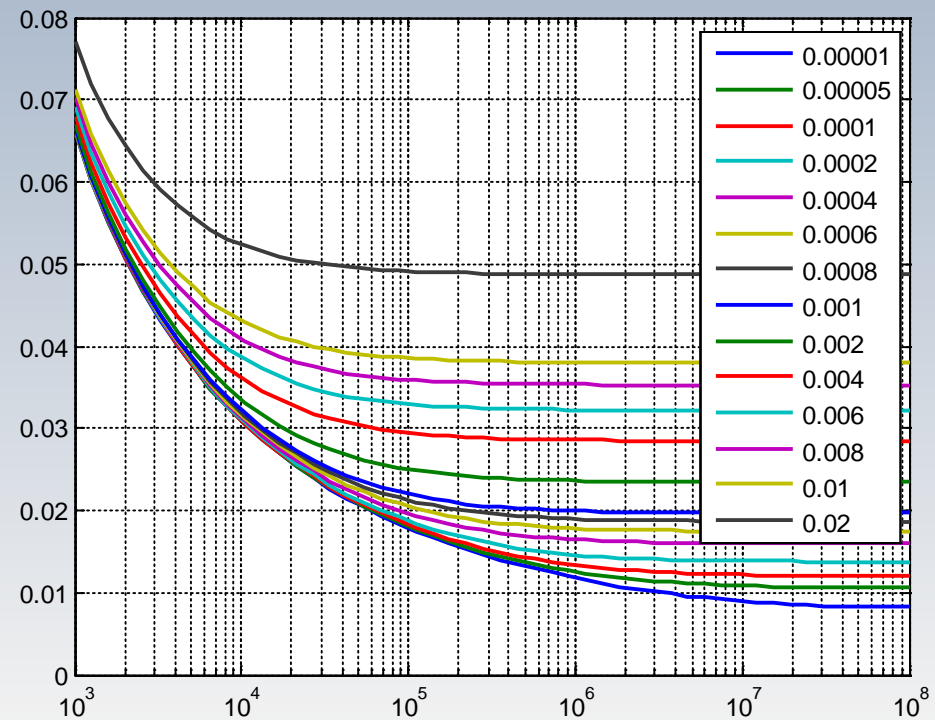
$$B = \left(\frac{37530}{\text{Re}} \right)^{16}$$

Abaque et formules

6.6 Écoulement. turbulent.



Swamee-Jain 1976



Haaland 1983

Rugosité de quelques matériaux

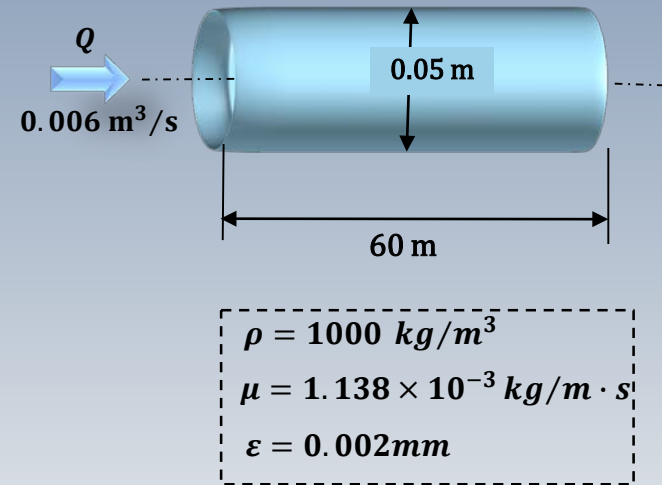
6.6 Écoulement. turbulent.

Matériau	Rugosité ε (mm)
Verre, laiton, cuivre	0.0015
Acier commercial standard	0.045
Fonte asphaltée	0.12
Fer galvanisé	0.15
Fer forgé	0.26
Béton	0.18-0.6
Acier rivé	0.9-9.0
Metal ondulé	45
PVC	0.12

Problème

On a un écoulement d'eau ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.138 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$) stationnaire, et incompressible dans une conduite horizontale de $L = 60\text{m}$ de longueur et un diamètre de $D = 0.05\text{m}$. La conduite est faite en acier inox avec une rugosité de $\varepsilon = 0.002\text{mm}$. Le débit circulant est de $Q = 0.006 \text{ m}^3/\text{s}$.

Déterminer la chute de pression, la perte de charge, et la puissance requise (pompe) pour faire circuler l'eau dans le tuyau



Problème

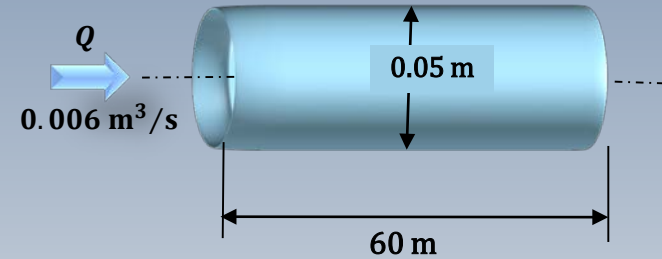
$$Re = \frac{4Q}{\pi D \mu / \rho} = \frac{4 \times 0.006}{\pi \times 0.05 \times 1.138 \times 10^{-3} / 10^3}$$

$$Re = 135435 \quad \rightarrow \quad \text{Turbulent}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.002 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = 0.000040$$

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} = 0.0174$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 3.06 \text{ m/s}$$

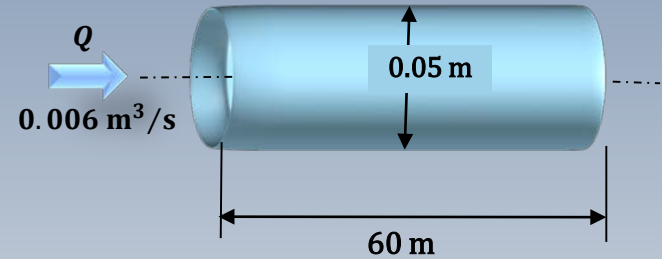


$$\begin{aligned} \rho &= 1000 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 1.138 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s} \\ \varepsilon &= 0.002 \text{ mm} \end{aligned}$$

Problème

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_1 - h_f = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z\right)_2$$

$$\begin{aligned} h_f &= f \left(\frac{L}{D}\right) \frac{V^2}{2g} \\ &= 0.0174 \left(\frac{60}{0.05}\right) \frac{(3.06 \text{ m/s})^2}{2 \times 9.8} = \mathbf{9.78 \text{ m}} \end{aligned}$$



$$z_1 = z_2, V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = (p_1 - p_2) / \rho g = h_f$$

$$\Delta p = h_f \rho g = 9.78 \times 1000 \times 9.81 = \mathbf{95941.8 \text{ Pa}}$$

$$\dot{W} = FV = \Delta p AV = \Delta p (AV) = \Delta p Q$$

$$\dot{W} = Q \Delta p = 0.006 \times 95941.8 = \mathbf{575.6 \text{ W}}$$

Traditionnellement, les problèmes associés aux calculs dans les conduites sont classifiés en trois types:

1. Le calcul de h_f connaissant D , Q (ou V) et L , g , ε , ν
2. Le calcul de Q (ou V) connaissant D , h_f et L , g , ε , ν
3. Le calcul de D connaissant Q , h_f et L , g , ε , ν

Résolution à l'aide de formules

1. Calculer h_f connaissant: $D, Q, L, g, \varepsilon, \nu$

$$\text{Re} = \frac{4Q}{\pi D \nu} \left\{ \begin{array}{l} f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]^2} \quad \text{Swamee-Jain} \\ f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right) \right]^2} \quad \text{Haaland} \end{array} \right. \Rightarrow h_f = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{LQ^2}{D^5}$$

$h_f = f \left(\frac{L}{D} \right) \frac{V^2}{2g} \leftarrow Q = V \pi D^2 / 4$

2. Calculer Q connaissant: $h_f, D, L, g, \varepsilon, \nu$

$$Q = -0.965 \left(\frac{gD^5 h_f}{L} \right)^{0.5} \ln \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \left(\frac{3.17\nu^2 L}{gD^3 h_f} \right)^{0.5} \right)$$

Swamee-Jain

3. Calculer D connaissant: $Q, h_f, L, g, \varepsilon, \nu$

$$D = 0.66 \left[\varepsilon^{1.25} \left(\frac{LQ^2}{gh_f} \right)^{4.75} + \nu Q^{9.4} \left(\frac{L}{gh_f} \right)^{5.2} \right]^{0.04}$$

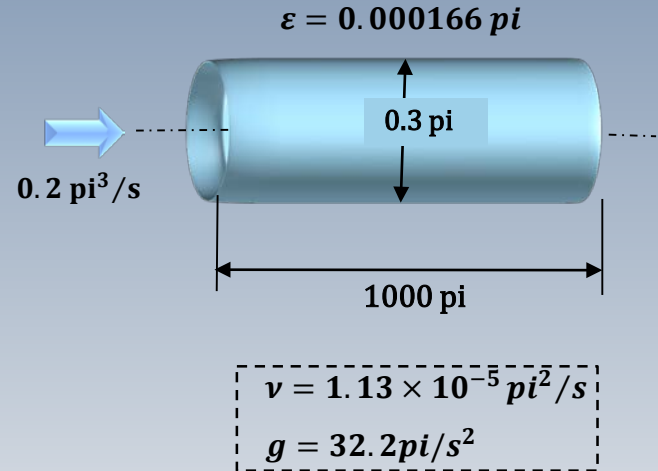
Swamee-Jain

Résolution à l'aide de l'abaque de Moody / formules

Problème

On a un écoulement stationnaire d'un fluide ($\nu = 1.13 \times 10^{-5} \text{ pi}^2/\text{s}$) incompressible dans une conduite horizontale de $L = 1000 \text{ pi}$ et d'un diamètre $D = 0.3 \text{ pi}$. La rugosité de la paroi est de $\varepsilon = 0.000166 \text{ pi}$. Le débit circulant est de $Q = 0.02 \text{ pi}^3/\text{s}$. $g = 32.2 \text{ pi}/\text{s}^2$

On doit déterminer **la perte de charge h_f**



Type 1

Calculer h_f connaissant: $D = 0.3 \text{ pi}$, $Q = 0.2 \text{ pi}^3 / \text{s}$, $L = 100 \text{ pi}$,
 $g = 32.2 \text{ pi} / \text{s}^2$, $\varepsilon = 0.000166 \text{ pi}$, $\nu = 1.13 \times 10^{-5} \text{ pi}^2 / \text{s}$

$$\text{Re} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = 7.5 \times 10^4$$

