

Mécanique des fluides



La force des écoulements



Lois de conservation locales

**Formulation
Différentielle**

A-II (IV)

OBJECTIFS

- Présenter les types de visualisation des écoulements
- Regarder la notion de dérivée matérielle
- Rappeler les concepts de divergence et de rotationnel
- Expliquer le cisaillement visqueux et les équations de **Navier-Stokes**
- Présenter la formule de **Bernoulli**

Introduction

Lorsque les fluides sont en mouvement, en plus des forces de pression et de pesanteur, nous devons prendre en compte **l'inertie et le cisaillement**. Nous porterons alors une attention détaillée à ces termes dans l'équation de Newton:

$$\left. \frac{d(m\vec{u})}{dt} \right|_{\text{syst}} = \vec{F}_{\text{gravité}} + \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{cisaillement}}$$

Introduction

Avant de considérer **les forces de cisaillement engendrées par le frottement visqueux (qui entraînent des pertes d'énergie)** nous regarderons la description du mouvement

C'est l'objet de la **cinématique** qui s'intéresse aux écoulements, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est-à-dire les forces

Le résultat pratique se résume en quelques équations. Cependant le chemin est "encombré" d'éléments mathématiques

Introduction

Ouff, les maths...

$$\nabla \times \vec{u} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$



$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$



Pour obtenir **la force d'inertie**, on a besoin de calculer le vecteur accélération $\vec{a}(\vec{x}, t)$ à la position $\vec{x} = (x, y, z)$ au temps t .

L'accélération \vec{a} peut se déduire en dérivant la vitesse locale \vec{u} du fluide.



Alors, pour évaluer l'accélération, on doit d'abord **décrire l'écoulement**

Pour ce faire on note deux approches :

- La description **lagrangienne**
- La description **eulérienne**.



La première est intuitive et est **en accord avec la 2ième loi de Newton**, mais requiert se déplacer avec l'écoulement

La description **lagrangienne** peut être imaginée comme si nous étions dans le peloton d'une course de cyclisme

La représentation **eulérienne**, d'autre part, comme si nous étions un spectateur à un endroit fixe et qui voit passer les différents coureurs.

Accélération

4.1 l'accélération



Euler

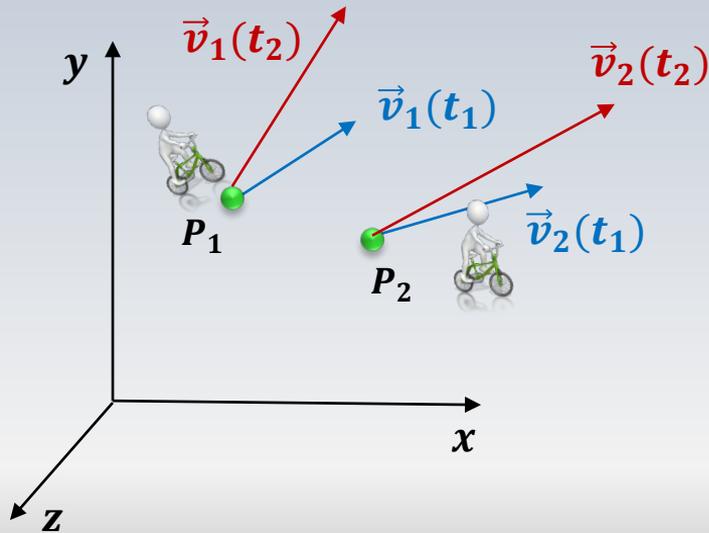


Lagrange

Description eulérienne

4.1 l'accélération

L'écoulement est établi à **un instant** t par l'ensemble de vitesses associées à chaque point du fluide (les cyclistes). L'écoulement est ainsi décrit au moyen **d'un champ des vitesses** $\vec{v}(\vec{r}, t)$



Leonhard Euler
(1707-1783)

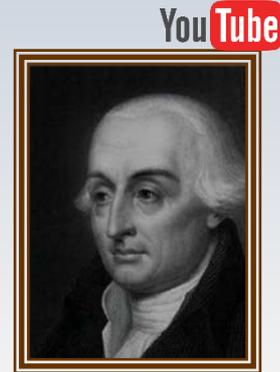
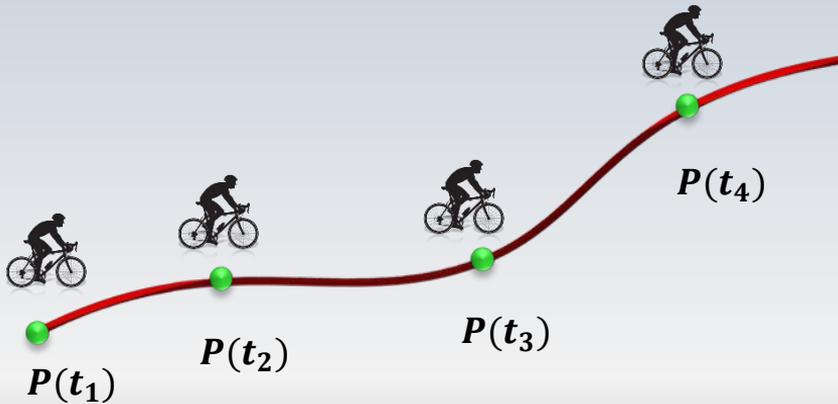
Eulerien



Description lagrangienne

4.1 l'accélération

La description de l'écoulement est faite **suivant le mouvement** d'une (ou d'un ensemble) de particules au sein du fluide. L'écoulement est décrit par la position $\vec{R}(t)$ et la vitesse $\vec{V}(t)$ de chaque particule de fluide



J.-Louis Lagrange
(1736-1813)

Lagrangien



Chapitre 4 – Lois de conservation locales

1.11

4.1

4.2

4.3

4.10

4.8

1.11 Lignes de courant, lignes d'émission et trajectoires

4.1 L'accélération

4.2 Équation différentielle de la conservation de la masse

4.3 Équation différentielle de la quantité de mouvement

4.10 Quelques solutions des équations de Navier-Stokes

4.8 Vorticité et irrotationnalité



4.9

3.05

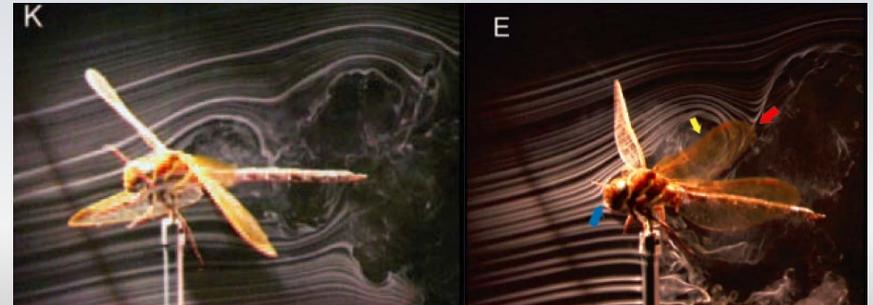
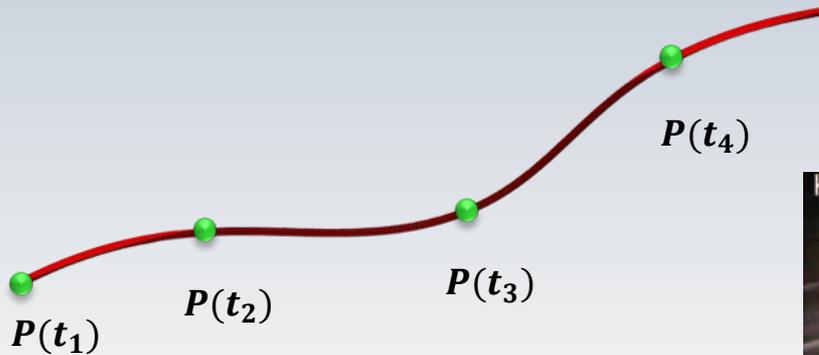
La visualisation de «l'allure» d'un l'écoulement: *direction privilégiée, structure, etc.*, facilite l'analyse et la conception d'applications technologiques tels que, par exemple, les pales de turbomachines, les profils d'aile d'avion ou les véhicules de transport

En dynamique des fluides, on dispose de certains indicateurs ayant de formulations mathématiques associés à la visualisation des écoulements. Les plus répandus sont **les lignes de courant (streamlines), les trajectoires (pathlines) et les lignes d'émission (streaklines)**

Trajectoire (pathline)

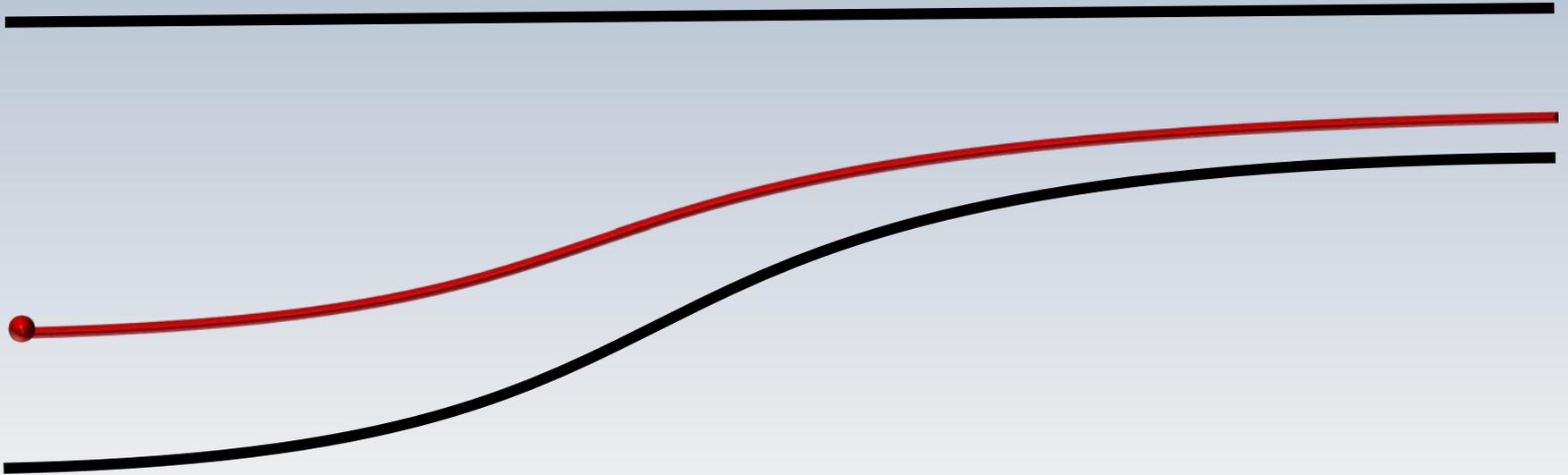
1.11 lignes de courant..

