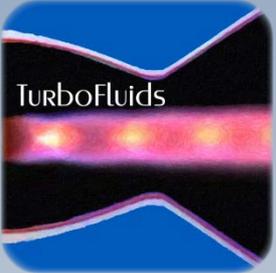


Mécanique des fluides



La force des écoulements



Page Web

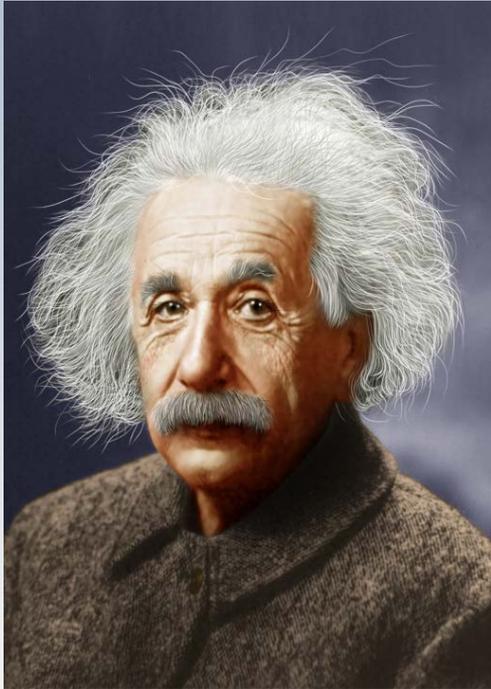
Je suis GRAND

Analyse dimensionnelle et similitude

Je suis petit

v

Albert



À partir de considérations dimensionnelles, il est possible de trouver des relations entre grandeurs physiques lorsqu'on connaît toutes les grandeurs physiques de la relation visée

Considérations élémentaires sur l'agitation thermique dans les corps solides(1911)

OBJECTIFS

- Présenter le concept **d'analyse dimensionnelle**
- Expliquer **le théorème Π** conduisant à l'obtention de groupes ou nombres sans dimension
- Décrire des nombres adimensionnels déduits à partir des équations de **Navier-Stokes**
- Regarder la **similitude** utilisant des nombres adimensionnels pour transporter de résultats de laboratoire vers le monde réel

Préambule

“Une fois qu’on a étudié un cas en mécanique des fluides, on ne veut pas être obligé à démontrer que les résultats sont valables pour d’autres fluides, pour une multitude de vitesses et pour plusieurs géométries”



Ah bon!



Souris vs. ours

Pourquoi il n'y a pas des souris au pôle nord?

- La perte de chaleur d'un mammifère est proportionnelle au rapport entre sa surface et son volume, soit $q=L^2/L^3 =$



- Le rapport de perte chaleur entre une souris de **5cm (0.05 m)** et un ours polaire de **2 m** est $q_s/q_o=2/0.05=40$

Petit format (Downsizing)



On estime que la quantité N de nourriture requise par une personne est proportionnelle à son volume ($\propto L^3$)

Supposons que le rapport de géométrie entre les personnes du monde réel et les gens à petit format soit $L_r/L_p = 8$, alors

$$N_p/N_r = (L_p/L_r)^3 = (1/8)^3 = 1/512$$

Il faut se réduire!

La dinde

Sur le web on trouve que le temps de cuisson pour une dinde de 5.5 kg à 163°C est de 3h .

Quel sera le temps nécessaire pour cuire une dinde de 11 kg ?, 6h ?



$$t = \frac{\rho^{1/3} c_p m^{2/3}}{k} \quad \text{à vérifier}$$

Conductivité thermique $k \approx 2 \text{ W} / (\text{m}\cdot\text{K})$

Capacité calorifique $C_p \approx 3500 \text{ J} / (\text{kg}\cdot\text{K})$

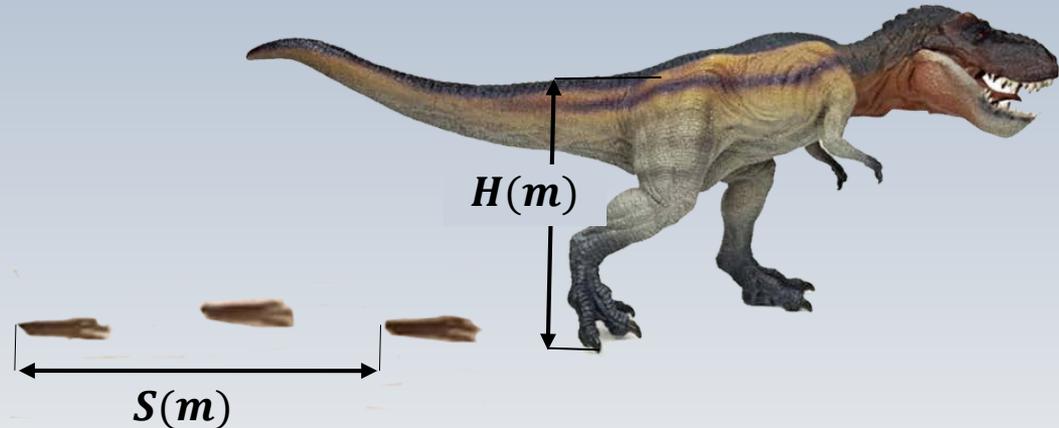
Masse volumique $\rho \approx 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$

Vite-vite le TRex arrive



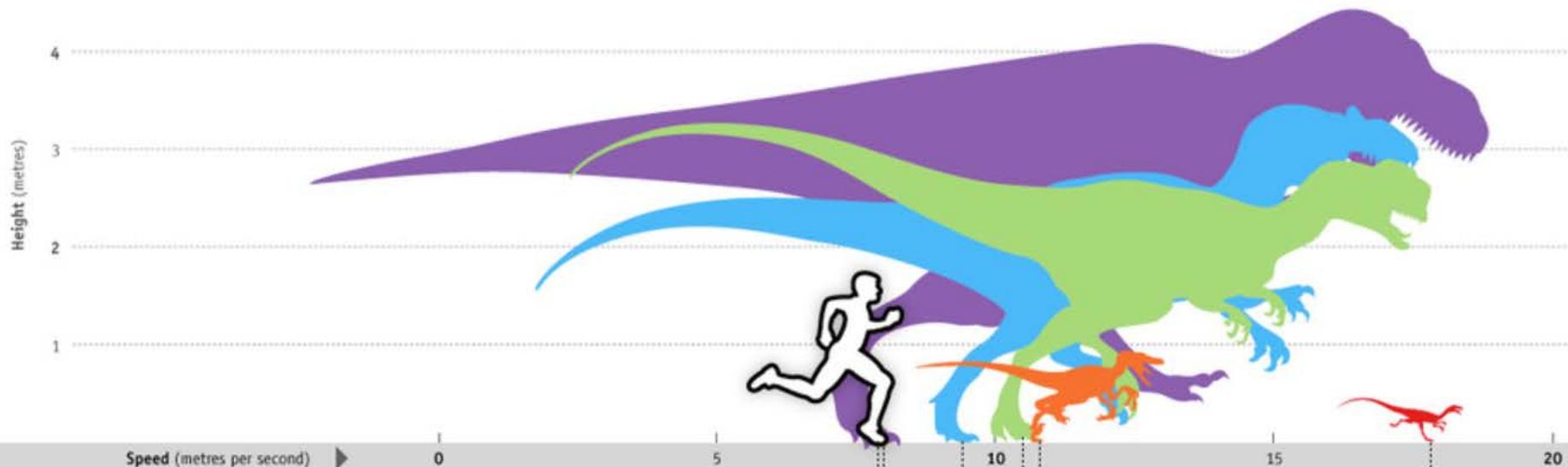
Vitesse d'un dinosaure

$$V = 0.25G^{0.5}S^{1.67}H^{-1.17}$$



Formule valable pour le système SI, $G = 9.8 \text{ m/s}^2$

Vite-vite le TRex arrive



No.

At least not according to The Royal Society's 2007 study. However, when Sellers and Manning performed these simulations in 2007, they were still using model predictions that put T. rex's weight at 6,000 kg, but a recent study published in PLoS put this figure at over 8,000 kg. So by extending the rough pattern of bigger-slower, the newer, larger T. Rex model would lag just a bit behind your average human.

Homo sapiens
7.9 metres per second ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Allosaurus
9.4 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Dilophosaurus
10.5 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Compsognathus
17.8 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Tyrannosaurus
8.0 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Velociraptor
10.8 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

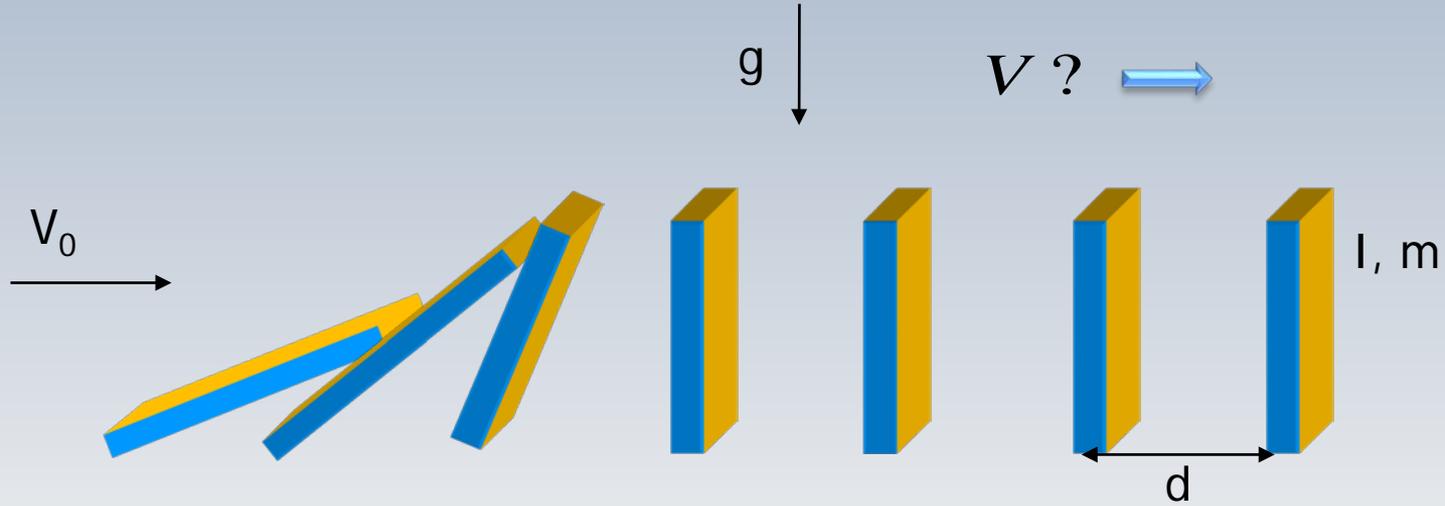
YouTube



25,000 Dominoes



L'effet domino



Idée

$$V = F(V_0, I, d, g, m)$$

Chap 5: Analyse dimensionnelle

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.1 Introduction

5.2 Homogénéité dimensionnelle

5.3 Théorème de Buckingham

5.4 Mise à l'échelle des équations de conservation

5.5 Les limites de la modélisation expérimentale

Introduction

Dans cette partie on regardera deux sujets complémentaires:
l'analyse dimensionnelle et la similitude

L'analyse dimensionnelle est une méthode qui s'intéresse à **l'obtention d'équations** décrivant des phénomènes à partir de la simple supposition que ceux-ci peuvent être caractérisés par certaines variables

Le résultat d'une analyse dimensionnelle est l'obtention de **groupes sans dimensions** équivalents au système dimensionnel. Cette opération **réduit le nombre de variables** décrivant le problème

Remarques

- L'analyse dimensionnelle peut être appliquée sans connaître les détails intimes du phénomène physique.
- **Mais attention!** Cette approche requiert d'une très bonne compréhension (voire intuition) du problème à l'étude. En fait, son utilisation aveugle peut conduire facilement à des conclusions erronées
- L'analyse dimensionnelle donne des pistes pour l'étude expérimentale, ce qui facilite la recherche de solutions

Introduction

La similitude, est une méthode de travail très utilisée en ingénierie permettant l'étude de problèmes sur la base d'expérimentation et de comparaison.

La similitude bénéficie de l'analyse dimensionnelle et elle est généralement appliquée lorsqu'on ne peut pas effectuer un essai en grandeur nature ou si le problème a lieu dans un endroit inaccessible (une autre planète)

En pratique, on fait une étude sur **maquette** et la similitude permet d'extrapoler les résultats vers l'objet réel, appelé **le prototype**.

En bref

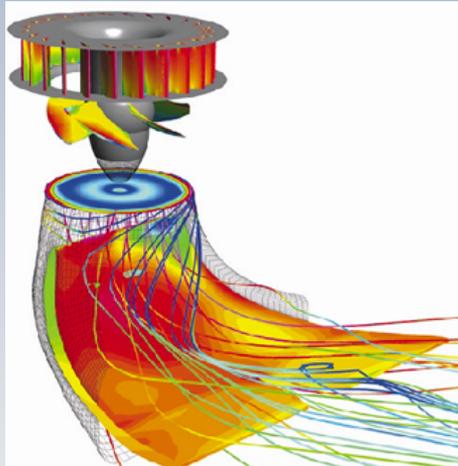
Analyse dimensionnelle: méthodologie générale pour obtenir des relations physiques sans dimension dans le but de minimiser l'étude expérimentale (ou numérique)



Similitude: approche formelle pour réaliser des test sur des modèles et pour guider le transfert de résultats vers des prototypes

Du modèle au prototype

Analyse dimensionnelle



Modèle virtuel



Maquette de laboratoire



Prototype



L'analyse dimensionnelle aide à:

- 1) Caractériser la physique d'un problème
- 2) Reproduire en laboratoire (maquette) ou sur ordinateur (maquette virtuelle) la physique du prototype
- 3) Développer des règles pour passer du modèle au prototype

Les objectifs spécifiques de l'analyse dimensionnelle sont:

- 1) Réduction** des variables dimensionnelles sous la forme de groupes sans dimension pourvus d'un sens physique
- 2) Diminution** du nombre d'expériences à réaliser
- 3) Simplification** de l'échange d'information entre des modèles à des échelles différentes

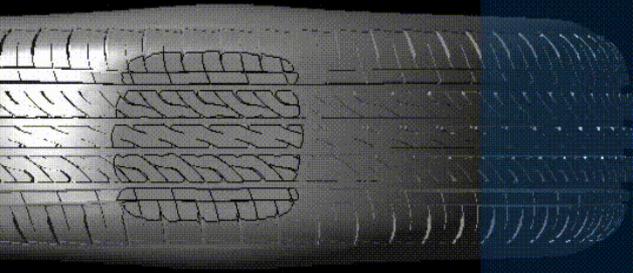
An illustration of two people, a man and a woman, sitting back-to-back on the ground. The man is on the left, wearing a red shirt and dark pants, with his hand on his chin in a thinking pose. The woman is on the right, wearing a pink shirt and dark pants, also with her hand on her chin. Above them are several thought bubbles of various colors (blue, orange, yellow) containing text. The background is a textured, greyish-white surface.

L'analyse dimensionnelle pourra s'appliquer sur mars ?

Navier-Stokes ?

Les essais seront pareil que sur terre ?

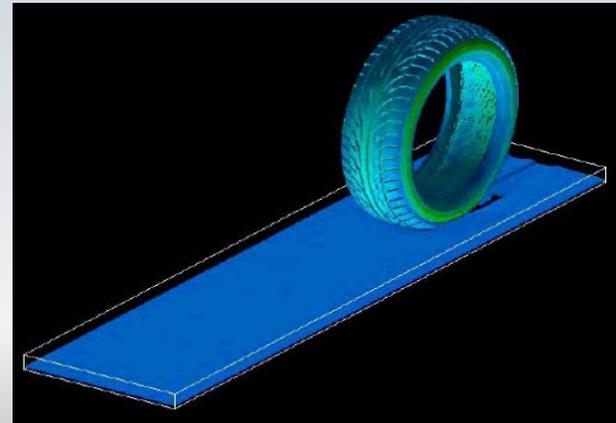
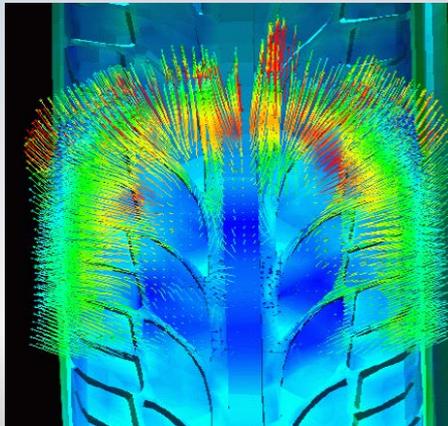
Exemple: l'hydroplanage



Exemple: l'hydroplanage

L'aquaplanage est un phénomène réduisant fortement l'adhérence entre un pneu et la surface de contact. Il est causé par la présence d'un film d'eau entre ces éléments et à la limite, une séparation entre le pneumatique et la chaussée peut avoir lieu.

Plusieurs paramètres interviennent dans ce phénomène.



Exemple: l'hydroplanage

$$V = f \left(\overbrace{D, w, h, W, p, b, MHR, \rho, \mu, g}^{10 \text{ variables}} \right)$$

D : diamètre du pneu

w : largeur du pneu

h : épaisseur de la pellicule d'eau

W : charge verticale sur le pneu

p : pression du pneu

b : profondeur de l'empreinte du pneu

MHR : rayon hydraulique moyen de la chaussée

ρ : masse volumique de l'eau

μ : viscosité dynamique de l'eau

g : accélération gravitationnelle

V : vitesse critique d'aquaplanage



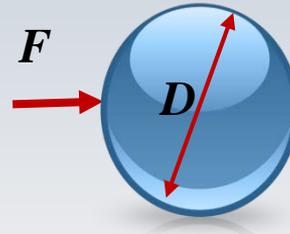
$$\frac{V^2}{gD} = F \left(\overbrace{\frac{p}{\rho D}, \frac{h}{D}, \frac{W}{\rho D^3}, \frac{w}{D}, \frac{\rho W}{\mu^2 g}, \frac{b}{D}, \frac{MHR}{D}}^{7 \text{ variables}} \right)$$

Il y a moins de variables

Exemple sur le coût

Voici un classique!

Supposons que l'on veut déterminer expérimentalement la force de traînée F sur une sphère lisse de diamètre D qui se déplace avec une vitesse uniforme V dans un fluide de masse volumique ρ et viscosité μ

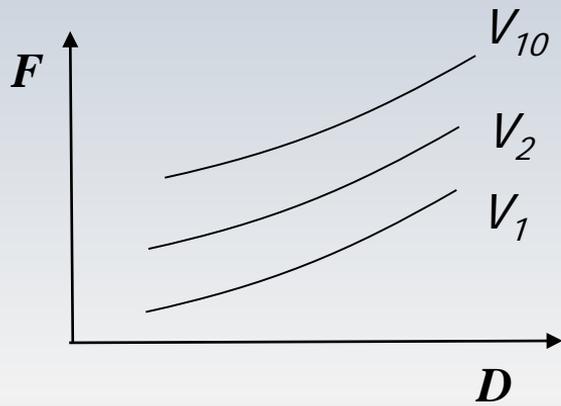


On cherche

$$F = f(\rho, \mu, V, D)$$

Exemple sur le coût

Admettons par exemple, que l'on décide d'étudier le comportement de la force F pour **10** vitesses V différentes et ce pour **10** diamètres D , avec ρ et μ fixes (un seul fluide à la même température). Le nombre d'essais est de **100**, dans ce cas.



10 X 10=100 essais avec ρ , μ fixes

Si on élargie l'étude pour **10** nouvelles viscosités μ et **10** nouvelles masses volumiques ρ , le nombre total d'essais requis grimpe à **10^4** . **Au secours \$\$\$!**

L'analyse dimensionnelle permet de **diminuer** le nombre de variables (dimensionnelles vers adimensionnelles) et de réduire ainsi le coût des expériences et des calculs

**Voici un cas fort intéressant
qui résume la méthodologie
à voir dans cette section**

CONCEPT VIGNETTES

A Collaboration between SUTD and MIT



Méthodes et dimensions fondamentales

Plusieurs méthodes ont été développées pour l'obtention de paramètres sans dimension. Parmi ceux-ci on retrouve:

- la méthode basée sur le **Théorème π**
- la méthode de Ipsen
- l'utilisation **d'équations** aux dérivées partielles (Navier-Stokes et d'autres)

Ces méthodes reposent sur un **système cohérent d'unités**. En mécanique des fluides, on utilise le système *Masse, Longueur et Temps* (**MLT**)

Méthodes et dimensions fondamentales

On dit qu'un système d'unités est **cohérent** avec un groupe d'équations quand celles-ci sont satisfaites dans chaque cas particulier en remplaçant les symboles par les mesures obtenues avec les dites unités.



Dimensions fondamentales

Grandeur	Dimension	SI	Symbole
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Temps	seconde	s	T
Température	kelvin	K	θ

Remarques

- En mécanique, L , M , T et θ sont les *grandeurs fondamentales*
- Ces grandeurs sont *indépendantes (irréductibles)* entre eux
- Des *unités dérivées* sont obtenus en fonction de L , M , T et θ
- Le passage *d'un système d'unités vers un autre*, ne requiert *que de facteurs de conversion*

Les grandeurs fondamentales du système SI sont 7

Variables dérivées communes en MF

Variable	MLT
Accélération	$L T^{-2}$
Vitesse Angulaire	T^{-1}
Aire	L^2
Masse Volumique	$M L^{-3}$
Poids Volumique	$M L^{-2} T^{-2}$
Force	$M L T^{-2}$
Viscosité Cinématique	$L^2 T^{-1}$

Variables dérivées communes en MF

Variable	MLT
Puissance	ML^2T^{-3}
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$
Tension Superficiel	MT^{-2}
Vitesse	LT^{-1}
Viscosité	$ML^{-1}T^{-1}$
Volume	L^3
Débit	L^3T^{-1}
Travail, Énergie	ML^2T^{-2}

Chap5: Analyse dimensionnelle

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

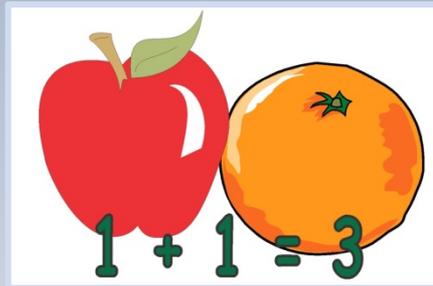
5.1 Introduction

5.2 Homogénéité dimensionnelle

5.3 Théorème de Buckingham

5.4 Mise à l'échelle des équations de conservation

5.5 Les limites de la modélisation expérimentale



Une loi physique (équation) est dimensionnellement homogène si chacun des termes qui la composent a les mêmes dimensions.

L'équation de Bernoulli:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

est **dimensionnellement homogène**. En effet,

J-B. Fourier, dans son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur*, a été le premier à exprimer le concept d'homogénéité dimensionnelle.

Homogénéité

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

5.2 Homogénéité dimensionnelle

Variable	Dimensions
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$
Vitesse	LT^{-1}
Accélération	LT^{-2}
Hauteur	L
Poids spécifique	$ML^{-2}T^{-2}$

$$H = L + \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-2}T^{-2}} + \frac{[LT^{-1}]^2}{LT^{-2}} = L + L + L$$

$$H = z + p/\gamma + v^2/2g$$

L'équation de *Manning*, est un exemple classique en mécanique des fluides d'une **formule non homogène**. Elle est utilisée pour estimer la vitesse dans les canaux hydrauliques:

$$V = n^{-1} R^{2/3} S^{1/2}$$



V : la vitesse moyenne (LT^{-1}) n : coefficient de rugosité (adimensionnel). R rayon hydraulique (section mouillée / périmètre mouillé) (L):, S : pente du fond du cours d'eau (adimensionnelle).

Afin d'introduire certains éléments de l'analyse dimensionnelle, on regarde l'expression donnant la position S à un temps t d'un objet soumis à une accélération g . La formule tient compte de la position et de la vitesse initiale de l'objet, S_0 et V_0 , respectivement.

La formule **homogène** à l'étude est

$$S = S_0 + V_0 t + 1/2 g t^2$$

$$L \quad L \quad \frac{L}{T} T \quad \frac{L}{T^2} T^2$$



On verra dans la suite que **l'analyse dimensionnelle** cherche plutôt à établir des relations mathématiques, qu'on ignore à priori, entre différentes variables physiques. En d'autres mots, **les formules sont inconnues et on tente de les construire.**

Pour l'instant on veut utiliser une équation connue et l'écrire sous une forme adimensionnelle, autrement dit, on cherche à éliminer toute dimension associé à ce problème spécifique

Pour commencer l'analyse, on dresse une liste des quantités physiques et de leurs dimensions

$$S = S_0 + V_0 t + 1/2 g t^2$$

Quantité	S	S_0	V_0	t	g
Dimensions	L	L	LT ⁻¹	T	LT ⁻²

Le tableau indique que **les dimensions fondamentales de l'équation sont deux**: la longueur L et le temps T

L'équation $S = S_0 + V_0 t + 1/2 g t^2$ comprends **cinq variables** et nous pouvons l'écrire symboliquement comme $S = F(S_0, V_0, t, g)$.

Le symbole S identifie **la variable "cible" ou "d'intérêt"**

Parmi les restantes, on peut distinguer celles qui ont un impact sur "l'évolution" de la variable cible

De manière intuitive on peut dire qu'il s'agit du **temps** t et de **l'accélération** g (de la planète en question)

Quantité	S	t	g	S_0	V_0
Dimensions	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

Nous avons ainsi trois variables imbriquées (S, t, g)

Les variables restantes sont (S_0, V_0) . Celles-ci agissent comme des **niveaux référence**. Les *conditions initiales et au frontières* se trouvent, parmi d'autres, dans cette catégorie.

Après ces commentaires préliminaires, nous allons regarder l'adimensionnement de l'équation $S = S_0 + V_0 t + 1/2 g t^2$

Quantité	S	t	g	S_0	V_0
Dimensions	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

Pour débiter l'adimensionalisation on peut sélectionner un, ou une combinaison des **paramètres “de référence”**

1) Nous choisissons come référence S_0 pour la dimension de L

$$S = S_0 + V_0 t + 1/2 g t^2$$

et nous faisons une mise à l'échelle par S_0

$$S/S_0 = 1 + (V_0/S_0)t + 1/2 g t^2/S_0$$

Quantité	S	t	g	S_0	V_0
Dimensions	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

Application

Quantité	S	t	g	S ₀	V ₀
Dimensions	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

$$S / S_0 = 1 + (V_0 / S_0)t + 1/2 gt^2 / S_0$$

$$L / L \quad \left(\frac{L}{T} \right) \frac{T}{L} \quad \frac{L}{T^2} \frac{T^2}{L}$$

On peut noter que **le second terme** dans le membre de droite mène naturellement à un facteur d'échelle temporel, ou temps de référence: S_0/V_0 . Ainsi, on peut définir une variable sans dimension t^* accompagnée de la variable sans dimension S^* , soit:

$$S^* = \frac{S}{S_0}, \quad t^* = \frac{t}{S_0/V_0}$$

Application

Quantité	S	t	g	S_0	V_0
Dimensions	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

Avec $t^* = t / (S_0 / V_0)$ on obtient $t^{*2} = (t / (S_0 / V_0))^2$

Alors, le troisième terme $1/2 gt^2/S_0$ peut s'écrire $1/2 (gS_0/V_0^2)t^{*2}$,
et l'équation $S = S_0 + V_0t + 1/2 gt^2$ devient (sans dimension):

$$S^* = 1 + t^* + 1/2 \left(\frac{gS_0}{V_0^2} \right) t^{*2}$$

Dans cette équation on distingue **trois termes sans dimension**: S^* , t^* et le regroupement gS_0/V_0^2

Application

Quantité	S	t	g	S_0	V_0
Dimensions	L	T	LT^{-2}	L	LT^{-1}

En fait, le terme gS_0/V_0^2 correspond à une nouvelle variable sans dimension, que nous appellerons g^* , associé à l'accélération gravitationnelle g . Comme pour S^* et t^* , on peut établir:

$$g^* = \frac{g}{V_0^2/S_0}$$

Ce qui permet d'écrire l'équation **adimensionnelle**:

$$S^* = 1 + t^* + 1/2 g^* t^{*2}$$

D'autres choix

D'autres choix sont possibles pour l'adimensionnalisation de l'équation à l'étude. Ceux-ci conduiront à d'autres échelles pour le temps, le déplacement et l'accélération gravitationnelle
Deux cas sont présentés en annexe

Je veux regarder +



- L'équation adimensionnelle correspondante à $S = F(S_0, V_0, t, g)$ est $S^* = f(t^*, g^*)$
- Dans l'équation **dimensionnelle** interviennent **5 paramètres**
- Dans l'équation **adimensionnelle** on retrouve **seulement 3**: une distance, S^* , un temps t^* , et une accélération, g^*

$$S^* = \frac{S}{S_0}, \quad t^* = \frac{t}{S_0/V_0}, \quad g^* = \frac{g}{V_0^2/S_0}$$

- On constate que la différence entre le nombre de variables dans la formulation **dimensionnelle (5)** et le nombre de paramètres dans la(es) formulation(s) **adimensionnelle(s) (3)** est égale au nombre de dimensions fondamentales (2: L, T)

On vient de redécouvrir le théorème de Vaschy-Buckingham!