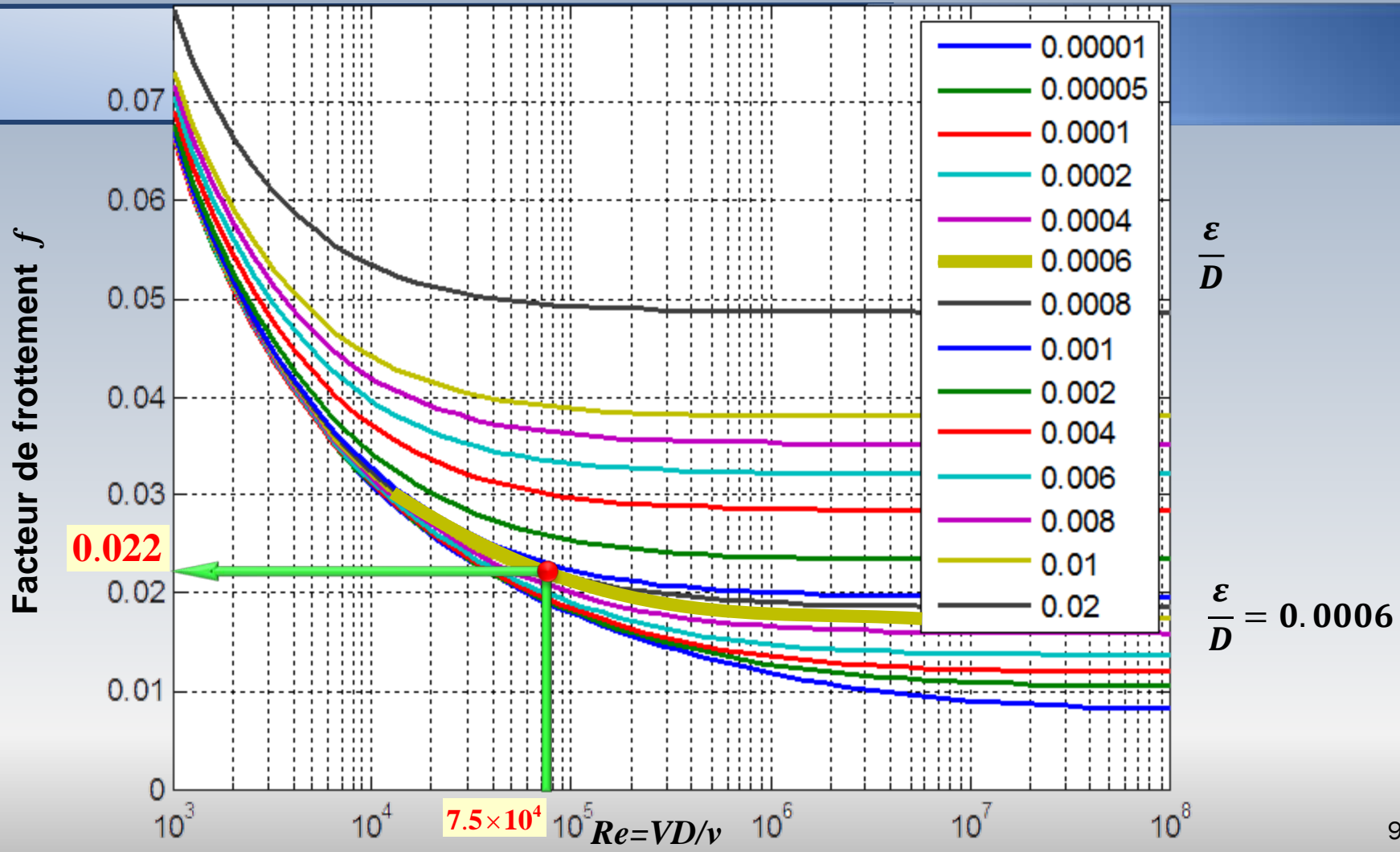
$$\frac{\varepsilon}{D} = 0.0006$$

Haaland

$$\Rightarrow f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right) \right]^2}$$

$$f = 0.0211$$

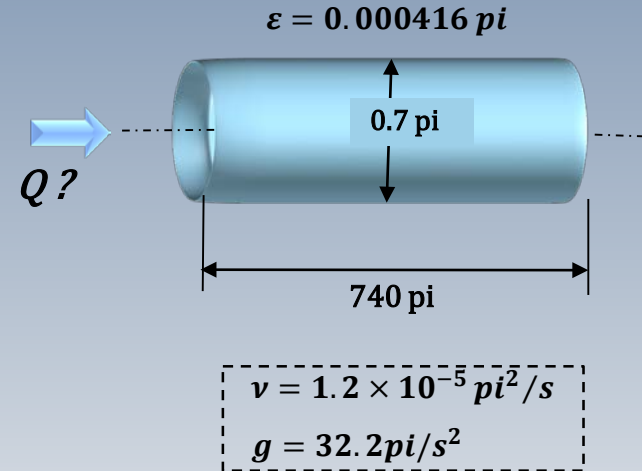
$$h_f = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{LQ^2}{D^5} = 8.72 \text{ pi}$$



Problème

On a un écoulement stationnaire d'un fluide($\nu = 1.2 \times 10^{-5} \text{ pi}^2/\text{s}$) incompressible dans une conduite horizontale de $L = 740 \text{ pi}$ et d'un diamètre $D = 0.7 \text{ pi}$. La rugosité de la paroi est de $\varepsilon = 0.000416 \text{ pi}$. La perte de charge est $h_f = 15 \text{ pi}$. $g = 32.2 \text{ pi}/\text{s}^2$

On doit déterminer **le débit Q**



Calculer Q connaissant: $h_f = 15 \text{ pi}$, $D = 0.7 \text{ pi}$, $L = 750 \text{ pi}$,
 $g = 32.2 \text{ pi/s}^2$, $\varepsilon = 0.000416 \text{ pi}$, $\nu = 1.2 \times 10^{-5} \text{ pi}^2/\text{s}$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0.0006 \quad h_f = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{LQ^2}{D^5} \quad \Rightarrow \quad Q^2 = \frac{\pi^2 D^5 g h_f}{8L f}$$

$$\Rightarrow \quad \left[Q = \frac{0.365}{\sqrt{f}} \quad \Rightarrow \quad \text{Re} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = 1.52 \times 10^5 Q \right]$$

Type 2

$$f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \right]^2}$$

Calculer Q connaissant: $h_f = 15 \text{ pi}$, $D = 0.7 \text{ pi}$, $L = 750 \text{ pi}$,
 $g = 32.2 \text{ pi}/s^2$, $\varepsilon = 0.000416 \text{ pi}$, $\nu = 1.2 \times 10^{-5} \text{ pi}^2/s$


	f	$Q = 0.365/\sqrt{f} \text{ pi}^3/s$	$Re = 1.52 \times 10^5 Q$	ε/D
Hypothèse				
Moody				
Haaland				



Type 2

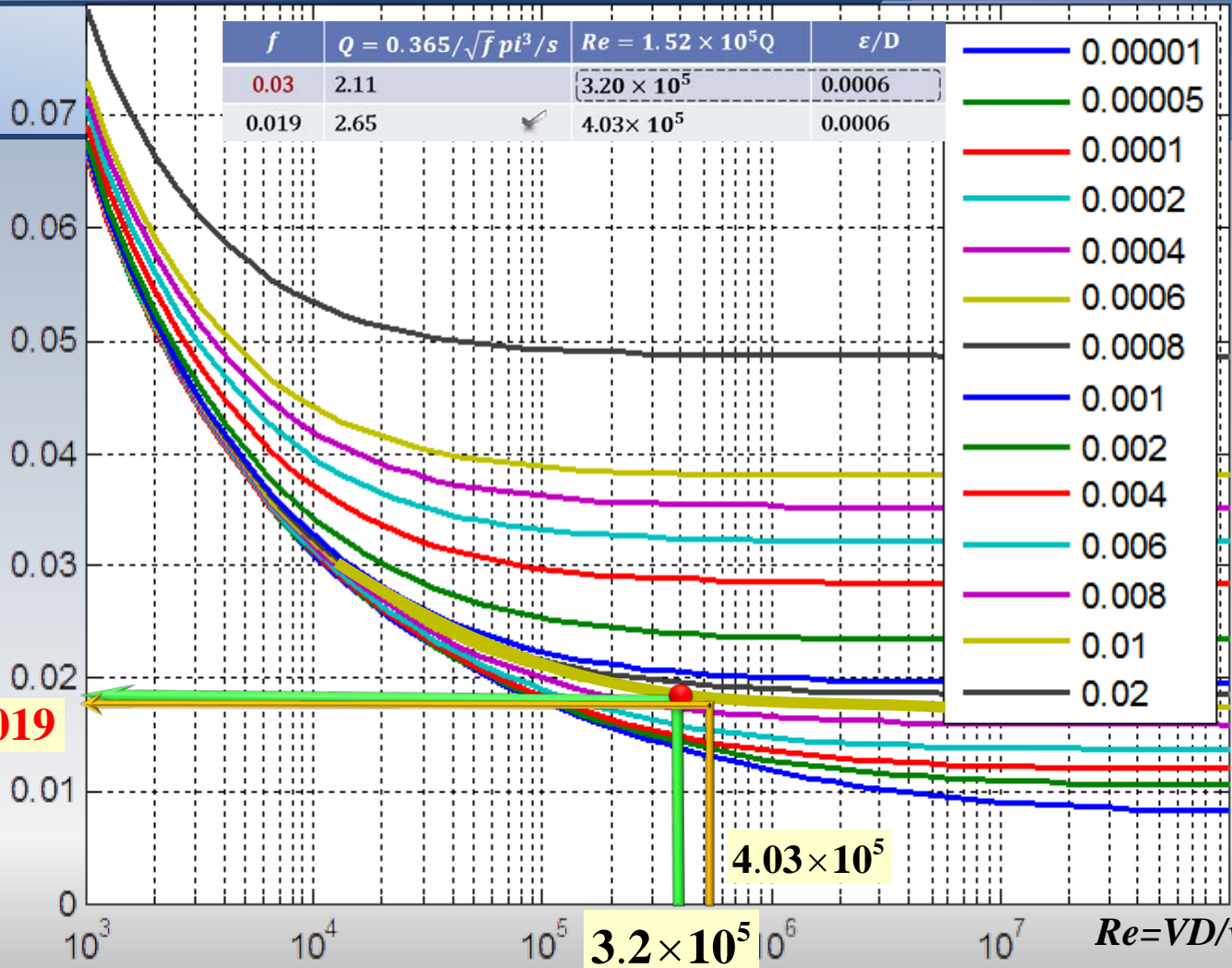
$$f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \right]^2}$$

Calculer Q connaissant: $h_f = 15 \text{ pi}$, $D = 0.7 \text{ pi}$, $L = 750 \text{ pi}$,
 $g = 32.2 \text{ pi}/s^2$, $\varepsilon = 0.000416 \text{ pi}$, $\nu = 1.2 \times 10^{-5} \text{ pi}^2/s$

	f	$Q = 0.365/\sqrt{f} \text{ pi}^3/s$	$Re = 1.52 \times 10^5 Q$	ε/D
Hypothèse	0.03	2.11	3.20×10^5	0.0006
Moody Haaland	0.019	2.65	 4.03×10^5	0.0006