Trajectoire: Le lieu géométrique des **positions successives** occupés par une particule. On peut l'interpréter comme une photo avec l'obturateur ouvert lorsqu'on injecte un colorant dans un écoulement



Écoulement autour d'une libellule

Trajectoires (pahtlines)



Trajectoire (pathline)

1.11 lignes de courant..



Exemples de trajectoires

Trajectoire autour d'une
chauve-souris



Balle de soccer

Trajectoires..



Trajectoire (pathline)

You Tube



Trajectoires autour d'automobiles

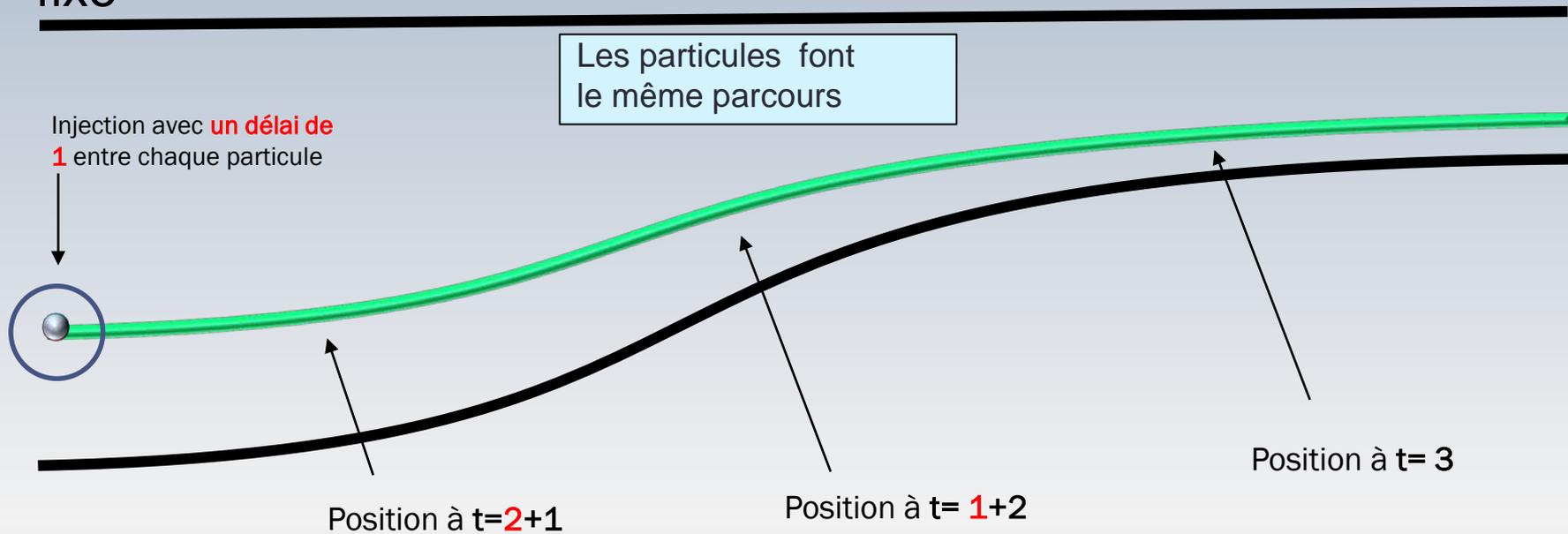
Lignes d'émission(streakline)

Les **lignes d'émission** sont des courbes issues de particules injectées à un endroit fixe dans l'espace.

À un temps donné t , on trace une ligne qui relie l'ensemble des particules correspondant à ce temps t

Lignes d'émission (streakline)

Lieu géométrique instantané des particules injectées à un endroit fixe

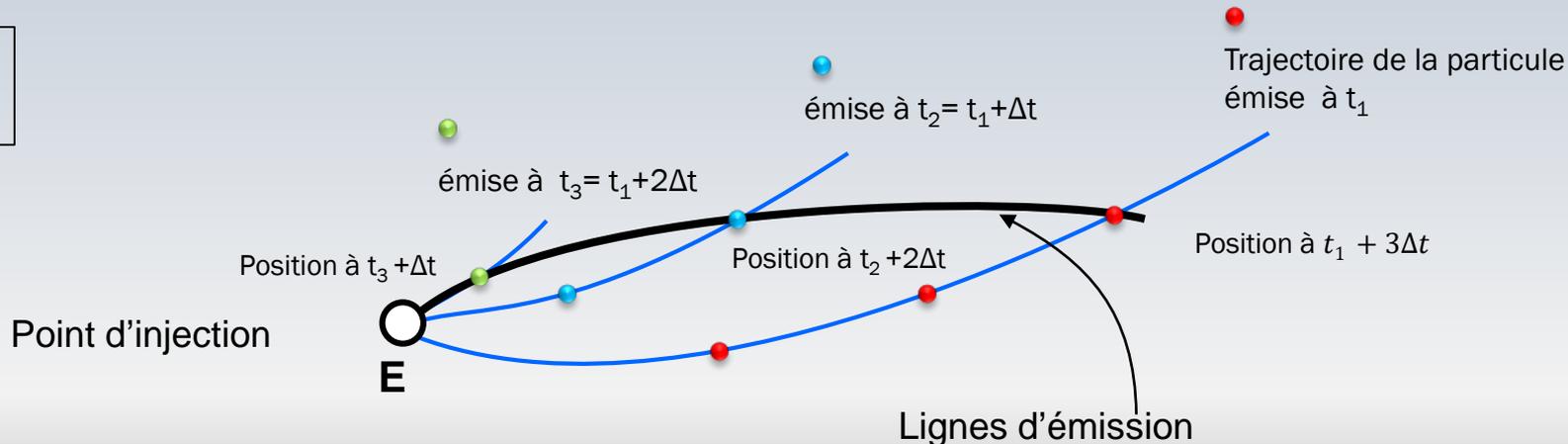


Lignes d'émission (streakline)

À un temps donné t , on trace une ligne qui relie l'ensemble de particules correspondant à ce temps t

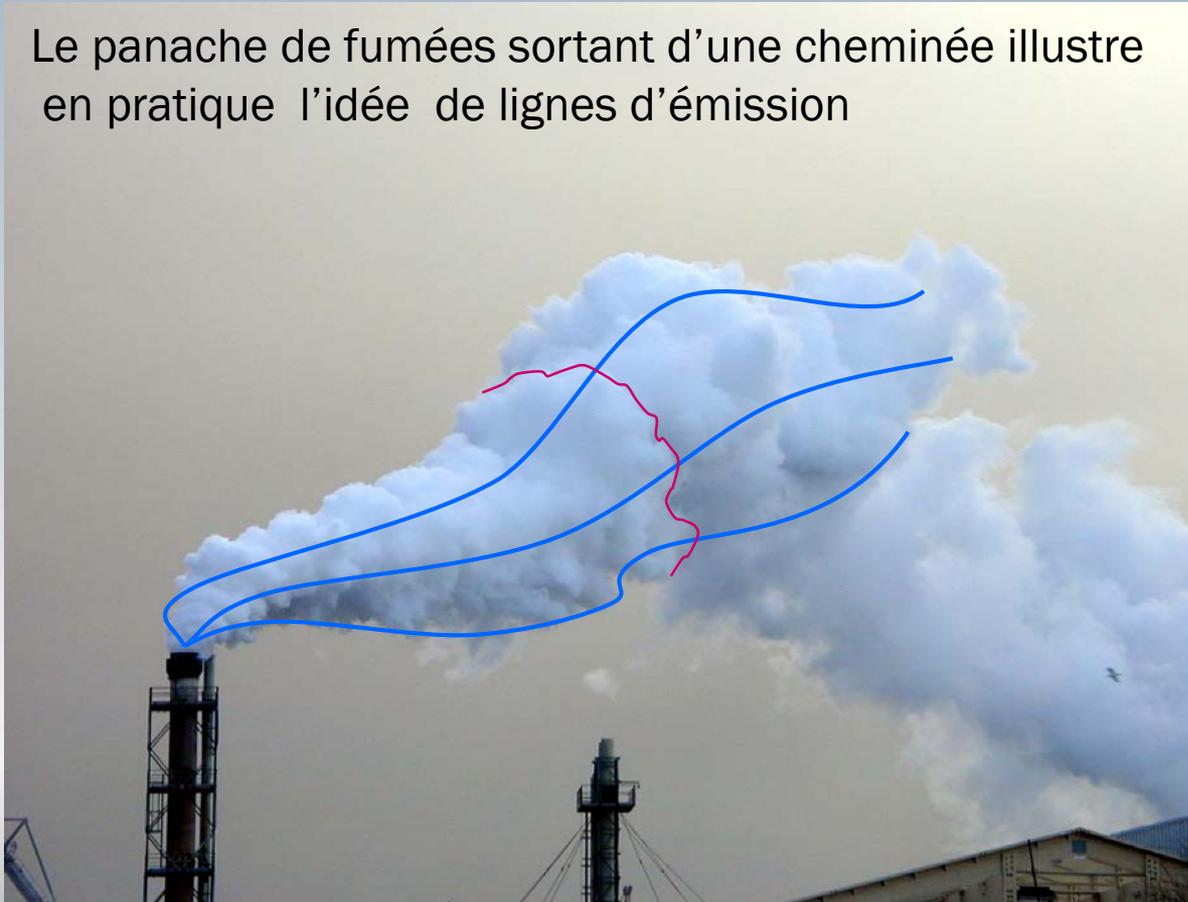
Les particules ne suivent pas le même parcours