Chap5: Analyse dimensionnelle

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.1 Introduction

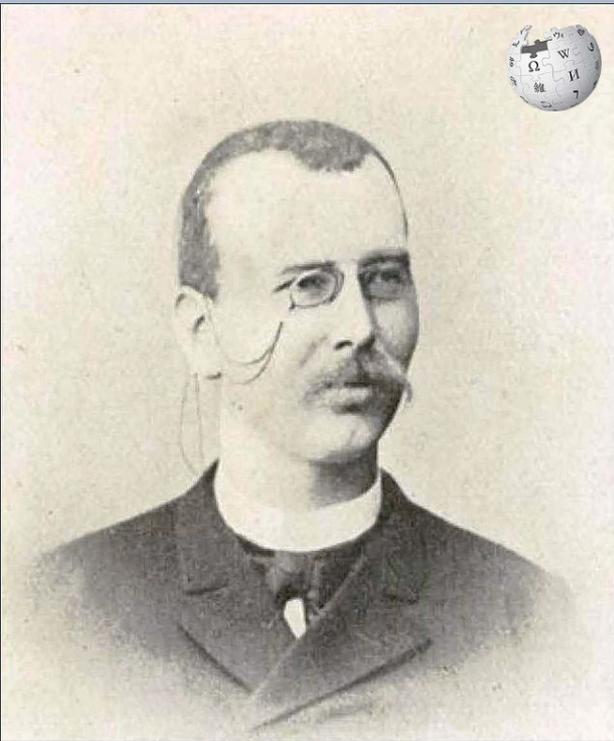
5.2 Homogénéité dimensionnelle

5.3 Théorème de Vaschy-Buckingham

5.4 Mise à l'échelle des équations de conservation

5.5 Les limites de la modélisation expérimentale

Théorème π de Vaschy-Buckingham



Aimé Vaschy 1857-1899

Le travail de Aimé Vaschy “ Sur les lois de similitude en physique” a été présenté en 1892 dans *Annales Télégraphiques* 19 (1892), 25-28

Deux années auparavant, dans les préliminaires de son ouvrage: *Traité d'électricité et de magnétisme*, il explique la réduction du nombre de paramètres lorsqu'on regroupe des quantités physiques pour générer des nombres adimensionnels

Théorème π de Vaschy-Buckingham

JOHN CRER
 ANNALES LIBRARY
 TÉLÉGRAPHIQUES

TROISIÈME SÉRIE

TOME XL

1892

PARIS

V^{ME} CH. DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES
 ET DES TÉLÉGRAPHES

Quai des Augustins, 49

1892

SUR

LES LOIS DE SIMILITUDE EN PHYSIQUE

La loi de similitude la plus générale en mécanique et en physique résulte du théorème suivant :

Soient $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ des quantités physiques, dont les p premières sont rapportées à des unités fondamentales distinctes et les $(n-p)$ dernières à des unités dérivées des p unités fondamentales (par exemple a_1 peut être une longueur, a_2 une masse, a_3 un temps, et les $(n-3)$ autres quantités a_4, a_5, \dots, a_n seraient des forces, des vitesses, etc.; alors $p=3$). Si entre ces n quantités il existe une relation :

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (1)$$

qui subsiste quelles que soient les grandeurs arbitraires des unités fondamentales, cette relation peut se ramener à une autre entre $(n-p)$ paramètres au plus, soit :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-p}) = 0, \quad (2)$$

les paramètres x_1, x_2, \dots, x_{n-p} étant des fonctions monomes de a_1, a_2, \dots, a_n (par exemple $x_1 = A a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$).

Dans le cas particulier où $n=5$ et $p=3$, on retrouve le théorème donné par M. Carvallo (*).

Pour démontrer le théorème que nous venons d'é-

(*) Voir p. 21.

26

SUR LES LOIS DE SIMILITUDE EN PHYSIQUE.

noncer, remarquons que les quantités $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_n$ étant rapportées à des unités dérivées, cela revient à dire que l'on peut trouver des exposants $\alpha', \beta', \dots, \alpha', \beta', \dots$ tels que les valeurs numériques des rapports

$$\frac{a_{p+1}}{a_1^{\alpha'} a_2^{\beta'} \dots a_p^{\gamma'}} = x_1, \quad \frac{a_{p+2}}{a_1^{\alpha'} a_2^{\beta'} \dots a_p^{\gamma'}} = x_2, \dots,$$

soient indépendantes des valeurs arbitraires des unités fondamentales. (Ainsi a_1, a_2, a_3, a_4 désignant respectivement une longueur, une masse, un temps et une force, le rapport $\frac{a_4}{a_1 a_2 a_3}$ aurait une valeur indépendante du choix des unités). Or, la relation donnée (1)

$$F(a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, \dots) = 0,$$

peut s'écrire :

$$F(a_1, a_2, \dots, a_p, x_1 a_1^{\alpha'} \dots a_p^{\gamma'}, x_2 a_1^{\alpha'} \dots a_p^{\gamma'}, \dots) = 0,$$

ou plus simplement

$$f(a_1, a_2, \dots, a_p, x_1, x_2, \dots, x_{n-p}) = 0. \quad (3)$$

Mais, en faisant varier les grandeurs des unités fondamentales, on pourra faire varier arbitrairement les valeurs numériques des quantités a_1, a_2, \dots, a_p dont les grandeurs intrinsèques sont supposées fixes, tandis que les valeurs numériques de x_1, x_2, \dots, x_{n-p} ne changeront point. La relation (3) devant subsister, quelles que soient les valeurs arbitraires de a_1, a_2, \dots, a_p , doit être indépendante de ces paramètres ; cette relation prend ainsi la forme la plus simple (2).

C. Q. F. D.

Applications. 1° si la durée T de l'oscillation d'un pendule ne dépend que de sa longueur l , de sa masse

Théorème π de Vaschy- Buckingham

JOHN CRER
ANNALES LIBRARY
TÉLÉGRAPHIQUES
—
TROISIÈME SÉRIE
—
TOME XLV
—
1892



La loi de similitude la plus générale en mécanique et en physique résulte du théorème suivant :

Soient $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ des quantités physiques, dont les p premières sont rapportées à des unités fondamentales distinctes et les $(n-p)$ dernières à des unités dérivées des p unités fondamentales (par exemple a_1 peut être une longueur, a_2 une masse, a_3 un temps,

Si entre ces n quantités il existe une relation :

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (1)$$

qui subsiste quelles que soient les grandeurs arbitraires des unités fondamentales, cette relation peut se ramener à une autre entre $(n-p)$ paramètres au plus, soit :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-p}) = 0, \quad (2)$$

Théorème π de Vaschy-Buckingham

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ

ET DE MAGNÉTISME

THÉORIE ET APPLICATIONS
INSTRUMENTS ET MÉTHODES DE MESURE ÉLECTRIQUE

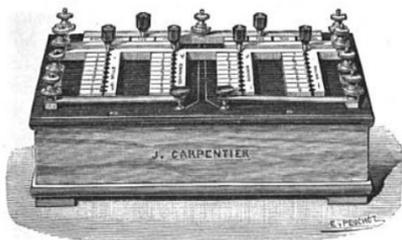
COURS PROFESSÉ A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE TÉLÉGRAPHIE

PAR

A. VASCHY

Ingénieur des Télégraphes, Répétiteur à l'École Polytechnique.

TOME PREMIER



PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, BAUDRY ET C^{ie}, ÉDITEURS

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15

MAISON A LIÈGE, RUE DES DOMINICAINS, 7

1890

Tous droits réservés.

Les quantités qui gardent une valeur constante dans le cours des calculs, en particulier les constantes physiques : intensité g de la pesanteur, vitesse a de la lumière, etc., ne doivent pas être considérées comme des coefficients purement numériques. Leur valeur numérique, au lieu d'être invariable, dépend des unités fondamentales choisies. Cette observation est d'une grande importance.

Supposons que l'on ait établi une relation de forme quelconque, par exemple :

$$\phi(l, u, d, g, f) = 0$$

dans laquelle nous mettons en évidence toutes les quantités, constantes ou variables, dont les dimensions ne sont pas nulles : longueur l , volume u , densité d , intensité g de la pesanteur, force f . On peut mettre cette relation sous la forme tout aussi générale :

$$\psi\left(l, \frac{u}{l^3}, ud, \sqrt{\frac{l}{g}}, \frac{f}{udg}\right) = 0$$

puisque, à chaque système de valeurs des nouveaux paramètres $l, \frac{u}{l^3}, ud, \dots$, correspond un système bien déterminé de valeurs des paramètres primitifs l, u, d, g, f .

Or $\frac{u}{l^3}$ et $\frac{f}{udg}$ ont des dimensions nulles, tandis que l est une longueur, ud une masse et $\sqrt{\frac{l}{g}}$ un temps. Si donc on fait varier arbitrairement l'unité de longueur, les unités de masse et de temps restant constantes, l variera aussi arbitrairement, mais les quatre autres quantités, $\frac{u}{l^3}, ud, \dots$ resteront constantes. Pour que l'équation $\psi = 0$ soit toujours satisfaite, il faut évidemment qu'en réalité elle ne contienne plus la quantité l . De même elle ne doit contenir ni ud ni $\sqrt{\frac{l}{g}}$, et elle se réduit finalement à :

$$\psi\left(\frac{u}{l^3}, \frac{f}{udg}\right) = 0$$

équation nécessairement homogène, puisqu'elle ne renferme que des grandeurs $\frac{u}{l^3}$ et $\frac{f}{udg}$ de dimensions nulles.

Cet exemple suffit à montrer pourquoi toute relation physique doit être homogène, c'est-à-dire réductible à une équation ne renfermant que des grandeurs de dimensions nulles.

Nous avons supposé que les trois unités fondamentales L, M, T sont irréductibles entre elles. Elles le sont effectivement, au moins dans l'état actuel de la science, et les tentatives faites jusqu'ici pour les relier entre elles par des lois naturelles, telles que celle de la gravitation universelle, ne reposent que sur des illusions.

Cet exemple suffit à montrer pourquoi toute relation physique doit être homogène, c'est-à-dire réductible à une équation ne renfermant que des grandeurs de dimensions nulles

Théorème π de Vaschy-Buckingham



D. Riabouchinsky, aérodynamicien russe fondateur de l'Institut Aérodynamique de Koutchino, a publié en 1911 un article sur les nombres adimensionnels: *Méthodes des variables de dimension zéro et son application en aérodynamique*, *L'Aérophile* pp.407-498, 1911

Dimitri Riabouchinsky
(1882–1962)

Théorème π de Vaschy-Buckingham

L'AÉROPHILE

REVUE TECHNIQUE & PRATIQUE DES LOCOMOTIONS AÉRIENNES

DIRECTEUR: GEORGES BESANÇON

PUBLICATION BIMENSUELLE ILLUSTRÉE

Paraissant le 1^{er} et le 15 de chaque mois

DIX-NEUVIÈME ANNÉE

1911

PARIS

AUX BUREAUX DE "L'AÉROPHILE"

35, RUE FRANÇOIS-1^{ER} (CHÂMPS-ÉLYSÉES), PARIS (8^e)

1911

MÉTHODE DES VARIABLES DE DIMENSION ZÉRO et son application en Aérodynamique

Lorsqu'on étudie la relation qui existe entre n grandeurs physiques quelconques

$$(1) \quad f(a, b, c, \dots, i, k, l, m, n) = 0;$$

il est toujours très avantageux de substituer aux variables a, b, c, \dots, n des n variables de dimension zéro le produit de deux, trois ou quatre grandeurs physiques, élevées à des puissances telles, que la dimension de ce produit par rapport à chacune des trois unités fondamentales (masse, longueur, temps) soit égale à zéro.

Le premier qui se soit occupé de chercher la dépendance non entre les variables elles-mêmes, mais entre leurs rapports formés deux groupes de dimension zéro, a été lord Rayleigh, dans l'article "Investigations in similarity" (*Philosophical Magazine* 1889). Dans une note parue dans le *Report of the advisory Committee for Aeronautics for the year 1909-1910*, lord Rayleigh signale l'importance que cette méthode peut avoir dans l'étude expérimentale de la résistance des fluides.

Le professeur Prandtl a consacré à la même ques-

tion une méthode au cas où le nombre des variables est quelconque, je démontre que, par l'introduction de variables de dimension zéro, le nombre des variables indépendantes peut être réduit de trois, et je donne un moyen simple d'effectuer cette transformation.

Je supposerai que nous avons quatre grandeurs physiques a, b, c, d , dont les relations suivantes expriment les dimensions quant à la masse, à la longueur et au temps :

$$(a) = M^1 L^0 T^0$$

$$(b) = M^0 L^1 T^0$$

$$(c) = M^0 L^0 T^1$$

$$(d) = M^1 L^1 T^1$$

Choisissons trois nombres x, y, z tels que la dimension de

$$(a') = (a^x b^y c^z)$$

Pour cela les exposants x, y, z doivent visiblement satisfaire au système suivant d'équations linéaires :

$$(2) \quad \begin{cases} px = qx + py + pz, \\ qy = qx + qy + qz, \\ rz = rx + ry + rz. \end{cases}$$

Pour que x, y, z soient des valeurs déterminées et finies, onela one soit la dimension de la grandeur

R étant un nombre abstrait. Parmi les n variables, choisissons-en trois (supposé qu'elles soient au nombre de trois au moins) dont les dimensions soient caractérisées par des exposants satisfaisant à l'inégalité (3); multiplions et divisons chacune des variables par le produit des trois grandeurs choisies, élevées à des puissances telles que la dimension de ce produit et celle de la variable correspondante soient égales. Si nous supposons que la condition (3) se trouve entre autres remplie relativement aux grandeurs k, l, m et que nous désignons les rapports de dimension zéro obtenus de la manière indiquée plus haut par les lettres majuscules correspondantes, nous pouvons transformer comme suit l'expression (7) :

$$(R \cdot a^x b^y c^z \dots l^1 l^1 l^1 N^k) \text{ à } l^0 m^0.$$

où l, m, N expriment la somme des exposants de k, l, m . Comme dans la partie droite de l'expression (1) figure un nombre abstrait, tous les termes du développement de la fonction f doit être de dimension zéro, et puisque les grandeurs k, l, m ont été supposées satisfaisant à l'inégalité (3), il résulte que

$$l = m = N = 0.$$

Quand nous aurons transformé de cette manière

l'expression (1) en une fonction de variables de dimension zéro, nous aurons pu constater l'intervention d'un autre facteur, de l'influence duquel il n'aurait pas été tenu compte, orienter les recherches vers la découverte de ce facteur.

EXEMPLE : Supposons que l'on se propose d'étudier une famille d'hélices, géométriquement semblables, dans un tunnel. Désignons par P la poussée de l'hélice (ou la pression du vent sur l'hélice, lorsqu'elle fonctionne comme un moulin à vent), par m et s la masse spécifique et la viscosité du milieu pour la pression et la température données; pour caractériser l'influence de l'assiette du milieu, introduisons aussi la vitesse du son a ; désignons encore par n le nombre de tours de l'hélice par seconde; par d la vitesse du courant; par D le diamètre de l'hélice; par D le diamètre du tunnel, et posons

$$(8) \quad P = f(m, s, a, n, v, d, D).$$

Les dimensions des grandeurs qui figurent dans l'expression (8) sont :

$$\begin{aligned} (P) &= M L T^{-2} \\ (m) &= M L^{-3} \\ (s) &= M L^{-1} T^{-1} \\ (a) &= L T^{-1} \\ (n) &= T^{-1} \\ (v) &= L T^{-1} \\ (D) &= L \end{aligned}$$

Lorsqu'on étudie la relation qui existe entre n grandeurs physiques quelconques

$$(1) \quad f(a, b, c, \dots, i, k, l, m, n) = 0;$$

il est toujours très avantageux de substituer aux variables a, b, c, \dots, n des n variables de dimension zéro.

Supposons que nous étudions une loi physique exprimée par la formule (1). Développons la fonction f en série. Le terme général sera

$$(2) \quad (R a^x b^y c^z \dots l^1 l^1 l^1 m^0 n^0)$$

tant varier telle de ces grandeurs, nous pouvons étudier en quelque sorte l'influence de la variation de telle autre; enfin, si la relation de dépendance entre deux grandeurs, trouvée par ce procédé indirect, ne se trouvait pas confirmée par l'étude expérimentale directe de ladite dépendance, la nécessité de con-

france fut la déception du sympathique pilote-quant il apprit que, par suite de l'absence d'un chronométrateur officiel, qu'on avait omis de prévenir, ce raid magnifique ne pouvait être homologué. L'incident prive Nieuport d'un succès officiel, mais le succès officieux n'en existe pas moins.

(1) Contre-verse de M. Eiffel à l'Aéro-Club de France *Aérophile*, 1^{er} juin.

grandes transformables de dimension zéro.

DOCKENNY

de M. H. t à se met-objurgations pilote-quant sa ten-courage et i caractères i matin, sur HP, de sa lun, Meaux, atres impu- vitesse de

Théorème π de Vaschy- Buckingham



1914

Edgar Buckingham (1867-1940)

ON PHYSICALLY SIMILAR SYSTEMS; ILLUSTRATIONS OF
THE USE OF DIMENSIONAL EQUATIONS.

1914

BY E. BUCKINGHAM.

1. *The Most General Form of Physical Equations.*—Let it be required to describe by an equation, a relation which subsists among a number of physical quantities of n different kinds. If several quantities of any one kind are involved in the relation, let them be specified by the value of any one and the ratios of the others to this one. The equation will then contain n symbols $Q_1 \cdots Q_n$, one for each kind of quantity, and also, in general, a number of ratios $r', r'', \text{ etc.}$, so that it may be written

$$f(Q_1, Q_2, \cdots Q_n, r', r'', \cdots) = 0. \quad (1)$$

Let us suppose, for the present only, that the ratios r do not vary during the phenomenon described by the equation: for example, if the equation describes a property of a material system and involves lengths, the system shall remain geometrically similar to itself during any changes of size which may occur. Under this condition equation (1) reduces to

$$F(Q_1, Q_2, \cdots Q_n) = 0. \quad (2)$$

Théorème π de Vaschy-Buckingham

Utilité

- Le théorème permet de **réduire** le nombre de variables décrivant un phénomène physique en ne considérant que des **paramètres (produits) adimensionnels**
- Le théorème permet de **préciser ce nombre** de produits adimensionnels indépendants que l'on peut former à partir des variables dimensionnelles fondamentales du problème.
- Le théorème **simplifie** la planification, la présentation et l'interprétation de données expérimentales ou numériques.

Question fondamentale

5.3 Théorème de V-B

De combien nombres sans dimension en a-t-on besoin pour représenter la solution d'un problème?



Qui sait? Je vais regarder le théorème, ou cas

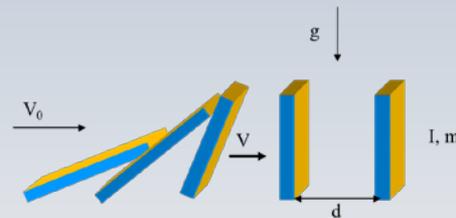


Théorème π de Vaschy-Buckingham

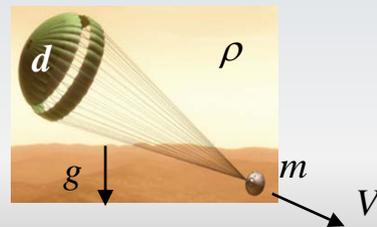
Une loi physique, exprimant le comportement d'une grandeur V_1 comme fonction de $N-1$ paramètres V_2, \dots, V_N , peut s'écrire:

$$V_1 = F(V_2, V_3, \dots, V_N)$$

$$V = F(V_0, l, d, g, m)$$



$$V = F(d, g, m, \rho)$$



Théorème π de Vaschy-Buckingham

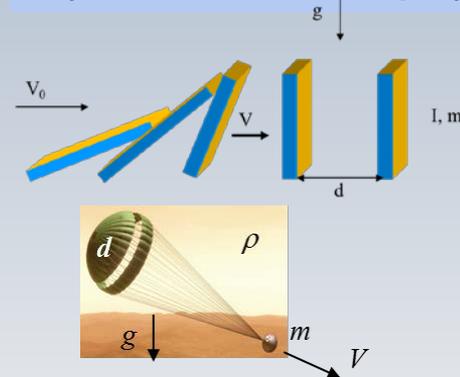
ou encore de manière implicite,

$$f(V_1, V_2, V_3, \dots, V_N) = 0$$

$$f(V, V_0, I, d, g, m) = 0$$

$$f(V, d, g, m, \rho) = 0$$

Il y a N variables physiques!



Le théorème π de Vaschy-Buckingham affirme que toute loi physique peut se réduire à un nombre minimal d'inconnues en introduisant des variables sans dimension notées π_i

Théorème π de Vaschy- Buckingham

La forme la plus générale de toute équation physique dimensionnelle exprimée comme:

$$f(V_1, V_2, V_3, \dots, V_N) = 0$$

est

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_K) = 0 \quad (K < N)$$

où les symboles π_i dénotent des nombres à dimension nulle obtenus à partir des grandeurs physiques V_i

Théorème π de Vaschy-Buckingham

Le nombre de π variables sans dimension (noté par K) est égal au **nombre de variables physiques de départ** (noté par N) **moins le nombre de dimensions fondamentales** (noté par J , souvent $J=3$) utilisées par ces variables.

$$K = N - J$$

La méthodologie suggérée pour déterminer les différentes π_i variables est expliquée par la suite

- 1) Enumérer les N paramètres (grandeurs physiques indépendantes) du problème à l'étude
- 2) Identifier la (les) variable(s) d'intérêt (généralement une seule)
- 3) Déterminer un système d'unités ayant J dimensions fondamentales (très souvent $J=3$ pour (M,L,T))
- 4) Construire un tableau dont le nombre de rangées correspond au nombre de dimensions fondamentales (J) et le nombre de colonnes au nombre de paramètres physiques (N). Réserver la première colonne pour la variable d'intérêt (cible)

Remarque: Mathématiquement, la variable d'intérêt (ou cible) est appelée *variable dépendante*

- 5) Exprimer les N quantités physiques fondamentales en termes des dimension fondamentales. Par exemple, une accélération comme $[a]=M^0LT^{-2}$ et une masse volumique comme $[\rho]=ML^{-3}T^0$.
- 6) Remplir les cases de chaque colonne avec les exposants (incluant leur signe) des dimensions fondamentales (M, L, T) présents dans les paramètres physiques correspondants

7) Appliquer le théorème de *Vaschy-Buckingham* pour déterminer le nombre ($K=N-J$) de quantités adimensionnelles π_i , décrivant le même problème avec moins de variables.

$$f(V_1, V_2, V_3, \dots, V_N) = 0 \quad \longrightarrow \quad \phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_K) = 0$$

On est prêt, *ou presque*, pour préciser les π_i . Mais avant, il est pratique de réarranger et scinder le tableau ou *matrice aux dimensions* construit aux étapes 4), 5) et 6).

Pour fins d'illustration on regardera le cas étudié précédemment donnant la position S , supposée de la forme $S = f(S_0, V_0, t, g)$

	Var. dépendante ou cible	
	S	
L	1	
T	0	
	L	

Méthodologie :étapes 1-6

Pour fins d'illustration on regardera le cas étudié précédemment donnant la position S , supposée de la forme $S = f(S_0, V_0, t, g)$

	Var. dépendante ou cible	Var. indép
	S	t
L	1	0
T	0	1
	L	T

Méthodologie :étapes 1-6

Pour fins d'illustration on regardera le cas étudié précédemment donnant la position S , supposée de la forme $S = f(S_0, V_0, t, g)$

	Var. dépendante ou cible	Var. indépendantes	
	S	t	g
L	1	0	1
T	0	1	-2
	L	T	LT ⁻²

Méthodologie :étapes 1-6

5.3 Théorème π

Pour fins d'illustration on regardera le cas étudié précédemment donnant la position S , supposée de la forme $S = f(S_0, V_0, t, g)$

	Var. dépendante ou cible	Var. indépendantes		
	S	t	g	S_0
L	1	0	1	1
T	0	1	-2	0
	L	T	LT^{-2}	L

Méthodologie :étapes 1-6

5.3 Théorème π

Pour fins d'illustration on regardera le cas étudié précédemment donnant la position S , supposée de la forme $S = f(S_0, V_0, t, g)$

	Var. dépendante ou cible	Var. indépendantes			
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

Méthodologie: $S=f(S_0, V_0, t, g)$

La partie à droite du tableau (variables indépendantes) peut être regardée comme une matrice de taille (2x4).

Puisqu'on a $J=2$ dimensions fondamentales, **on choisit 2 colonnes** (pas nécessairement les deux dernières!) parmi les 4 présentes, pour définir un **sous-tableau, ou matrice carrée (2X2) sur la partie à droite**

	Var. dépendante ou cible	Var. indépendantes			
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT^{-2}	L	LT^{-1}

Méthodologie: $S=f(S_0, V_0, t, g)$

5.3 Théorème π

Dans cet exemple, les variables S_0, V_0 seront adoptées

Les variables restantes t, g , sont regroupées à gauche avec la variable cible S . On trouve alors un sous-tableau à gauche composé de trois colonnes

	Var. dépendante ou cible	Var. indépendantes			
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT^{-2}	L	LT^{-1}

Méthodologie: $S=f(S_0, V_0, t, g)$

	Cible ou Var. dépendante	Var. indépendantes (imbriquées)		Var. indépendantes (références)	
	S	t	g	S₀	V₀
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

2 dimensions fondamentales
⇒ 2 colonnes

Méthodologie: $S=f(S_0, V_0, t, g)$

Les variables (S_0, V_0) choisies pour construire le sous-tableau à gauche sont appelées **variables répétées** et les **3** variables restantes (S, t, g) sont nommées **variables non répétées**

	Variables non répétées			Variables répétées	
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT^{-2}	L	LT^{-1}

Et le théorème de Vaschy- Buckingham ou est-il passé?

Il a été appliqué sous silence puisque $K = N - J = 3$: le nombre de variables physiques ($N=5$) moins le nombre de dimensions fondamentales ($J=2$).

$K=3$ est le nombre de paramètres adimensionnels π_i à déterminer. Ce chiffre correspond exactement au *nombre de variables non répétées*.



Comment choisit-on les variables répétées (à droite)?

- i. Clairement, plusieurs choix sont possibles
- ii. Il faut que leurs dimensions couvrent **l'ensemble de dimensions nécessaires pour définir les grandeurs physiques du problème** (généralement M, L, T). Deux, L, T , pour le cas courant.

Comment choisit-on les variables répétées?

iii. Il faut qu'elles soient dimensionnellement indépendantes.