Facteur de frottement f

0.019



$\frac{\epsilon}{D}$

$\frac{\epsilon}{D} = 0.0006$

3.2×10^5

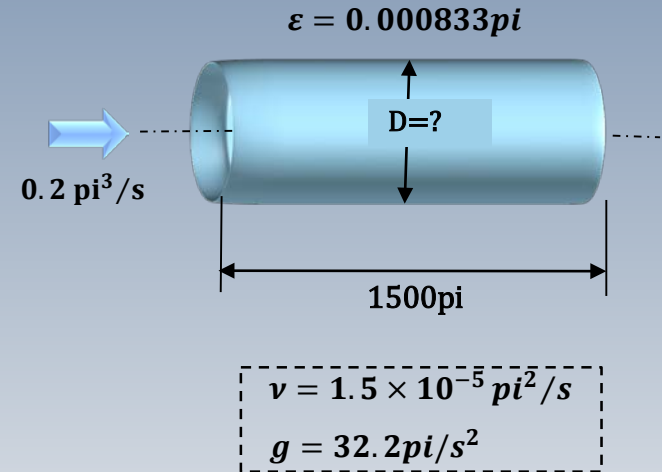
4.03×10^5

$Re = VD/v$

Problème

On un écoulement stationnaire d'un fluide ($\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ pi}^2/\text{s}$) incompressible dans une conduite horizontale de $L = 1500 \text{ pi}$. Le débit circulant est de $Q = 0.2 \text{ pi}^3/\text{s}$. La rugosité de la paroi est de $\varepsilon = 0.000833 \text{ pi}$ et on registre une perte de charge $h_f = 10 \text{ pi}$.

On doit déterminer **le diamètre D**



Type 3

$$f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \right]^2}$$

Calculer D connaissant: $Q = 0.2 \text{ pi}^3 / \text{s}$, $h_f = 10 \text{ pi}$, $L = 1500 \text{ pi}$,
 $g = 32.2 \text{ pi} / \text{s}^2$, $\varepsilon = 0.000833 \text{ pi}$, $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ pi}^2 / \text{s}$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0.000833 / D \qquad h_f = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{LQ^2}{D^5} \qquad \Rightarrow \qquad D^5 = \frac{8LfQ^2}{\pi^2 gh_f}$$

$$Re = \frac{4Q}{\pi D \nu} = 0.1689 \times 10^5 / D \qquad D = 0.6852 f^{1/5}$$

	f	$D = 0.6852 f^{0.2}$	$Re = 0.1689 \times 10^5 / D$	$\varepsilon / D = 0.00083 / D$
Hypothèse				
Moody (Haaland)				


Type 3

$$f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \right]^2}$$

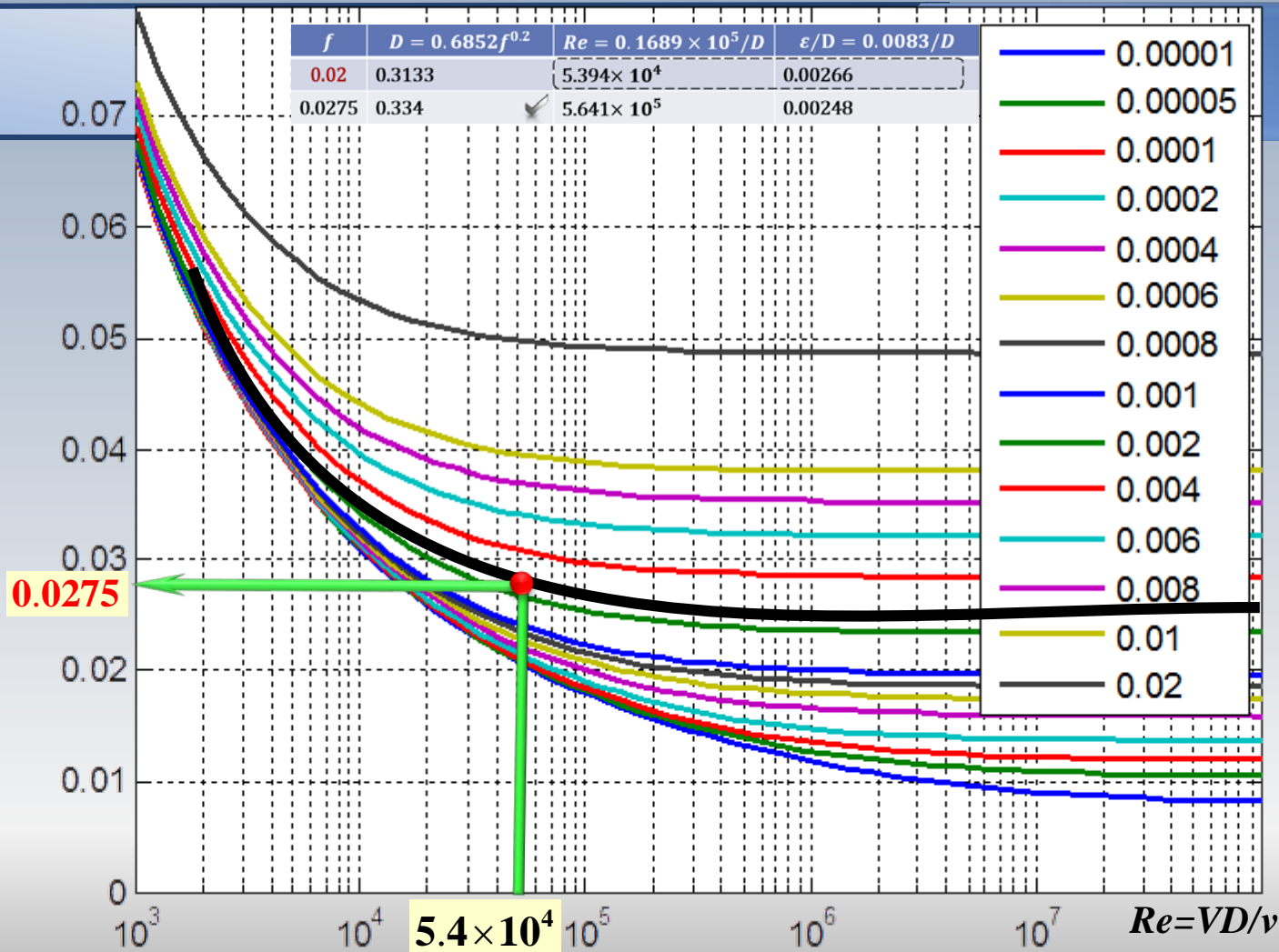
Calculer D connaissant: $Q = 0.2 \text{ pi}^3 / \text{s}$, $h_f = 10 \text{ pi}$, $L = 1500 \text{ pi}$,
 $g = 32.2 \text{ pi} / \text{s}^2$, $\varepsilon = 0.000833 \text{ pi}$, $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ pi}^2 / \text{s}$

$$\frac{\varepsilon}{D} = 0.000833 / D \qquad h_f = f \frac{8}{\pi^2 g} \frac{LQ^2}{D^5} \qquad \Rightarrow \qquad D^5 = \frac{8LfQ^2}{\pi^2 gh_f}$$

$$Re = \frac{4Q}{\pi D \nu} = 0.1689 \times 10^5 / D \qquad D = 0.6852 f^{1/5}$$

	f	$D = 0.6852 f^{0.2}$	$Re = 0.1689 \times 10^5 / D$	$\varepsilon / D = 0.00083 / D$
Hypothèse	0.02	0.313	5.394×10^4	0.00266
Moody (Haaland)	0.0275	0.334 	5.641×10^5	0.00248

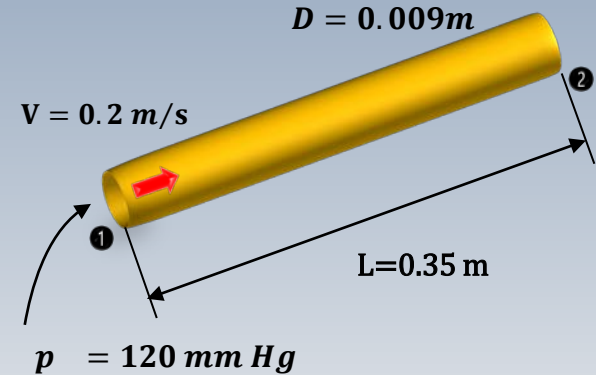
Facteur de frottement f



$\frac{\epsilon}{D}$
 $\frac{\epsilon}{D} = 0.0027$

Problème

On modélise une artère du corps humain avec une sonde de diamètre $D = 9 \text{ mm}$ et de longueur $L = 0.35 \text{ m}$. On estime que le sang a une viscosité d'environ $\mu = 4 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, une densité spécifique de $S_g = 1$, et que la pression à l'entrée ① de l'artère est égale à $p_1 = 120 \text{ mm Hg}$. Si le débit était permanent (en fait il est pulsatile) avec $V = 0.2 \text{ m/s}$, déterminez **la pression à l'extrémité ②** de l'artère, si elle est orientée dans la direction: **a)** verticale (flux vers le haut) ou **b)** horizontale



$$\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$$
$$\mu = 4 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$$

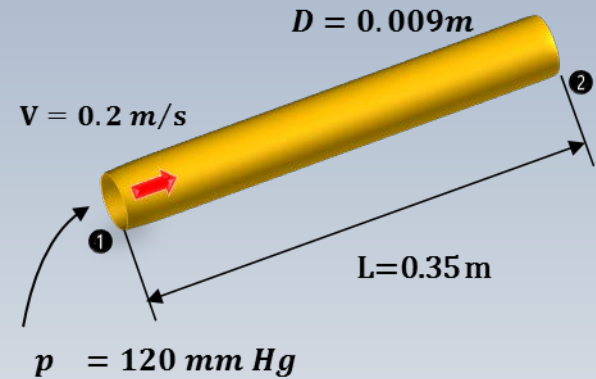
Bilan d'énergie

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 - h_{f.} = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = z_2 - z_1 + f \frac{V^2}{2g} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$p_1 - p_2 = f \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{L}{D} \right) + \gamma(z_2 - z_1)$$

$$\gamma(z_2 - z_1) = \begin{cases} \gamma L: & \text{verticale} \\ 0: & \text{horizontale} \end{cases}$$



$$\rho = 1000\text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 4 \times 10^{-3}\text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

$$p_2 = p_1 - f \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{L}{D} \right) - \gamma L$$

$$p_2 = p_1 - f \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{L}{D} \right)$$




Coefficient f et pression

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0.2 \times 0.009 \times 1000}{4 \times 10^{-3}} = 450$$