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= \Delta t \\ t_3 &= 2\Delta t \end{aligned}$$



Lignes d'émission

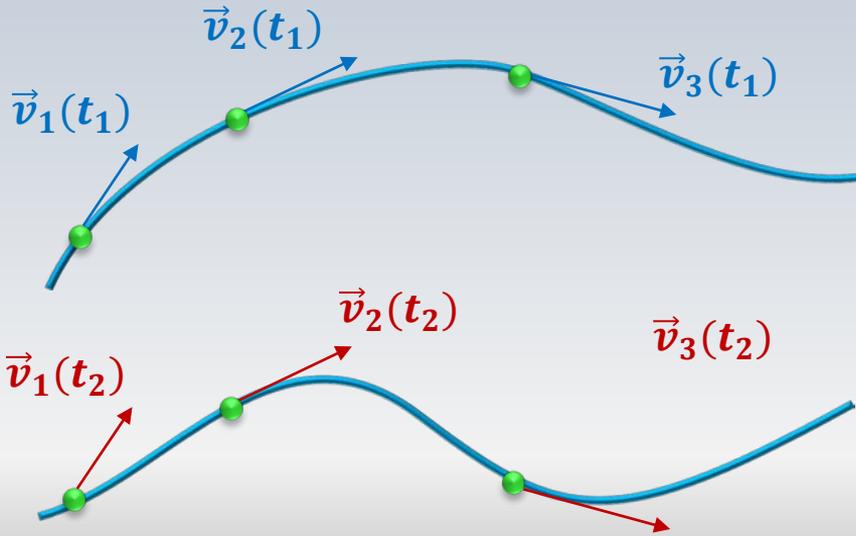
Le panache de fumées sortant d'une cheminée illustre en pratique l'idée de lignes d'émission



Ligne de courant (streamline)

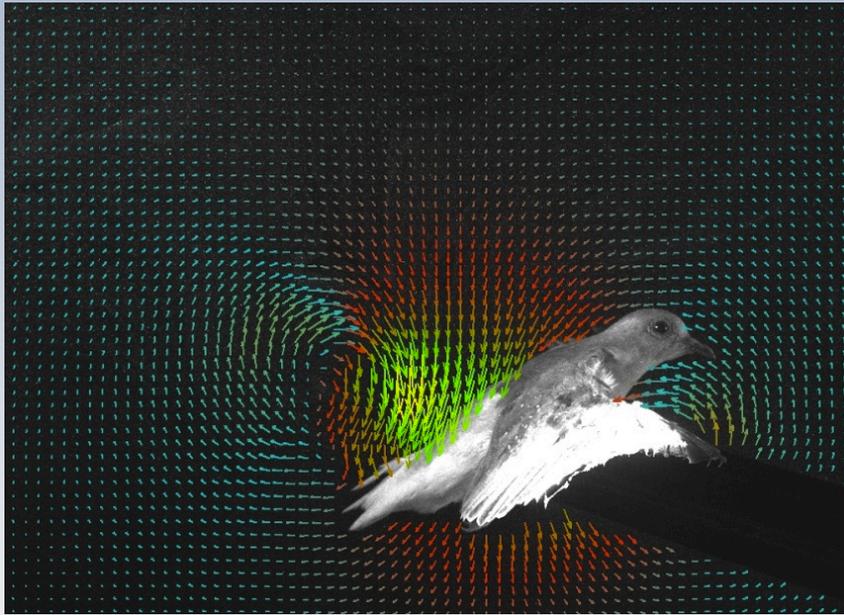
1.11 lignes de courant..

Ligne de courant: La courbe tangente aux vecteurs vitesse de l'écoulement à un temps **t fixe**. On peut l'interpréter comme une photo instantanée de l'écoulement.



Ligne de courant à $t = t_1$

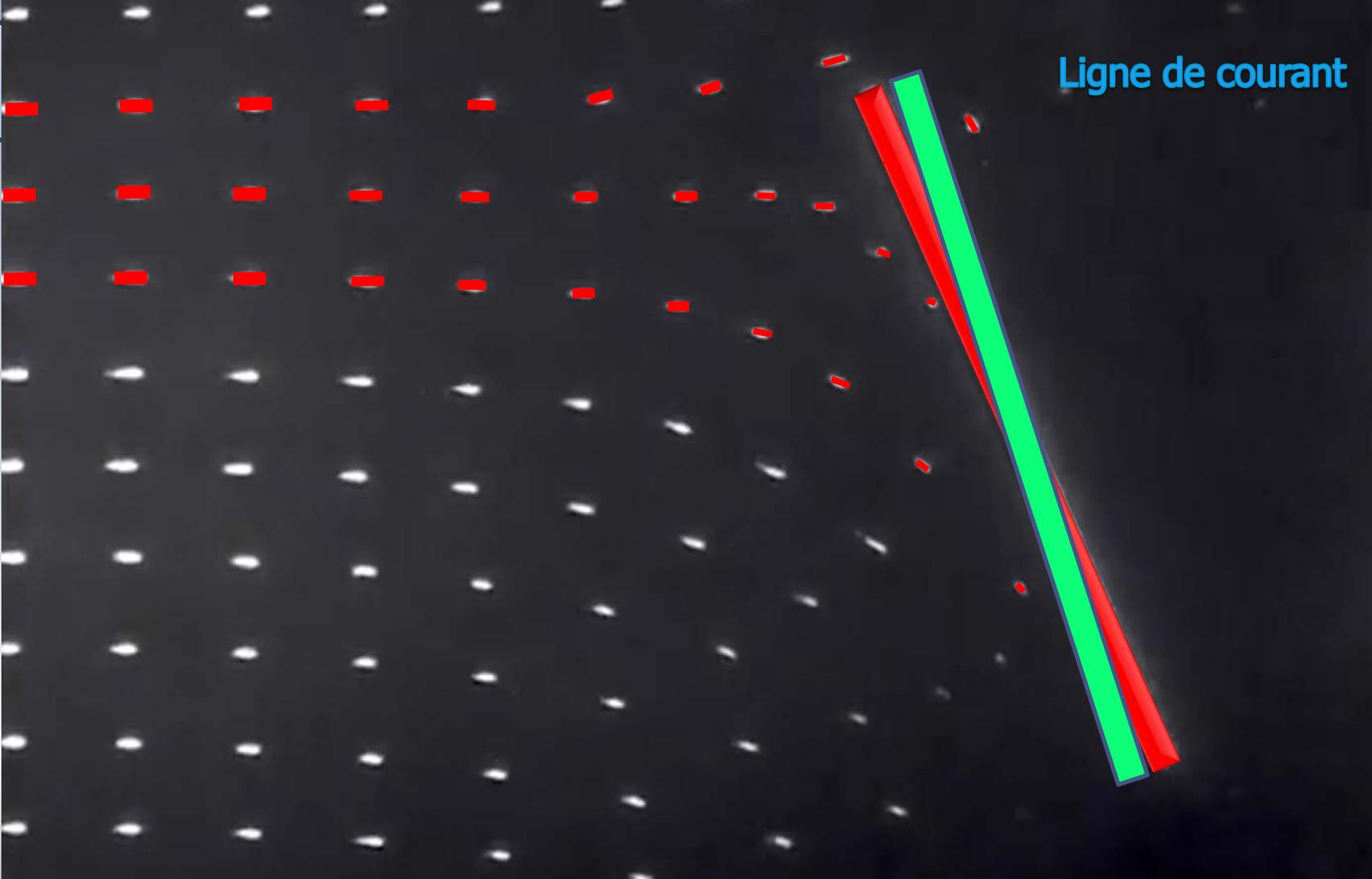
Ligne de courant à $t = t_2$



Champs de vitesses autour d'espèces vivantes

Ligne de courant

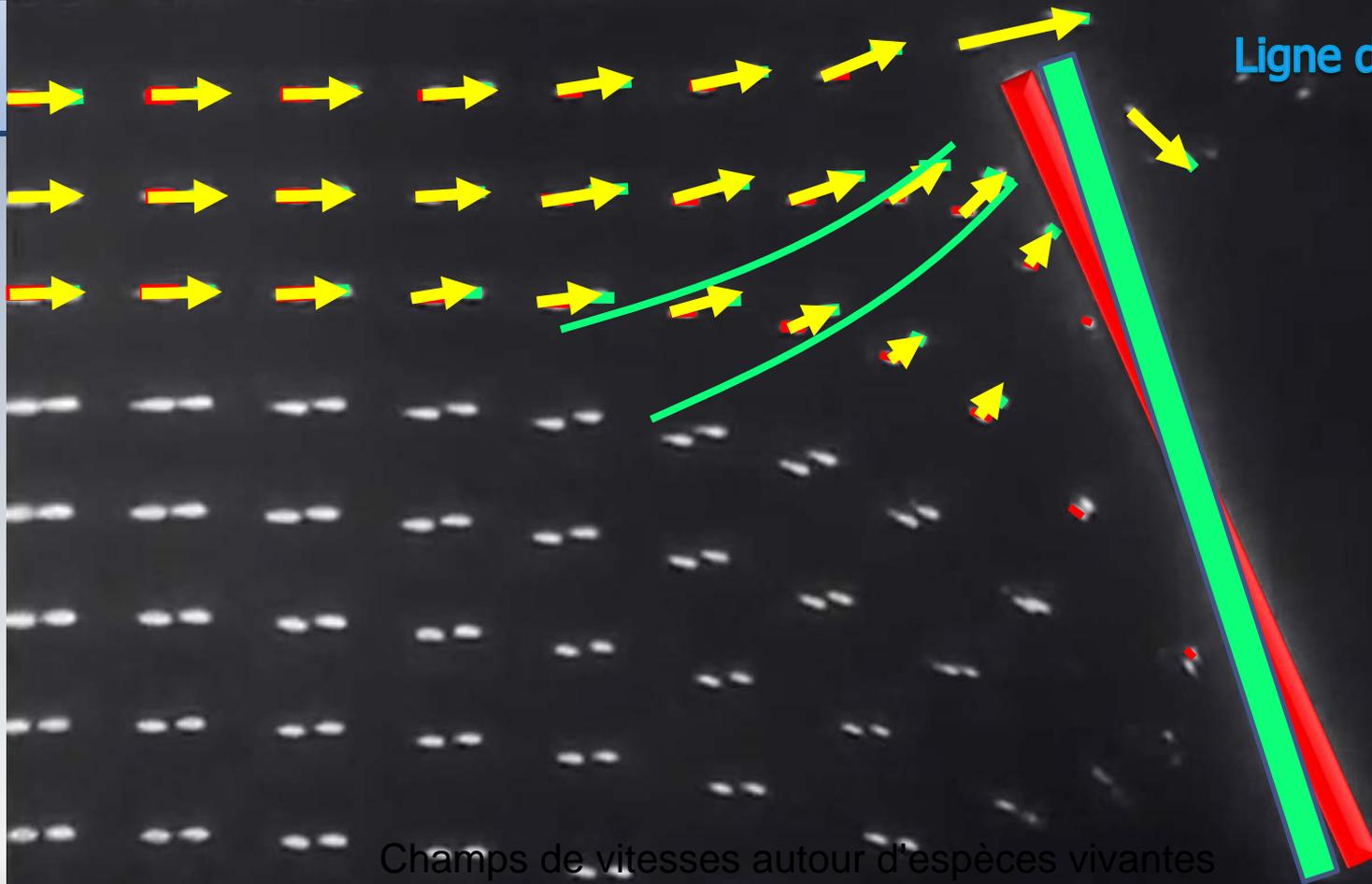
rant..