En pratique on doit vérifier que **le déterminant du sous-tableau, ou matrice carrée** (3X3 lorsqu'on a M, L, T , mais 2X2 pour le cas courant avec L, T) **ne soit pas nul.**

Méthodologie

	Variables non répétées			Variables répétées	
	s	t	g	S ₀	V ₀
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT ²	L	LT ¹

8) L'étape suivante est la **construction des variables sans dimension**. Dans ce cas, π_1 , π_2 et π_3

En général, un nombre adimensionnel π_i est obtenu divisant chaque variable non répétée (**colonnes jaunes**) par un produit de variables répétées (**colonnes vertes**) élevées à différents exposants. De manière symbolique:

$$\pi_i = \frac{V_{i, \text{non répétée}}}{\prod_{k=1}^J (V_{k(\text{répétée})})^{\alpha_{ik}}}$$

L'indice i dénote les colonnes(vertes) à gauche. L'indice k indique les colonnes(3) à droite. Le symbole α_{ik} représente les exposants de chacune des k variables répétées pour chaque nombre π_i

Pour le cas particulier de l'exemple on a:

$$\pi_1 = \frac{\mathbf{s}}{(S_0)^{\alpha_{11}}(V_0)^{\alpha_{12}}} \quad \pi_2 = \frac{\mathbf{t}}{(S_0)^{\alpha_{21}}(V_0)^{\alpha_{22}}} \quad \pi_3 = \frac{\mathbf{g}}{(S_0)^{\alpha_{31}}(V_0)^{\alpha_{32}}}$$

On note que dans le dénominateur de π_1 , π_2 et π_3 on retrouve de manière récurrente (répétée) les variables S_0 , et V_0 élevées à différentes puissances

	Variables non répétées			Variables répétées	
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT^{-2}	L	LT^{-1}

Étant donné que les nombres π sont adimensionnels, on peut obtenir les exposants α_{ik} pour $k=1,2$ pour π_1 , π_2 et π_3 en écrivant deux équations à deux inconnues à partir du tableau (matrice)

	Variables non répétées			Variables répétées	
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT^{-2}	L	LT^{-1}

Méthodologie

S

$$\pi_1 = \frac{S}{(S_0)^{\alpha_{11}}(V_0)^{\alpha_{12}}}$$

5.3 Théorème π

Pour π_1 :

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} + \alpha_{12} \\ &0 \times \alpha_{11} - \alpha_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \text{ pour L} & \alpha_{11} &= \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \text{ pour T} & \alpha_{12} &= \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\pi_1 = \frac{S}{S_0}$$

	Variables non répétées			Variables répétées	
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

Méthodologie

$$\pi_2 = \frac{t}{(S_0)^{\alpha_{21}}(V_0)^{\alpha_{22}}}$$

5.3 Théorème π

Pour π_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_{21} + \alpha_{22} &= 0 \\ 0 \times \alpha_{21} - \alpha_{22} &= 1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_{21} &= 1 \\ \alpha_{22} &= -1 \end{aligned}$$

$$\pi_2 = \frac{t}{S_0 V_0^{-1}}$$

	Variables non répétées			Variables répétées	
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

Méthodologie

$$\pi_3 = \frac{g}{(S_0)^{\alpha_{31}}(V_0)^{\alpha_{32}}}$$

5.3 Théorème π

Pour π_3 :

$$\begin{aligned} \alpha_{31} + \alpha_{32} &= 1 \\ 0 \times \alpha_{31} - \alpha_{32} &= -2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_{31} &= -1 \\ \alpha_{32} &= 2 \end{aligned}$$

$$\pi_3 = \frac{g}{S_0^{-1}V_0^2}$$

	Variables non répétées			Variables répétées	
	S	t	g	S_0	V_0
L	1	0	1	1	1
T	0	1	-2	0	-1
	L	T	LT ⁻²	L	LT ⁻¹

Méthodologie

Alors, les trois paramètres adimensionnels π sont

$$\pi_1 = \frac{S}{S_0}, \quad \pi_2 = \frac{t}{S_0/V_0}, \quad \pi_3 = \frac{g}{V_0^2/S_0}$$

Ces nombres coïncident avec les termes S^*, t^*, g^* , trouvés auparavant, sauf **qu'on ne connaît pas la fonction $S^* = f(t^*, g^*)$ qui les relie**

Autrement dit:

Méthodologie

Le théorème π **ne permet pas** de déterminer la forme explicite de l'équation:

$$S^* = 1 + t^* + 1/2 g^* t^{*2}$$

Avant de regarder un cas avec un visage de mécanique de fluides, une explication sera donnée sur la logique appliquée pour l'adimensionnalisation des variables

Le secret du tableau

$$\pi_1 = \frac{S}{S_0}, \quad \pi_2 = \frac{t}{S_0/V_0}, \quad \pi_3 = \frac{g}{V_0^2/S_0}$$



Pour expliquer la logique, nous choisissons de regarder la forme adimensionnelle correspondante à la variable g , soit

$$\pi_3 = \frac{g}{S_0^a V_0^b} \quad \text{sans dimension}$$

Nous regardons les dimensions des variables

$$\pi_3 = \frac{L/T^2}{L^a (LT^{-1})^b}$$

Ce rapport n'a pas de dimensions

Remarque: nous avons remplacé $a = \alpha_{31}$, $b = \alpha_{32}$

Le secret du tableau

$$\pi_3 = \frac{L/T^2}{L^a(LT^{-1})^b}$$

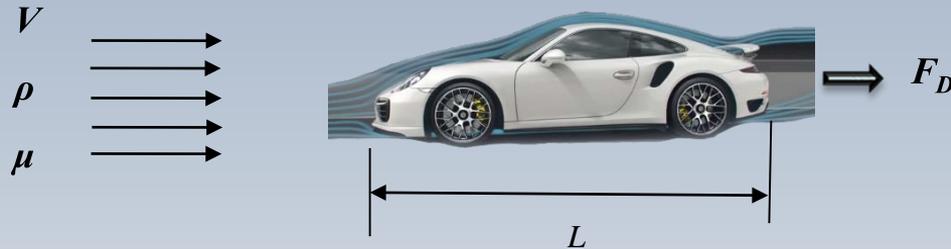
Nous écrivons alors une équation pour chaque dimension afin que le résultat du quotient soit nul (dimension zéro)

$$\text{Pour } L: \quad 1 - a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$\text{Pour } T: \quad -2 - 0 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - b = -2 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

$$\pi_3 = \frac{g}{S_0^a V_0^b} = \frac{g}{V_0^2 / S_0}$$

Cette méthodologie est répétée de manière structurée dans le tableau pour chacune des variables



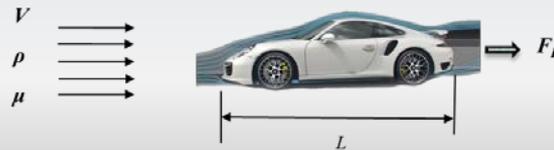
On veut trouver les nombres adimensionnels qui permettent de caractériser **la force de trainée F_D** sur un voiture. Cette variable est la cible!

On considère que F_D dépend des paramètres V, ρ, μ et L

Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

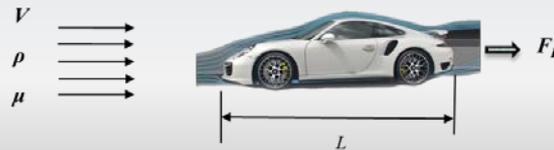
	F_D	ρ	μ	L	V
M					
L					
T					



Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

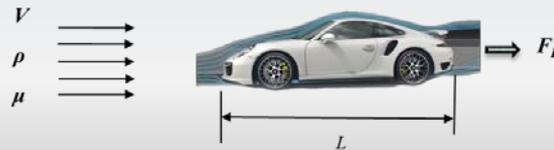
	F_D	ρ	μ	L	V
M	1				
L	1				
T	-2				
	MLT ⁻²				



Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

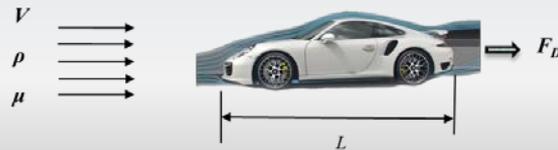
	F_D	ρ	μ	L	V
M	1	1			
L	1	-3			
T	-2	0			
	MLT ⁻²	ML ⁻³			



Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

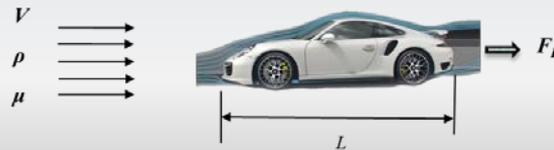
	F_D	ρ	μ	L	V
M	1	1	1		
L	1	-3	-1		
T	-2	0	-1		
	MLT ⁻²	ML ⁻³	ML ⁻¹ T ⁻¹		



Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

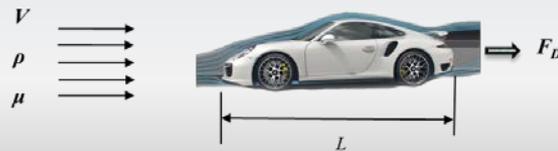
	F_D	ρ	μ	L	V
M	1	1	1	0	
L	1	-3	-1	1	
T	-2	0	-1	0	
	MLT ⁻²	ML ⁻³	ML ⁻¹ T ⁻¹	L	



Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

	F_D	ρ	μ	L	V
M	1	1	1	0	0
L	1	-3	-1	1	1
T	-2	0	-1	0	-1
	MLT^{-2}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L	LT^{-1}



Deux types de variables

5.3 Théorème π : exemple

Cible

	Variable d'intérêt (dépendante)	Variables indépendantes			
	F_D	ρ	μ	L	V
M	1	1	1	0	0
L	1	-3	-1	1	1
T	-2	0	-1	0	-1
	MLT^{-2}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	L	LT^{-1}



Jusqu'à présent on réalisé les étapes 1)-6). Il faut maintenant déterminer les $K=N-J$ quantités adimensionnelles π définies par l'application du théorème de *Vaschy-Buckingham*. En fait, ceci est réalisé automatiquement une fois que le tableau est divisé en deux, avec **un sous-tableau (3x3) de variables répétées** positionné à droite. Le nombre de colonnes restantes, correspond aux nombre de π sans dimension.

Dans cet exemple, on choisit ρ, L, V comme **des variables répétées**. On note que dans son ensemble, *ces trois quantités comprennent les unités fondamentales M, L, T*

Pourquoi pas choisir μ, L, V comme des *variables répétées*?

Aucun problème, puisqu'elles sont également linéairement indépendantes et comprennent les unités fondamentales M, L, T .

Le choix courant est simplement du type, “*On est des généraux après la bataille*”, puisque nous voulons répéter un résultat connu!

Étape 2: deux types de variables

	Variables non répétées		Variables répétées		
	F_D	μ	ρ	L	V
M	1	1	1	0	0
L	1	-1	-3	1	1
T	-2	-1	0	0	-1
	MLT^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	L	LT^{-1}



On est arrivé à la dernière étape (8) pour trouver finalement les paramètres sans dimension. Le tableau nos indique qu'il y en a deux. Notamment:

$$\pi_1 = \frac{F_D}{(\rho)^a (L)^b (V)^c}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{(\rho)^a (L)^b (V)^c}$$

Remarque: Pour chaque nombre, les coefficients $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ et $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}$ pour π_1 et π_2 ont été remplacés par a, b, c . Il s'agit d'une nomenclature courante trouvée dans la littérature

π_1 : exposants a, b, c

5.3 Théorème π : exemple

Pour π_1 :

$$\begin{aligned}
 a + 0 \times b + 0 \times c &= 1 \text{ pour M} \rightarrow a = 1 \\
 -3a + b + c &= 1 \text{ pour L} \rightarrow b = 2 \\
 0 \times a + 0 \times b - c &= -2 \text{ pour T} \rightarrow c = 2
 \end{aligned}$$

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho L^2 V^2}$$

	Variables non répétées		Variables répétées		
	F_D	μ	ρ	L	V
M	1	1	1	0	0
L	1	-1	-3	1	1
T	-2	-1	0	0	-1
	MLT^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	L	LT^{-1}



π_2 : exposants a, b, c

5.3 Théorème π : exemple

Pour π_2 : $a + 0 \times b + 0 \times c = 1$ pour M $\rightarrow a = 1$

$-3a + b + c = -1$ pour L $\rightarrow b = 1$

$0 \times a + 0 \times b - c = -1$ pour T $\rightarrow c = 1$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho L V}$$

	Variables non répétées		Variables répétées		
	F_D	μ	ρ	L	V
M	1	1	1	0	0
L	1	-1	-3	1	1
T	-2	-1	0	0	-1
	MLT^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	L	LT^{-1}



Les coefficients π_1 et π_2 sont alors

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho L^2 V^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho L V}$$

Ces deux paramètres sont bien connus en mécanique des fluides et on les appelle $\pi_1 = C_D$ (*Coefficient de frottement ou de trainée*) et $\pi_2 = 1/Re$ (*l'inverse du nombre de Reynolds*).

Le choix μ, L, V comme des variables répétées donne lieu à $\pi_1 = F/\mu L V$, $\pi_2 = \rho L^3 V/\mu$???

La relation $F = f(\rho, \mu, L, V)$

devient

$$\frac{F_D}{\rho V^2 L^2} = \Phi \left(\frac{\mu}{\rho L V} \right)$$

$$C_D = \Phi(\text{Re})$$

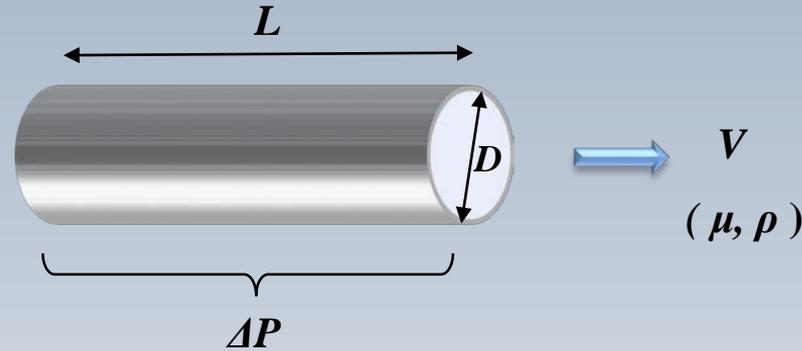
Par expérimentation on trouvera la fonction Φ qui fournira le coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds Re . Par la suite, avec ρ, L, V on déterminera la force de traînée F_D

- On avait **cinq(5)** quantités physiques dimensionnelles sous la forme: $F = f(\rho, \mu, L, V)$
- Maintenant on a que **deux (2)** paramètres sans dimension sous la forme: $C_D = f(Re)$

Pour étudier le comportement de la force F pour **10** ρ, μ, L, V , chacun, on doit réaliser **10^4** expériences. Pour étudier **le même problème**, il suffit de réaliser **10** expériences à **10** nombres de Reynolds différents. À 1\$ l'essai....

Perte dans une conduite

5.3 Théorème π : exemple



$$\Delta P = f(D, V, \mu, \rho, L)$$



$$\Delta P/L = f(D, V, \mu, \rho)$$

La conduite est horizontale, ainsi le champ gravitationnel n'intervient pas

Perte dans une conduite

5.3 Théorème π : exemple

$$\Delta P/L = f(D, V, \mu, \rho)$$

	$\Delta p = \Delta P/L$	ρ	μ	D	V
M	1	1	1	0	0
L	-2	-3	-1	1	1
T	-2	0	-10	0	-1
	$ML^{-2}T^{-2}$	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	$M^0L^0T^0$	LT^{-1}

La conduite est horizontale et le champ gravitationnel n'intervient donc pas

Perte dans une conduite

5.3 Théorème π : exemple

$$\Delta P/L = f(D, V, \mu, \rho)$$

	$\Delta p = \Delta P/L$	μ	D	ρ	V
M	1	1	0	1	0
L	-2	-1	1	-3	1
T	-2	-1	0	0	-1
	$ML^{-2}T^{-2}$	$ML^{-1}T^{-1}$	$M^0L^1T^0$	$ML^{-3}T^0$	$M^0L^1T^{-1}$

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{(D)^a (\rho)^b (V)^c}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{(D)^a (\rho)^b (V)^c}$$

π_1 : exposants a, b, c

5.3 Théorème π : exemple

$$\begin{aligned}
 \pi_1: 0 \times a + b + 0 \times c &= 1 \text{ pour M} \rightarrow b = 1 \\
 a - 3b + c &= -2 \text{ pour L} \rightarrow a = -1 \\
 0 \times a + 0 \times b - c &= -2 \text{ pour T} \rightarrow c = 2
 \end{aligned}$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p D}{\rho V^2}$$

	$\Delta p = \Delta P / L$	μ	D	ρ	V
M	1	1	0	1	0
L	-2	-1	1	-3	1
T	-2	-1	0	0	-1
	$ML^{-2}T^{-2}$	$ML^{-1}T^{-1}$	M^0L^0	$ML^{-3}T^0$	M^0LT^{-1}

π_2 : exposants a, b, c

5.3 Théorème π : exemple

$$\begin{aligned} \pi_2: 0 \times a + b + 0 \times c &= 1 \text{ pour M} \rightarrow b = 1 \\ a - 3b + c &= -1 \text{ pour L} \rightarrow a = 1 \\ 0 \times a + 0 \times b - c &= -1 \text{ pour T} \rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{D\rho V}$$

	$\Delta p = \Delta P/L$	μ	D	ρ	V
M	1	1	0	1	0
L	-2	-1	1	-3	1
T	-2	-1	0	0	-1
	$ML^{-2}T^{-2}$	$ML^{-1}T^{-1}$	M^0L^0	$ML^{-3}T^0$	M^0LT^{-1}

$$\frac{\Delta p D}{\rho V^2} = f\left(\frac{\mu}{D\rho V}\right)$$

L'analyse dimensionnelle a permis d'éliminer trois variables et d'établir la dépendance de π_1 en fonction de π_2 . Cependant, la fonction f est inconnue et *seule l'expérimentation permettra de la découvrir*

$$\frac{\Delta p D}{\rho V^2} = f \left(\frac{\mu}{D \rho V} \right)$$

Dans ce problème, la conduite a été considérée comme étant lisse sans aucune aspérité.

En pratique, pour caractériser la qualité d'une paroi on introduit une rugosité moyenne ε ayant la dimension d'une longueur. Dans ce cas:

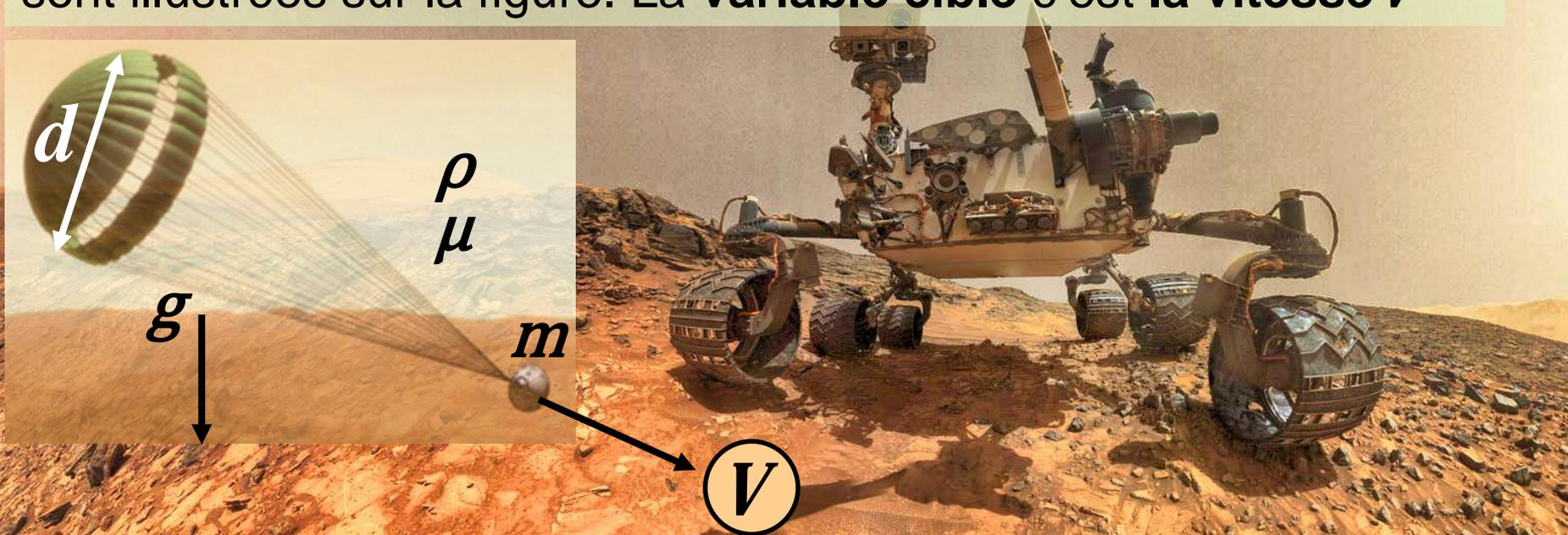
$$\Delta p = \Delta P/L = f(D, V, \mu, \rho) \quad \Longrightarrow \quad \Delta p = f(D, V, \mu, \rho, \varepsilon) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\Delta p D}{\rho V^2} = f\left(\frac{\mu}{D \rho V}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

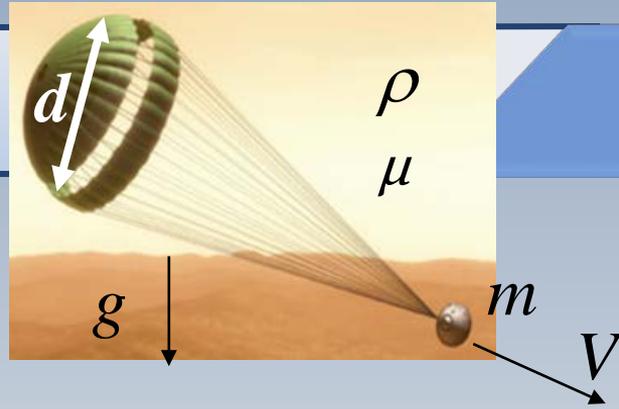
On reviendra sur ce résultat lors de l'étude d'écoulements dans des conduites

Le parachute sur Mars

Nous reprenons l'exemple du parachute utilisé pour «amarsir», sur Mars. Les variables sélectionnées pour décrire le problème sont illustrées sur la figure. La **variable cible** c'est la **vitesse V**

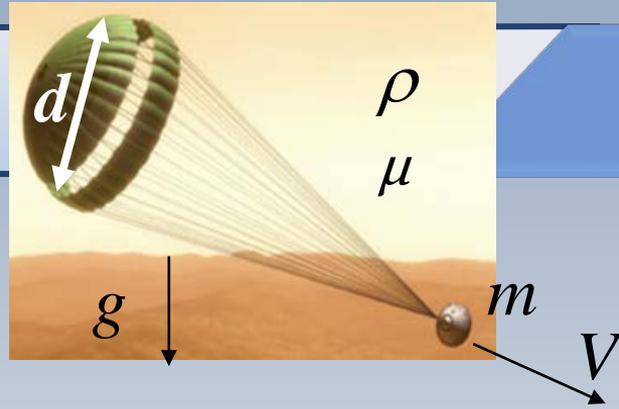


Tableau



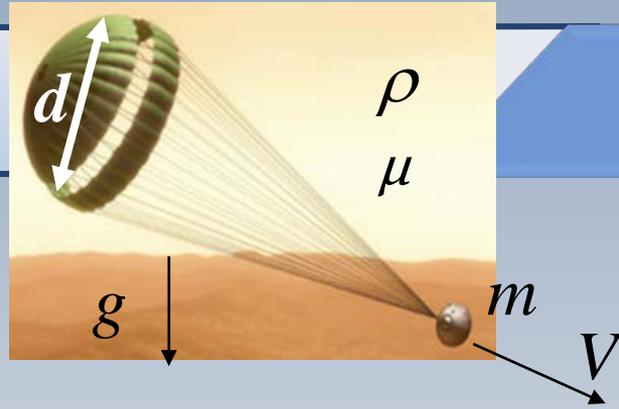
	Variables
M	
L	
T	

Tableau



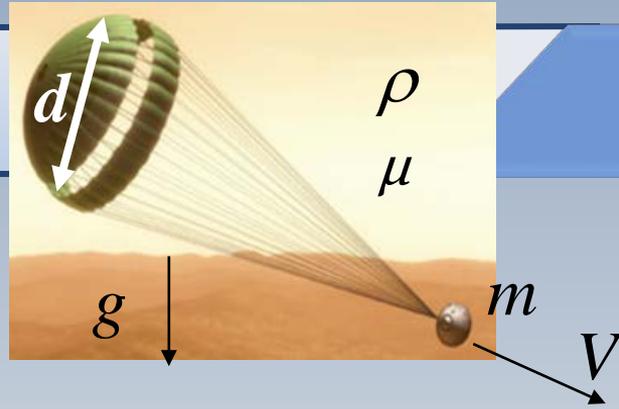
Variables	
	ρ
M	1
L	-3
T	0
	ML^{-3}

Tableau



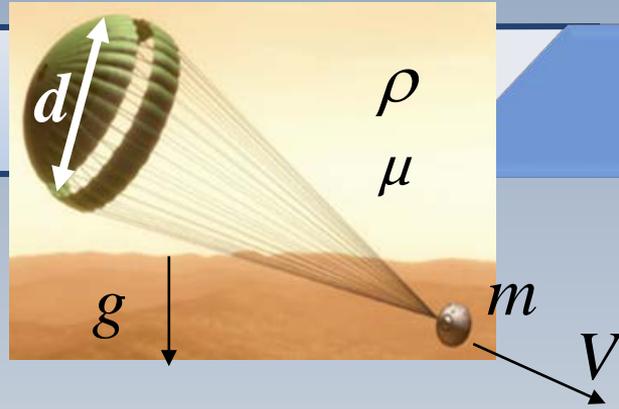
Variables		
	ρ	μ
M	1	1
L	-3	-1
T	0	-1
	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$

Tableau



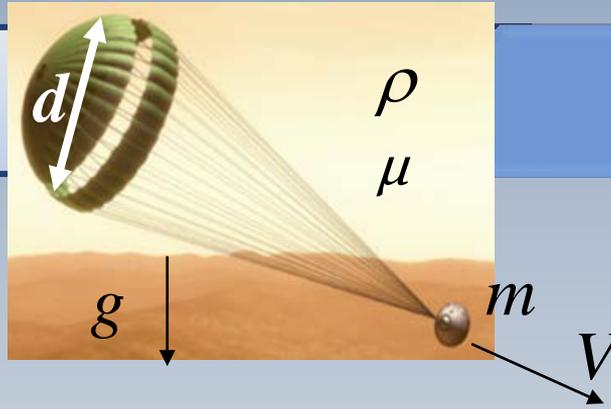
	Variables			
	ρ	μ	g	
M	1	1	0	
L	-3	-1	1	
T	0	-1	-2	
	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	LT^{-2}	

Tableau



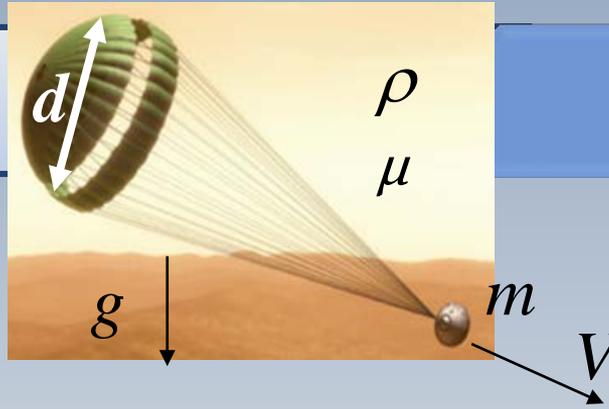
Variables					
	ρ	μ	g	d	
M	1	1	0	0	
L	-3	-1	1	1	
T	0	-1	-2	0	
	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	LT^{-2}	L	

Tableau



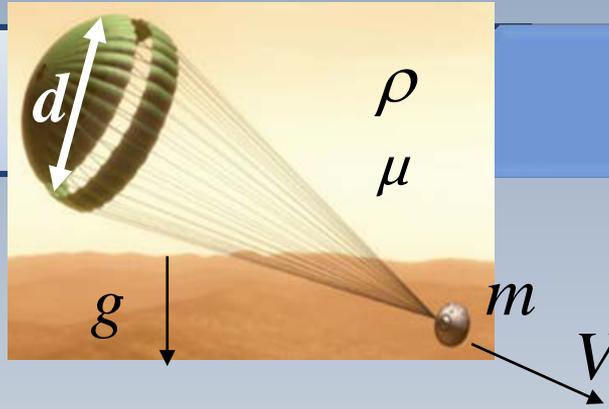
Variables						
	ρ	μ	g	d	m	
M	1	1	0	0	1	
L	-3	-1	1	1	0	
T	0	-1	-2	0	0	
	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	LT^{-2}	L	M	

Tableau



	Variables						Cible
	ρ	μ	g	d	m	V	
M	1	1	0	0	1	0	
L	-3	-1	1	1	0	1	
T	0	-1	-2	0	0	-1	
	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$	LT^{-2}	L	M	LT^{-1}	

Regroupement



	Variables non répétées Cible V et compagnie			Variables répétées		
	V	d	μ	ρ	g	m
M	0	0	1	1	0	1
L	1	1	-1	-3	1	0
T	-1	0	-1	0	-2	0
	LT^{-1}	M	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	LT^{-2}	L

π_1 : exposants a, b, c

5.3 Théorème π : exemple

Pour π_1 :

$$a + 0 \times b + c = 0 \text{ pour M} \rightarrow c = 1/6$$

$$-3a + b + 0 \times c = 1 \text{ pour L} \rightarrow a = -1/6$$

$$0 \times a - 2b + 0 \times c = -1 \text{ pour T} \rightarrow b = 1/2$$

	Variables non répétées			Variables répétées		
	V	d	μ	ρ	g	m
M	0	0	1	1	0	1
L	1	1	-1	-3	1	0
T	-1	0	-1	0	-2	0
	LT^{-1}	M	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	LT^{-2}	L

$$\pi_1 = \frac{V\rho^{1/6}}{g^{1/2}m^{1/6}}$$

π_2 : exposants a, b, c

5.3 Théorème π : exemple

Pour π_2 :

$$a + 0 \times b + c = 0 \text{ pour M} \rightarrow c = 1/3$$

$$-3a + b + 0 \times c = 1 \text{ pour L} \rightarrow a = -1/3$$

$$0 \times a - 2b + 0 \times c = 0 \text{ pour T} \rightarrow b = 0$$

	Variables non répétées			Variables répétées		
	V	d	μ	ρ	g	m
M	0	0	1	1	0	1
L	1	1	-1	-3	1	0
T	-1	0	-1	0	-2	0
	LT^{-1}	M	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	LT^{-2}	L

$$\pi_2 = \frac{d\rho^{1/3}}{m^{1/3}}$$

π_3 : exposants a, b, c

5.3 Théorème π : exemple

Pour π_3 : $a + 0 \times b + c = 1$ pour M $\rightarrow c = -1/2$

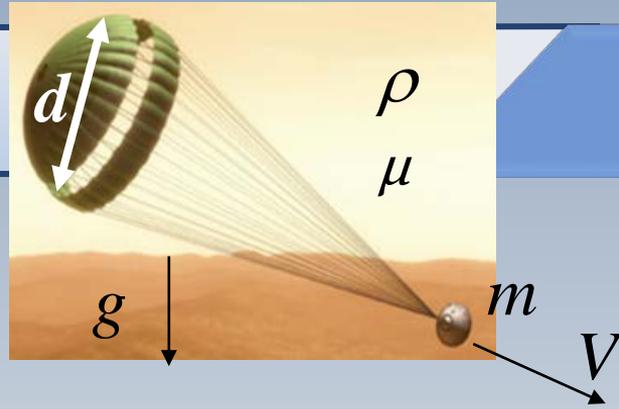
$-3a + b + 0 \times c = -1$ pour L $\rightarrow a = 1/2$