$Re = 450$  laminaire

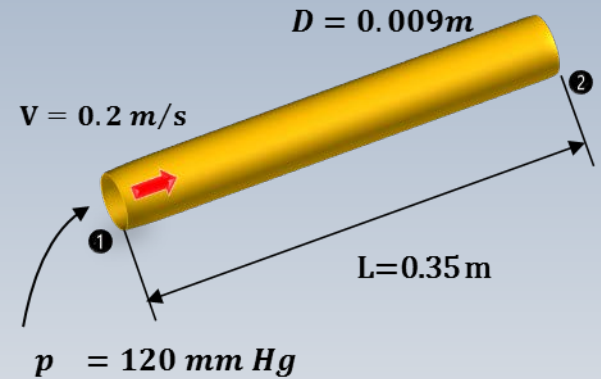
$$f = \frac{64}{Re} = 0.142$$

 Verticale

$$p_2 = p_1 - f \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{L}{D} \right) - \gamma L$$

$$\gamma_{Hg} = 133.4 \left(\frac{kN}{m^3} \right)$$

$$p_2 = 133.4 \times 0.120 - 0.142 \times \frac{1000 \times 0.2^2}{2} \left(\frac{0.35}{0.009} \right) - 9.81 \times 0.35 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 12.42 \text{ kPa} \quad \checkmark$$



$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 4 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

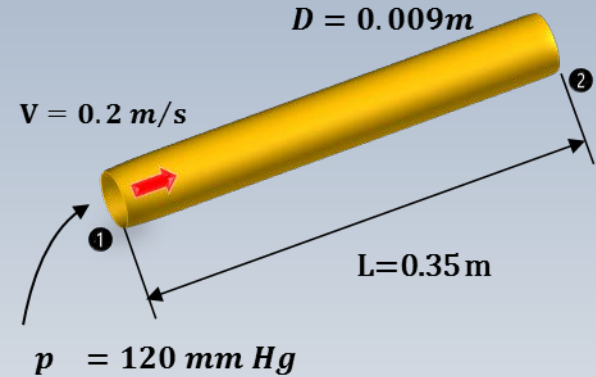
Pression

➔ Horizontale

$$p_2 = p_1 - f \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$p_2 = 133.4 \times 0.120 - 0.142 \times \frac{1000 \times 0.2^2}{2} \left(\frac{0.35}{0.009} \right)$$

$$p_2 = 15.85 \text{ kPa} \quad \checkmark$$

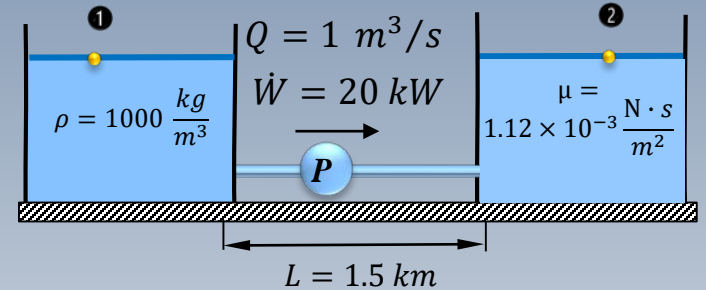


$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$
$$\mu = 4 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

On note que le terme gravitationnel $\gamma L = 3.43 \text{ kPa}$ est plus important que la perte par frottement $h_f = f \rho (V^2/2)(L/D) = 0.11 \text{ kPa}$.

Problème

De l'eau est pompée entre deux grands réservoirs ouverts utilisant une conduite de $L = 1.5 \text{ km}$ de longueur, modélisée comme étant **hydrauliquement lisse** ($\varepsilon/D = 0$). Le niveau z des surfaces libres dans les deux réservoirs est le même. Lorsque la pompe transmet à l'eau une puissance de $\dot{W} = 20 \text{ kW}$, le débit est de $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$. Déterminez le **diamètre D** du tuyau



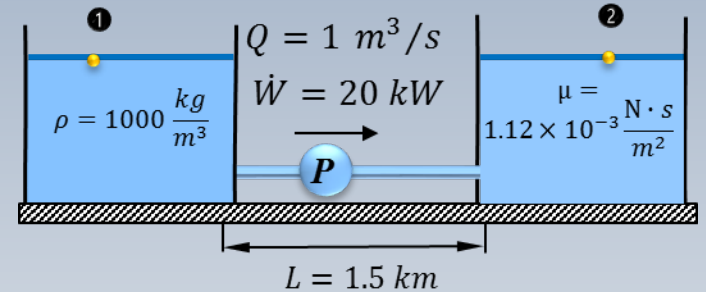
Bilan d'énergie

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + h_p. - h_f. = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2$$

$$h_p = h_f = f \frac{V^2}{2g} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$h_p. = \left(\frac{\dot{W}}{\rho g Q} \right) = \left(\frac{20 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{(9.81 \times 10^3 \text{ N/m}^3) (1 \text{ m}^3/\text{s})} \right) = 2.04 \text{ m}$$

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = 1.273/D^2$$



$$p_1 = p_2 = 0, V_1 = V_2 = 0, z_1 = z_2$$

Bilan d'énergie

$$h_p = h_f = f \frac{V^2}{2g} \left(\frac{L}{D} \right)$$

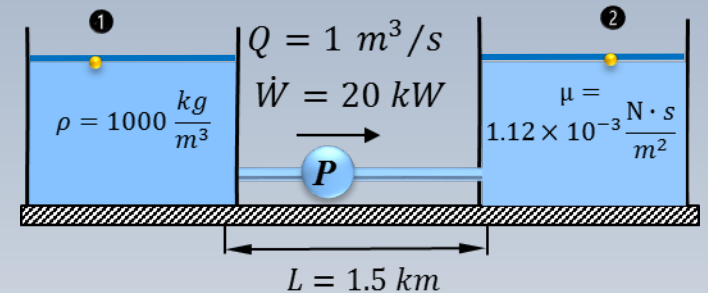
$$2.04 = f \frac{(1.273/D^2)^2}{2 \times 9.81} \left(\frac{1500}{D} \right)$$

$$2.04 = 123.9 f/D^5$$

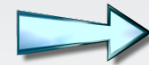
$$f = 0.0165D^5$$

$$D = 2.27f^{0.2}$$

$$\text{Re} = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{(1.273/D^2)D \times 1000}{1.12 \times 10^{-3}} = 1.14 \times 10^6/D$$



$$p_1 = p_2 = 0, V_1 = V_2 = 0, z_1 = z_2$$



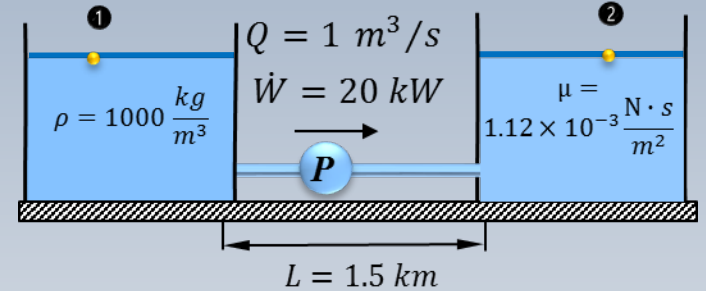
Bilan d'énergie

$$\varepsilon/D = 0 \quad h_p = h_f = f \frac{V^2}{2g} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$D = 2.27 f^{0.2}$$

$$Re = 1.14 \times 10^6 / D$$

On devra itérer à partir d'une valeur supposée de f



	f	$D = 2.27 f^{0.2}$	$Re = 1.14 \times 10^6 / D$	$\varepsilon/D = 0.$
Moody				
Moody				

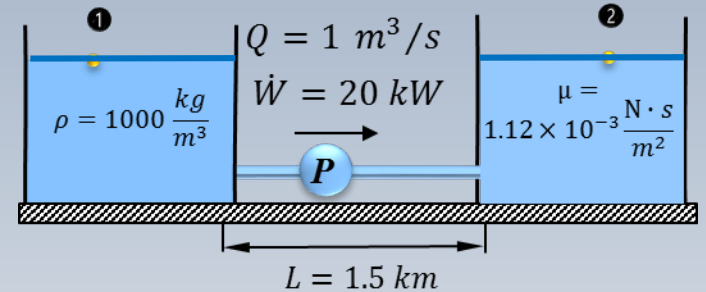


Bilan d'énergie

$$\varepsilon/D = 0 \quad h_p = h_f = f \frac{V^2}{2g} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$D = 2.27f^{0.2}$$

$$Re = 1.14 \times 10^6 / D$$



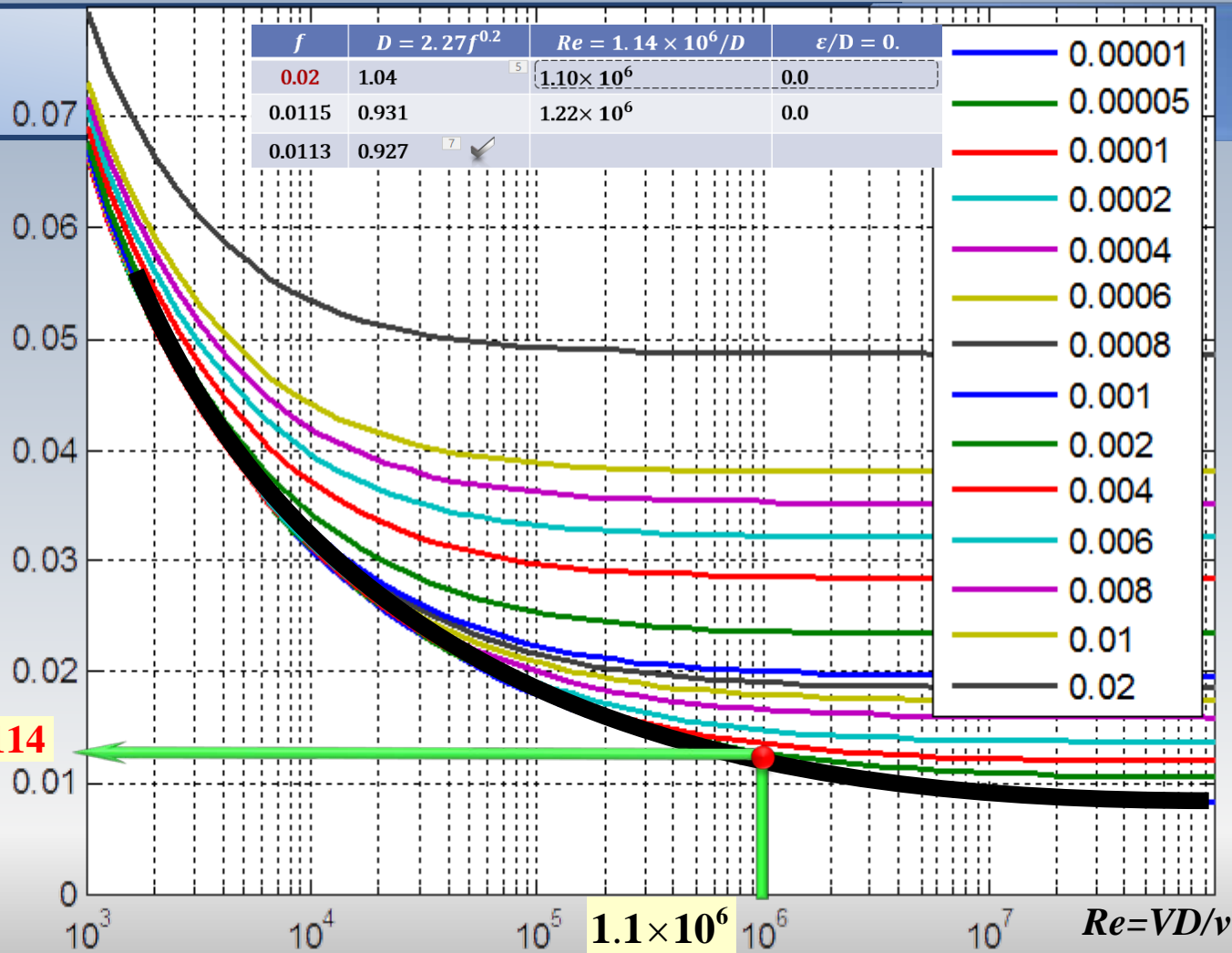
f	$D = 2.27f^{0.2}$	$Re = 1.14 \times 10^6 / D$	$\varepsilon/D = 0.$
0.02	1.038	1.10×10^6	0.0
0.0114	0.927	1.22×10^6	0.0
0.0111	0.927		