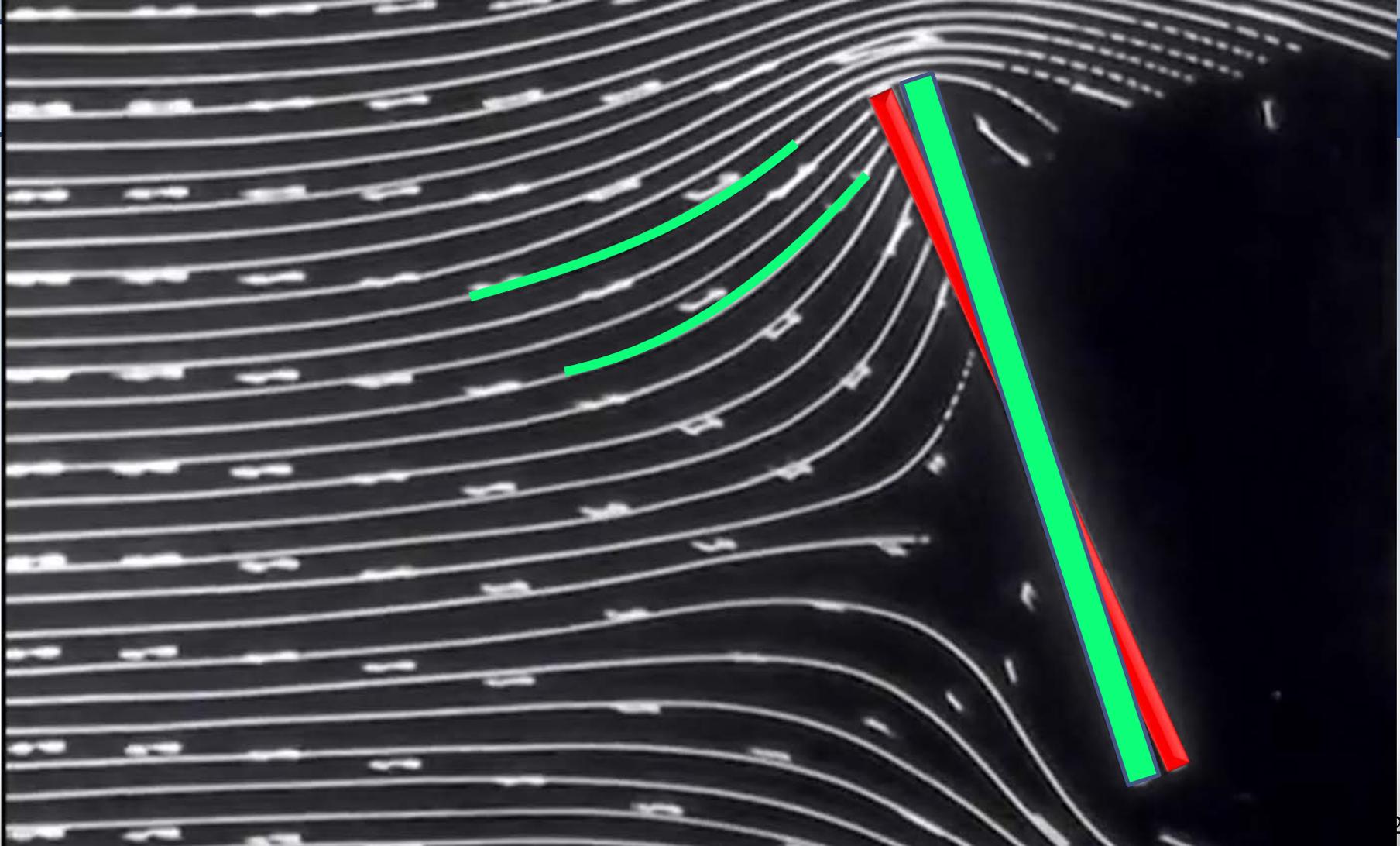
Ligne de courant

Champs de vitesses autour d'espèces vivantes

Ligne de courant



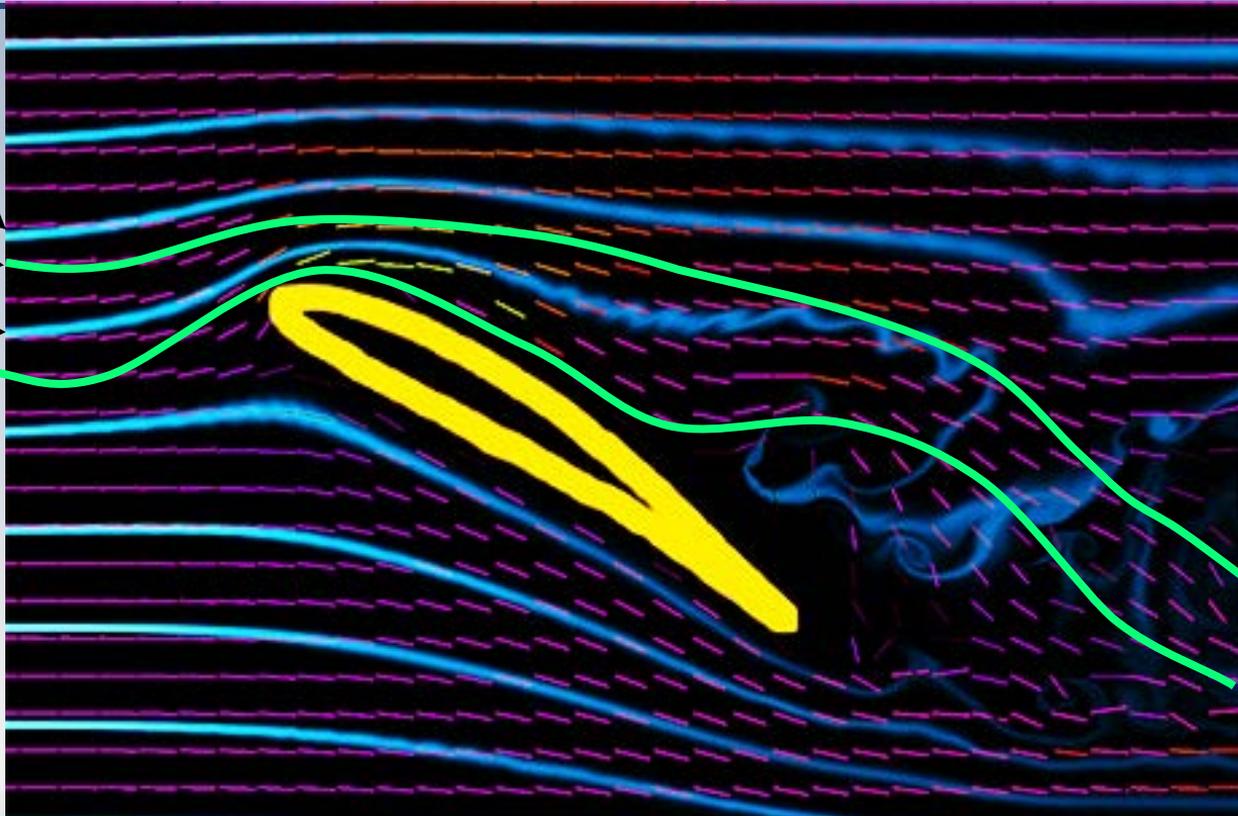
Champs de vitesses autour d'espèces vivantes



Trajectoires et lignes de courant

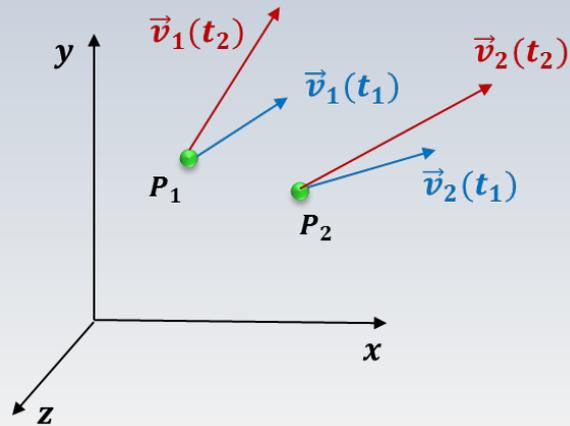
1.11 lignes de courant..