$0 \times a - 2b + 0 \times c = -1$ pour T $\rightarrow b = 1/2$

	Variables non répétées			Variables répétées		
	V	d	μ	ρ	g	m
M	0	0	1	1	0	1
L	1	1	-1	-3	1	0
T	-1	0	-1	0	-2	0
	LT^{-1}	M	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	LT^{-2}	L

$$\pi_3 = \frac{\mu m^{1/2}}{\rho^{1/2} g^{1/2}}$$

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$



$$\frac{V \rho^{1/6}}{g^{1/2} m^{1/6}} = f \left(\frac{d \rho^{1/3}}{m^{1/3}}, \frac{\mu m^{1/2}}{\rho^{1/2} g^{1/2}} \right)$$

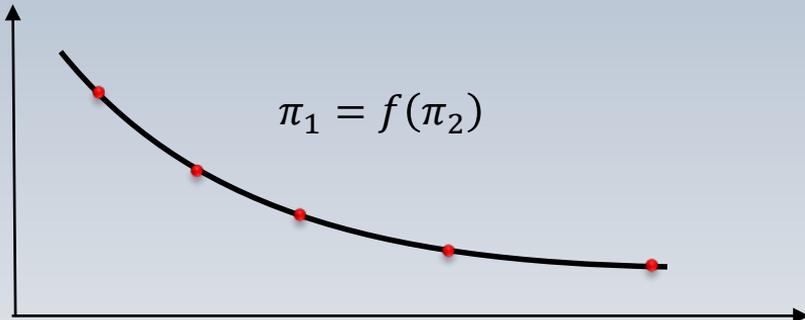
Hypothèse: Le paramètre $\pi_3 = \mu m^{1/2} / \rho^{1/2} g^{1/2}$ n'est pas crucial, si nous supposons que l'influence de la viscosité sur la vitesse est faible

Essai sur notre planète

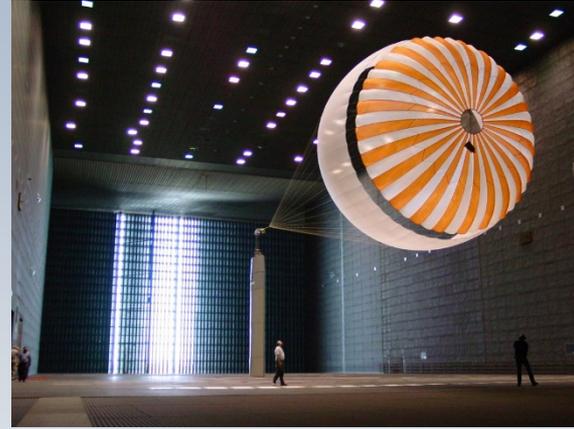
$$g = 9.8 \text{ m/s}^2, \rho = 1.23 \text{ kg/m}^3, m = \text{Test kg}, d = D \text{ m}$$



$$\Pi_1 = \frac{V \rho^{1/6}}{g^{1/2} m^{1/6}}$$



$$\Pi_2 = \frac{d \rho^{1/3}}{m^{1/3}}$$

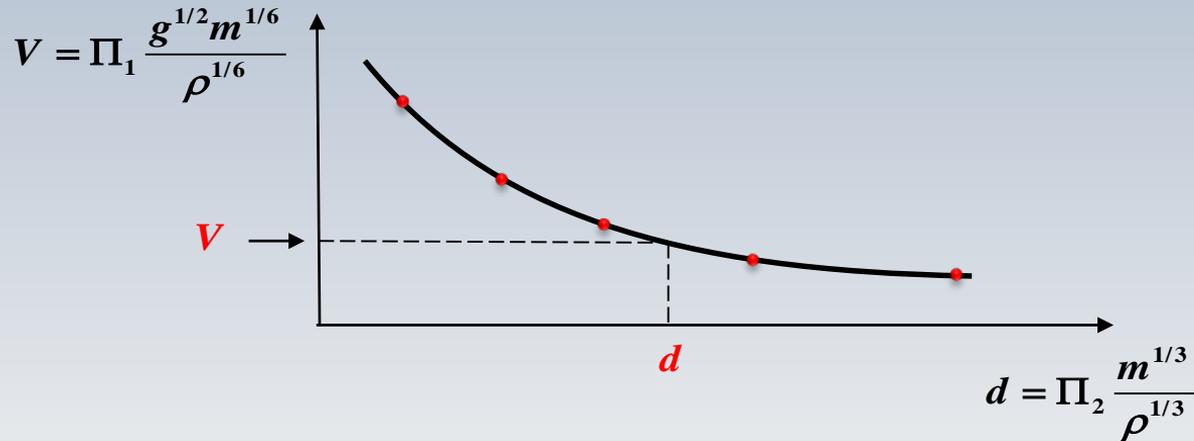


$$\frac{V \rho^{1/6}}{g^{1/2} m^{1/6}} = f\left(\frac{d \rho^{1/3}}{m^{1/3}}\right)$$

BUT: Obtenir le diamètre du parachute pour une vitesse donnée.

Prévision sur la planète mars

$g = 3.7 \text{ m/s}^2$, $\rho = 0.02 \text{ kg/m}^3$, $m = \text{Réal kg}$, $d = ?$, $V(\text{critique})$

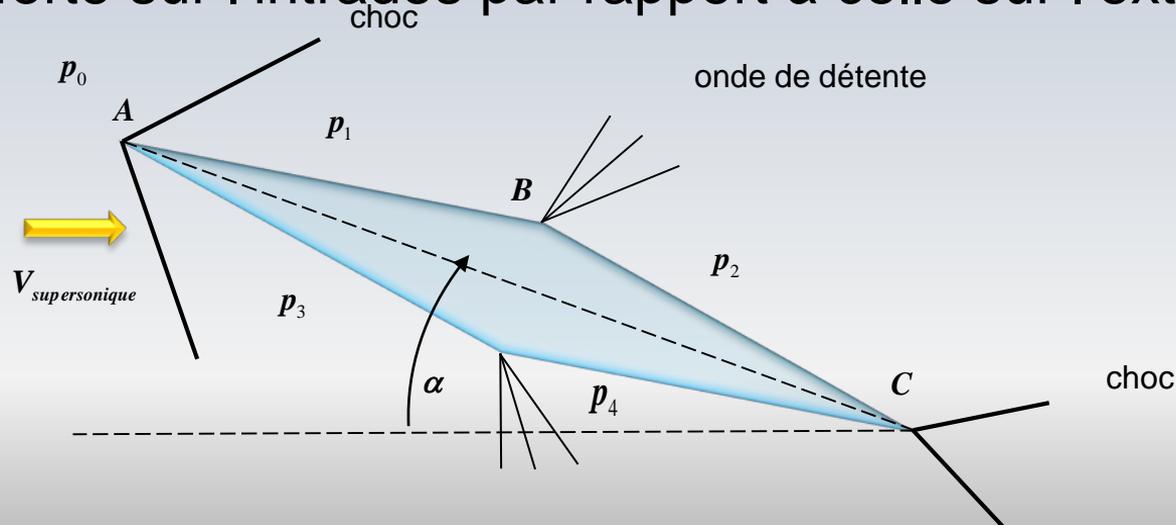


$$\frac{V \rho^{1/6}}{g^{1/2} m^{1/6}} = f \left(\frac{d \rho^{1/3}}{m^{1/3}} \right)$$

Exemple

5.3

Pour un écoulement supersonique, et pour un angle d'attaque positif, le dièdre produit un choc (compression brusque), oblique qui sera plus fort sur l'intrados (partie inférieure) que sur l'extrados. Une force de portance est alors générée par une pression plus forte sur l'intrados par rapport à celle sur l'extrados



Chap 5: Analyse dimensionnelle

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.1 Introduction

5.2 Homogénéité dimensionnelle

5.3 Théorème de Buckingham

5.4 Mise à l'échelle des équations de conservation

5.5 Les limites de la modélisation expérimentale

L'analyse dimensionnelle est utile pour trouver des groupes sans dimension, ce qui fait diminuer le nombre des paramètres mis en jeu.

Cependant, le résultat (les groupes) dépend du choix de variables. Ainsi, les paramètres adimensionnels peuvent porter un degré d'incertitude en ce qui regarde leur interprétation. Les méthodes précédentes, ne tient compte non plus explicitement des conditions aux frontières, qui ont un impact direct sur la solution d'un écoulement.

Une forme rigoureuse pour garantir l'indépendance des conditions particulières de deux écoulements, par exemple, est d'employer les équations qui les gouvernent, c'est à dire les équations de Navier-Stokes.

Par contre, si les équations différentielles qui gouvernent le phénomène ne sont pas connues, tel qu'un écoulement turbulent, cette alternative demeure inefficace.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Pour faire apparaître dans les équations de Navier-Stokes des paramètres sans dimension, on définira des **valeurs de référence** et on fera une mise à l'échelle de ces équations.

Les grandeurs génériques suivantes seront utilisées comme référence (facteur d'échelle) pour effectuer la mise à l'échelle.

Selon les applications, certaines grandeurs sont “relativement faciles” à identifier. Par exemple, pour un écoulement en conduite, il est naturel de prendre par V_o la vitesse moyenne (débitante) et par L_o le diamètre du tuyau. Pour l'écoulement autour d'une éolienne, on choisira par V_o la vitesse du vent en amont et par L_o la corde du profil de la pale à une section donnée.

Grandeur	Description
L_o	Longueur
V_o	Vitesse
t_o	Temps
p_o	Pression
ρ_o	Densité
μ_o	Viscosité
G_o	Accélération

Variables et opérateurs

5.4 Mise à l'échelle : Navier-Stokes

Dimensionnelle	Sans dimension
x	$x^* = x/L_o$
y	$y^* = y/L_o$
z	$z^* = z/L_o$
t	$t^* = t/t_o$
p	$p^* = p/p_o$
\vec{V}	$\vec{V}^* = \vec{V}/V_o$
ρ_o	$\rho^* = \rho/\rho_o$
μ_o	$\mu^* = \mu/\mu_o$
G_o	$g^* = g/g_o$

Dimensionnel	Sans dimension
$\vec{\nabla}$	$\vec{\nabla}^* = L_o \vec{\nabla}$
∇^2	$\nabla^{2*} = L_o^2 \nabla^2$

Pour les fluides **incompressibles à propriétés constantes**, il est d'usage de prendre ρ_o la masse volumique du fluide, μ_o la viscosité du fluide et g_o l'accélération gravitationnelle standard. Ainsi, $\rho^* = \mu^* = g^* = 1$

On peut maintenant utiliser les variables et les opérateurs sans dimension pour réécrire les équations de Navier-Stokes. Par exemple,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial (\vec{V}^* V_0)}{\partial (t^* t_0)} = \frac{V_0}{T_0} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} \quad \vec{V}^* = L_0 \vec{V} \quad \vec{V}^* = \vec{V}/V_0 \quad t^* = t/T_0$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \left(\vec{V}^* V_0 \cdot \frac{\vec{\nabla}^*}{L_0} \right) \vec{V}^* V_0 = \left(\frac{V_0^2}{L_0} \right) (\vec{V}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{V}^*$$

Avec des transformations comparables pour les termes restants, l'équation de NS (quantité de mouvement) devient:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}$$



$$\left[\frac{V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left[\frac{V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 L_0} \right] \frac{\vec{\nabla}^* p}{\rho^*} + g_0 \vec{g}^* + \left[\frac{\mu_0 V_0}{\rho_0 L_0^2} \right] \frac{\mu^*}{\rho^*} \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

Adimensionnalisation

Cette équation peut être rendue sans dimension si l'on divise chaque terme par un coefficient associé à l'un des termes. Traditionnellement par "le poids du terme d'inertie V_0^2/L_0 ", qui est une mesure de l'accélération convective. Le résultat est

$$\left[\frac{L_0}{T_0 V_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \right] \frac{\vec{\nabla}^* p}{\rho^*} + \left[\frac{g_0 L_0}{V_0^2} \right] \overset{1}{\cancel{g}^*} + \left[\frac{\mu_0}{\rho_0 V_0 L_0} \right] \frac{\mu^*}{\rho^*} \overset{1}{\nabla^{2*}} \vec{V}^*$$

avec $\rho^* = g^* = \mu^* = 1$ on trouve (par exemple $g^* = g/g_0$ avec $g = g_0$):

Adimensionnalisation

$$\left[\frac{L_0}{T_0 V_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \right] \vec{\nabla}^* p + \left[\frac{g_0 L_0}{V_0^2} \right] + \left[\frac{\mu_0}{\rho_0 V_0 L_0} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

Les coefficients entre crochets sont des nombres sans dimension. Ils sont notés avec des caractères uniques en reconnaissance des scientifiques qui ont révélé leur importance. L'équation adimensionnelle de la quantité de mouvement s'écrit alors

$$\mathbf{Sr} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = -\mathbf{Eu} \vec{\nabla}^* p + \frac{1}{\mathbf{Fr}^2} + \frac{1}{\mathbf{Re}} \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

Adimensionnalisation

Ces nombres adimensionnels ne sont pas simplement le résultat d'une algèbre sur les équations de NS ou sur les unités physiques. En fait, ils permettent de quantifier l'importance relative de différents effets physiques.

En réalité, l'équation dimensionnelle de NS n'est d'autre que l'équation de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\left[\frac{V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left[\frac{V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 L_0} \right] \frac{\vec{V}^* p}{\rho^*} + \mathbf{g}_0 + \left[\frac{\mu_0 V_0}{\rho_0 L_0^2} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$



$\times \rho_0$

Adimensionnalisation

$$\underbrace{\left[\frac{\rho_0 V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*}}_{\text{①}} + \underbrace{\left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^*}_{\text{②}} = - \underbrace{\left[\frac{p_0}{L_0} \right] \frac{\vec{\nabla}^* p}{\rho^*}}_{\text{③}} + \underbrace{\rho_0 g_0}_{\text{④}} + \underbrace{\left[\frac{\mu_0 V_0}{L_0^2} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*}_{\text{⑤}}$$

Les deux premiers termes à gauche correspondent à la **force d'inertie** (par unité de volume). Celle-ci est composée d'une partie produite par l'accélération **instationnaire** ①, et d'une partie engendrée par l'accélération **convective** ②

Adimensionnalisation

$$\underbrace{\left[\frac{\rho_0 V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^*}_{\text{1 2}} = - \left[\frac{p_0}{L_0} \right] \frac{\vec{\nabla}^* p}{\rho^*} + \rho_0 g_0 + \left[\frac{\mu_0 V_0}{L_0^2} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

③ ④ ⑤

Le terme ③ représente la force de pression, le terme ④ la force de gravité et le terme ⑤, la force de cisaillement. Toutes ces forces sont par unité de volume

Nombres sans dimension

On peut maintenant construire des rapports entre les intensités (les termes **en gras**) de ces différentes forces.

Habituellement on utilise comme référence commune, ou facteur d'échelle, la partie de la force d'inertie associée à l'accélération convective **②**, qui est même présente à l'état stationnaire

$$\left[\frac{\rho_0 V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{L_0} \right] \frac{\vec{\nabla}^* p}{\rho^*} + \rho_0 \mathbf{g}_0 + \left[\frac{\mu_0 V_0}{L_0^2} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

①

②

③

④

⑤

Nombres sans dimension

$$\left[\frac{\rho_0 V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{L_0} \right] \frac{\vec{V}^* p}{\rho^*} + \rho_0 g_0 + \left[\frac{\mu_0 V_0}{L_0^2} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

① ② ③ ④ ⑤

Alors, le premier rapport ① / ② conduit à la relation

$$\left[\frac{\rho_0 V_0}{T_0} \right] / \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] = \frac{L_0}{V_0 T_0} = \frac{L_0 f_0}{V_0} \quad (f_0: \text{fréquence})$$

Ce rapport entre l'accélération (ρ_0 n'est plus présent) instationnaire et l'accélération convective, est appelé **nombre de Strouhal** (Sr)

$$Sr = \frac{L_0 f_0}{V_0}$$

Nombre de Strouhal (Vincenc)

$$Sr = \frac{L_0}{T_0 V_0} \rightarrow \frac{\text{accélération locale}}{\text{accélération convective}}$$

Le nombre de Strouhal est un terme sans dimension relatif au mouvement oscillatoire des écoulements. Il indique, par exemple, la fréquence d'émission des tourbillons générée par l'écoulement autour d'un cylindre, normalisée par rapport à la vitesse de l'écoulement V_0 et le diamètre du cylindre D



Nombres sans dimension

$$\left[\frac{\rho_0 V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{L_0} \right] \frac{\vec{V}^* p}{\rho^*} + \rho_0 g_0 + \left[\frac{\mu_0 V_0}{L_0^2} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

① ② ③ ④ ⑤

Le second rapport ③ / ② conduit à la relation

$$\left[\frac{p_0}{L_0} \right] / \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] = \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2}$$

Ce rapport entre la force de pression et la force d'inertie est appelé **nombre de Euler (Eu)**

$$Eu = \frac{\Delta p_0}{1/2 \rho_0 V_0^2}$$

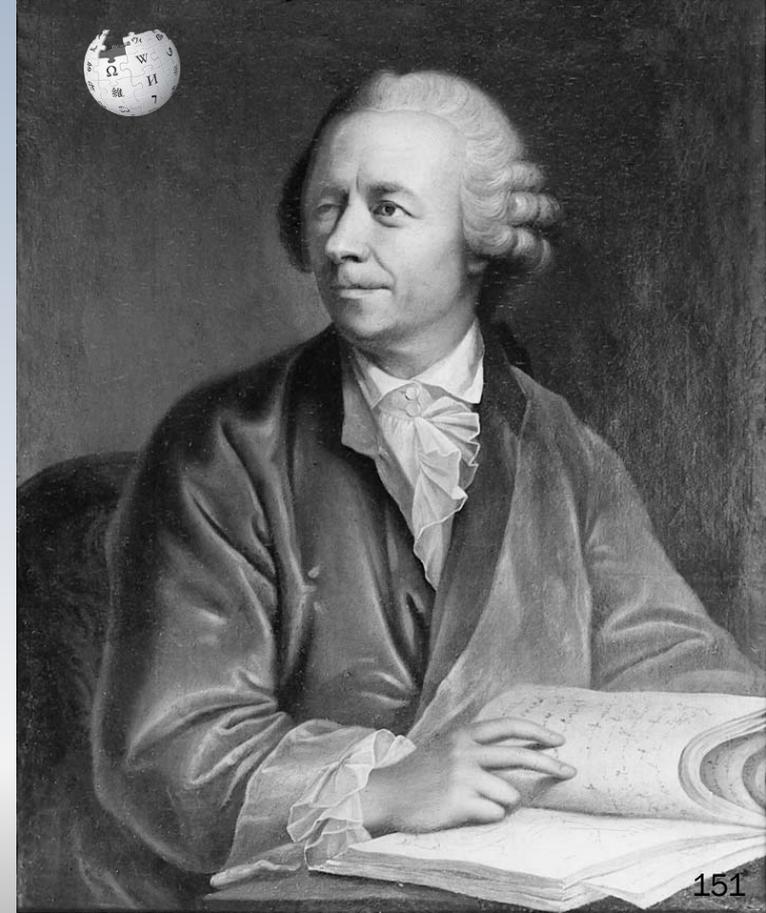
- Le coefficient 1/2 est introduit pour retrouver la pression dynamique
- Parfois on utilise Δp_0 au lieu de p_0

Nombre d'Euler (Leonhard)

$$Eu = \frac{\Delta p}{1/2\rho V_0^2} \rightarrow \frac{\text{forces de pression}}{\text{forces d'inertie}}$$

Le nombre d'Euler indique le rapport entre les forces de pression et les forces d'inertie. Il peut conduire à d'autres paramètres adimensionnels. Par exemple, si on multiplie le numérateur et le dénominateur par un facteur d'échelle l^2 (aire), on obtient un coefficient de force (de trainée ou de portance)

$$Eu = \frac{\Delta p l_0^2}{1/2\rho V_0^2 l_0^2} \rightarrow \frac{F}{1/2\rho V_0^2 l_0^2}$$



Euler → cavitation



Parfois le nombre d'Euler “se déguise” en d'autres nombres

Par exemple, dans le domaine des turbomachines hydrauliques, on est intéressé à évaluer l'écart $\Delta p = p - p_v$, entre la pression du liquide et la pression de vapeur. Il s'agit d'une mesure du potentiel de l'écoulement à la cavitation. Dans ce cas, le nombre d'Euler devient le **nombre de Cavitation**

$$Ca = \frac{p_0 - p_v}{1/2 \rho_0 V_0^2}$$

Cauchy → Mach



Pour l'étude de structures qui interagissent avec un écoulement, des analyses sont faites à l'aide du **nombre de Cauchy**. Ce paramètre exprime le rapport entre **les forces d'inertie et les forces élastiques**

$$\frac{F_{Inertie}}{F_{Élastiques}} = \frac{M \times a}{EA} = \frac{\rho L^2 L (L/T^2)}{EL^2} = \frac{\rho L^2 V^2}{EL^2} = \frac{V^2}{E/\rho}$$

➔ $Ch = \frac{V^2}{E/\rho}$

Nombre de Cauchy

Cauchy → Mach

Pour l'écoulement isentropique d'un gaz parfait $E = \rho a^2$, de sorte qu'on trouve

$$Ch = \frac{V^2}{a^2}$$

En pratique, **le nombre de Mach** correspond à la racine carrée du nombre de Cauchy, soit:

$$Ma = \frac{V}{a}$$

Nombre de Mach (Ernst)

$$Ma = \frac{V}{a} \rightarrow \frac{\text{vitesse de l'écoulement}}{\text{vitesse du son}}$$

En pratique, le **nombre de Mach** Ma exprime le rapport de la vitesse locale d'un fluide V à la vitesse du son a dans ce même fluide.

- La valeur, $Ma=1$ permet d'identifier un écoulement *supersonique* d'un *subsonique*
- Si $Ma < 0.3$ ($v=100$ m/s) l'écoulement peut être considéré comme étant *incompressible*
- Lorsque $Ma < 1$ le nombre de *Reynolds* est important



Nombres sans dimension

$$\left[\frac{\rho_0 V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{L_0} \right] \frac{\vec{V}^* p}{\rho^*} + \rho_0 g_0 + \left[\frac{\mu_0 V_0}{L_0^2} \right] \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

① ② ③ ④ ⑤

Le troisième rapport ④ / ② conduit à la relation

$$\rho_0 g_0 / \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] = \frac{L_0 g_0}{V_0^2}$$

Ce rapport entre la force gravitationnelle et la force d'inertie mène au **nombre de Froude** (Fr). En pratique il est défini comme:

$$Fr = \frac{V_0}{\sqrt{g_0 L_0}}$$

Nombre de Froude (William)

$$Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gL_0}} \rightarrow \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces gravitationnelles}}$$

Lorsque les forces de volume sont importantes devant les autres sources, (écoulement à surface libre), *le nombre de Froude* devient prépondérant. Essentiellement, il caractérise l'importance relative des forces d'inertie par rapport à la force de pesanteur

Cette «loi de comparaison» est importante si la vitesse des navires est proportionnelle à la racines carrée de leurs dimensions



Nombres sans dimension

$$\left[\frac{\rho_0 V_0}{T_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{L_0} \right] \frac{\vec{V}^* p}{\rho^*} + \rho_0 g_0 + \left[\frac{\mu_0 V_0}{L_0^2} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

① ② ③ ④ ⑤

Le dernier regroupement ⑤ / ② conduit à la relation

$$\left[\frac{\mu_0 V_0}{L_0^2} \right] / \left[\frac{\rho_0 V_0^2}{L_0} \right] = \frac{\mu_0}{\rho_0 V_0 L_0}$$

Ce rapport entre la force de cisaillement et la force d'inertie mène au **nombre de Reynolds** (Re). En pratique il est défini comme

$$Re = \frac{\rho_0 V_0 L_0}{\mu_0}$$

Nombre de Reynolds (Osborne)

$$\text{Re} = \frac{V_0 L_0}{\nu} \rightarrow \frac{\text{force d'inertie}}{\text{forces visqueuses}}$$

Le nombre de Reynolds lie la vitesse, la viscosité, la masse volumique et une longueur de référence. Plus précisément, il représente la lutte entre inertie et viscosité. Ce paramètre permet de détecter la nature d'un écoulement (laminaire, turbulent). Par exemple, plus qu'il est élevé, plus l'inertie est forte et la viscosité faible, et les tourbillons domineront l'écoulement.

$$\nu = \mu / \rho \quad \text{Viscosité cinématique}$$



Il existe d'autres forces agissant sur un fluide qu'on n'a pas considéré. Par exemple, **les forces de tension de surface**. Ces forces donnent lieu à un nouvel paramètre adimensionnel qu'on nomme **le nombre de Weber**

$$We = \frac{\rho_0 L_0 V_0^2}{\sigma_0}$$

Nombre de Weber (Moritz)

$$We = \frac{\rho L V^2}{\sigma} \rightarrow \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{tension superficielle}}$$

Le nombre de Weber We traduit le rapport des forces d'inertie et des forces de cohésion dues à la tension superficielle σ . Il est important dans des phénomènes tels que

- l'interaction gaz liquide
- la formation de gouttes
- la formation d'un spray par l'atomisation d'un jet liquide (gouttes de carburant)



Résumé de nombres adimensionnels

Le nombre Reynolds Re , caractérise l'importance des forces visqueuses (frottement). Il est essentiel dans tous les cas

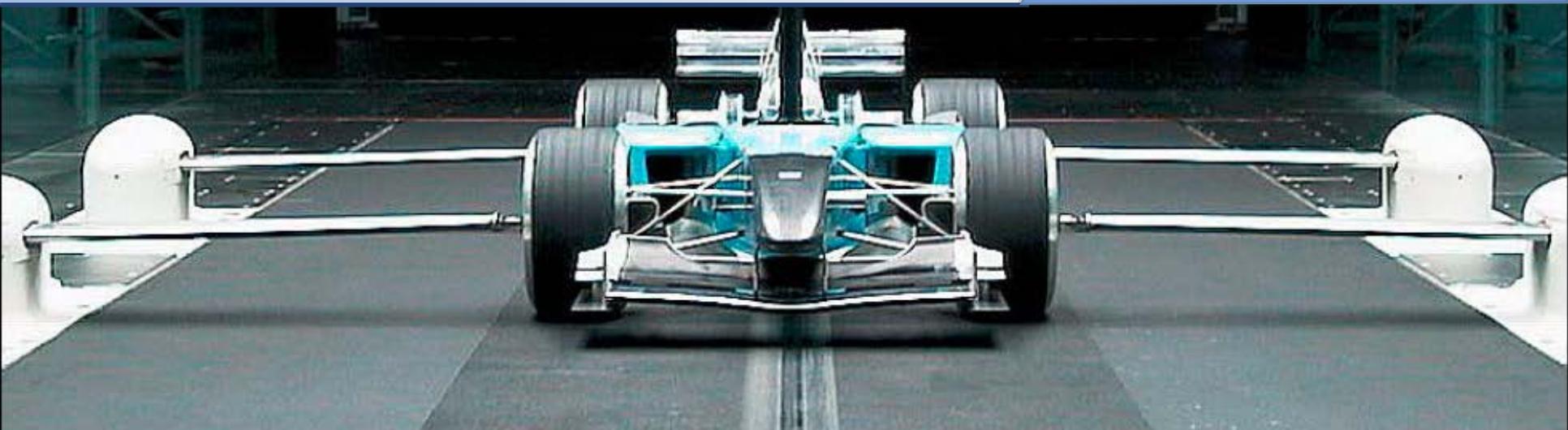
Le nombre de Froude Fr est important pour des écoulements à surface libre: bateaux, planches "hydrofoils" et des écoulements dépendant de la gravité (canaux hydrauliques)

Le nombre de Mach Ma est un paramètre qui est important pour des écoulements compressibles à haute vitesse

Le nombre de Weber We est important pour des problèmes ayant des interfaces entre deux fluides

Le nombre de Euler Eu est important lorsque les changements de pression sont considérables (cavitation)

Similitude



Chap 5: Analyse dimensionnelle

5.1

5.2

5.3

5.4

5.5

5.1 Introduction

5.2 Homogénéité dimensionnelle

5.3 Théorème de Buckingham

5.4 Mise à l'échelle des équations de conservation

5.5 Les limites de la modélisation expérimentale

« *Dans tous les cas, si connus que nous sommes devenus pour notre Flyer, cela ne serait jamais arrivé **si nous n'avions développé notre propre soufflerie** et déduit de nos essais des données aérodynamiques correctes* »

Wilbur Wright

La similitude est la base pour que l'étude de phénomènes sur des **modèles réduits ou maquettes**, puisse être extrapolée vers le problème analysé, appelé **le prototype**.

Outre une analogie de forme entre un modèle et un prototype, on doit respecter des principes formelles pour ramener les résultats obtenus sur une maquette vers le cas réel.