$$f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right) \right]^2}$$

Ici le tableau a été construit à l'aide de la formule de Haaland

Facteur de frottement f



0.0114

1.1×10^6

$\frac{\varepsilon}{D}$

$\frac{\varepsilon}{D} = 0.$

$Re = VD/v$

Exemple 6.7

De l'huile avec $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, s'écoule avec un débit $Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ dans un conduit en fonte d'acier (cast iron) de 200 mm de diamètre et 500 m de longueur.

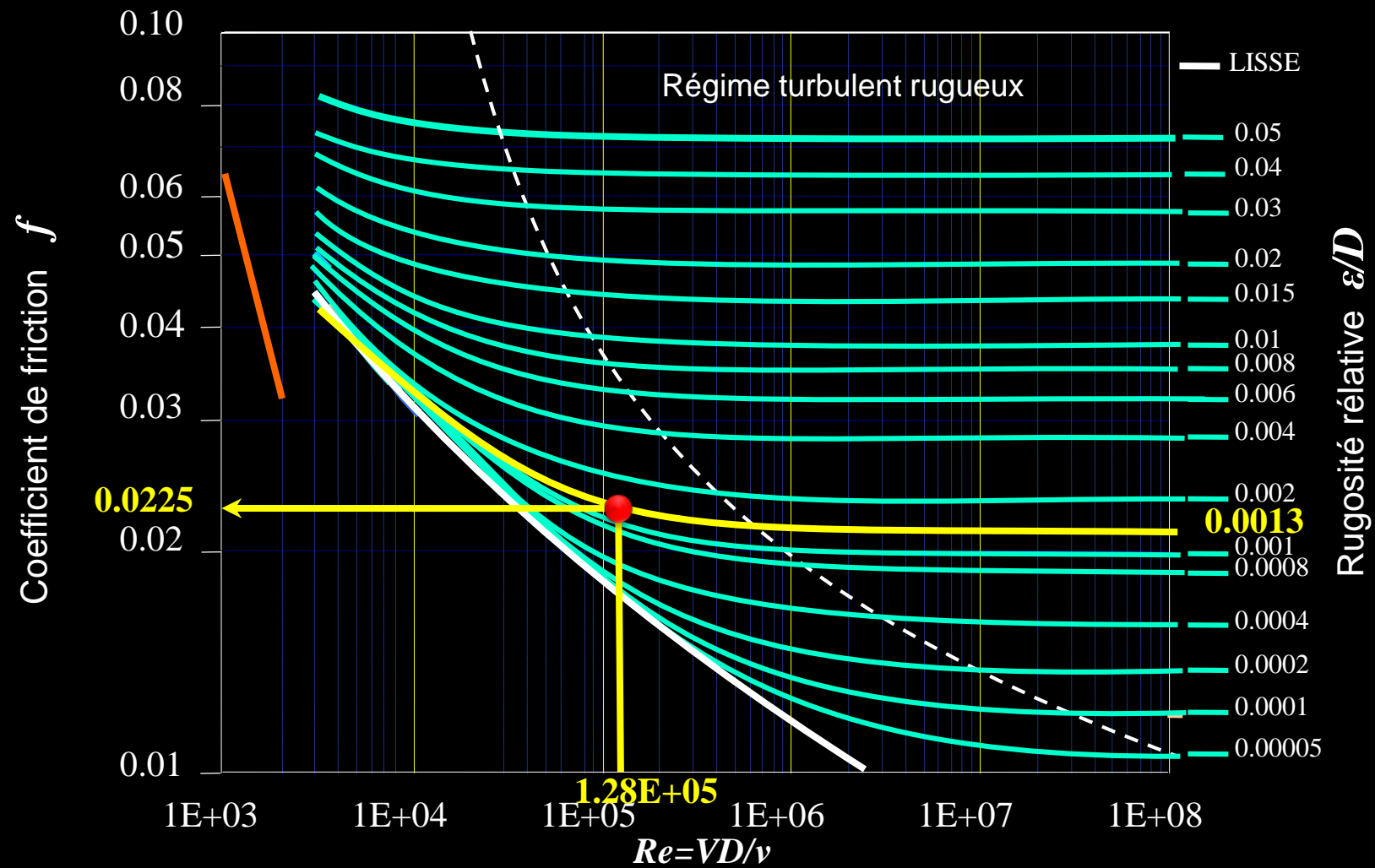
Déterminer (a) la perte de charge et (b) la perte de pression si le conduit est incliné vers le bas de 10° dans la direction de l'écoulement.

Solution

$$\rho = 900 \text{ kg/m}^3 \quad \text{et} \quad \nu = 0.00001 \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{et} \quad Q = 0.2 \text{ m}^3/\text{s} \quad D = 0.2 \text{ m}$$

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{0.2}{\pi (0.1)^2} = 6.4 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{(6.4)(0.2)}{0.00001} = 128000$$

$$\text{Fonte d'acier} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.26}{200} = 0.0013$$



Exemple 6.7

(Turbulent)

$$\frac{\varepsilon}{d} = 0.0013$$

$$Re = 128000$$



Haaland

$$\frac{1}{f^{1/2}} = -1.8 \log \left[\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon/d}{3.7} \right)^{1.11} \right]$$



Swamee-Jain

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}$$

$$f \approx 0.0229026$$



$$f \approx 0.0225678$$

Exemple 6.7

Calcul de la perte de charge: $L = 500\text{m}$, $D = 0.2\text{m}$, $V = 6.4\text{m/s}$

$$f = 0.0225 \quad h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = 117 \text{ m} \quad \checkmark$$

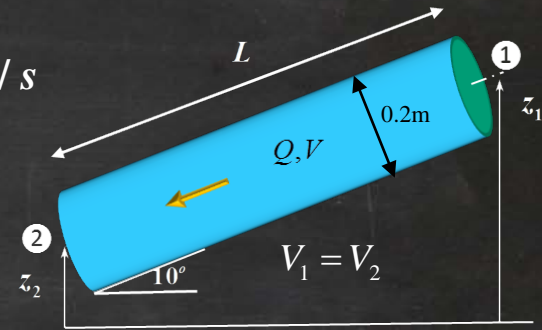
Calcul de la perte de pression:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \quad \longrightarrow \quad \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h_f - (z_1 - z_2)$$



$$\Delta p = \rho g [h_f - (L \sin(10^\circ))] = 265000 \text{ Pa} \quad \checkmark$$

Remarque: écoulement turbulent ($Re=128000$) $\alpha \approx 1$



Exemple 6.8

Refaire l'exemple 6.4 et vérifier qu'il existe une solution en régime turbulent pour un tuyau lisse