Trajectoire
Ligne de courant
Trajectoire
Ligne de courant

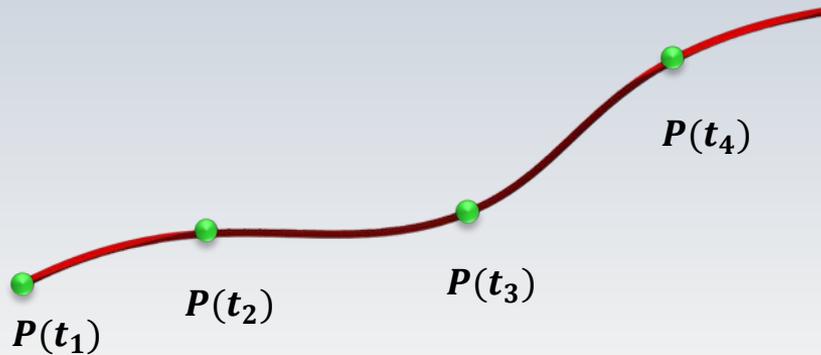


La notion de **ligne de courant**, la courbe tangente en chaque point au champ des vitesses, est étroitement liée à la **formulation eulérienne**

est étroitement liée à la



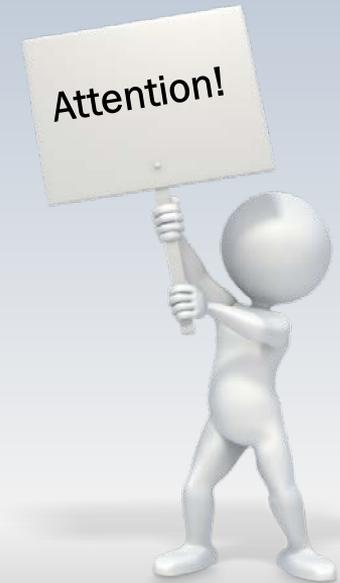
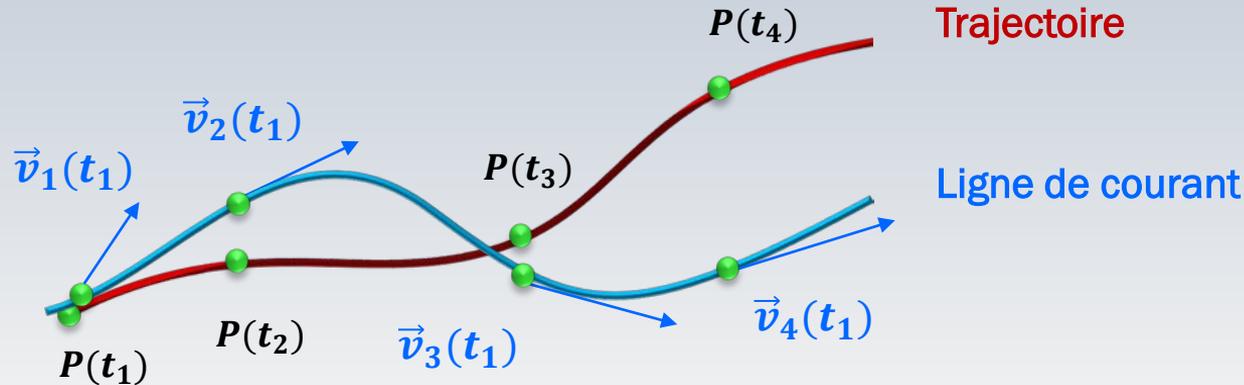
La notion de **trajectoire**, l'ensemble de positions successives d'une particule de fluide au cours du temps, est directement liée à **la formulation lagrangienne**



Remarque III

1.11 lignes de courant..

Bien que les notions de ligne de courant, ligne d'émission et de trajectoire sont différentes, ces courbes coïncident à l'état stationnaire!



Remarques

1.11

4.1

4.2

4.3

4.10

4.8

1.11 Lignes de courant, lignes d'émission et trajectoires

4.1 Accélération

4.2 Équation différentielle de la conservation de la masse

4.3 Équation différentielle de la quantité de mouvement

4.10 Quelques solutions des équations de Navier-Stokes

4.8 Vorticité et irrotationnalité



4.9

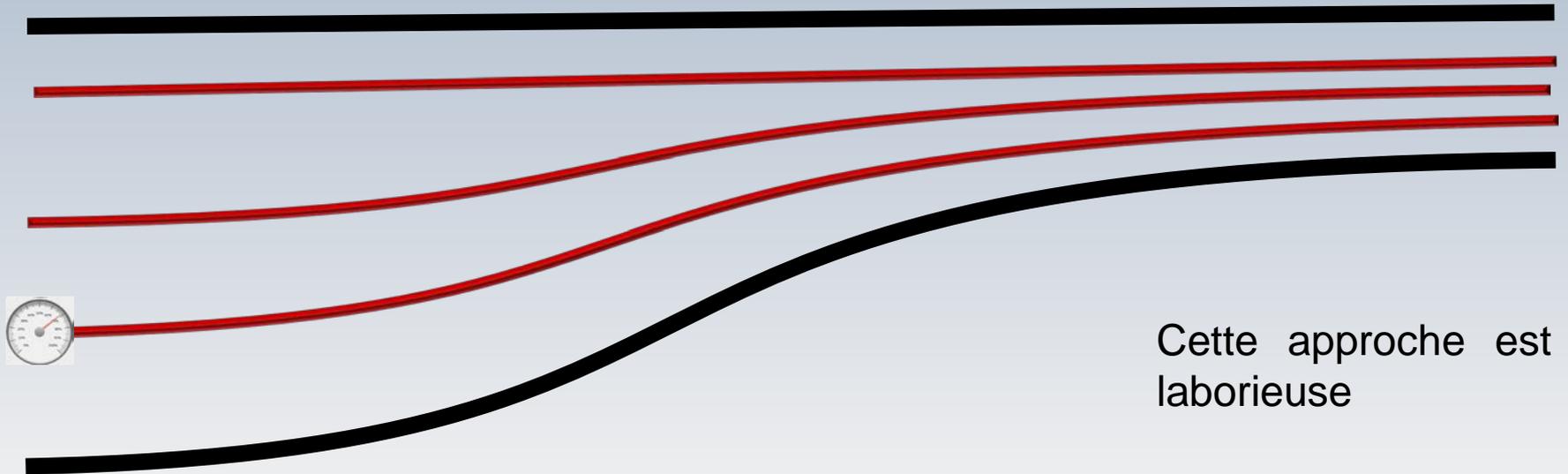
3.05

Dans la loi de Newton:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visc} = m\vec{a}$$

l'accélération \vec{a} correspond à la variation temporelle de la vitesse telle que vécue par **une particule de fluide en mouvement**. C'est-à-dire, à celle décrite par une **formulation lagrangienne**.

Mesure lagrangienne

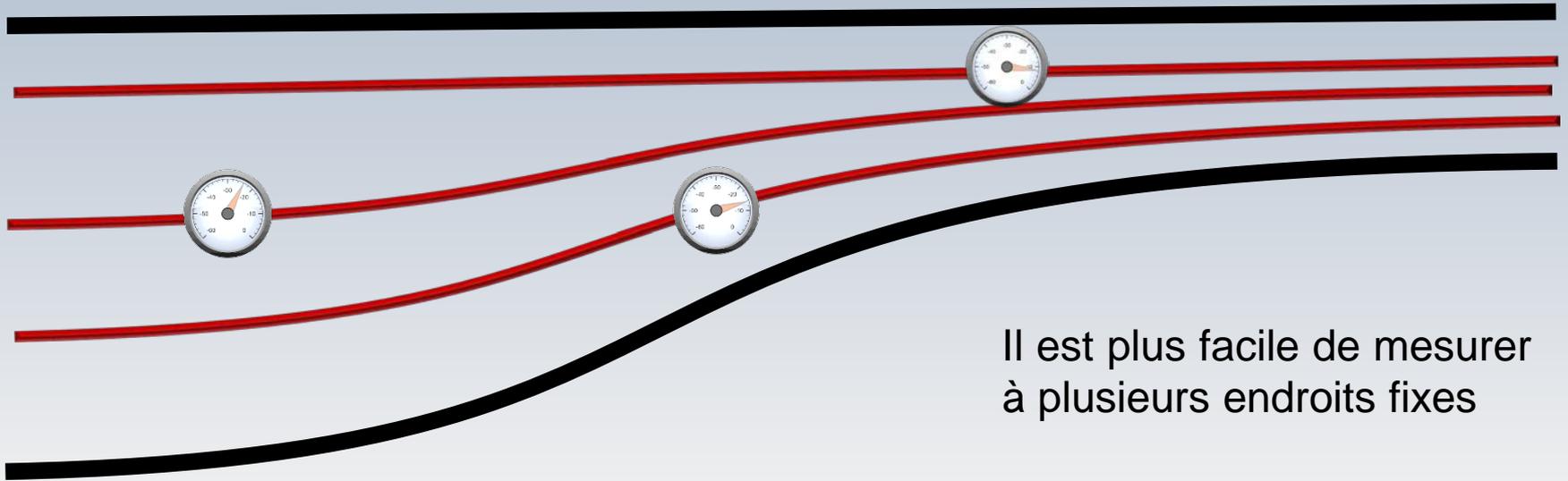


Cette approche est laborieuse

Par contre, la représentation **eulérienne** est plus pratique pour décrire les fluides à des endroits fixes (expérimentalement et mathématiquement)