Cela implique que l'on puisse faire correspondre *un point p_1 du prototype à un temps t_1 avec un point p_2 du modèle à un temps t_2* . Des tels points sont appelés **des point homologues**

La similitude a lieu **s'il existe un rapport constant** pour une grandeur (longueur, force, etc.) entre des points homologues de la maquette et du prototype. En mécanique de fluides on distingue trois types de similitude: *géométrique, cinématique et dynamique*



La similitude géométrique concerne la dimension fondamentale L

Un modèle et un prototype sont **géométriquement similaires** si toutes les dimensions ont le même rapport d'échelle λ_L

$$\frac{L_m}{L_p} = \lambda_L = \text{cste}$$

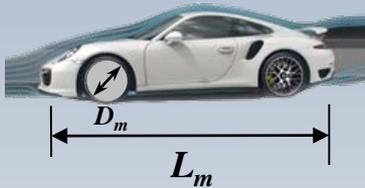
L_m, L_p : longueurs du modèle et du prototype respectivement

La correspondance entre des points homologues regarde les corps solides et aussi le champ de l'écoulement

Similitude géométrique

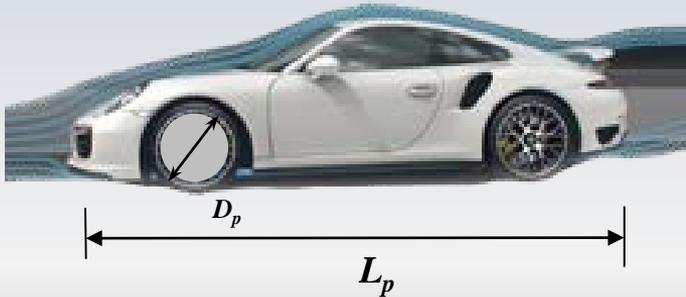
5.5 Les limites de...

Modèle



$$\frac{D_m}{D_p} = \frac{L_m}{L_p} = \dots$$

Prototype



Similitude cinématique (mouvement)

5.5 Les limites de...

La similitude cinématique ajoute la dimension fondamentale T

Un modèle et un prototype sont **cinématiquement similaires** si les trajectoires de particules homologues sont géométriquement similaires, se retrouvant en des *positions homologues en des temps homologues*.

Pour que la similitude cinématique puisse avoir lieu, la similitude géométrique doit alors y exister. Mais, la similitude géométrique ne garantit pas la similitude cinématique!



En pratique, la similitude cinématique traite le rapport d'échelle temporelle λ_T au travers de rapports des variables dérivées, vitesse et accélération. Alors:

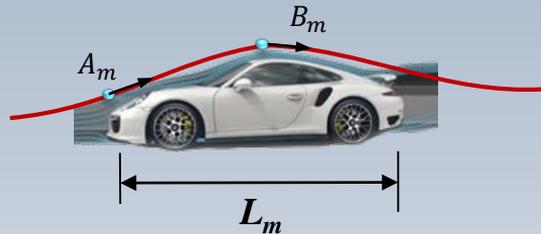
Deux écoulements sont **cinématiquement semblables** si les **rapports de vitesses λ_v (accélérations λ_a)** sont identiques en tout point

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{(L_m / T_m)}{(L_p / T_p)} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right) / \left(\frac{T_m}{T_p} \right) = \lambda_v \quad \longrightarrow \quad \lambda_v = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_T} \right)$$

Similitude cinématique

5.5 Les limites de...

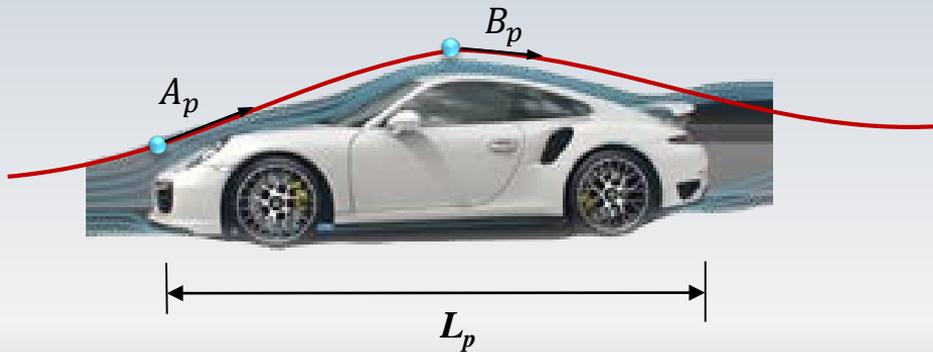
Modèle



$$\frac{V_{Am}}{V_{Ap}} = \frac{V_{Bm}}{V_{Bp}}$$

$$\frac{a_{Am}}{a_{Ap}} = \frac{a_{Bm}}{a_{Bp}} \dots$$

Prototype



Deux écoulements sont cinématiquement semblables si **les rapports de vitesses λ_V (accélérations λ_a)** sont identiques en tout point (homologue).

$$\frac{a_m}{a_p} = \frac{\left(\frac{L_m}{T_m^2}\right)}{\left(\frac{L_p}{T_p^2}\right)} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right) / \left(\frac{T_m}{T_p}\right)^2 = \lambda_a$$

λ_L λ_T^2



$$\lambda_a = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_T^2}\right) = \left(\frac{\lambda_V}{\lambda_T}\right)$$

$$\lambda_a = \left(\frac{\lambda_V^2}{\lambda_L}\right)$$

$$\lambda_T = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_V}\right)$$



Un exemple de **similitude cinématique** est donné par l'analyse d'une **éolienne**. Si celle-ci tourne à une vitesse angulaire Ω avec des pales dont la longueur est L et pour un vent ayant une vitesse V , on peut considérer le rapport (adimensionnel) entre l'accélération centrifuge et l'accélération de l'écoulement d'air pour le modèle et pour le prototype. Soit:

$$\left(\frac{a_{cent}}{a_{vent}}\right)_m = \left(\frac{a_{cent}}{a_{vent}}\right)_p \rightarrow \left(\frac{\Omega^2 L}{V_{vent}^2/L}\right)_m = \left(\frac{\Omega^2 L}{V_{vent}^2/L}\right)_p \rightarrow \left(\frac{\Omega L}{V_{vent}}\right)_m = \left(\frac{\Omega L}{V_{vent}}\right)_p$$

On note que la similitude géométrique $(L_m/L_p) = \lambda_L$ impose une contrainte sur le rapport (Ω/V)

La similitude dynamique ajoute la dimension fondamentale M

La **similitude dynamique** implique que **les forces** entre tout point (homologue) du modèle y du prototype sont égales dans la direction et dans le sens, et que le rapport de leurs modules est constant

Si la distribution de la masse est semblable entre le modèle et le prototype. Alors, la similitude géométrique entraîne une similitude de masses.

Similitude dynamique

5.5 Les limites de...

Modèle



$$\frac{F_{p_m}}{F_{p_p}} = \frac{F_{c_m}}{F_{c_p}} = \frac{F_{g_m}}{F_{g_p}}$$

Prototype



Les forces principales agissant sur un fluide sont de pression F_p , de pesanteur F_g et de frottement visqueux F_c

Puisque la force d'inertie est proportionnelle à l'accélération, les similitudes géométrique (similitude de masses), et cinématique impliquent une similitude dynamique pour l'inertie. Notamment:

$$\left(\frac{F_m}{F_p}\right)_i = \frac{M_m L_m T_m^{-2}}{M_p L_p T_p^{-2}} = \left(\frac{M_m}{M_p}\right) \left(\frac{L_m}{L_p}\right) \left(\frac{T_m}{T_p}\right)^{-2} = cnste$$

Similitude dynamique

La similitude dynamique complète implique que **toutes les forces présentes** dans le modèle et le prototype devraient satisfaire la relation:

$$\frac{\sum \text{forces (viscosité, pression, gravitationnelle, tension sup., élastiques)}_m}{\sum \text{forces (viscosité, pression, gravitationnelle, tension sup., élastiques)}_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p}$$

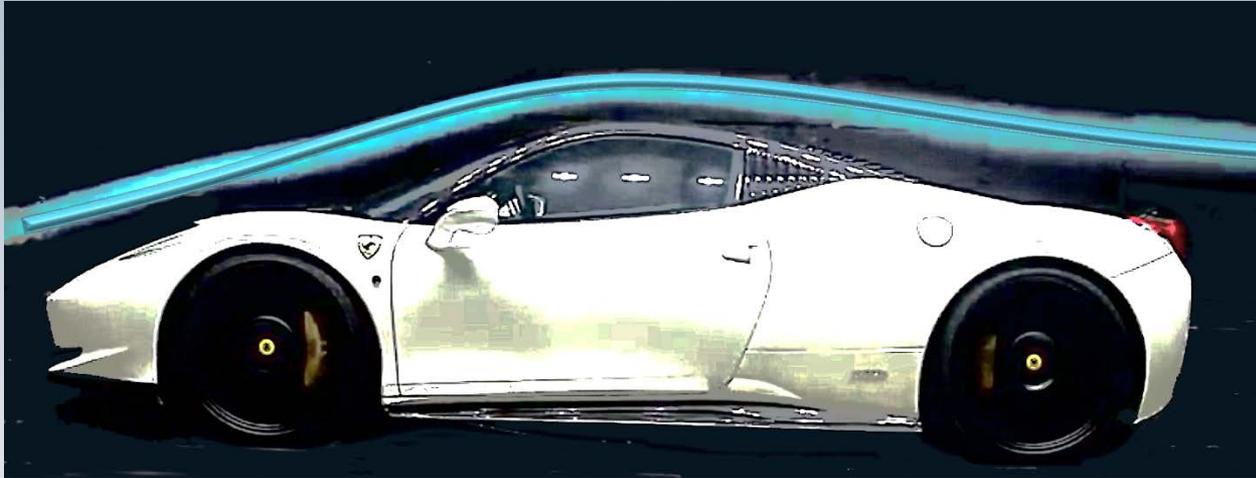


$$\frac{F_m}{\rho_m L_m^2 V_m^2} = \frac{F_p}{\rho_p L_p^2 V_p^2}$$

$$F_I = \rho L^3 (V^2/L) = \rho L^2 V^2$$

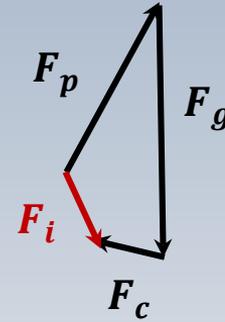
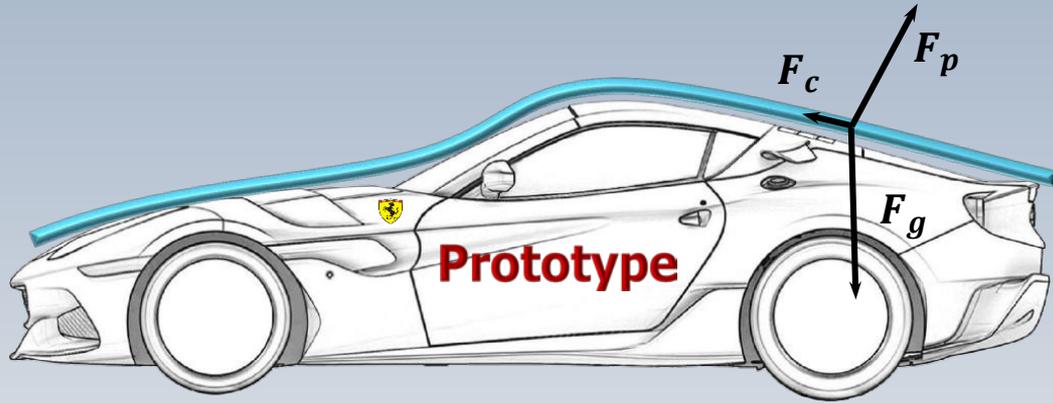
La similitude dynamique comprends implicitement la similitude géométrique et la similitude cinématique!

Les rapports de forces



La similitude dynamique comprends implicitement la similitude géométrique et la similitude cinématique!

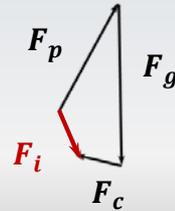
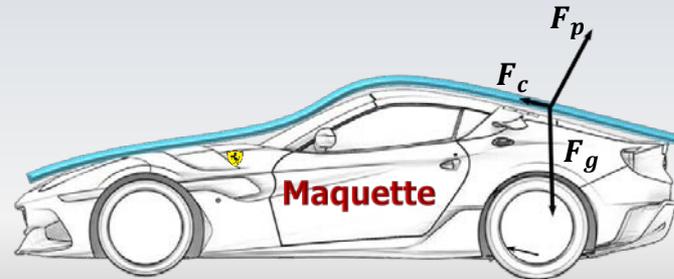
Les rapports de forces



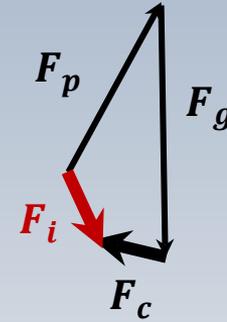
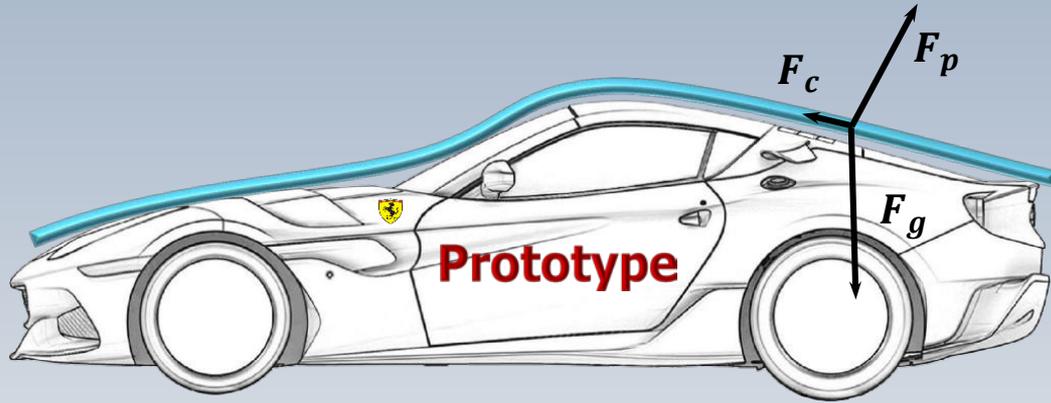
$$F_i \sim m \times a = \rho L^3 (L / T^2) = \rho L^2 V^2$$

$$F_c \sim A \mu \partial V / \partial y = L^2 \mu V / L = \mu L V^2$$

$$F_g \sim mg = \rho L^3 g$$



Les rapports de forces

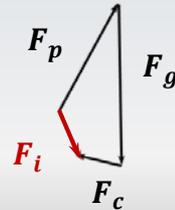
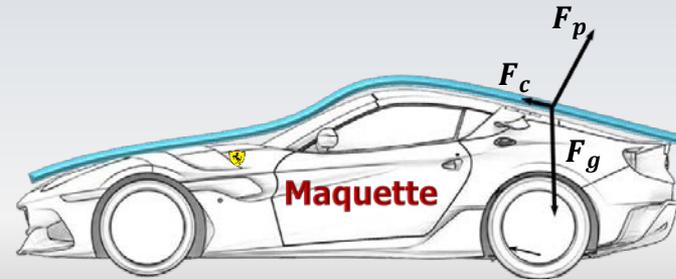


$$F_i \sim \rho L^2 V^2$$

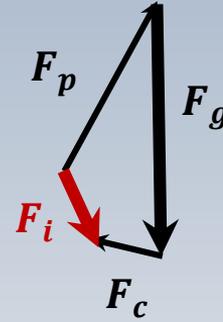
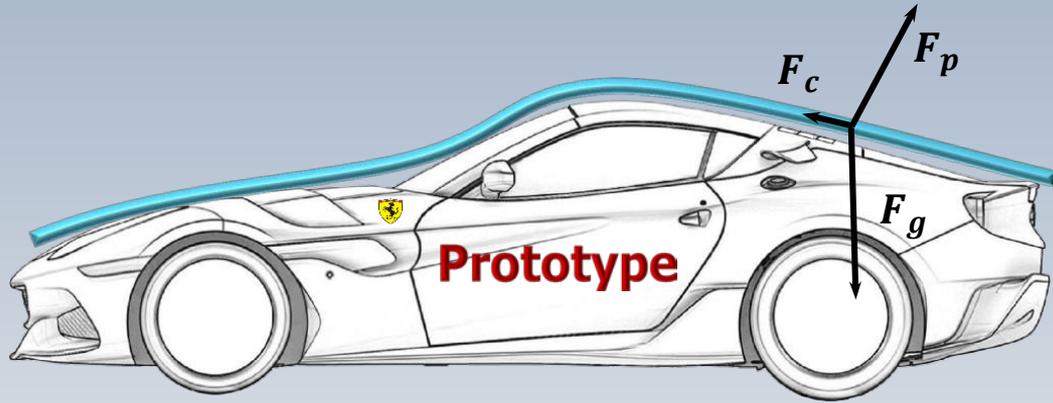
$$F_c \sim \mu L V$$

$$\left(\frac{F_i}{F_c} \right)_p = \left(\frac{F_i}{F_c} \right)_m = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu L V} = \frac{\rho L V}{\mu} = \text{Re}$$

Similitude de Reynolds



Les rapports de forces

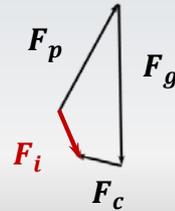
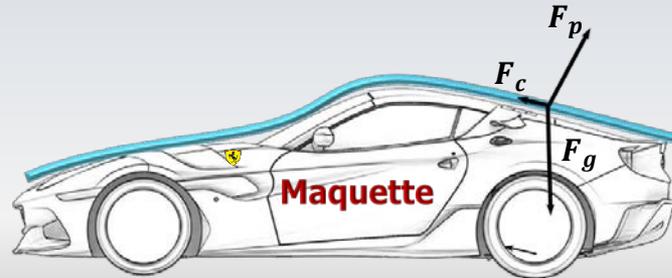


$$F_i \sim \rho L^2 V^2$$

$$F_g \sim \rho L^3 g$$

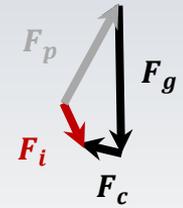
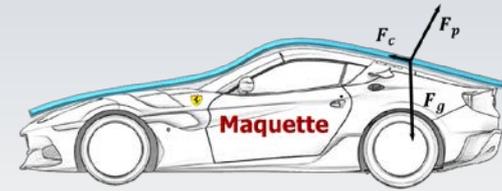
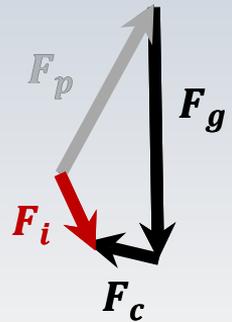
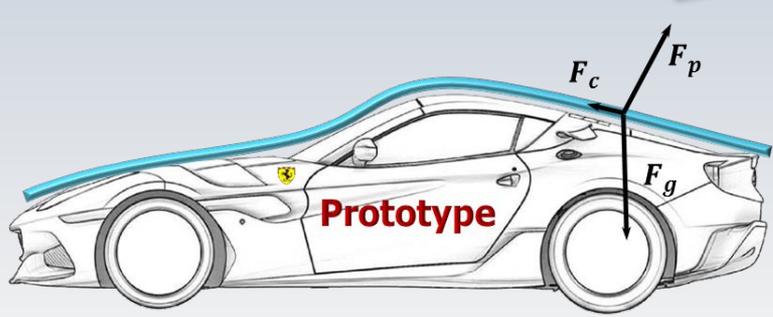
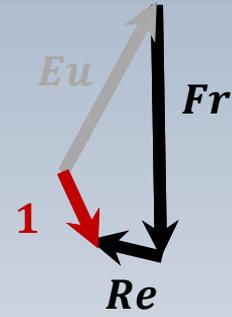
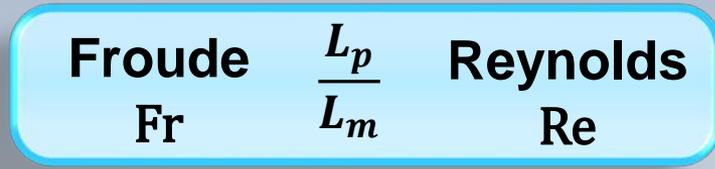
$$\left(\frac{F_i}{F_g} \right)_p = \left(\frac{F_i}{F_g} \right)_m = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{gL} = Fr^2$$

Similitude de Froude



Transfert d'information

Espace adimensionnel



Résumé de nombres adimensionnels

Nom	Symbole	Forces	Expression	Importance
Reynolds	Re	$\frac{\text{Inertie}}{\text{Visqueuses}}$	$\frac{VL}{\nu}$	Essentiel dans tous les cas
Froude	Fr	$\frac{\text{Inertie}}{\text{Massiques}}$	$\frac{V}{\sqrt{gL}}$	Écoulements à surface libre
Mach	Ma	$\frac{\text{Inertie}}{\text{Élastiques}}$	$\frac{V}{a}$	Écoulements compressibles
Weber	We	$\frac{\text{Inertie}}{T. \text{Superficielle}}$	$\frac{\rho V^2 L}{\sigma}$	Écoulements diphasiques (bulles)
Euler	Eu	$\frac{\text{Pression}}{\text{Inertie}}$	$\frac{\Delta p}{1/2 \rho V^2}$	Écoulements à fort Δp (cavitation)

Quel nombre adimensionnel choisir?

Mathématiquement, le problème de similitude peut être défini par l'équation implicite:

$$\Phi(Re, Fr, Ma, We, Eu) = 0$$

Cette relation peut être également écrite de manière explicite. D'habitude, on choisit d'exprimer le nombre d'Euler en fonction des autres paramètres. Ceci réduit de un le nombre de paramètres de similitude à respecter.

$$Eu = \phi(Re, Fr, Ma, We)$$



Quel nombre adimensionnel choisir?

Bien qu'en en théorie on voudrait que tous les critères de similitude dynamique soient remplis simultanément, c'est-à-dire que la maquette et le prototype satisfassent:



$$\frac{Re_m}{Re_p} = \frac{Fr_m}{Fr_p} = \frac{Ma_m}{Ma_p} = \frac{We_m}{We_p} = 1, \quad (Eu = \phi(Re, Fr, Ma, We))$$

Dans le applications en génie mécanique, l'effet des forces de tension superficielle (interfaces entre deux fluides) est souvent négligé. Ainsi, on élimine le nombre de Weber (We) parmi les critères de similitude pour ne retrouver que trois nombres adimensionnels: **Reynolds Re , Froude, Fr et Mach Ma**

Quel nombre adimensionnel choisir?

Dans ce contexte on ne considère que les similitudes basées sur les nombres de (Re), (Fr) et (Ma) et on parle de **similitude partielle ou restreinte** avec

$$\frac{Re_m}{Re_p} = \frac{Fr_m}{Fr_p} = \frac{Ma_m}{Ma_p} = 1$$

La question fondamentale à répondre est donc: *Quel(s) paramètre(s) de similitude doit-on considérer pour analyser un problème donné le mieux possible? En fait, **quelle est la force prédominante?***

Quel nombre adimensionnel choisir?

En effet, les nombres adimensionnels: (Re), (Fr) et (Ma) sont issues des rapports entre la force de référence, **la force d'inertie** et les forces **de frottement, de pesanteur et d'élasticité**, respectivement.

Parmi ces forces, on doit déterminer celle qui est la prédominante et par conséquent, le nombre adimensionnel le plus influent

Incompressible sans surface libre : Les nombres de Reynolds du prototype et du modèle doivent être égaux: $Re_m = Re_p$. Les écoulements dans des conduites sont régis par le nombre de Reynolds

Compressible : Les nombres de Reynolds Re et de Mach Ma et $k = cp/cv$ du prototype et du modèle doivent être égaux.

Remarque: dans la modélisation des écoulements dans les canaux hydrauliques ou les rivières, la pesanteur est la force principale. Dans ce contexte **le nombre de Froude Fr** devient le paramètre important

Les forces et les échelles

La similitude partielle de Reynolds, Froude ou Mach implique qu'au moins l'une des forces présentes dans le modèle et le prototype satisfait la relation:

$$\frac{\sum \text{forces (viscosité, gravitationnelle, élastiques)}_m}{\sum \text{forces (viscosité, gravitationnelle, élastiques)}_p} = \frac{M_m a_m}{M_p a_p}$$

Dépendant de la force dominante, **différentes relations d'échelles** seront obtenues pour d'autres quantités, en fonction de **l'échelle géométrique** $\lambda_L = L_m / L_p$ imposée

Prédominance des forces visqueuses

$$\left[\frac{L_0}{T_0 V_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \right] \vec{\nabla}^* p + \left[\frac{g_0 L_0}{V_0^2} \right] + \left[\frac{\mu_0}{\rho_0 V_0 L_0} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

$1/Re$



La similitude entre le modèle et le prototype est garantie si les deux systèmes ont **le même nombre de Reynolds**, soit:

$$(uL/\nu)_m = (uL/\nu)_p$$

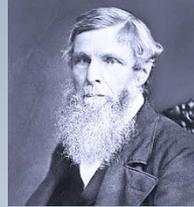
Si de plus, le fluide demeure le même ($\nu_m = \nu_p$):

$$(uL)_m = (uL)_p \quad \Rightarrow \quad \lambda_V = \frac{u_m}{u_p} = \frac{L_p}{L_m} = \frac{1}{\lambda_L}$$

L'échelle de vitesse est l'inverse de l'échelle géométrique

Prédominance des forces de pesanteur

$$\left[\frac{L_0}{T_0 V_0} \right] \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 V_0^2} \right] \vec{\nabla}^* p + \underbrace{\left[\frac{g_0 L_0}{V_0^2} \right]}_{1/Fr^2} + \left[\frac{\mu_0}{\rho_0 V_0 L_0} \right] \nabla^{2*} \vec{V}^*$$



La similitude entre le modèle et le prototype est garantie si les deux systèmes ont le **même nombre de Froude**, soit:

$$\left(u / \sqrt{Lg} \right)_m = \left(u / \sqrt{Lg} \right)_p$$

Puisque les essais seront faits sur notre planète ($g_m = g_p$):

$$\left(u / \sqrt{L} \right)_m = \left(u / \sqrt{L} \right)_p$$



$$\lambda_V = \frac{u_m}{u_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{\lambda_L}$$

L'échelle de vitesse correspond à la racine carrée de l'échelle géométrique

Reynolds et Froude?

Les échelles de vitesse imposées par la géométrie d'après les similitudes de Reynolds et Froude **sont différentes**

Reynolds

$$\frac{u_m}{u_p} = \frac{L_p}{L_m} = \frac{1}{\lambda_L}$$

Froude

$$\frac{u_m}{u_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{\lambda_L}$$

Est-ce possible de satisfaire ces échelles simultanément?

Puisque les similitudes en question sont:

$$\text{Re} = \frac{L_p V_p}{\nu_p} = \frac{L_m V_m}{\nu_m}$$

$$\text{Fr}^2 = \frac{V_p^2}{L_p} = \frac{V_m^2}{L_m}$$

(même g)



Reynolds et Froude I

$$Fr \Rightarrow \frac{L_m}{L_p} = \left(\frac{V_m}{V_p} \right)^2 \Rightarrow Re = \frac{L_p V_p}{\nu_p} = \frac{L_m V_m}{\nu_m} \Rightarrow \frac{L_m}{L_p} = \left(\frac{\nu_m}{\nu_p} \right)^{2/3}$$

C'est difficile de trouver deux fluides avec des viscosités menant à une échelle géométrique viable

Souvent $\nu_p = \nu_m$, ainsi $L_p = L_m$ et **on ne peut donc pas construire une véritable maquette**. On peut alors conclure qu'il est **impossible de satisfaire simultanément toutes les conditions de similitude** à l'aide d'un modèle réduit

Reynolds et Froude II

Supposons que l'on veut utiliser deux fluides différents pour un modèle et un prototype. Notamment:

$$\lambda_L = L_m/L_p = 1/10 \quad \text{Échelle géométrique}$$

$$\mu_m = 0.47 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2, \quad \rho_m = 983 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Fluides

$$\mu_p = 0.2 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}^2, \quad \rho_p = 712 \text{ kg} / \text{m}^3$$

La similitude de Reynolds impose

$$(V \rho L / \mu)_m = (V \rho L / \mu)_p$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{\rho_p \mu_m L_p}{\rho_m \mu_p L_m} \right) = 17.02$$

La similitude de Froude exige

$$(V / (\sqrt{L}))_m = (V / \sqrt{L})_p$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{10} \right)^{1/2} = 0.32$$

?

Quoi faire?

Puisque le nombre de Froude est en réalité

$$Fr = \frac{V_m}{\sqrt{g_m L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g_p L_p}}$$

on peut écrire

$$\frac{g_m}{g_p} = \left(\frac{V_m}{V_p} \right)^2 \frac{L_p}{L_m} = (17.02)^2 \times 10 = 2896.8$$

Imposé par la similitude de Reynolds

Échelle géométrique

de sorte que $g_m = g_p \times 2896.8 = 9.8 \times 2896.8 = \mathbf{28388.7m/s^2}$

On devrait alors faire l'essai sur une autre planète!