Solution

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = 1650$$

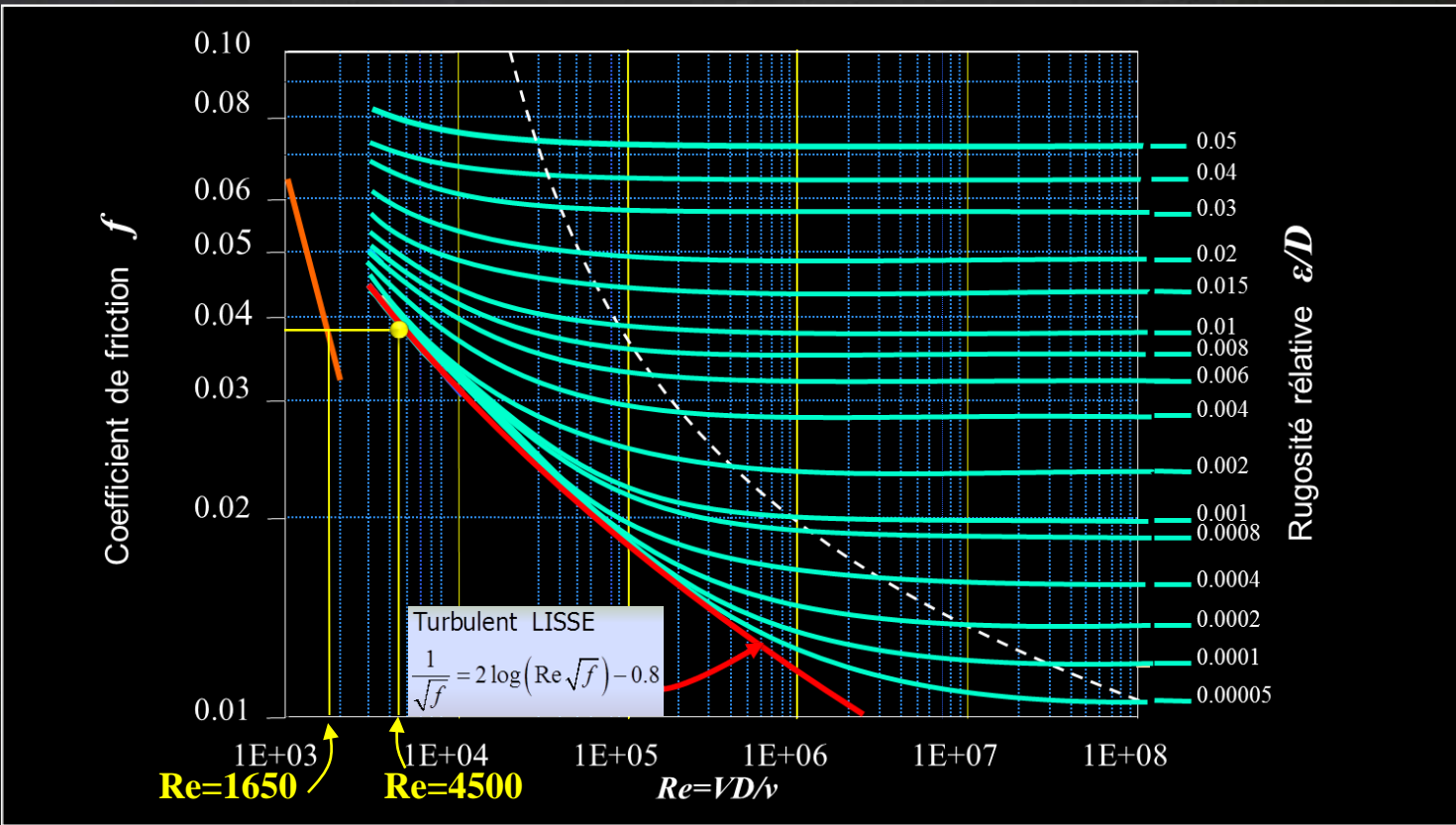


$$f = \frac{64}{Re} = 0.0388$$

$$V_2 = 3.32 \text{ pi} / \text{s}$$

de 6.4

Voir 6.4



Exemple 6.8

On reprend l'analyse de 6.4, en supposant que l'écoulement est turbulent à la sortie ($\alpha_1=2$, laminaire; $\alpha_2=1.06$, turbulent)

Calcul de la perte de charge

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f \quad \Rightarrow \quad h_f = z_1 - z_2 - \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = 1.82 \text{ pi}$$

Calcul du coefficient de friction

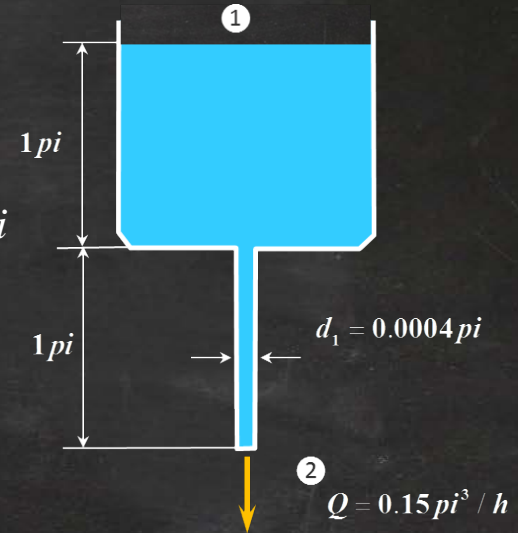
$$f = h_f \frac{2gd}{V_2^2 L} \quad \Rightarrow \quad f = 0.0425$$

$L=1$

Dans le cas d'un écoulement dans un capillaire, la solution peut être multiple (laminaire ou turbulente). Pour éviter ce phénomène, on restreint l'écoulement à des Reynolds inférieurs à 1000 pour garantir un écoulement laminaire.

de 6.4

$$\alpha_2 = 1.06, \quad V_2 = 3.32 \text{ pi} / \text{s}$$



Voir 6.4



Exemple 6.8

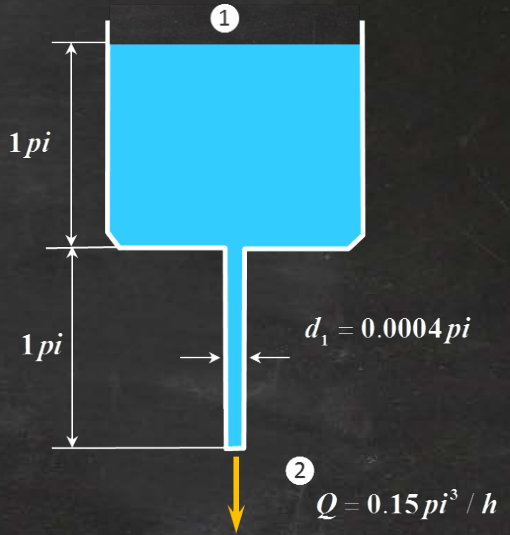
Calcul du nombre de Reynolds en régime turbulent
(les parois sont supposées hydrauliquement lisses)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.8 \quad \longrightarrow \quad \text{Re} = \frac{10^{\left(\frac{1}{f^{1/2} + 0.8}\right) \frac{1}{2}}}{f^{1/2}} \approx 3250$$

parois hydrauliquement lisses

Calcul de la viscosité

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{\rho V d}{\text{Re}} = 7.2 \times 10^{-6} \text{ slug} / (\text{pi s})$$



En bref: I

- On a associé l'effet du cisaillement à la notion de **pertes par frottement** h_f , qu'on retrouve dans l'équation de l'énergie

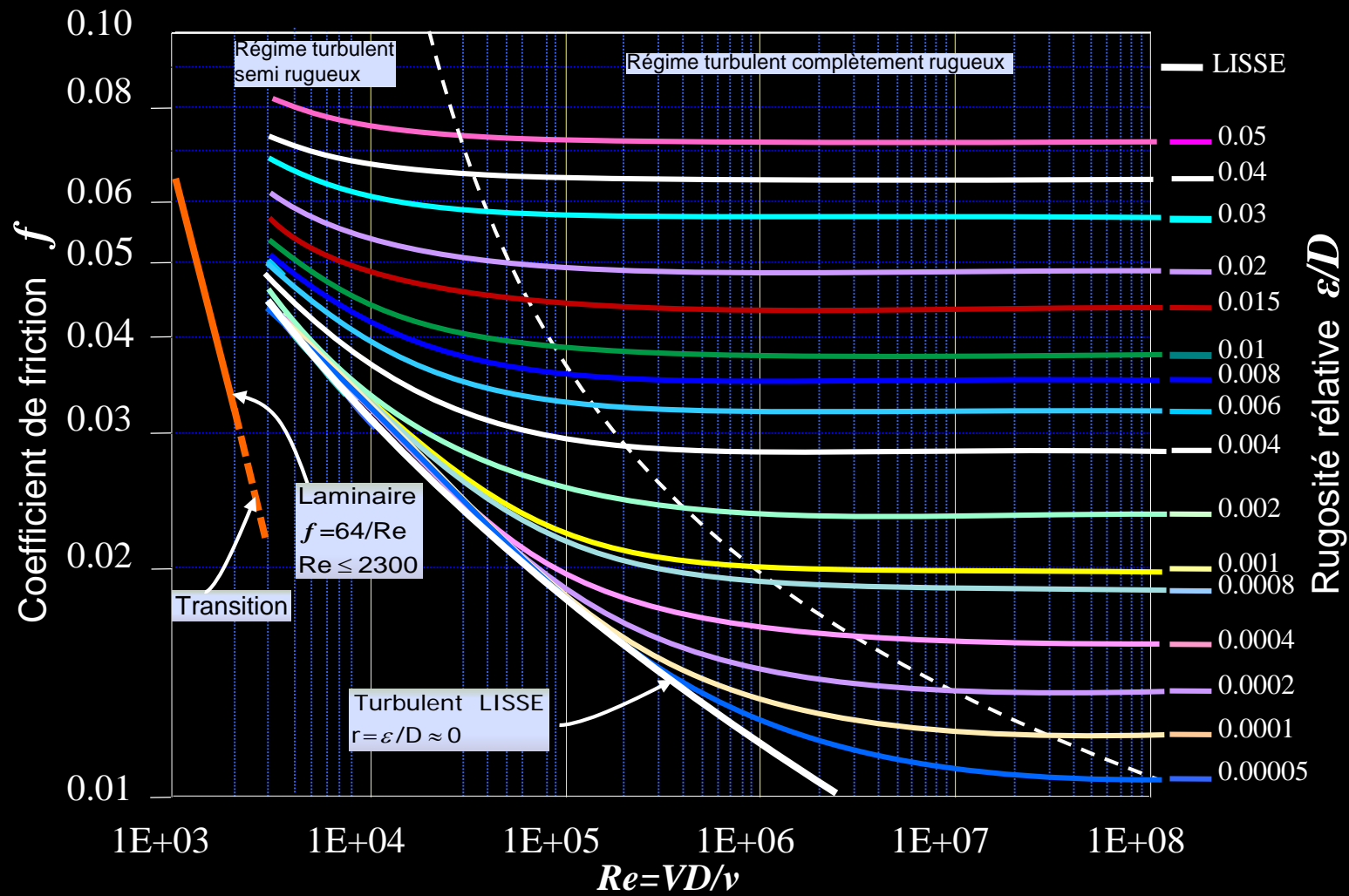
$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{ent} + h_{pompe} - h_{turbine} - h_f = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{sort}$$

- Une attention spécifique a été accordée aux écoulements dans des conduites circulaires, qui constituent la majorité des dispositifs utilisés dans l'industrie

- Le **nombre de Reynolds Re** est le paramètre clé pour distinguer le type d'écoulement: **laminaire ou turbulent**
- Pour les écoulements dans des conduites, le seuil entre les deux régimes se situe approximativement à **$Re = 2300$**
- **Les pertes** sont déterminées à l'aide de la formule de *Darcy-Weisbach*, soit $h_f = f(L/D)/(V^2/2g)$. Pour des écoulements laminaires $f = 64/Re$

III

- La turbulence modifie substantiellement le facteur de friction f
- Dans une première période, le coefficient f a été déterminé à l'aide du **diagramme de Moody**. Celui-ci est une synthèse des différents régimes d'écoulement, représentés dans la formule de Colebrook, en fonction du **nombre de Reynolds Re** et de la **rugosité relative des matériaux ε/D** .