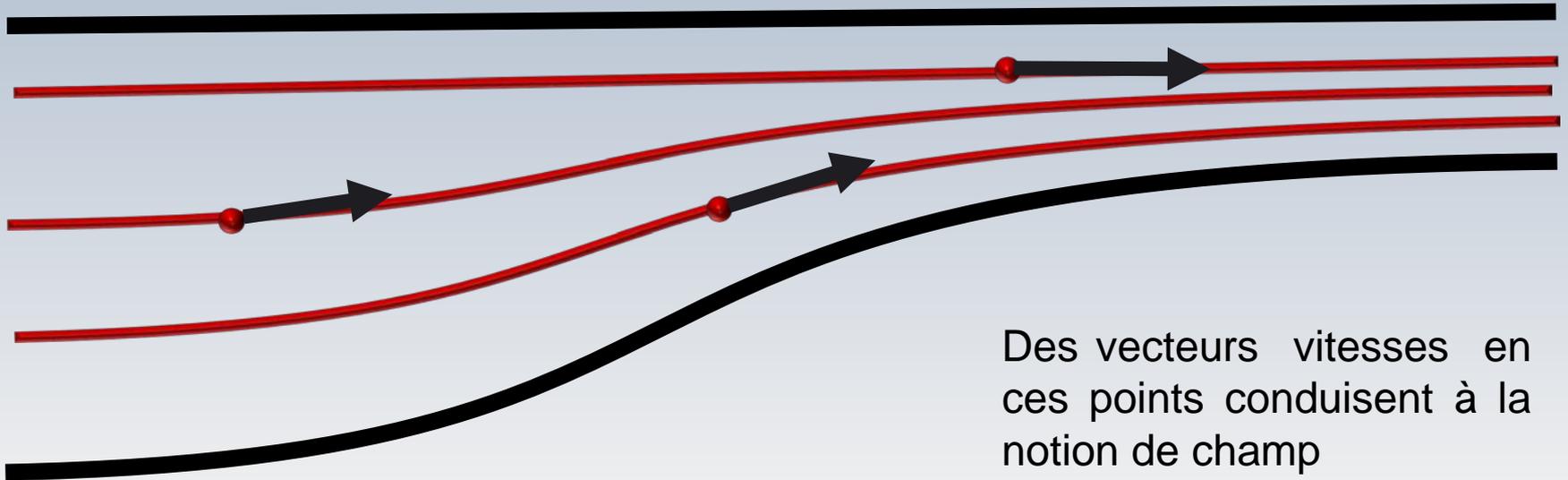
On utilise alors cette dernière pour exprimer l'accélération \vec{a} en fonction du champ (eulérien) des vitesses.

Mesure eulerienne



Il est plus facile de mesurer
à plusieurs endroits fixes

Mesure eulerienne



Des vecteurs vitesses en ces points conduisent à la notion de champ

Pour établir une relation mathématique entre les points de vue eulérien et lagrangien, pour lequel **la loi de Newton** s'applique, on a introduit la notion de **dérivée totale, dérivée matérielle, dérivée substantielle** ou encore **dérivée particulière**.

Dérivée quoi?



$$\frac{D}{Dt}$$

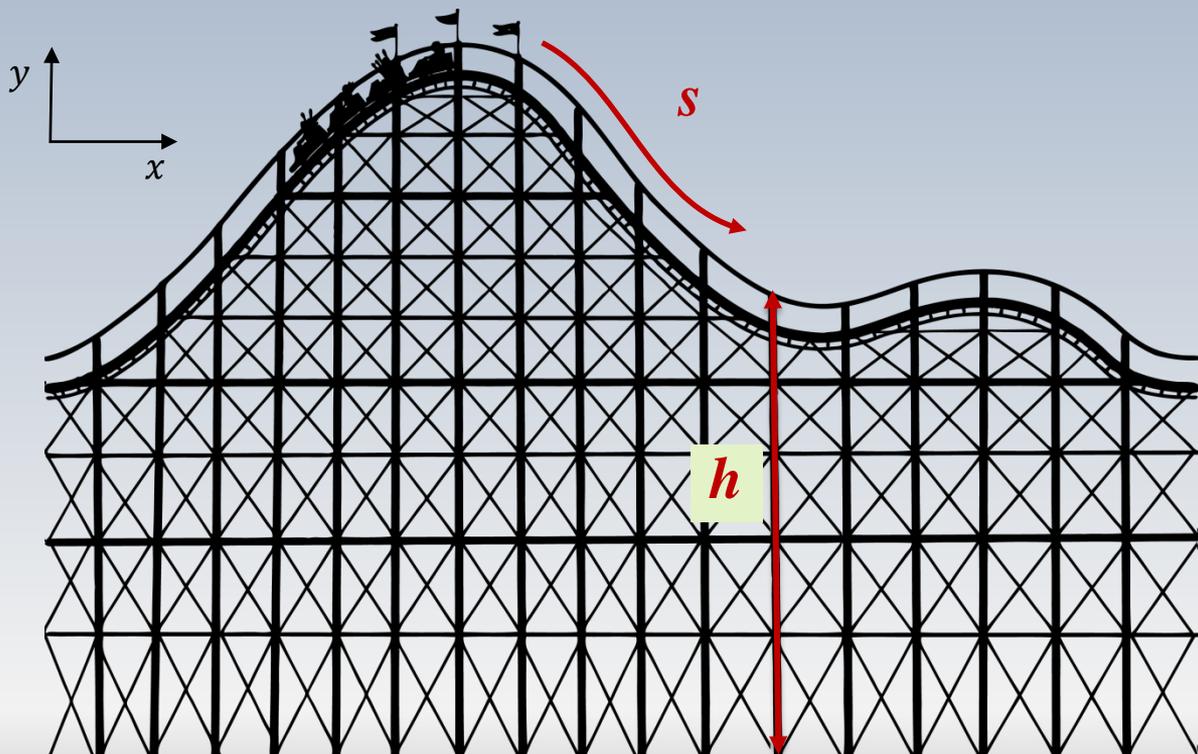
symbole employé pour noter la **dérivée totale, matérielle, substantielle ou particulaire**. Il indique la variation dans le temps d'une quantité ressentie par un opérateur "à cheval" d'une particule de fluide.

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

nomenclature pour indiquer la variation temporelle de la même quantité à **un point fixe dans l'espace**.

La montagne russe

4.1 l'accélération



$$h = h(s, x, y)$$

$$x = x(s)$$

$$y = y(s)$$

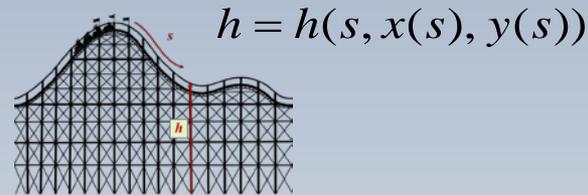
$$h = h(s, x(s), y(s))$$

Nous rappelons la règle
de la dérivée en chaîne

Fonction f quelconque

4.1 l'accélération

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$



$$h \rightarrow f, \quad s \rightarrow t$$

$$d \rightarrow D$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$$

The diagram shows the transformation of the total derivative from a path parameter s to time t . The partial derivatives with respect to x and y are multiplied by the components of the velocity vector u and v respectively. A blue arrow points from the left equation to the right equation.

u et v composantes cartésiennes de la vitesse en deux dimensions

Dérivée matérielle: scalaire f en 3D

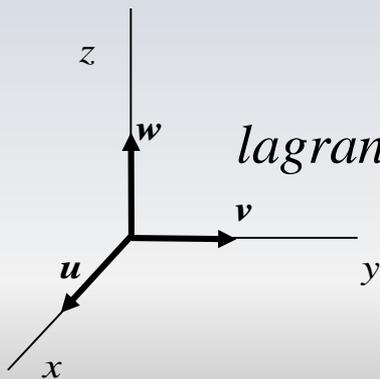
4.1: accélération

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f$$

$$\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$



lagrangienne

eulerienne

Scalaire f dans l'espace 3D

4.1 l'accélération

Dérivée matérielle

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f$$

Variation temporelle de f
lorsqu'on suit le mouvement

Variation temporelle de f
à un endroit fixe.

Variation de f causée par le mouvement
d'une particule d'un point à un autre

La dérivée substantielle, ou matérielle, Df/Dt indique la variation d'une quantité scalaire f (masse, température, etc.) comme perçue par **un observateur qui se déplace avec l'écoulement**

À un endroit fixe, cette variation peut être décomposé en **deux types de changements**

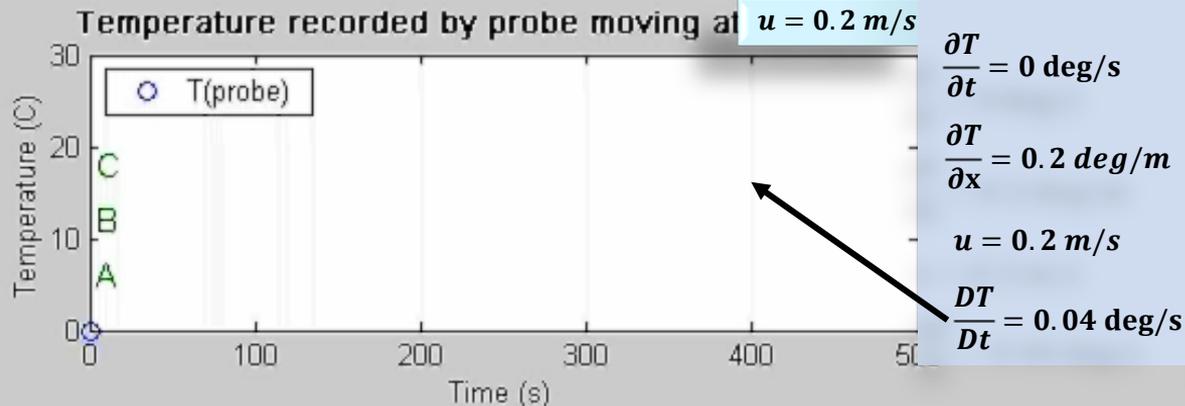
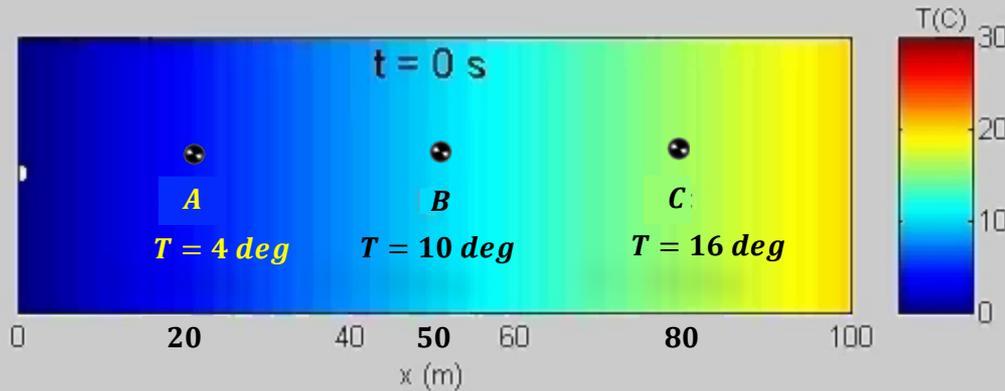
- $\partial f / \partial t$: variation temporelle de f **en ce point**
- $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f$: variation de f lorsque **l'observateur se déplace avec l'écoulement d'un point à l'autre du domaine**