Pour un véhicule, l'analyse dimensionnel a montré que la force de trainée adimensionnelle est liée au nombre de Reynolds par la relation:

$$\frac{F_D}{\rho V^2 L^2} = \Phi \left(\frac{\rho L V}{\mu} \right) = \Phi \left(\frac{L V}{\nu} \right) = \Phi(\text{Re})$$

Si les conditions de l'air pour le test en soufflerie sont les mêmes que pour le prototype ($\rho_m = \rho_p$, $\nu_m = \nu_p$), la similitude de Reynolds conduit à:

$$V_m = V_p \left(\frac{L_p}{L_m} \right) = \frac{V_p}{\lambda_L}$$



Ce résultat indique que la vitesse de l'écoulement pour le modèle doit être $1/\lambda_L = L_p/L_m$ fois celle du prototype. On remarque qu'étant plus grande, on devra prêter attention aux limites causées par les effets de compressibilité ($Ma < 0.3$)

En ce qui regarde la force de traînée, la similitude impose:

$$\left(\frac{F_D}{\rho V^2 L^2} \right)_m = \left(\frac{F_D}{\rho V^2 L^2} \right)_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{Dp}} = F_{Dm} \left(\frac{V_p}{V_m} \right)^2 \left(\frac{L_p}{L_m} \right)^2 \boxed{= F_{Dm}}$$

par la similitude de Reynolds

$$V_m = V_p \left(\frac{L_p}{L_m} \right)$$

Quelques applications

Pour appliquer la similitude dans le domaine des éoliennes on vise l'utilisation du coefficient de puissance, C_P , le nombre de Strouhal St , et le nombre de Reynolds Re définis de la façon suivante:

$$C_P = \frac{P}{1/2 \rho \pi R^2 V_\infty^3} \quad St = \frac{R\Omega}{V_\infty} \quad Re = \frac{V_t c_t}{\nu}$$

P : puissance, R : rayon de la pale, Ω : vitesse angulaire,
 V_∞ : vitesse en amont, V_t : vitesse à l'extrémité de la pale,
 c_t : corde du profil à l'extrémité de la pale
 ν : viscosité cinématique de l'air



Quelques applications

Avec $\lambda_L = R_m/R_p$, la similitude de Reynolds conduit à*:

$$\lambda_{V_\infty} = 1/\lambda_L \quad \lambda_\Omega = 1/\lambda_L^2 \quad (\lambda_T = \lambda_L^2)$$

Cependant, $\lambda_L < 1$, de sorte que ces facteurs d'échelle peuvent imposer des conditions irréalisables pour V_∞ et Ω pour le modèle, sans compter la limite d'incompressibilité requise ($Ma < 0.3$). Ainsi, couramment on n'utilise qu'une similitude basée sur le nombre de **Strouhal**

$$Sr = R\Omega/V_\infty$$



*Burdett T., Van Treuren K., Scaling small-scale wind turbines for wind tunnel testing, GT2012-68359, ASME Turbo Expo 2012

Problème

On estime que la pression p d'équilibre (à vitesse nulle) sur un parachute engendrée par la descente d'un pilote dépend des 6 paramètres suivants:

S la surface du parachute

ρ la masse volumique du tissu

ρ_p la masse volumique du pilote

e l'épaisseur du tissu

V le volume du pilote

g la constante gravitationnelle

On doit trouver les paramètres sans dimension décrivant ce problème. On prendra comme des variable répétées, ρ_p , e et g .

Problème



	Variables non répétées				Variables répétées		
	p	S	ρ	V	ρ_p (a)	e (b)	g (c)
M	1	0	1	0	1	0	0
L	-1	2	-3	3	-3	1	1
T	-2	0	0	0	0	0	-2
	$ML^{-1}T^{-2}$	L^{-2}	ML^{-3}	L^{-3}	ML^{-3}	L^1	LT^{-2}

π : exposants a,b,c

5.3 Théorème π : exemple

Pour π : $a + 0 \times b + 0 \times c =$

1

0

1

0

$-3a + b + c =$

1

2

-3

3

$0 \times a + 0 \times b - 2c =$

-2

0

0

0



$$\pi_1 = \frac{p}{\rho_p e g}$$

$$\pi_2 = \frac{S}{e^2}$$

$$\pi_3 = \frac{\rho}{\rho_p}$$

$$\pi_4 = \frac{V}{e^3}$$

	Variables non répétées				Variables répétées			
	p	S	ρ	V	ρ_p (a)	e (b)	g (c)	
M	1	0	1	0	1	0	0	
L	-1	2	-3	3	-3	1	1	
T	-2	0	0	0	0	0	-2	
	$ML^{-1}T^{-2}$	L^{-2}	ML^{-3}	L^{-3}	ML^{-3}	L^1	LT^{-2}	

Problème

Le pilote et le parachute seront étudiés en soufflerie à une échelle $\lambda_L=1/5$. Sachant qu'on peut reproduire la même pression d'équilibre et que la masse volumique du corps humain est en moyenne $\rho_p=1025 \text{ kg/m}^3$, on cherche à calculer la masse volumique du matériau avec lequel on devrait construire un mannequin.

$$\pi_1 \times \pi_2 \times \frac{1}{\pi_4} = \left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_m = \left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_p \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_p = \left(\frac{p(S/25)}{\rho_p (V/125)g} \right)_m \quad \Rightarrow \quad (\rho_p)_m = 5(\rho_p)_p$$

Similitude dynamique

$$\pi_1 = \frac{p}{\rho_p e g}, \quad \pi_2 = \frac{S}{e^2}, \quad \pi_4 = \frac{V}{e^3} \quad (V \text{ le volume du pilote})$$

$$(\rho_p)_m = 5125 \text{ kg/m}^3$$

Problème

On fait construire une maquette du mannequin en bois avec une masse volumique de $\rho_m = 650 \text{ kg/m}^3$ à la même échelle de $\lambda_L = 1/5$. (aussi pour le parachute). Quel est le rapport entre la pression d'équilibre en soufflerie et celle exercée en réalité?

$$\left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_m = \left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_p \Rightarrow \left(\frac{p(S/25)}{\rho_p (V/125)g} \right)_m = \left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_p \Rightarrow \left(\frac{p_m}{p_p} \right)_m = \frac{1}{5} \left(\frac{\rho_m}{\rho_p} \right)$$

Similitude dynamique

$$\left(\frac{p_m}{p_p} \right)_m = \frac{1}{5} \left(\frac{650}{1025} \right) = 0.127$$



Problème

Maintenant on opère la soufflerie en reproduisant la même pression d'équilibre que dans la réalité. L'échelle du parachute est encore $\lambda_L=1/5$ et on a trouvé un mannequin ayant une masse volumique sensiblement égale à celle du corps humain. Quelle doit être l'échelle correspondante pour le mannequin?

$$\left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_m = \left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_p \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{p(S/25)}{\rho_p (V/\lambda^3)g} \right)_m = \left(\frac{pS}{\rho_p Vg} \right)_p \quad \Rightarrow \quad \lambda = (25)^{1/3} = 2.924$$

Le mannequin doit être 2.924 fois plus petit que le pilote

Problème



Dirigeable Astra-Torres(1912)

Ici un rapport technique sur les dirigeables



Concept moderne

Ici un document sur l'histoire des dirigeables

Problème

Une maquette d'un dirigeable est essayé dans une soufflerie avec les mêmes conditions ambiantes que celles pour le prototype ($\rho=1.29 \text{ kg/m}^3$)

Le facteur d'échelle géométrique est de $\lambda_L=1/3$. La vitesse d'opération prévue du prototype est de 15 Km/h . La force de trainée mesurée dans la soufflerie est de $F_m = 350 \text{ N}$. On doit:

Problème

On doit:

- i) Vérifier si hypothèse d'incompressibilité ($Ma < 0.3$) est satisfaite pour réaliser le test (la vitesse du son est considérée $a = 330 \text{ m/s}$)
- ii) Déterminer la force de traînée sur le prototype.
- iii) Calculer la puissance requise pour opérer le ventilateur de la soufflerie si le rendement est de **80%** et que l'aire efficace de la section de passage (soufflerie-modèle) est de $A_e = 22 \text{ m}^2$

Problème

$$\rho=1.29 \text{ kg/m}^3, \lambda_L=1/3, V=15 \text{ Km/h}, F_m=350 \text{ N}$$

Similitude de Reynolds (hypothèse)

$$Re = \frac{L_p V_p}{\nu_p} = \frac{L_m V_m}{\nu_m} \quad (v_m = v_p)$$
$$\Rightarrow V_m = V_p \left(\frac{L_p}{L_m} \right) = \frac{1}{\lambda_L}$$

$(1/\lambda_L)$

$$V_m = 15 \times 3 = 45 \text{ Km / heure} \quad \Rightarrow \quad V_m = 45 \times (1000 / 3600) = 12.5 \text{ m / s}$$

$$Ma = \left(\frac{V_m}{a} \right) = \frac{12.5}{330} = 0.037 \ll 0.3 \quad \Rightarrow \quad \text{incompressible} \quad \text{i)}$$



Problème

ii)

$$(\rho_m = \rho_p)$$

$$\frac{F_m}{\rho_m D_m^2 V_m^2} = \frac{F_p}{\rho_p D_p^2 V_p^2}$$



$$F_p = \left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_L}\right)^2 F_m$$



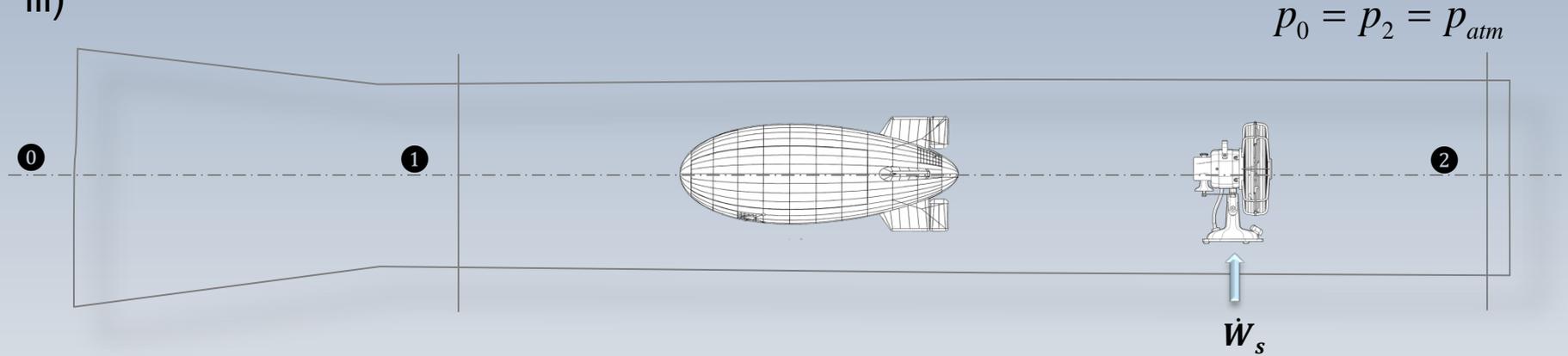
$$\frac{V_p}{V_m} = \lambda_L$$

$$F_p = F_m = 350\text{N}$$



Problème

iii)



$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2} + gz_0 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1$$



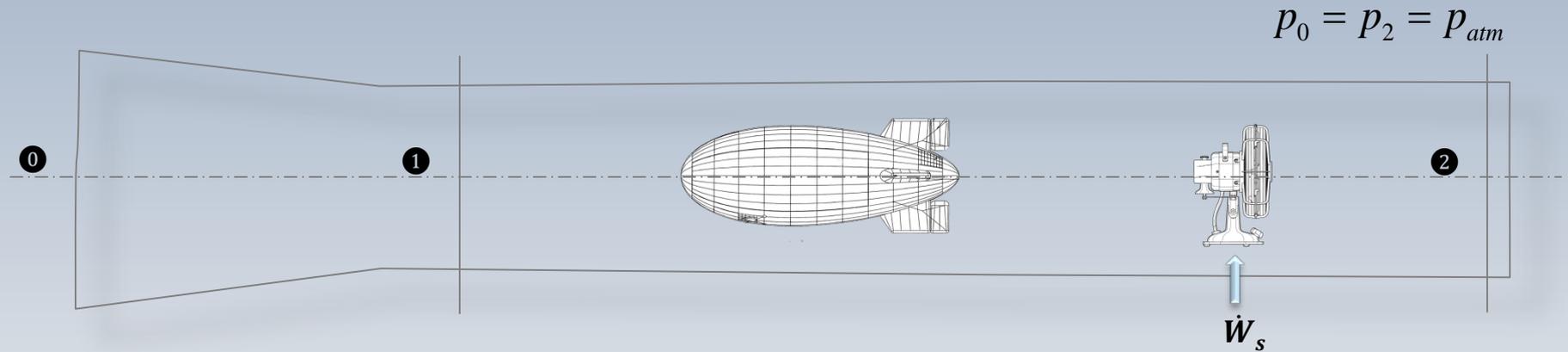
$$p_1 = -\frac{\rho V_1^2}{2}$$

$$\dot{m} = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$$



$$V_1 = V_2$$

Problème



$$p_0 = p_2 = p_{atm}$$

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 + h_{vent} = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2$$



$$h_{vent} = - \left(\frac{p}{\gamma} \right)_1$$

$$p_1 = - \frac{\rho V_1^2}{2}$$

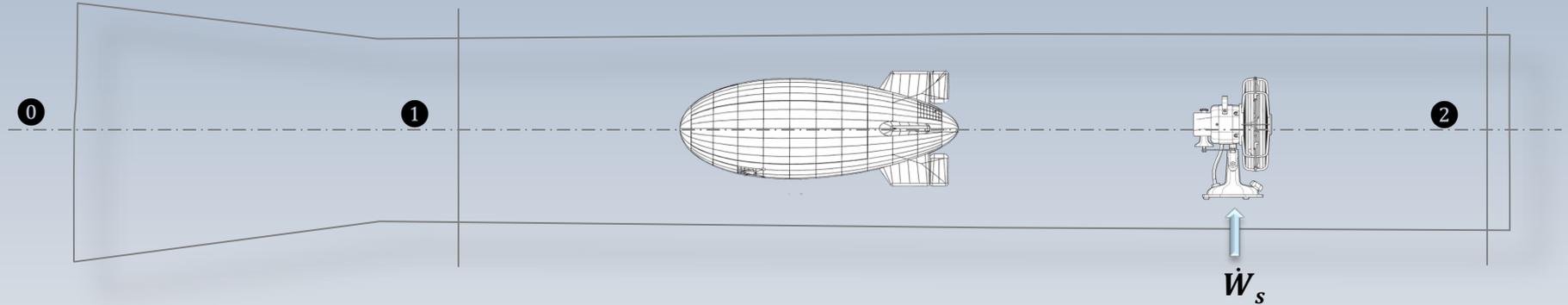


$$h_{vent} = \frac{V_1^2}{2g}$$



Problème

$$A_e = 22\text{m}^2, \rho = 1.29\text{kg} / \text{m}^3, V_m = V_1 = V_2 = 12.5\text{m} / \text{s} \quad p_0 = p_2 = p_{atm}$$



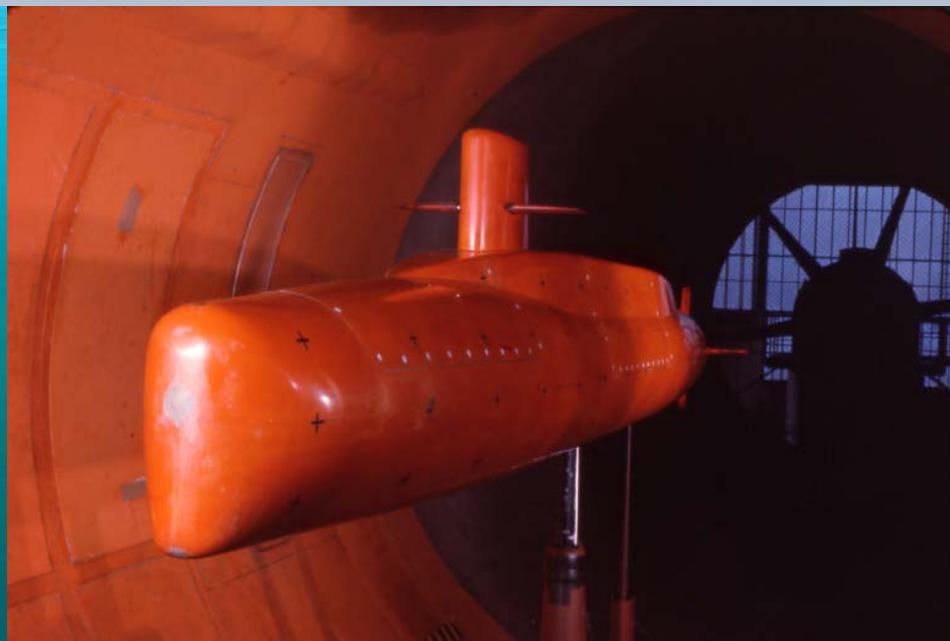
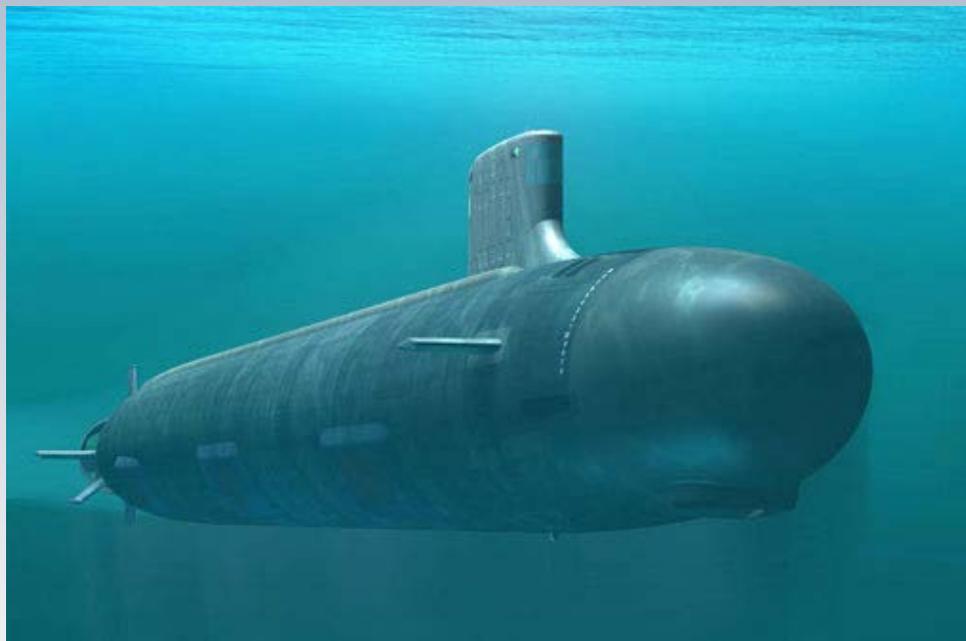
$$h_{vent} = \frac{V_1^2}{2g}$$

$$h_{vent} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}g}$$

$$\Rightarrow \dot{W} = \dot{m} \left(\frac{V_1^2}{2} \right) = \rho V_1 A_e \left(\frac{V_1^2}{2} \right) = 1.29 \times 12.5 \times 22 \times \left(\frac{12.5^2}{2} \right) = 27.7\text{kW}$$

$$\dot{W}_{réel} = \frac{\dot{W}}{0.8} = 34.6\text{kW} \quad \checkmark \quad \text{Puissance iii)}$$

Modèle-prototype



Problème

On veut faire **un essai en soufflerie sur une maquette de sous-marin** ayant un facteur d'échelle $\lambda_L=1/20$. La vitesse de croisière du prototype dans l'eau salé ($v_{\text{eau}}=1.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) est de **4.63 m/s (9 nœuds)**

On doit déterminer la vitesse de l'air dans la soufflerie. Pour l'air à 20°C on a $v_{\text{air}}=1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ et $a=330 \text{ m/s}$

Recommanderiez-vous de faire l'essai?

Problème

$$Re = \frac{L_p V_p}{\nu_p} = \frac{L_m V_m}{\nu_m}$$



$$V_m = V_p \left(\frac{\nu_m}{\nu_p} \right) \frac{1}{\lambda_L}$$

$$V_m = 772 \text{ m/s}$$

$$Ma = \frac{V_m}{a} = \frac{772}{330} = 2.33$$



Supersonique!

On ne peut pas appliquer la similitude!

$$\nu_m = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$\nu_p = 1.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

$$V_p = 4.63 \text{ m/s}$$

$$\lambda_L = 1/20$$

Modèle-prototype



Problème

On veut tester un prototype d'avion dont la vitesse de croisière sera de $V=240 \text{ m/s}$ à 8000 m d'altitude. À ce niveau, les conditions sont: $\rho=0.526 \text{ kg/m}^3$, $T= -36.9^\circ\text{C}$, $\mu_{\text{air}}= 1.53 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

Les conditions dans la soufflerie sont: $T=25^\circ\text{C}$, $\mu_{\text{air}}= 1.84 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$

L'échelle pour la maquette est $\lambda_L=1/12$. Le test sera effectué dans une soufflerie pressurisée en circuit fermé.

On doit trouver la vitesse et la pression dans la soufflerie. On note que l'écoulement est visqueux et compressible de sorte qu'on devra satisfaire **les similitudes de Reynolds et de Mach**.

Problème

$R=287 \text{ Joule/kg-K}$, $k=cp/cv=cnste$, $a=(kRT)^{1/2}$, $T_m=273+25=298K$,
 $T_p=273-36.9=236.1 \text{ K}$, $\rho_p=0.526 \text{ kg/m}^3$, $\lambda_L=1/12$

$$Ma = \left(\frac{V}{a}\right)_m = \left(\frac{V}{a}\right)_p \Rightarrow \left(\frac{V}{\sqrt{kRT}}\right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{kRT}}\right)_p \Rightarrow V_m = V_p \sqrt{\frac{T_m}{T_p}}$$

$$V_m = 240 \sqrt{(298)/(236.1)} = 269.6 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho_p L_p V_p}{\mu_p} = \frac{\rho_m L_m V_m}{\mu_m} \Rightarrow \rho_m = \rho_p \frac{\mu_m V_p L_p}{\mu_p V_m L_m} = 0.526 \times \frac{1.84 \times 10^{-5} \times 240}{1.53 \times 10^{-5} \times 269.6} \times 12$$

$$\rho_m = 6.75 \text{ kg/m}^3$$

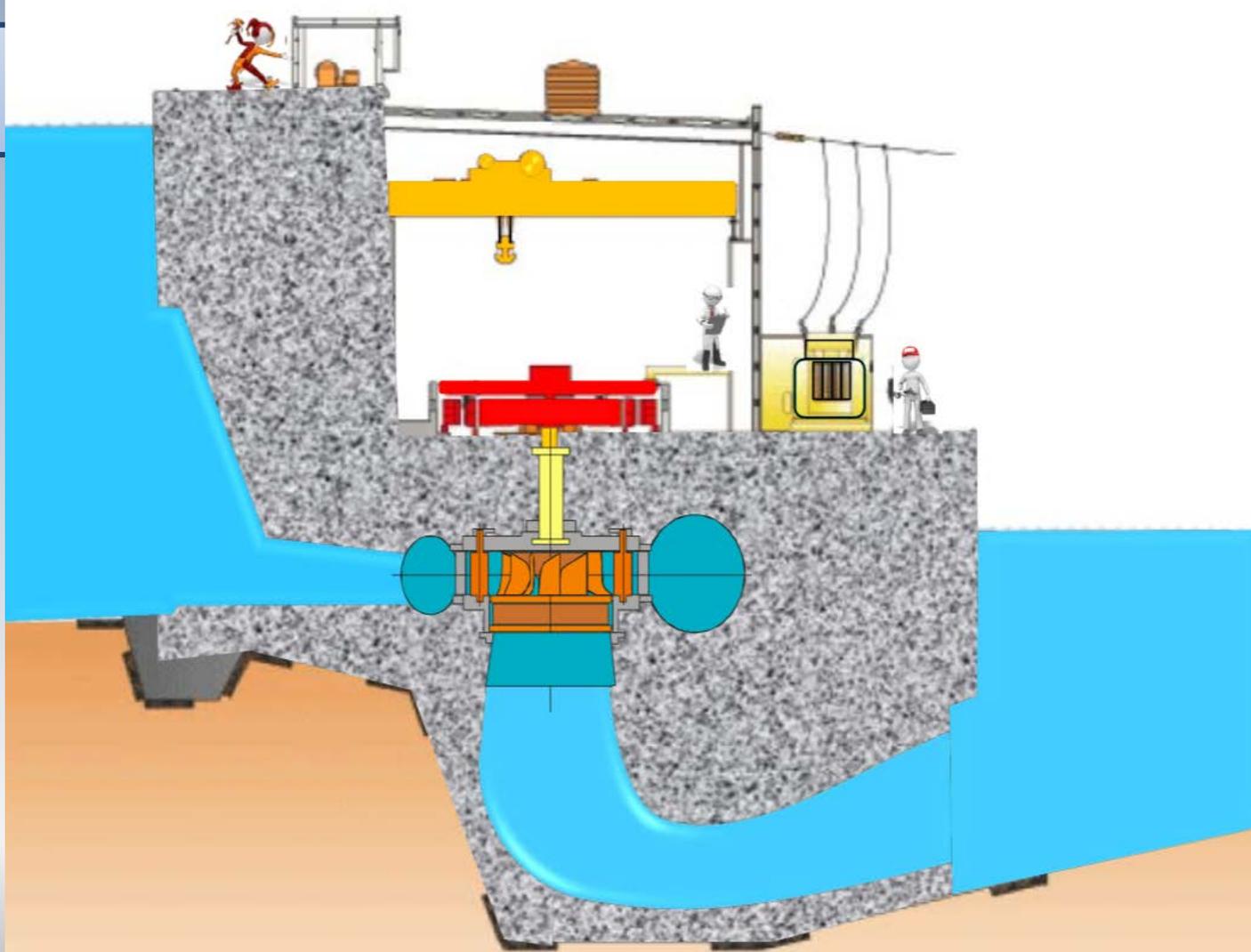
Problème

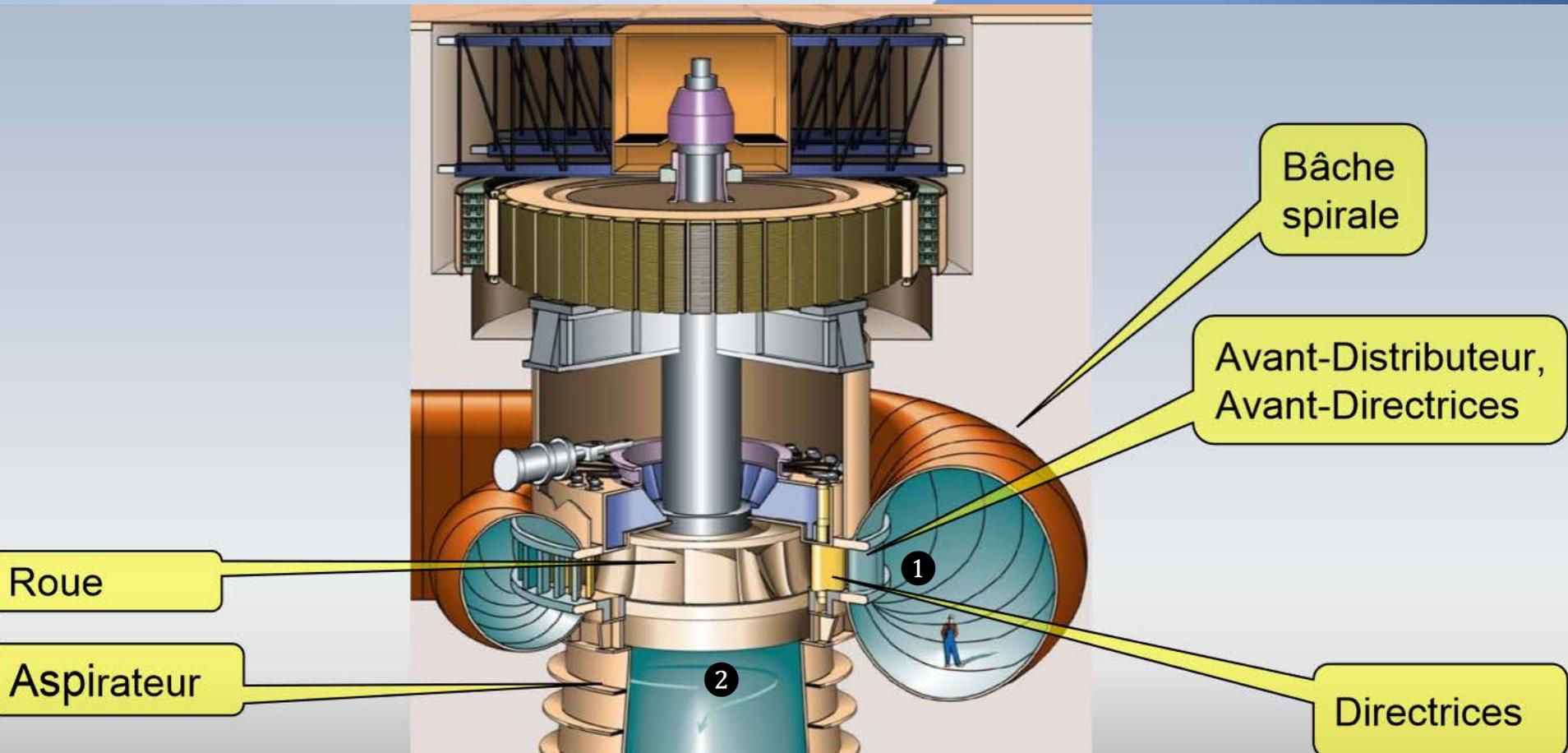
$$R=287 \text{ Joule/kg-K}, k=cp/cv, a=(kRT)^{1/2}, T_m=273+25=298K,$$

$$T_p=273-36.9=236.1 \text{ K}$$

$$p_m = \rho_m RT_m \quad \rightarrow \quad p_m = 6.75 \times 287 \times 298 = 577 \text{ kPa}$$