IV

- Pendant les quatre dernières décennies, plusieurs formules explicites ont été développées pour déterminer f de manière explicite par voie numérique. Celle de *Swamee-Jain* (1976) se situe parmi les premières à avoir été proposées. La formule *Haaland* (1983) est populaire grâce à sa simplicité tout en affichant une bonne précision

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]^2}$$

Swamee-Jain 1976

$$f = \frac{0.3086}{\left[\log \left(\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}} \right) \right]^2}$$

Haaland 1983



- Lorsqu'on cherche à connaître le débit Q ou le diamètre D en fonction des pertes h_f et de la rugosité relative ε/D , on procède par itération. Le calcul est démarré en supposant une valeur du coefficient f

- *Swamee-Jain* ont aussi proposé des formules “inverses” pour obtenir, sans effectuer des itérations, le débit Q et le diamètre D en fonction des pertes h_f et de la rugosité relative ε/D

$$Q = -2.22D^{5/2} \sqrt{\frac{gh_f}{L}} \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{1.78\nu}{D^{2/3} \sqrt{\frac{gh_f}{L}}} \right)$$

$$D = 0.66 \left(\varepsilon^{1.25} \left(\frac{LQ^2}{gh_f} \right)^{4.75} + \nu Q^{9.4} \left(\frac{L}{gh_f} \right)^{5.2} \right)^{0.04}$$

Annexes



La turbulence selon Leonardo



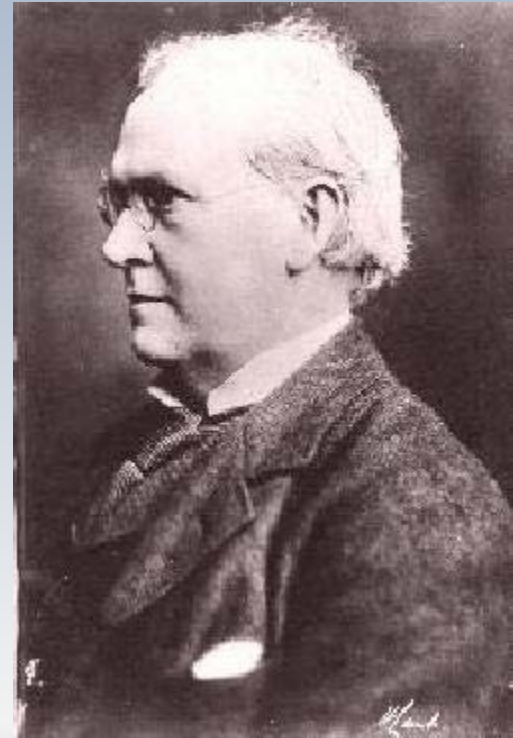


Big whorls have little whorls,
which feed on their velocity;
And little whorls have lesser whorls,
And so on to viscosity.
Lewis Fry Richardson
(1881 - 1953)

Sir Horace Lamb

I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic.

Horace Lamb



On dit qu'un écoulement est turbulent si le champ des vitesses subit d'importantes *fluctuations spatiales et temporelles*

Ce champ est trop complexe pour qu'on puisse le décrire en détail dans un contexte industriel. Parmi les différentes alternatives pour simplifier le problème, on emploie d'avantage des méthodes statistiques en remplaçant le calcul de propriétés instantanées par celui de valeurs moyennes. Cette façon de faire a été proposée par Osborne Reynolds en 1895.

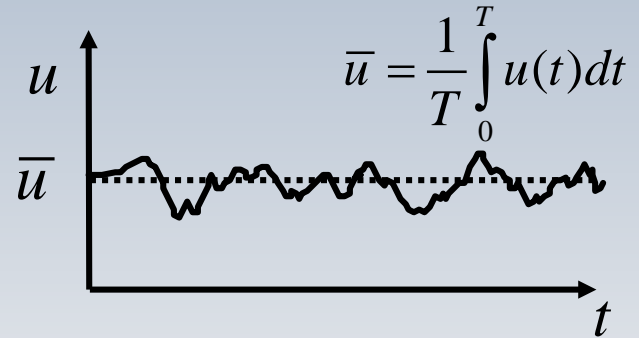
On peut noter déjà que la turbulence est un terrain glissant



On exprime donc la vitesse (et la pression) instantanée comme la somme de sa moyenne statistique et de sa fluctuation

$$u = \bar{u} + u'$$

vitesse instantanée vitesse moyenne fluctuation de la vitesse



En réalisant N expériences (mesures) on obtient formellement la moyenne statistique de la vitesse (et de la pression)

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^i$$

Remarque: les programmes informatiques ne peuvent calculer que la moyenne statistique. Les fluctuations sont modélisées

Les équations de Navier-Stokes ne sont pas conçues pour prédire les propriétés moyennes. Après substitution des quantités comme étant la somme des moyennes statistiques et des fluctuations, il est possible de trouver des équations similaires qui se nomment RANS (pour Reynolds Averaged Navier-Stokes). Voici l'une des équations:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{\rho u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{\rho u'w'} \right)$$

Les moyennes des fluctuations se nomment contraintes turbulentes (ou de Reynolds).

ON THE DYNAMICAL THEORY OF INCOMPRESSIBLE VIS-
COUS FLUIDS AND THE DETERMINATION OF THE
CRITERION.

[From the "Philosophical Transactions of the Royal Society," 1895.]

(Read May 24, 1894.)

SECTION I.

Introduction.

I. THE equations of motion of viscous fluid (obtained by grafting on certain terms to the abstract equations of the Eulerian form, so as to adapt these equations to the case of fluids subject to stresses depending in some hypothetical manner on the rates of distortion, which equations Navier* seems to have first introduced in 1822, and which were much studied by Cauchy† and Poisson‡) were finally shown by St Venant§ and Sir Gabriel Stokes||, in 1845, to involve no other assumption than that the stresses, other than that of pressure uniform in all directions, are linear functions of the rates of distortion, with a coefficient depending on the physical state of the fluid.

By obtaining a singular solution of these equations as applied to the case of pendulums in steady periodic motion, Sir G. Stokes¶ was able to compare the theoretical results with the numerous experiments that had



élisation de la..

Les contraintes turbulentes $\overline{\rho u'v'}$ ont par effet l'augmentation du transport de la quantité de mouvement. Cependant, leur calcul n'est pas immédiat puisqu'elles ne sont pas décrites par des équations. La modélisation intervient ici lorsqu'on élabore une hypothèse, dite une "*fermeture*", afin de spécifier $\overline{\rho u'v'}$ en fonction de quantités moyenne connues.

La “fermeture” la plus courante, est celle qui utilise la notion de viscosité turbulente en remplaçant ces contraintes par des relations algébriques de la forme:

$$-\overline{\rho u'v'} = \tau_{turb} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

μ_t : viscosité turbulente

Le concept de viscosité turbulente a été développé par *Joseph Boussinesq* en 1877. On note que μ_t n'est pas une propriété du fluide et que sa valeur change d'un point à un autre de l'écoulement. Il existe plusieurs types de modèles de turbulence qui sont basés sur cette relation. En pratique, il faut exprimer μ_t en fonction de quantités connues ou calculables



Joseph Boussinesq
1842-1929

*Comptes rendus
1877*

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

EXTRAIT DES TOMES XXII ET XXIII.

*6172
fiche*

ESSAI

SUR

LA THÉORIE DES EAUX COURANTES,

PAR J. BOUSSINESQ.



*EX
1959*



PARIS.

IMPRIMERIE NATIONALE.

M DCCC LXXVII.

SUR LA THÉORIE DES EAUX COURANTES.

PAR M. J. BOUSSINESQ ⁽¹⁾.



INTRODUCTION.

I. Les fluides se meuvent de deux manières différentes, suivant qu'ils coulent dans des tubes très-étroits où dans des espaces ayant des sections comparables à celles des tuyaux de conduite ou des canaux découverts. Dans le premier cas, leurs mouvements sont bien continus, c'est-à-dire que les vitesses varient graduellement, à chaque instant, d'un point du fluide aux points voisins, et des formules très-connues, données par Navier pour représenter ces mouvements, les régissent avec toute l'approximation désirable, pourvu qu'on ait soin de supposer nulle la vitesse contre les parois mouillées ⁽²⁾. Mais le coefficient des frottements que dé-

L'écoulement des fluides, bien continu dans les espaces capillaires, est tumultueux et tombillonnant dans les grandes sections.

⁽¹⁾ Plusieurs des idées nouvelles que contient ce mémoire, présenté le 28 octobre 1872 (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1011), avaient été déjà résumées par l'auteur dans deux Notes des *Comptes rendus* (t. LXXI, p. 389, 29 août 1870; t. LXXIII, p. 34 et 101, 3 et 10 juillet 1871) et dans une lecture faite à l'Académie le 15 avril 1872 (*Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 1026).

⁽²⁾ Cette supposition d'une vitesse nulle contre une paroi mouillée a été directement confirmée par l'expérience, surtout depuis que M. Duclaux, professeur de chimie à la Faculté des sciences de Clermont, a fait voir que l'alcool coloré contenu dans le tube d'un thermomètre perce une couche d'alcool incolore superposée, quand on vient à chauffer le réservoir thermométrique, plutôt que de la chasser devant elle, et qu'il la traverse, en s'allongeant en forme de cône arrondi à son sommet, de manière à montrer que, dans ce phénomène, les particules liquides un peu éloignées des parois sont les premières et presque les seules à avancer. La dif-

Sur les mouvements bien continus et sur les phénomènes de filtration

Le modèle le plus fondamental, proposé par *Ludwig Prandtl* en 1925, exprime la viscosité turbulente en fonction du gradient des vitesses et d'un paramètre l_m appelé la longueur de mélange. Le terme l_m dépend du problème et indique la distance sur laquelle un groupe de particules voyage à la même vitesse. Ce type de modèle est dit algébrique, car il ne nécessite aucune équation

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

$$\left(\mu_t = \rho l_m^2 \left| \nabla \vec{V} \right| \right)$$

Forme générale

Dès nos jours, le modèle à deux équations différentielles supplémentaires nommé *k-epsilon*, est très populaire. Il ne requiert pas d'une quantité externe (l_m par exemple) et, en général, il fournit des résultats acceptables pour les applications en génie.