$D/Dt \neq \partial/\partial t$, et en régime permanent $\partial/\partial t = 0$, mais $D/Dt \neq 0$

Exemple numérique

4.1 l'accélération

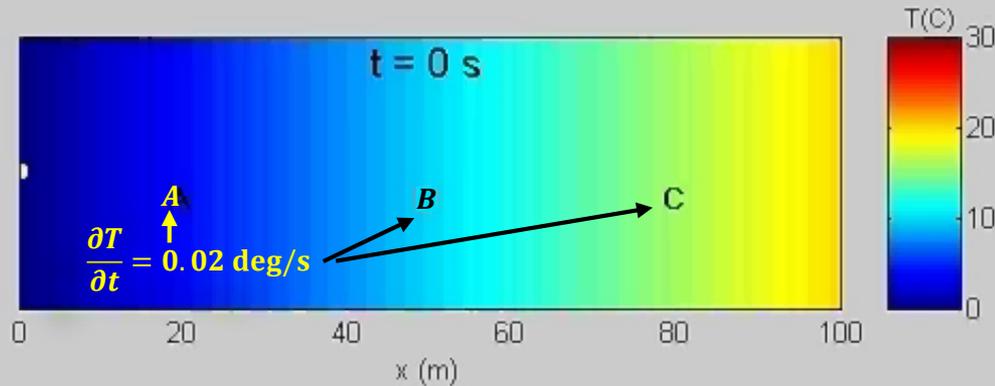
$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x}$$



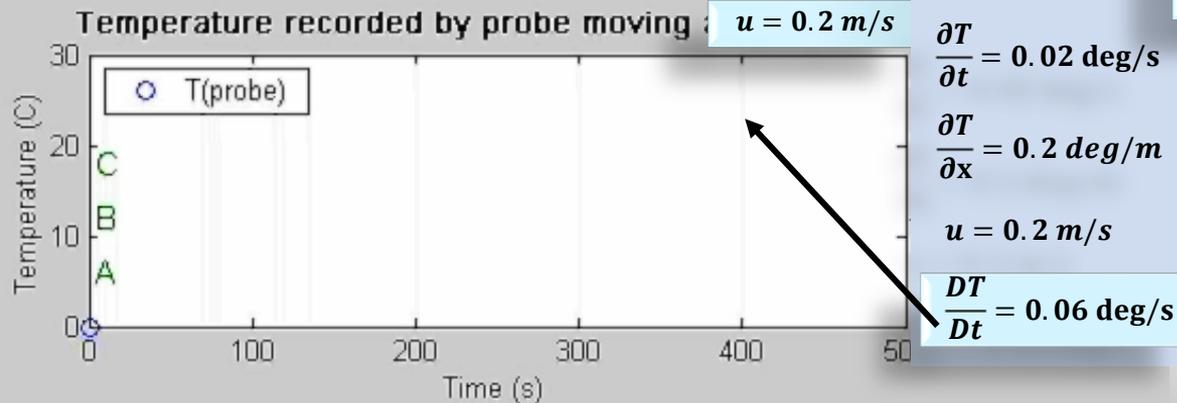
Exemple numérique

4.1 l'accélération

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x}$$

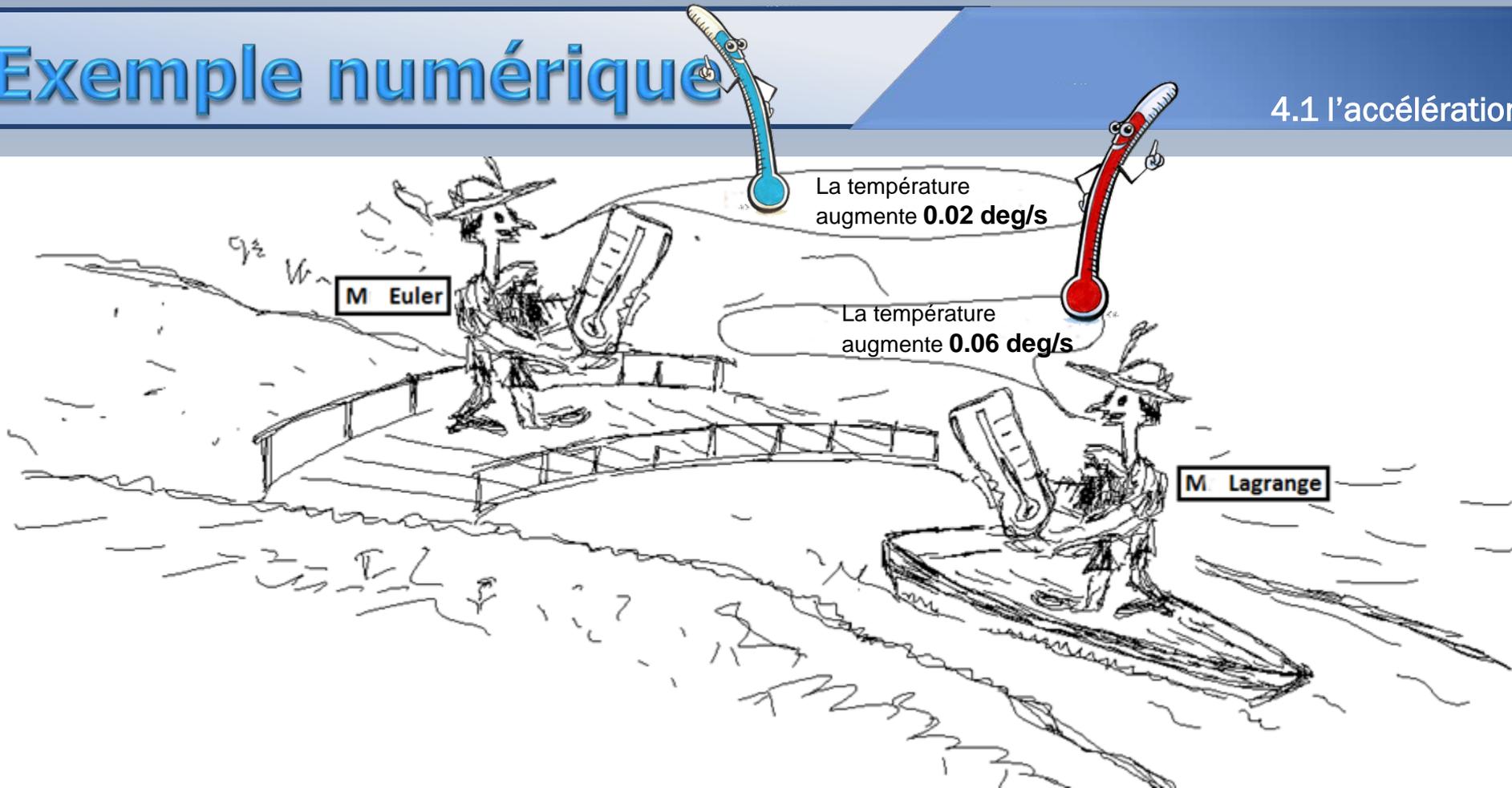


$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f$$



Exemple numérique

4.1 l'accélération



Interprétation

4.1 l'accélération

J'illustre la dérivée matérielle lorsque je déverse et que je navigue dans le fleuve

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f$$

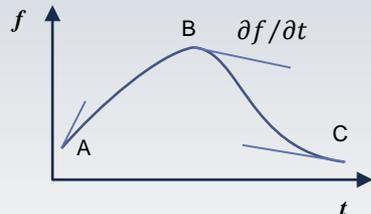
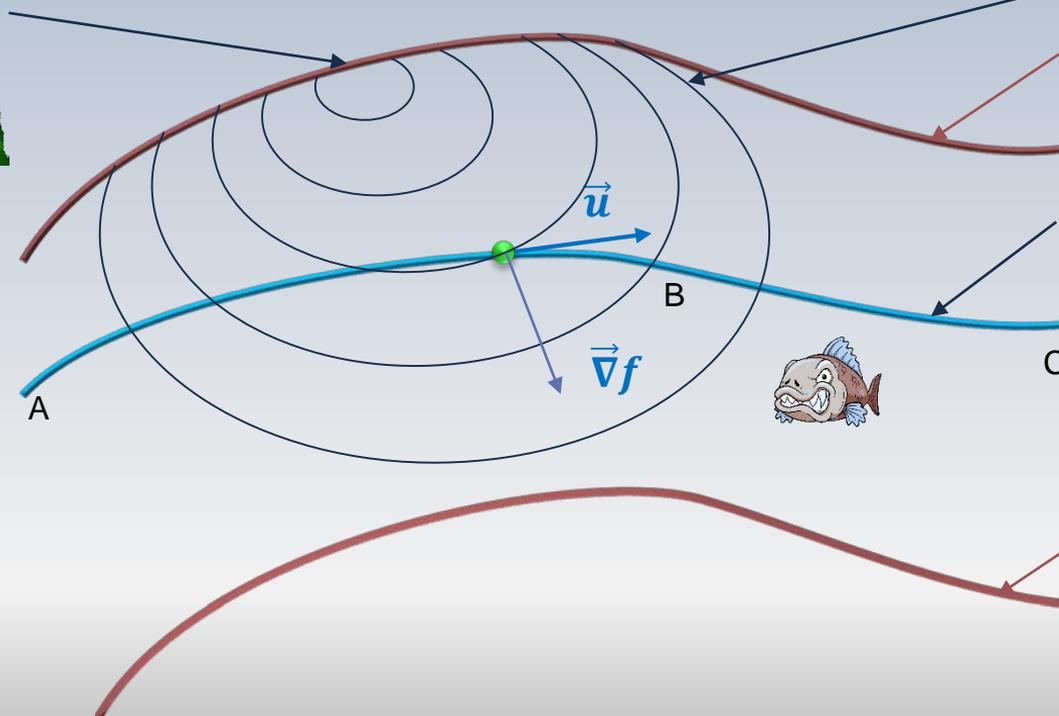
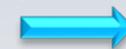