Quantités adimensionnelles dans les Turbines Hydrauliques



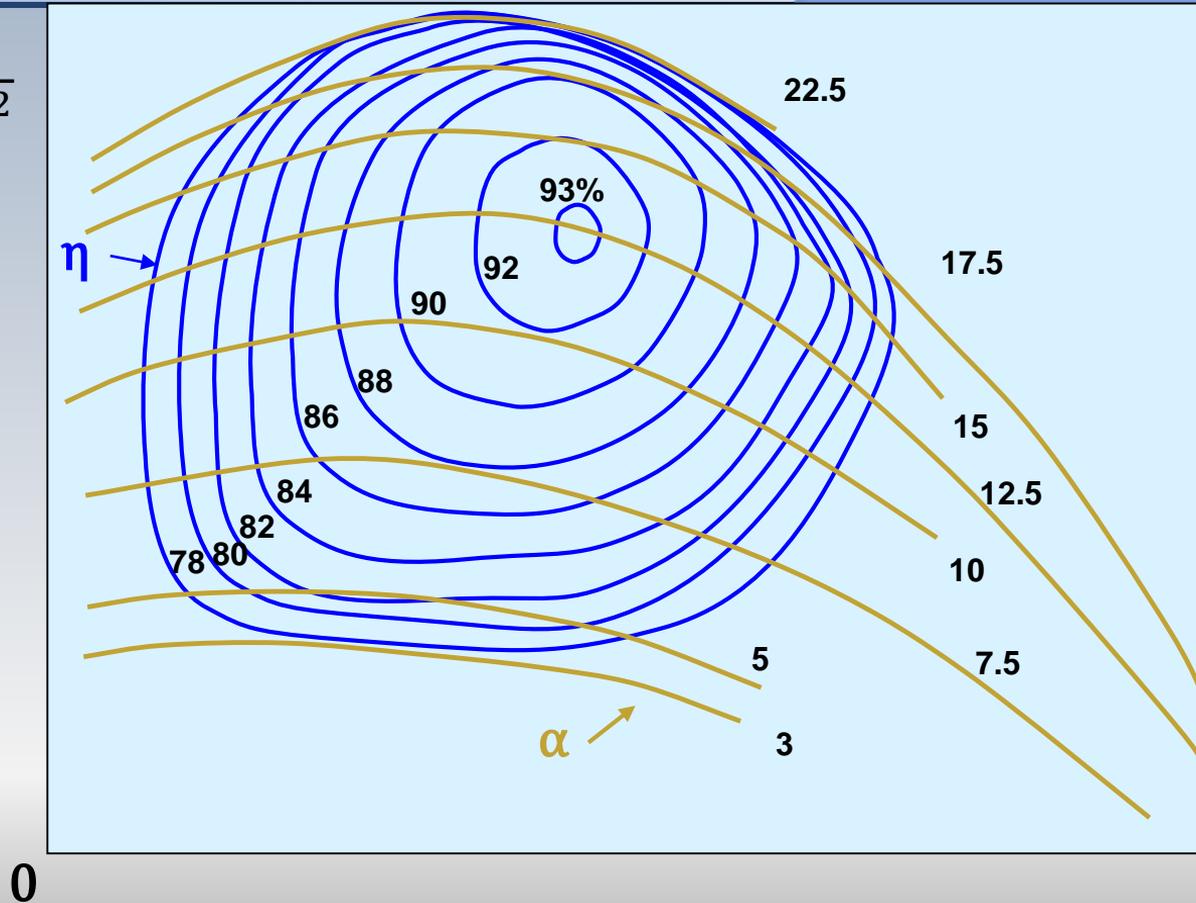


Colline de rendement

$$F(\psi, \eta, \Phi, \alpha) = 0$$

Francis

$$\psi = \frac{gH}{N^2 D^2}$$



$$\Phi = \frac{Q}{ND^3}$$

Problème

On veut tester une nouvelle voiture dans une soufflerie avec un modèle à une échelle de $1/10$. On estime que la force prédominante dans ce cas est la force de cisaillement visqueux. Il faudra donc **privilégier la similitude de Reynolds**

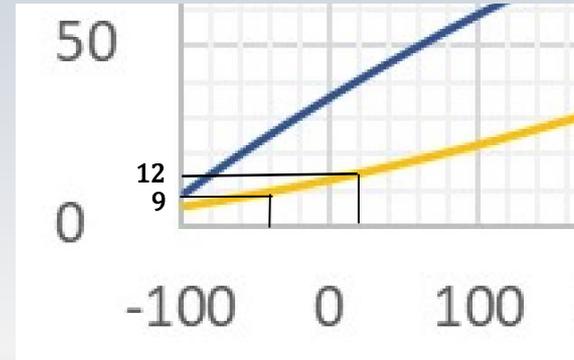
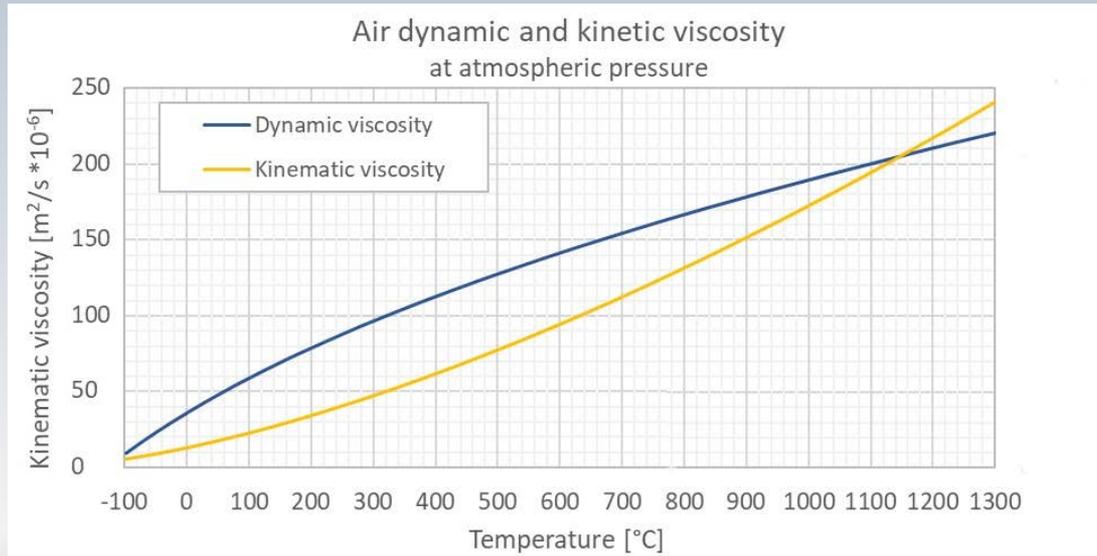
Pour ce problème, on considère que le modèle et le prototype seront soumis à la même pression

Sachant que la vitesse du prototype est $V_p = 100 \text{ km/h}$, on vous demande de calculer la vitesse V **pour le modèle**. Vous devez ensuite vérifier la compressibilité de l'écoulement dans la soufflerie à une température de $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ et indiquer si le test serait valide

Le nombre de Mach est donné par $M = V/\sqrt{kRT}$, $R = 287 \text{ Joule/kg} - \text{K}$, $k = 1.4$

Problème

On vous demande par la suite d'indiquer si serait d'un avantage quelconque opérer la soufflerie à $T = -40\text{ }^{\circ}\text{C}$



Problème

$$M = V/\sqrt{kRT}, R = 287 \text{Joule/kg} - K, k = 1.4 \quad V_p = 100 \text{ km/hre}$$

$$T_m = 20 + 273 = 293K, \quad \lambda_L = L_p/L_m = 10$$

$$\text{Re} = \frac{L_p V_p}{\nu_p} = \frac{L_m V_m}{\nu_m}$$

$$V_m = \left(\frac{\nu_m}{\nu_p}\right) \left(\frac{L_p}{L_m}\right) V_p = 1 \times (10) \times 100 \text{ Km/h} \Rightarrow V_m = 1000 \text{ Km/h}$$

Problème

$$M = V/\sqrt{kRT}, R = 287 \text{ Joule/kg} - \text{K}, k = 1.4 \quad V_p = 100 \text{ km/hre}$$

$$T_m = 20 + 273 = \mathbf{293K}, \quad \lambda_L = L_p/L_m = 10$$

$$a_m = \sqrt{kRT_m} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 293} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a_m = 343.1 m/s}$$

$$V_m = \frac{(1000 \text{ Km/h})}{3.6} = 277.8(\text{m/s})$$

$$Ma = \left(\frac{V}{a}\right)_m = \left(\frac{277.8}{343.1}\right) = 0.81$$

 $Ma > 0.3$: Écoulement compressible

Problème

$$T_m = -40 + 273 = 233K, \quad \lambda_L = L_p/L_m = 10 \quad V_p = 100 \text{ km/hre}$$

$$a_m = \sqrt{kRT_m} = \sqrt{1.4 \times 287 \times 233} = 306 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad a_m = 306 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{L_p V_p}{\nu_p} = \frac{L_m V_m}{\nu_m} \quad V_m = \left(\frac{\nu_m}{\nu_p}\right) \left(\frac{L_p}{L_m}\right) V_p = \left(\frac{9}{12}\right) \times (10) \times 100$$

$$V_m = \frac{(750 \text{ Km/h})}{3.6} = 208.3(\text{m/s})$$

Graphique viscosité

$$Ma = \left(\frac{V}{a}\right)_m = \left(\frac{208.3}{306}\right) = 0.68$$

 $Ma > 0.3$: Écoulement compressible

Rétrospective

La trame de la mécanique de fluides c'est l'application de la 2ème loi de Newton

Dans ce domaine on distingue les forces de: pesanteur \vec{F}_{grav} , de pression \vec{F}_{press} , de cisaillement visqueux \vec{F}_{visq} , élastiques (compressibilité), \vec{F}_{elas} , et de tension superficielle \vec{F}_{tsur}

L'action de ces forces entrainera l'accélération d'un fluide décrite par:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visq} + \vec{F}_{elas} + \vec{F}_{tsur} = m\vec{a}$$

Rétrospective

Si l'on remarque que la force d'inertie, \vec{F}_i , agit dans le sens contraire de l'accélération ($\vec{F}_i = -m\vec{a}$), la 2ème loi de Newton peut s'écrire

$$\vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visq} + \vec{F}_{elas} + \vec{F}_{tsur} + \vec{F}_i = 0$$

En ne considérant que les grandeurs de ces forces, une (pseudo) équation adimensionnelle peut être obtenue en prenant comme référence la force d'inertie. Notamment:

$$\frac{F_{grav}}{F_i} + \frac{F_{press}}{F_i} + \frac{F_{visc}}{F_i} + \frac{F_{elas}}{F_i} + \frac{F_{tsur}}{F_i} + 1 = 0$$

Rétrospective

Ces rapports adimensionnels (ou l'inverse F_i/F) des **modules des forces** ont été associés à des scientifiques et on a introduit des abréviations qui rappellent leurs noms

$$\frac{F_{grav}}{F_i} + \frac{F_{press}}{F_i} + \frac{F_{visc}}{F_i} + \frac{F_{elas}}{F_i} + \frac{F_{tsur}}{F_i} + 1 = 0$$

Froude
Fr

Euler
Eu

Reynolds
Re

Mach
Ma

Weber
We

Ces nombres représentent les **intensités relatives des forces**

Rétrospective

L'importance de ces intensités relatives réside dans le fait que **les équations adimensionnelles décrivant le mouvement d'un fluide sont UNIVERSELLES**

Universelles signifie qu'elle sont valables indépendamment des propriétés du fluide: (μ, ρ) , de l'espace (L), et des caractéristiques de l'écoulement (pression p , accélération \vec{a} , élasticité E)

Voici en rappel l'équation adimensionnelle de Navier-Stokes pour un écoulement instationnaire en régime incompressible

$$\text{Sr} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \nabla^*) \vec{V}^* = -\text{Eu} \vec{\nabla}^* p + \frac{1}{\text{Fr}^2} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^{2*} \vec{V}^*$$

Rétrospective

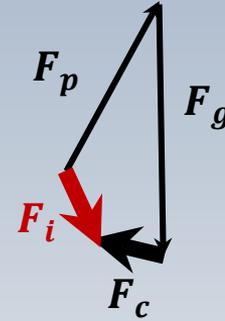
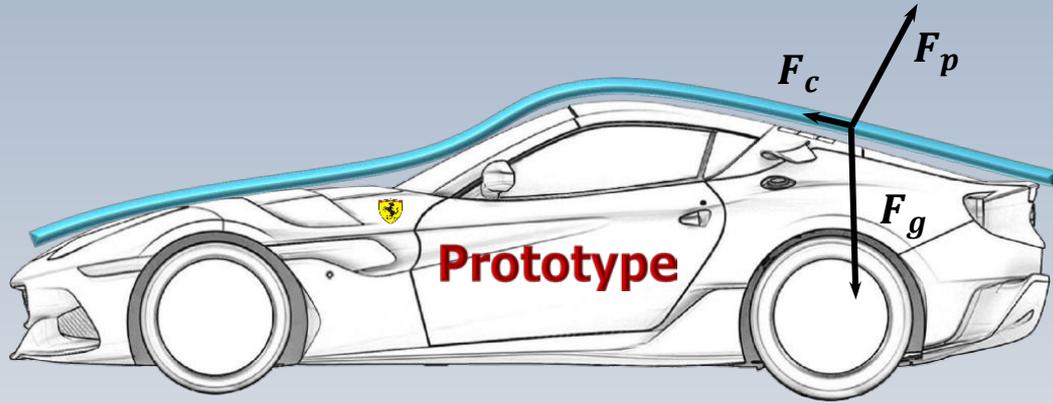
Commentaires sur l'équation précédente

Dans une grande majorité des problèmes rencontrés en génie mécanique, l'intensité (relative) de la force de tension superficielle (nombre de Weber) est négligeable. Elle est ainsi ignorée.

On découvre un "terme oublié" : le nombre adimensionnel de Strouhal, Sr . Il s'agit du rapport entre l'accélération locale et l'accélération convective. Il n'est présent que pour **les écoulements transitoires**

Voici un rappel du cas (imagé) illustrant les forces présentes dans un écoulement permanent incompressible (non élastique)

Les rapports de forces

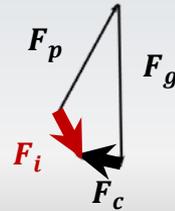
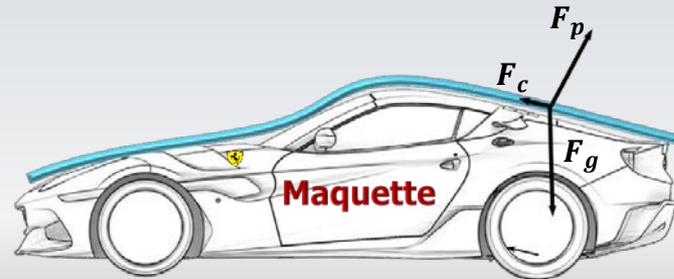


$$F_i \sim \rho L^2 V^2$$

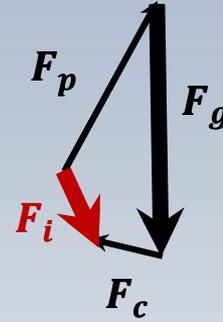
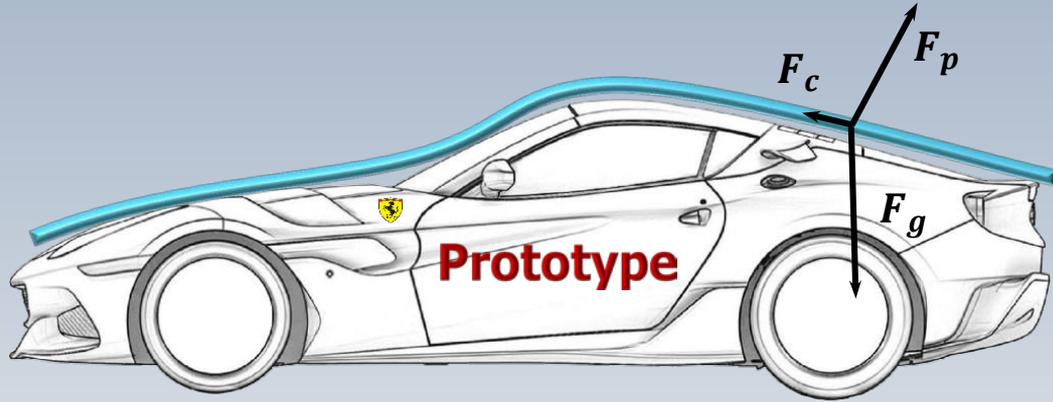
$$F_c \sim \mu L V$$

$$\left(\frac{F_i}{F_c} \right)_p = \left(\frac{F_i}{F_c} \right)_m = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu L V} = \frac{\rho L V}{\mu} = \text{Re}$$

Similitude de Reynolds



Les rapports de forces

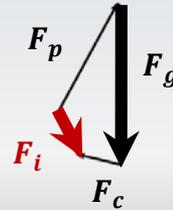
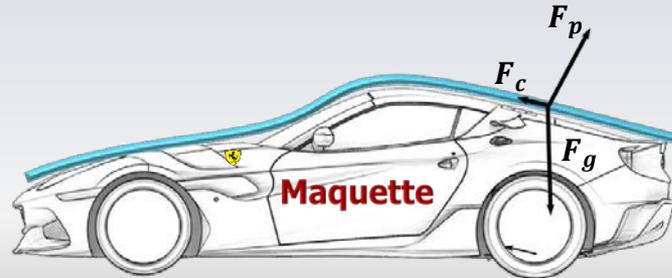


$$F_i \sim \rho L^2 V^2$$

$$F_g \sim \rho L^3 g$$

$$\left(\frac{F_i}{F_g} \right)_p = \left(\frac{F_i}{F_g} \right)_m = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{gL} = Fr^2$$

Similitude de Froude



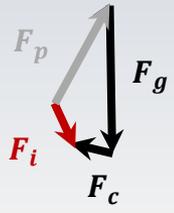
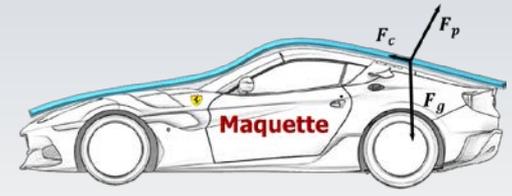
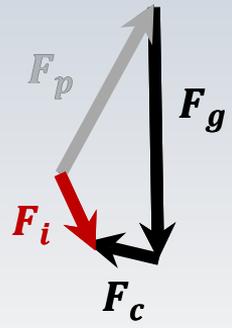
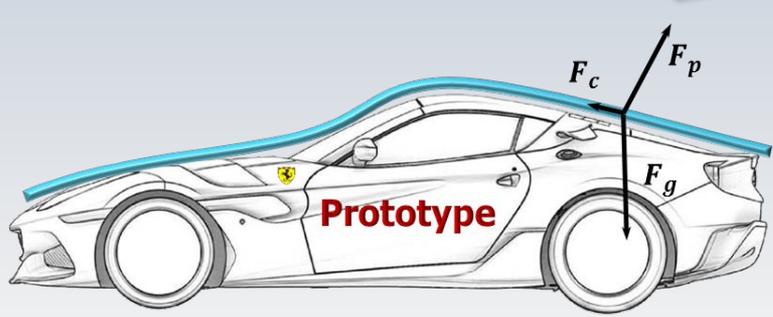
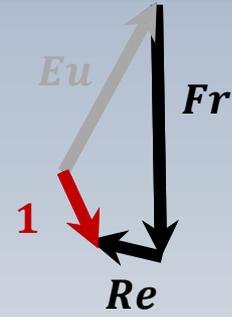
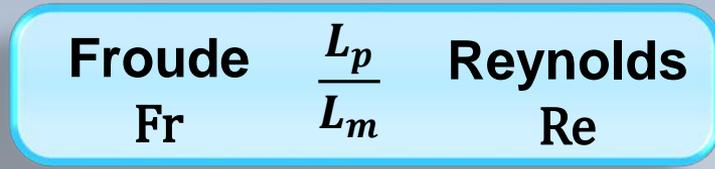
Rétrospective

Afin d'étudier un écoulement dans un cas réel (prototype) au moyen d'un modèle réduit (maquette), on utilise le potentiel des nombres adimensionnels décrivant des rapports de forces

Les valeurs de ces quantités sont uniques pour chaque cas et agissent comme des "plugins" entre les deux mondes ayant des grandeurs physiques et géométriques différentes

Transfert d'information

Espace adimensionnel



Prédominance des forces visqueuses: la similitude est garantie par le **nombre de Reynolds**, soit $(VL/\nu)_m = (VL/\nu)_p$.

Si de plus, le fluide demeure le même ($\nu_m = \nu_p$):

$$\frac{Re_m}{Re_p} = 1 \quad \Rightarrow \quad (VL)_m = (VL)_p \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_V = \frac{V_m}{V_p} = \frac{L_p}{L_m} = \frac{1}{\lambda_L}$$

et à partir de

$$\lambda_V = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_T} \right) \quad \Rightarrow$$

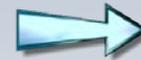
$$\lambda_T = \lambda_L^2$$

L'échelle de vitesse est l'inverse de l'échelle géométrique

L'échelle temporelle correspond au carré de l'échelle géométrique

Prédominance des forces de pesanteur: la similitude est garantie par le nombre de Froude, soit $(V/(\sqrt{Lg}))_m = (V/(\sqrt{Lg}))_p$

$$\frac{Fr_m}{Fr_p} = 1 \quad \Rightarrow \quad (V/\sqrt{gL})_m = (V/\sqrt{gL})_p$$



$$\lambda_V = \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{\lambda_L}$$

et à partir de

$$\lambda_V = \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_T} \right)$$



$$\lambda_T = \sqrt{\lambda_L}$$

L'échelle de vitesse correspond à la racine carrée de l'échelle géométrique

L'échelle temporelle correspond à la racine carrée de l'échelle géométrique

Remarque: La constante gravitationnelle g a été considérée la même pour le modèle et le prototype

La conséquence

On constate que pour un rapport d'échelle géométrique donné, L_m/L_p , les rapports d'échelle de vitesses V_m/V_p sont bien différents en fonction du type de similitude choisie

Pour modéliser un problème réel, on devra alors identifier la **force prépondérante** qui déterminera, soit la grandeur d'une maquette, o bien la vitesse adéquate pour effectuer le test

Le cadre général

Les nombres adimensionnels représentant les intensités des forces utiles en mécanique de fluides peuvent être obtenus à partir de la seconde loi de Newton

Dans un contexte général, ces regroupements sans dimension et bien d'autres peuvent être trouvés au moyen de l'utilisation du **Théorème π**

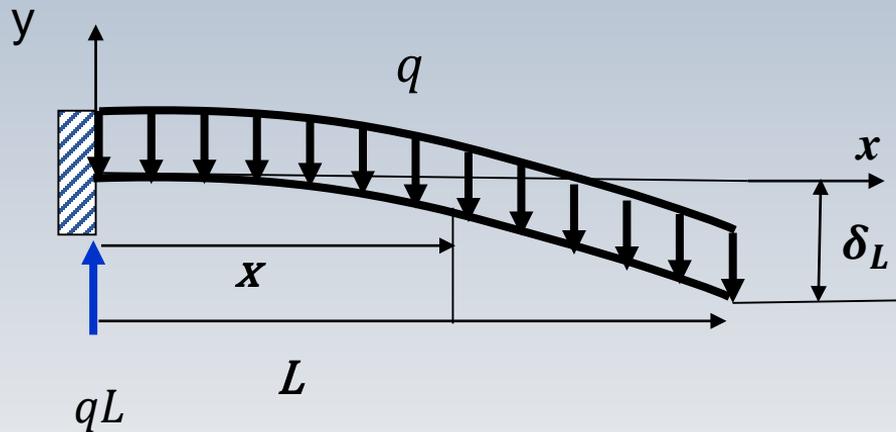
Tel que présenté, le théorème π de **Vaschy-Buckingham** indique qu'un problème est défini par $\mathbf{K}=\mathbf{N}-\mathbf{J}$ quantités adimensionnelles avec \mathbf{N} le nombre de variable physiques et \mathbf{J} les nombre de dimensions fondamentales

Cette formulation du théorème, est **valable pour la grande majorité de cas**. Cependant, le choix des variables parfois mène à des équations qui ne permettront pas le calcul de tous les exposants a, b, c (système singulier).

Voici un exemple

Un cas d'exception: exemple

On analyse la déflexion δ_L à l'extrémité d'une poutre encastree



On postule que: $\delta_L = f(q, L, I, E)$, avec

$$\left\{ \begin{array}{l} q(N/m), E(N/m^2), \\ I(m^4), L(m) \end{array} \right.$$

Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

	δ	L	q	I	E
M					
L					
T					

	δ	L	q	I	E
M	0				
L	1				
T	0				
	L				

Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

	δ	L	q	I	E
M	0	0			
L	1	1			
T	0	0			
	L	L			

Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

	δ	L	q	I	E
M	0	0	1		
L	1	1	0		
T	0	0	-2		
	L	L	MT ⁻²		

Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

	δ	L	q	I	E
M	0	0	1	0	
L	1	1	0	4	
T	0	0	-2	0	
	L	L	MT ⁻²	L ⁴	

Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple

	δ	L	q	I	E
M	0	0	1	0	1
L	1	1	0	4	-1
T	0	0	-2	0	-2
	L	L	MT ⁻²	L ⁴	ML ⁻¹ T ⁻²

VARIABLES ET DIMENSIONS

5.3 Théorème π : exemple

Variable cible 

	δ	L	q	I	E
M	0	0	1	0	1
L	1	1	0	4	-1
T	0	0	-2	0	-2
	L	L	MT ⁻²	L ⁴	ML ⁻¹ T ⁻²

Variables et dimensions

5.3 Théorème π exemple



	δ	L	q	I	E
M	0	0	1	0	1
L	1	1	0	4	-1
T	0	0	-2	0	-2
	L	L	MT ⁻²	L ⁴	ML ⁻¹ T ⁻²

Ce déterminant est nul, le système est singulier et les équations ne sont pas linéairement indépendantes

Variables et dimensions

5.3 Théorème π exemple



	δ	q	L	I	E
M	0	1	0	0	1
L	1	0	1	4	-1
T	0	-2	0	0	-2
	L	MT ⁻²	L	L ⁴	ML ⁻¹ T ⁻²

Ce déterminant est également nul, le système est singulier et les équations ne sont pas linéairement indépendantes

Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple



	δ	I	q	L	E
M	0	0	1	0	1
L	1	1	0	1	-1
T	0	0	-2	0	-2
	L	L ⁴	MT ⁻²	L	ML ⁻¹ T ⁻²

Ce déterminant est aussi nul, le système est singulier et les équations ne sont pas linéairement indépendantes

Variables et dimensions

5.3 Théorème π exemple



	δ	E	q	I	L
M	0	1	1	0	0
L	1	-1	0	4	1
T	0	-2	-2	0	0
	L	$ML^{-1}T^{-2}$	MT^{-2}	L^4	L

Ce déterminant est encore nul, le système est singulier et les équations ne sont pas linéairement indépendantes

Les résultats précédents indiquent que pour ce problème il n'y a pas trois variables dépendantes ou répétées (partie droite du tableau) mais seulement deux

Si le nombre de variables dépendantes diminue de un, le nombre variables indépendantes ou non répétées (partie gauche du tableau) doit augmenter de la même quantité

Dans cet exemple la variable q changera de groupe et on choisira deux des trois équations pour déterminer deux coefficients (a, b)

Variables et dimensions

5.3 Théorème π : exemple



	δ	I	q	L	E
M	0	0	1	0	1
L	1	4	0	1	-1
T	0	0	-2	0	-2
	L	L ⁴	MT ⁻²	L	ML ⁻¹ T ⁻²

Ce déterminant (2x2) n'est pas nul, le système est linéairement indépendant

π_1 : exposants a, b

5.3 Théorème π : exemple

Pour π_1 :

$$a - b$$

$$0 \times a - 2 \times b$$

$$= 1 \text{ pour L} \rightarrow a = 1$$

$$= 0 \text{ pour T} \rightarrow b = 0$$

	δ	I	q	L	E
M	0	0	1	0	1
L	1	4	0	1	-1
T	0	0	-2	0	-2
	L	L^4	MT^{-2}	L	$ML^{-1}T^{-2}$

$$\Pi_1 = \frac{\delta}{L}$$

π_1 : exposants a, b

5.3 Théorème π : exemple

Pour π_2 :

$$a - b$$

$$0 \times a - 2 \times b$$

=

4

pour L \rightarrow

$$a = 4$$

=

0

pour T \rightarrow

$$b = 0$$

	δ	I	q	L	E
M	0	0	1	0	1
L	1	4	0	1	-1
T	0	0	-2	0	-2
	L	L^4	MT^{-2}	L	$ML^{-1}T^{-2}$

$$\Pi_2 = \frac{I}{L^4}$$

π_1 : exposants a, b

5.3 Théorème π : exemple

Pour π_3 :

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \text{ pour L} \rightarrow a = 1 \\ 0 \times a - 2 \times b &= -2 \text{ pour T} \rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

	δ	I	q	L	E
M	0	0	1	0	1
L	1	4	0	1	-1
T	0	0	-2	0	-2
	L	L^4	MT^{-2}	L	$ML^{-1}T^{-2}$

$$\Pi_3 = \frac{q}{LE}$$

On combine π_2 et π_3

$$\Pi_4 = \frac{\Pi_3}{\Pi_2} = \frac{q}{LE} \times \frac{L^4}{I}$$

$$\Pi_4 = \frac{qL^3}{EI}$$



$$\frac{\delta}{L} = f\left(\frac{qL^3}{EI}\right)$$

Résultat obtenu par l'analyse dimensionnelle

Équation connue de RDM

$$\delta_L = \frac{qL^4}{8EI}$$

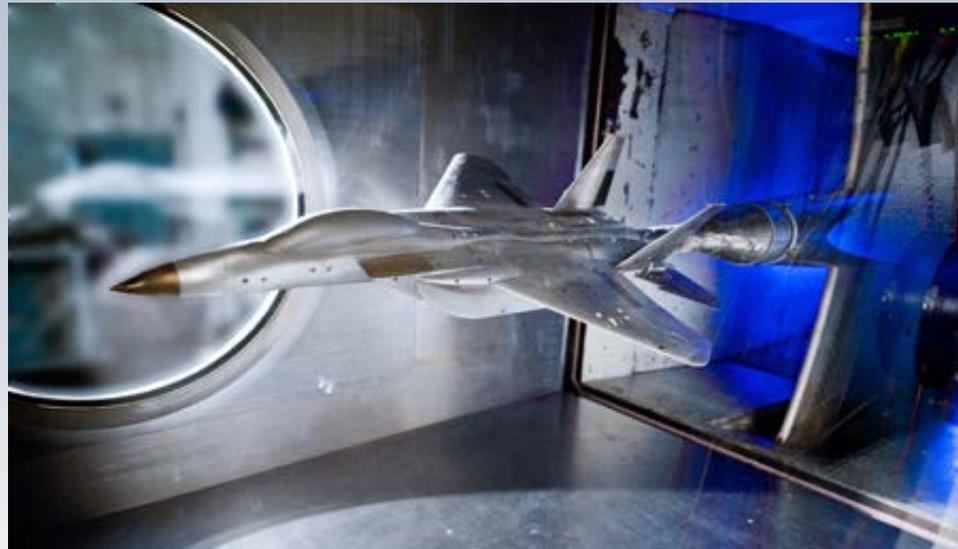


$$\delta_L/L = \frac{qL^3}{8EI}$$

IMPRESSIONNANT!