Afin de caractériser la turbulence, ce modèle calcule l'énergie cinétique des fluctuations (k). Cependant, cette grandeur ne distingue pas les gros tourbillons des petits tourbillons. Pour ce faire, on utilise un deuxième paramètre (ε) pour quantifier la dissipation des fluctuations. La viscosité turbulente μ_t est alors calculée en fonction de ces deux variables

Retour



Formules explicites

Year	Author and reference	Explicit friction factor equation	Applicable range	Notes	Eq.
1947	Moody [8]	$f_f = 1.375 \times 10^{-3} \left[1 + \left(2 \times 10^4 \frac{\epsilon}{D} + \frac{10^6}{\text{Re}} \right)^{\frac{1}{3}} \right]$	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3$ and $\leq 10^8$ $\frac{\epsilon}{D} \geq 0 \leq 10^{-2}$	1a, 1b, 1c, 1f & 1e 1a, 1b, 1c, 1e & 1f	(5)
1952	Altshul cited in [33]	$f_d = 0.11 \left(\frac{68}{\text{Re}} + \frac{\epsilon}{D} \right)^{0.25}$		4	(6)
1966	Wood [17]	$f_d = 0.094 \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{0.225} + 0.53 \left(\frac{\epsilon}{D} \right) + 88 \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{0.4} \text{Re}^{-A_1}$ where $A_1 = 1.62 \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{0.134}$	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3$ and $\leq 5 \times 10^7$ $\frac{\epsilon}{D} \geq 10^{-5} \leq 4 \times 10^{-2}$	1a, 1c, 1f & 2	(7)
1973	Churchill [43]	$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2 \log \left[\frac{\epsilon}{3.7D} + \left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{0.9} \right]$		1c, 1e, 1f & 4	(8)
1973	Eck [27]	$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.715D} + \frac{15}{\text{Re}} \right)$		4	(9)
1976	Jain [40]	$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 2.28 - 4 \log \left[\frac{\epsilon}{D} + \left(\frac{29.843}{\text{Re}} \right)^{0.9} \right]$	$\text{Re} \geq 5 \times 10^3$ and $\leq 10^7$ $\frac{\epsilon}{D} \geq 4 \times 10^{-5} \leq 5 \times 10^{-2}$	1a, 1b, 1c, 1e & 1f	(10)
1976	Swamee and Jain [42]	$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = -4 \log \left[\left(\frac{6.97}{\text{Re}} \right)^{0.9} + \left(\frac{\epsilon}{3.7D} \right) \right]$	$\text{Re} \geq 5 \times 10^3$ and $\leq 10^8$ $\frac{\epsilon}{D} \geq 10^{-6} \leq 5 \times 10^{-2}$	1a, 1c, 1e & 1f	(11)

Formules explicites

Year	Author and reference	Explicit friction factor equation	Applicable range	Notes	Eq.
1977	Churchill [41]	$f_f = 2 \left[\left(\frac{8}{\text{Re}} \right)^{1.2} + \frac{1}{(A_2 + A_3)^2} \right]^{1.2}$ <p>where $A_2 = \left\{ 2.457 \ln \left[\left(\frac{7}{\text{Re}} \right)^{0.9} + 0.27 \frac{\varepsilon}{D} \right] \right\}^{16}$ $A_3 = \left(\frac{37530}{\text{Re}} \right)^{16}$</p>		1a, 1e & 4	(12)
1979	Chen [19]	$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = -4 \log \left[\frac{\varepsilon}{3.7065D} - \frac{5.0452}{\text{Re}} \log A_4 \right]$ <p>where $A_4 = \frac{(\varepsilon/D)^{1.1098}}{2.8257} + \left(\frac{7.149}{\text{Re}} \right)^{0.8981}$</p>	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3$ and $\leq 4 \times 10^8$ $\frac{\varepsilon}{D} \geq 10^{-7}$ $\leq 5 \times 10^{-2}$	1a, 1b, 1d, 1e & 1f	(13)
1980	Round [32]	$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = -3.6 \log \left[\frac{\text{Re}}{0.135 \text{Re} \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) + 6.5} \right]$	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3$ and $\leq 10^8$ $\frac{\varepsilon}{D} \geq 0$ $\leq 5 \times 10^{-2}$	1a, 1c & 1f	(14)
1980	Shacham [38]	$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = -4 \log \left[\frac{\varepsilon}{3.7D} - \frac{5.02}{\text{Re}} \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{14.5}{\text{Re}} \right) \right]$	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3$ and $\leq 4 \times 10^8$	1b	(15)
1981	Barr [37]	$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{4.518 \log \left(\frac{\text{Re}}{\text{Re}} \right)}{\text{Re} \left[1 + \left(\frac{\text{Re}^{0.52}}{29} \right) \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{0.7} \right]} \right\}$		1d, 1e & 4	(16)
1982	Zigrang and Sylvester Eq. 11 [36]	$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = -4 \log \left[\frac{\varepsilon}{3.7D} - \frac{5.02}{\text{Re}} \log A_5 \right]$ <p>where $A_5 = \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{13}{\text{Re}}$</p>	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3$ and $\leq 10^8$ $\frac{\varepsilon}{D} \geq 4 \times 10^{-5}$ $\leq 5 \times 10^{-2}$	1a, 1b & 1d	(17)
1982	Zigrang and Sylvester Eq. 12 [36]	$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = -4 \log \left[\frac{\varepsilon}{3.7D} - \frac{5.02}{\text{Re}} \log A_6 \right]$ <p>where $A_5 = \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{13}{\text{Re}}$ $A_6 = \frac{\varepsilon}{3.7D} - \frac{5.02}{\text{Re}} \log A_5$</p>	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3$ and $\leq 10^8$ $\frac{\varepsilon}{D} \geq 4 \times 10^{-5}$ $\leq 5 \times 10^{-2}$	1a, 1d, 1e, 1f & 3	(18)

Formules explicites

Year	Author and reference	Explicit friction factor equation	Applicable range	Notes	Eq.
1983	Haaland [39]	$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = -3.6 \log \left[\frac{6.9}{\text{Re}} + \left(\frac{\epsilon}{3.7D} \right)^{1.11} \right]$	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3 \text{ and } \leq 10^8$ $\frac{\epsilon}{D} \geq 10^{-6} \leq 5 \times 10^{-2}$	1a, 1b, 1c, 1e & 1f	(19)
1984	Serghides Eq. 2 [18]	$f_d = \left[A_7 - \frac{(A_8 - A_7)^2}{A_9 - 2A_8 + A_7} \right]^{-2}$ where $A_7 = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{12}{\text{Re}} \right)$ $A_8 = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{2.51A_7}{\text{Re}} \right)$ $A_9 = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{2.51A_8}{\text{Re}} \right)$		1a, 1b, 1d, 2 & 4	(20)
1984	Serghides Eq. 3 [18]	$f_d = \left[4.781 - \frac{(A_7 - 4.781)^2}{A_8 - 2A_7 + 4.781} \right]^{-2}$ where $A_7 = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{12}{\text{Re}} \right)$ $A_8 = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7D} + \frac{2.51A_7}{\text{Re}} \right)$		1a, 1d, 2 & 4	(21)
1989	Tsal [34]	$A = 0.11 \left(\frac{68}{\text{Re}} + \frac{\epsilon}{D} \right)^{0.25}$ If $A \geq 0.018$ then $f_d = A$ If $A < 0.018$ then $f_d = 0.0028 + 0.85A$	$\text{Re} \geq 4 \times 10^3 \text{ and } \leq 10^8$ $\frac{\epsilon}{D} \geq 0 \leq 5 \times 10^{-2}$		(22)
1997	Manadilli [24]	$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2 \log \left[\left(\frac{\epsilon}{3.7D} \right) + \left(\frac{95}{\text{Re}^{0.983}} \right) - \left(\frac{96.82}{\text{Re}} \right) \right]$	$\text{Re} \geq 5.235 \times 10^3 \text{ and } \leq 10^8$ $\frac{\epsilon}{D} \geq 0 \leq 5 \times 10^{-2}$	1c, 1e & 1f	(23)

Formules explicites

Year	Author and reference	Explicit friction factor equation	Applicable range	Notes	Eq.
2002	Romeo et al. [25]	$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon}{3.7065D} \times \frac{5.0272}{Re} \right.$ $\times \log \left[\frac{\varepsilon}{3.827D} - \frac{4.567}{Re} \right.$ $\times \log \left(\left(\frac{\varepsilon}{7.7918D} \right)^{0.9924} \right.$ $\left. \left. \left. + \left(\frac{5.3326}{208.815 + Re} \right)^{0.9345} \right) \right] \right\}$	$Re \geq 3 \times 10^3 \text{ and } \leq 1.5 \times 10^8$ $\frac{\varepsilon}{D} \geq 0 \leq 5 \times 10^{-2}$	1d, 1e & 1f	(24)
2006	Sonnad and Goudar [14]	$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = 0.8686 \ln \left(\frac{0.4587Re}{S(S/S+1)} \right)$ <p>where $S = 0.1240 \times \frac{\varepsilon}{D} \times Re + \ln(0.4587Re)$</p>	$Re \geq 4 \times 10^3 \text{ and } \leq 10^8$ $\frac{\varepsilon}{D} \geq 10^{-6} \leq 5 \times 10^{-2}$	1c & 1e	(25)
2007	Rao and Kumar [28]	$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = 2 \log \left(\frac{\left(\frac{2\varepsilon}{D} \right)^{-1}}{\left(\frac{0.444 + 0.135Re}{Re} \right)^\beta} \right)$ <p>where $\beta = 1 - 0.55e^{-0.33 \left[\ln \left(\frac{Re}{6.5} \right) \right]^2}$</p>		4	(26)
2008	Buzzelli [29]	$\frac{1}{\sqrt{f_d}} = B_1 - \left[\frac{B_1 + 2 \log \left(\frac{B_2}{Re} \right)}{1 + \frac{2.18}{B_2}} \right]$ <p>where $B_1 = \frac{[0.774 \ln(Re)] - 1.41}{(1 + 1.32 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}})}$</p> $B_2 = \frac{\varepsilon}{3.7D} \times Re + 2.51 \times B_1$		4	(27)

Formules explicites

Year	Author and reference	Explicit friction factor equation	Applicable range	Notes	Eq.
2009	Avci and Karagoz [30]	$f_d = \frac{6.4}{\left\{ \ln(\text{Re}) - \ln \left[1 + 0.01 \text{Re} \times \frac{\varepsilon}{D} \times \left(1 + 10 \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} \right) \right] \right\}^{2.4}}$		4	(28)
2010	Papaevangelo et al. [31]	$f_d = \frac{0.2479 - 0.0000947 \times (7 - \log \text{Re})^4}{\left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.615D} + \frac{7.366}{\text{Re}^{0.9142}} \right) \right]^2}$	$\text{Re} \geq 10^4$ and $\leq 10^7$ $\frac{\varepsilon}{D} \geq 10^{-5}$ $\leq 10^{-3}$		(29)
2011	Brkić [26]	$f_d = \left[-2 \log \left(10^{-0.4343\beta} + \frac{\varepsilon}{3.71D} \right) \right]^{-2}$ where $\beta = \ln \frac{\text{Re}}{1.816 \ln \left(\frac{1.1\text{Re}}{\ln(1+1.1\text{Re})} \right)}$		4	(30)
2011	Brkić [26]	$f_d = \left[-2 \log \left(\frac{2.18\beta}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon}{3.71D} \right) \right]^{-2}$ where $\beta = \ln \frac{\text{Re}}{1.816 \ln \left(\frac{1.1\text{Re}}{\ln(1+1.1\text{Re})} \right)}$		4	(31)
2011	Fang et al. [35]	$f_d = 1.613 \left\{ \ln \left[0.234 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{1.1007} - \frac{60.525}{\text{Re}^{1.1105}} + \frac{56.291}{\text{Re}^{1.0712}} \right] \right\}^{-2}$	$\text{Re} \geq 3 \times 10^3$ and $\leq 10^8$ $\frac{\varepsilon}{D} \geq 0$ $\leq 5 \times 10^{-2}$		(32)

Flow Turbulence Combust (2013) 90:1–27
DOI 10.1007/s10494-012-9419-7

Explicit Friction Factor Accuracy and Computational Efficiency for Turbulent Flow in Pipes

Herbert Keith Winning · Tim Coole

Retour



La prochaine fois:
les écoulements externes