Modèle-prototype



F18

Modèle-prototype



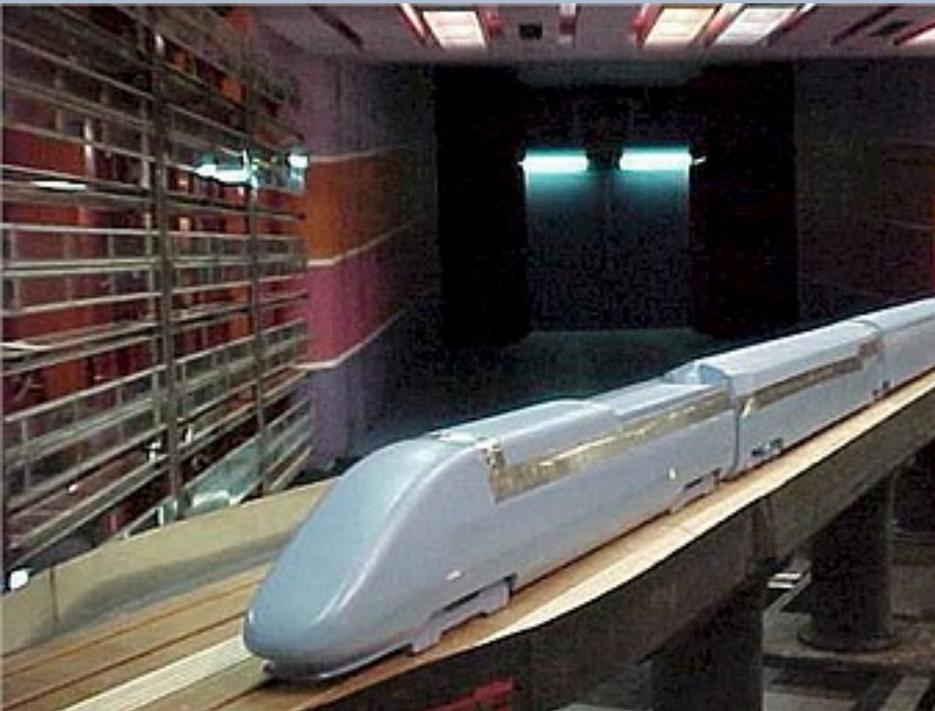
BMW

Modèle-prototype



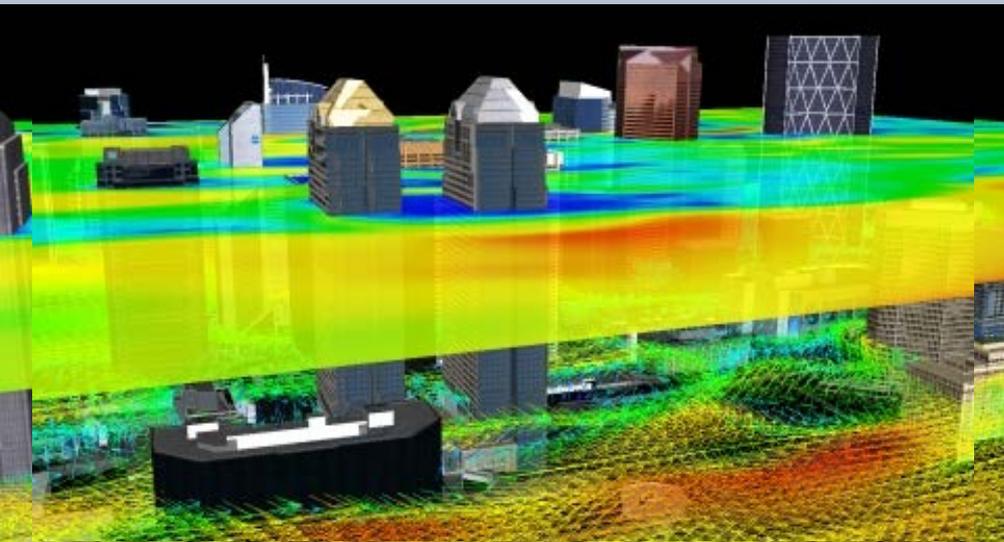
Le Viaduc de Millau

Modèle-prototype



TGV

Modèle-prototype



Centreville de Calgary

Modèle-prototype



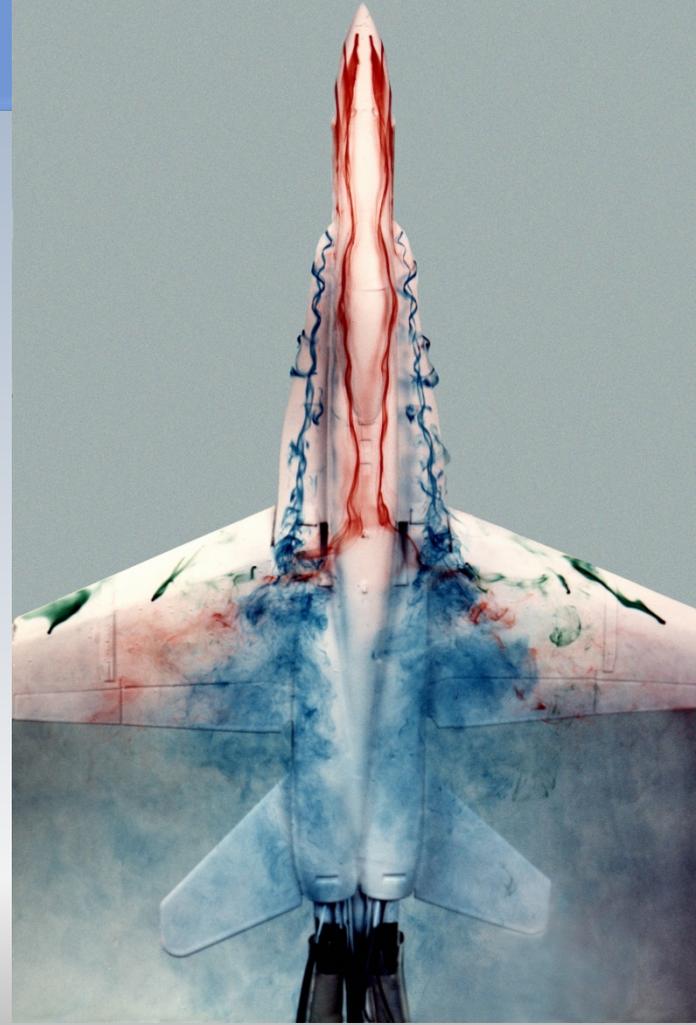
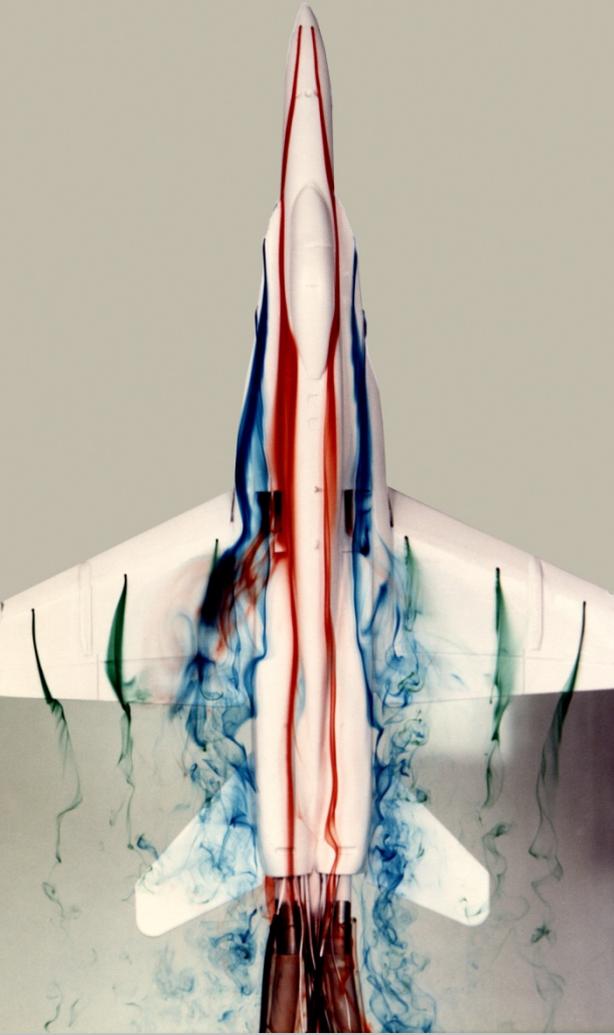
Sans commentaire

Tunnel hydro

Écoulement avec un faible angle d'attaque



Écoulement avec un angle d'attaque élevé



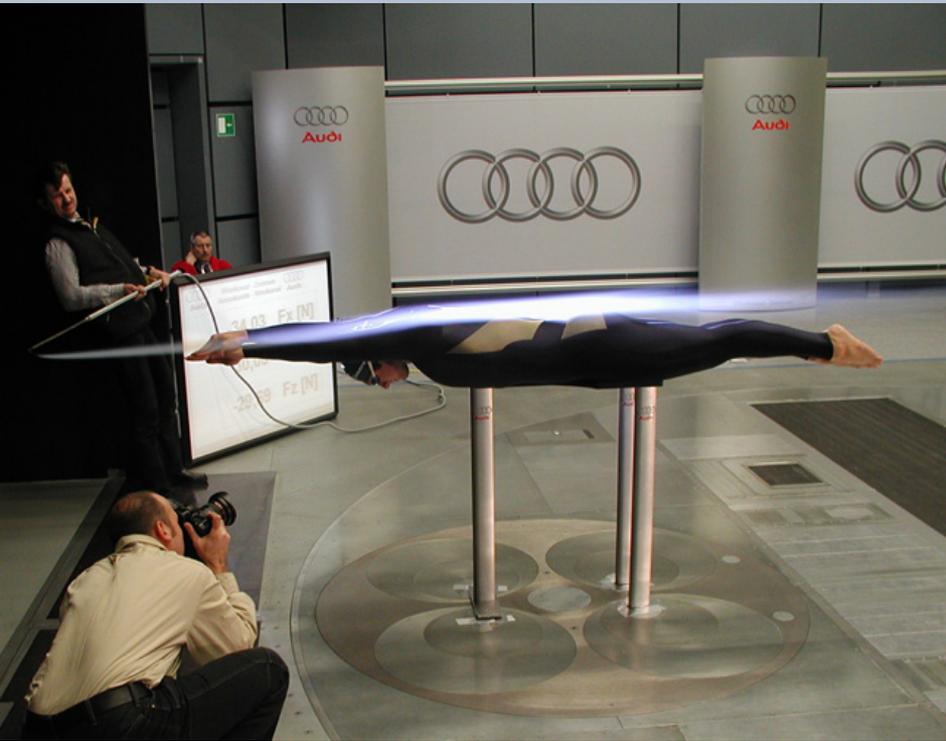
Tunnel hydrodynamique



Les voitures



Les sports



Récapitulation en 7 planches

En mécanique de fluides l'ingénieur utilise la modélisation sur des maquettes, réelles ou virtuelles (ordinateur), avant de s'attaquer à la construction d'ouvrages à pleine grandeur (prototypes)

Pour extrapoler vers le cas réel les résultats obtenus lors de essais sur des maquettes, on utilise des critères de similitude

Essentiellement, ces règles concernent des **variables sans dimension** issues de ce qu'on appelle **similitude dynamique**.

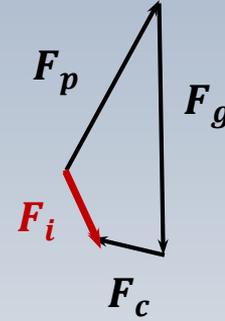
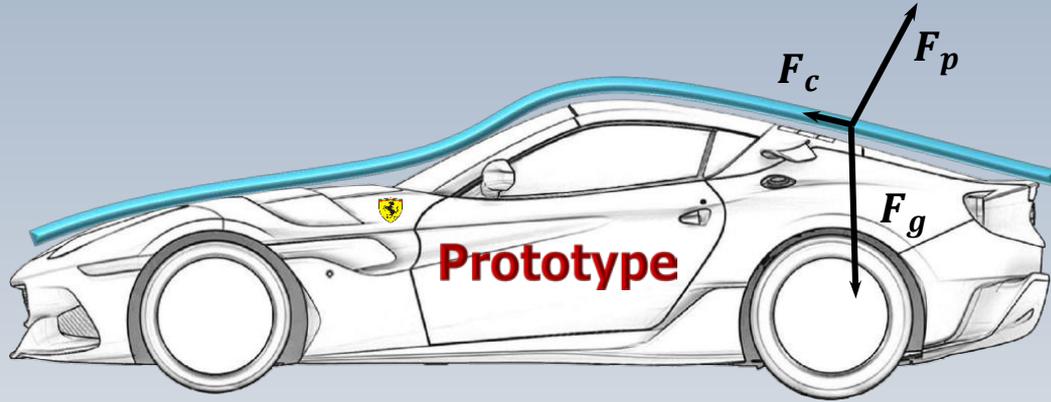
Récapitulation

Spécifiquement, on regarde des rapports entre une force d'intérêt (massique, visqueuse, etc.) et **la force d'inertie, utilisée comme référence.**

En génie mécanique on s'intéresse fondamentalement à trois, rapports sans dimension, que l'on connaît comme nombres de **Reynolds (Re), Froude (Fr) et Mach (Ma).**

$Re = \text{Inertie} / \text{Visqueuses}$	VL/ν
$Fr = \text{Inertie} / \text{Massiques}$	V/\sqrt{gL}
$Ma = \text{Inertie} / \text{Élastiques}$	V/a

Récapitulation



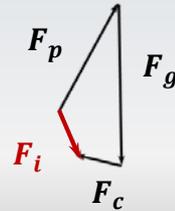
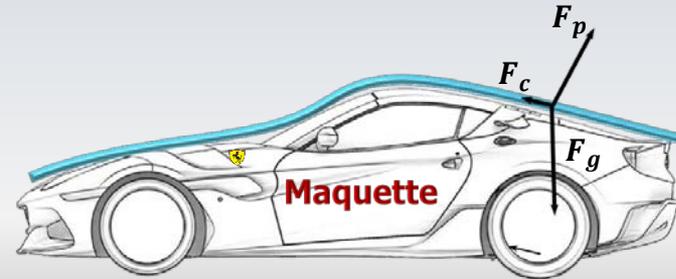
$$F_i = \rho L^2 V^2$$

$$F_c = \mu L V$$

$$F_g = \rho L^3 g$$

$$\left(\frac{F_i}{F_c} \right)_p = \left(\frac{F_i}{F_c} \right)_m = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu L V} = \frac{\rho L V}{\mu} = Re$$

$$\left(\frac{F_i}{F_g} \right)_p = \left(\frac{F_i}{F_g} \right)_m = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{gL} = Fr^2$$



Récapitulation

Les rapports sans dimension, $Re = VL/\nu$ et $Fr = V/\sqrt{gL}$, égales pour le modèle et le prototype ($Re_m = Re_p$, $Fr_m = Fr_p$), imposent **des échelles géométriques bien différentes**

Pour choisir l'échelle géométrique adéquate, on regardera le rapport dont la force soit dominante (visqueuse ou massique), selon le cas. On parle alors d'un similitude incomplète (restreinte)

Quant au nombre de Mach $Ma = V/a$, il "surveille" si les effets de compressibilité sont négligeables ($Ma < 0.3$) ou pas

Récapitulation

L'obtention des paramètres sans dimension peut se faire utilisant les équations de Navier-Stokes ou, de la manière la plus générale possible, à l'aide du **théorème de Vaschy-Buckingham**:

Soient n quantités pour lesquelles existe une relation

$$f(V_1, V_2, V_3, \dots, V_N) = 0$$

Cette relation peut se ramener à une autre avec $K = N - J$ paramètres, au plus, de la forme,

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_K) = 0$$

où J dénote le nombre de dimensions fondamentales (typiquement, M, L, T)

Récapitulation

Pour construire l'ensemble de nombres adimensionnels π_i on sépare d'abord les variables en deux groupes: répétées et non répétées.

Le nombre de variables répétées correspond au nombre de dimensions fondamentales, souvent 3 (M, L, T).

On obtient par la suite les π_i en divisant chaque variable non répétée V_i , par un produit des variables répétées élevées à des exposants

$$\pi_i = \frac{V_{i(\text{non répétée})}}{V_{r1}^a V_{r2}^b V_{r3}^c} \quad \text{3 } V_r \text{ si (M,L,T).}$$

Récapitulation

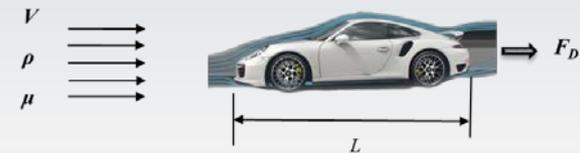
Pour chaque π_i , on trouve les exposants a, b, c en égalisant les dimensions de M, L, T dans le numérateur avec celles dans le dénominateur

$$\begin{array}{r} \pi_1, \pi_1 \quad a + 0 \times b + 0 \times c = \\ \quad -3a + \quad b + \quad c = \\ \quad 0 \times a + 0 \times b - \quad c = \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline -2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -1 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} a \rightarrow \\ b \rightarrow \\ c \rightarrow \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho L^2 V^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho L V}$$

	Variables non répétées		Variables répétées		
	F	μ	ρ	L	V
M	1	1	1	0	0
L	1	-1	-3	1	1
T	-2	-1	0	0	-1
	MLT^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	L	LT^{-1}



Cliquez ici pour trouver une liste exhaustive
 de nombres sans dimension.

Merci de votre attention !

Bientôt: Formulation intégrale



Hors

Programme!

L'algorithme de Thomas Szirtes

L'algorithme suivant, proposé par Thomas Szirtes, peut être ici accepté comme une méthode de type "plug&play" pour obtenir des regroupements sans dimension.

L'application concerne l'écoulement autour d'un profil aérodynamique

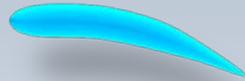
$$F = f(\rho, \mu, L, V)$$



L'algorithme de Thomas Szirtes

	F	μ	ρ	L	V
M	1	1	1	0	0
L	1	-1	-3	1	1
T	-2	-1	0	0	-1

V \rightarrow
 ρ \rightarrow
 μ \rightarrow



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

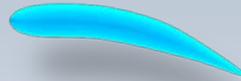
Test initial

IMPORTANT: On doit vérifier que la matrice A soit non singulière, c-à-d, que $\det A \neq 0$. Si le $\det A = 0$, on peut réarranger les colonnes du tableau (choix des variables primaires et secondaires) pour tenter d'obtenir une matrice non singulière. Si ceci s'avérait impossible, le nombre de paramètres adimensionnels changerait de un.

L'algorithme de T. Szirtes

	F	μ	ρ	L	V
M	B		A		
L					
T					

V \rightarrow
 ρ \rightarrow
 μ \rightarrow



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'algorithme de T. Szirtes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Inverse de
la matrice A

$$C = -(A^{-1}B)^T$$

$$-C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} B

L'algorithme de T. Szirtes

$$-C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

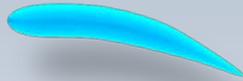


$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

L'algorithme de T. Szirtes

	F	μ	ρ	L	V
M					
L					
T					

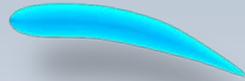
V \rightarrow
 ρ \rightarrow
 μ \rightarrow



L'algorithme de T. Szirtes

	F	μ	ρ	L	V
M	<i>B</i>		<i>A</i>		
L					
T					

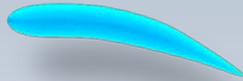
V \rightarrow
 ρ \rightarrow
 μ \rightarrow



L'algorithme de T. Szirtes

	F	μ	ρ	L	V
M	<i>B</i>		<i>A</i>		
L					
T					
Π_1	<i>I</i>		<i>C</i>		
Π_2					

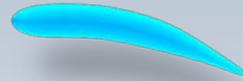
V \rightarrow
 ρ \rightarrow
 μ \rightarrow



L'algorithme de T. Szirtes

	F	μ	ρ	L	V
M	1	1	1	0	0
L	1	-1	-3	1	1
T	-2	-1	0	0	-1
Π_1	1	0	-1	-2	-2
Π_2	0	1	-1	-1	-1

$V \rightarrow$
 $\rho \rightarrow$
 $\mu \rightarrow$



$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho L^2 V^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho L V}$$

Matlab

```
clear all;
%MÉTHODE DE T.SZIRTES

% CETTE MÉTHODE EST HORS DU PROGRAMME! ELLE NE SERA DONC PAS L'OBJET
% DE QUESTIONS!

% Ce programme calcule les coefficients PI du problème d'un corps profilé.
% Les paramètres physiques sont: la corde du profil de longueur L, la masse
% volumique Ro du fluide, la viscosité dynamique Mu du fluide, la vitesse
% de l'écoulement et la force de trainée F.

% Les variables primaires sont Ro, L, V
% Les variables secondaires sont F et Mu

% LE TABLEAU (MATRICE) DES UNITÉS DES VARIABLES PHYSIQUES EST:

%   F   Mu   Ro   L   V
%M|  1   1   |  1   0   0
%-----
%L|  1  -1   | -3   1   1
%-----
%T| -2  -1   |  0   0  -1

A=[1 0 0; -3 1 1; 0 0 -1]
B=[1 1; 1 -1; -2 -1]

% Test pour vérifier si le déterminant de A est nul

deta=det(A)

% SI det(A)=0, il y a une dépendance dimensionnelle entre les variables
% primaires sélectionnées. On doit alors choisir une autre combinaison
```

```
% On calcule l'inverse de A
A1=inv(A)

% produit de l'inverse A inverse fois B
CNEG=[A1*B]

% Négatif de la transposée
C=-CNEG'

% Les coefficients de la matrice C correspondent aux exposants
% des variables primaires

% Les coefficients dans PI1 pour Ro, L, et V, ayant F comme variable
% secondaire, se trouvent sur la première ligne de la matrice C
% Coeff de Ro
coro=C(1,1)
% Coeff de L
coel=C(1,2)
% Coeff V
Coev=C(1,3)

% Les coefficients dans PI2 pour Ro, L, et V, ayant Mu comme variable
% secondaire se trouvent sur la deuxième ligne de la matrice C
% Coeff de Ro
coro=C(2,1)
% Coeff de L
coel=C(2,2)
% Coeff V
Coev=C(2,3)
```

J.B. Fourier

« Il est nécessaire de noter que chaque grandeur, connue ou inconnue, possède une dimension qui lui est propre et que les termes d'une équation ne pourraient être comparés entre eux s'ils ne possédaient pas le même exposant de dimensions.

« Dans la théorie analytique de la chaleur, toute équation représente une relation entre les grandeurs coexistantes, à savoir : longueur, x ; temps, t ; température, v ; capacité calorifique, par unité de volume, conductibilité superficielle, h , et conductibilité thermique, k . Ladite relation ne dépend pas du choix de l'unité de longueur qui, par sa propre nature, est contingente



Deuxième choix pour t

$$S / S_0 = 1 + V_0 / S_0 t + 1/2 g t^2 / S_0$$

$$L / L \quad \left(\frac{L}{T} \right) \frac{T}{L} \quad \frac{L}{T^2} \frac{T^2}{L}$$

Si dans cette expression l'on regarde **le troisième terme**, on peut trouver un autre facteur d'échelle pour le temps. Notamment (S_0 / g) pour t^2 , ou encore $(S_0 / g)^{1/2}$ pour t . Dans ce cas, on peut définir des variables sans dimension t^{**} et S^{**} :

$$S^{**} = \frac{S}{S_0}, \quad t^{**} = \frac{t}{(S_0 / g)^{1/2}}$$

Deuxième choix

Quantité	S	t	V_0	S_0	g
Dimensions	L	T	LT^{-1}	I	LT^{-2}

Alors, l'équation $S_0 + V_0 t + 1/2 g t^2$ devient

$$S^{**} = 1 + t^{**} / \sqrt{g S_0 / V_0^2} + 1/2 t^{**2}$$

Dans cette nouvelle équation on distingue également **trois termes sans dimension**: S^{**} , t^{**} et le regroupement $\sqrt{g S_0 / V_0^2}$.
On découvre encore une variable sans dimension g^{**}

$$g^{**} = \frac{g}{V_0^2 / S_0}$$

Deuxième c

$$S^{**} = \frac{S}{S_0}, \quad t^{**} = \frac{t}{(S_0/g)^{1/2}}, \quad g^{**} = \frac{g}{V_0^2/S_0}$$

Cependant, g apparaît maintenant comme facteur d'échelle dans le temps adimensionnel $t^{**} = t/(S_0/g)^{1/2}$. Il faut donc l'éliminer.

Puisque $g^{**} = gS_0/V_0^2$ est une quantité adimensionnelle, on peut l'utiliser pour se débarrasser de g dans le temps t^{**} . En particulier en définissant $t^{**+} = t^{**}/\sqrt{g^{**}}$

L'introduction de ce nouveau temps adimensionnel t^{**+} dans l'équation

$$S^{**} = 1 + t^{**} / \sqrt{gS_0/V_0^2} + 1/2 t^{**2}$$

mène encore à

$$S^{**} = 1 + t^{(**+)} + 1/2 \left(\frac{gS_0}{V_0^2} \right) t^{(**+)^2}$$

Le facteur d'échelle utilisé précédemment pour la dimension L est loin d'être unique. On peut utiliser par exemple V_0^2/g

Dans ce cas on trouve

$$S^{***} = \frac{gS_0}{V_0^2} + t^{***} + 1/2t^{***2}$$

avec

$$S^{***} = \frac{S}{(V_0^2 / g)}, \quad t^{***} = \frac{t}{(V_0 / g)}, \quad g^{***} = \frac{g}{V_0^2 / S_0}$$

Encore g apparait comme facteur d'échelle dans le temps adimensionnel $t^{***} = t/(V_0/g)$ et dans la distance adimensionnelle $S^{***} = S/(V_0^2/g)$. De manière similaire au cas précédent, on peut éliminer g de t^{***} et S^{***} pour retrouver l'équation:

$$S^{***+} = 1 + t^{***+} + 1/2 \left(\frac{gS_0}{V_0^2} \right) t^{***+2}$$

ou encore

$$S^{***+} = 1 + t^{***+} + 1/2 g^{***} t^{***+2}$$

Retour