Iso-concentration du contaminant f

Rive

Trajectoire

Fleuve



Le vecteur accélération

4.1 l'accélération

La dérivée particulaire peut aussi être utilisée pour définir **le vecteur accélération** \vec{a} d'une particule fluide

Elle exprime l'accélération comme perçue par un observateur qui se déplacerait avec l'écoulement, mais calculée au moyen d'un champ de vitesses à des endroits fixes. Mathématiquement parlant :

La dérivée substantielle emploie la formulation eulérienne pour calculer l'accélération, lagrangienne, requise dans la loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

Le vecteur accélération

4.1 l'accélération

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

Accélération lagrangienne
utilisée dans $\vec{F} = m\vec{a}$

Accélération locale due à la variation
de la vitesse dans le temps à un endroit fixe

Je clique pour en savoir plus
sur la dérivée matérielle

Accélération convective
causée par le transport

Ce terme est **inexistant**
en mécanique de solides



SVP, je ne veux pas
d'autres formules



Le terme $(\partial \vec{u} / \partial t)$, appelé **accélération locale**, provient de la comparaison des vitesses de particules successives **en un point fixe**. Cette accélération a lieu lorsque l'écoulement est transitoire

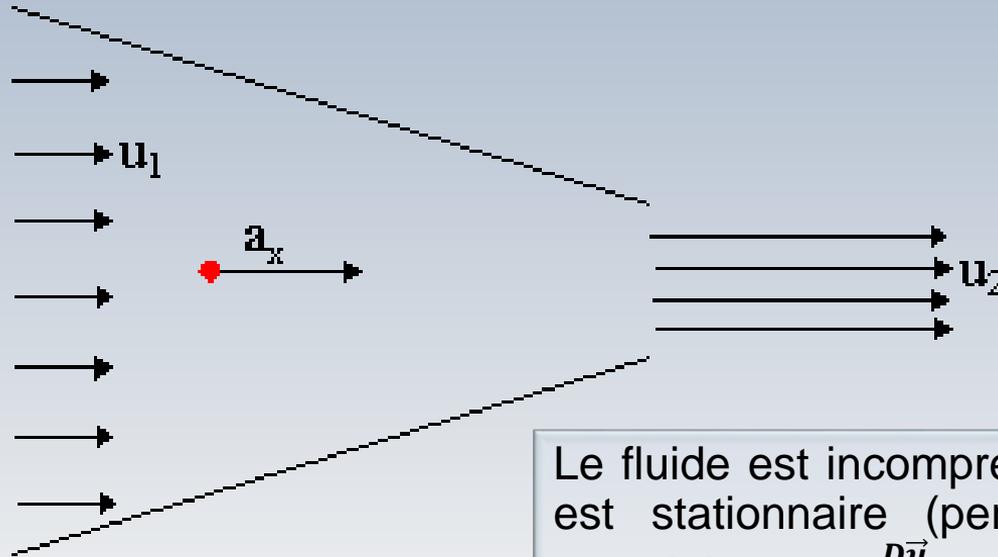
Le second terme $((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u})$, appelé **accélération convective**, est associé au gradient spatial de la vitesse

L'accélération convective résulte lorsque l'écoulement n'est pas uniforme, c'est à dire, si la vitesse varie le long d'une ligne de courant.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

L'accélération: une animation

4.1 l'accélération



Le fluide est incompressible et l'écoulement est stationnaire (permanent). Cependant, **l'accélération** $\frac{D\vec{u}}{Dt}$, **n'est pas nulle** puisque la vitesse \vec{u} augmente dans le convergent

Exemple

On a un **champ de vitesse** d'un écoulement dont les composantes sont: $u = 4x^3\hat{i}$, $v = -10x^2y\hat{j}$, $w = 2t\hat{k}$

On doit trouver la vitesse \vec{u} et par la suite les composantes a_x , a_y , a_z , du vecteur d'accélération au point **(2,1,1)**

$$u = 4x^3 = 4 \times 2^3 = 32$$

$$v = -10x^2y = -10 \times 2^2 \times 1 = -40$$

$$w = 2t = 2 \times 1 = 2$$



$$\vec{u} = 32\mathbf{i} - 40\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

L'accélération est donnée par

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

dont les composantes dans le repère cartésien s'écrivent

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Exemple

À partir des composantes $u = 4x^3\hat{i}$, $v = -10x^2y\hat{j}$, $w = 2t\hat{k}$, on peut trouver:

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^2$	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$
$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = -20xy$	$\frac{\partial v}{\partial y} = -10x^2$	$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial t} = 2$	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$

et pour le point (2,1,1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 48$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -40$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -40$, $\frac{\partial w}{\partial t} = 2$

Exemple

4.3 Conservation de la masse

Finalemment

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 48, \frac{\partial v}{\partial x} = -40, \frac{\partial v}{\partial y} = -40, \frac{\partial w}{\partial t} = 2$$

$$\begin{array}{r} u = 32 \\ v = -40 \\ w = 2 \end{array}$$

$$a_x = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + w \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} = 32 \times 48 = 1536$$

$$a_y = \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} = 32 \times (-40) + (-40) \times (-40) = 320$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} + v \cancel{\frac{\partial w}{\partial y}} + w \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 1536\mathbf{i} + 320\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Chapitre 4 – Lois de conservation locales

1.11

4.1

4.2

4.3

4.10

4.8

1.11 Lignes de courant, lignes d'émission et trajectoires

4.1 L'accélération

4.2 Équation différentielle de la conservation de la masse

4.3 Équation différentielle de la quantité de mouvement

4.10 Quelques solutions des équations de Navier-Stokes

4.8 Vorticité et irrotationnalité



4.9

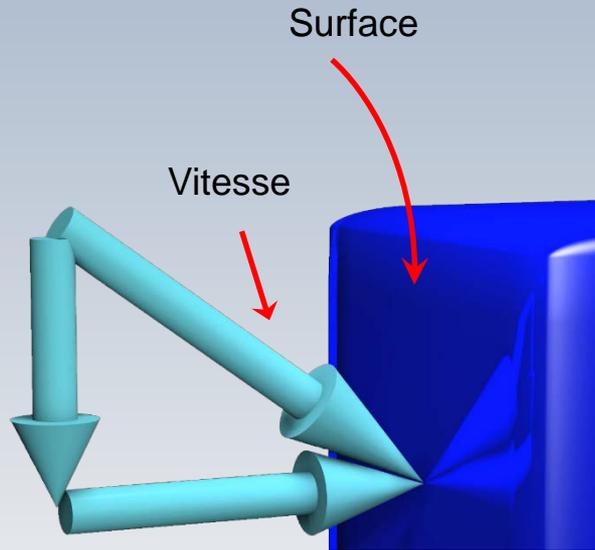
3.05

Pour obtenir l'**accélération**, utilisée dans l'équation de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$), nous employons une description eulérienne du **champ de vitesses** \vec{u} et nous appliquons la transformation offerte par la dérivée substantielle pour calculer \vec{a} , notamment:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$$

Avant de nous consacrer aux forces, nous regarderons deux propriétés importantes d'un champ de vitesses : **la divergence** et **le rotationnel**.

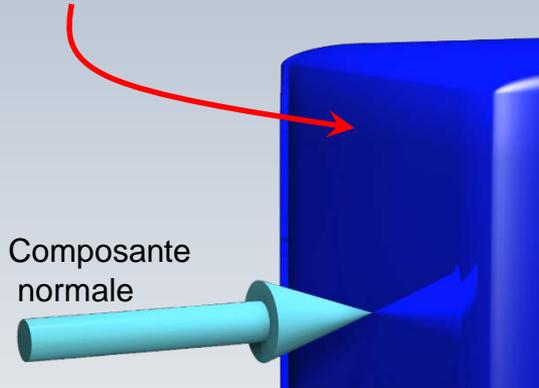
La divergence et le rotationnel



Pour présenter ses deux éléments, **divergence** et **rotationnel**, nous considérons un vecteur vitesse par rapport à une surface élémentaire qui limite un volume V

Divergence I

Surface

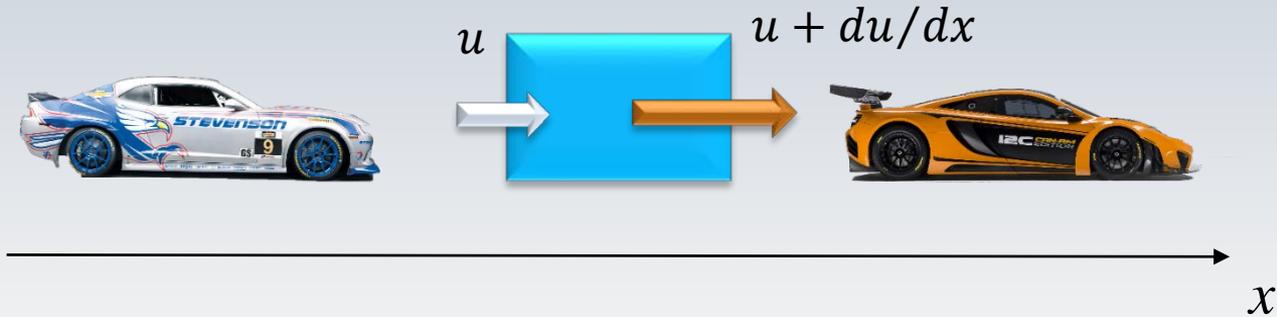


La divergence peut être associée à la **composante normale de la vitesse**.

Celle-ci sera imaginée **attachée** aux faces du volume élémentaire
De cette manière, la composante normale pourra causer une variation du volume

Divergence II

Pour les cas **1D** illustré sur la figure, nous constatons que **la variation du volume est positive (dilatation)** et que cette quantité dépend de la variation de la vitesse, soit de du/dx



Divergence III

Dans le repère cartésien, avec des composantes de la vitesse u, v, w selon les directions x, y, z , respectivement, la variation du volume est fonction de

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Cette expression est décrite comme la divergence d'un champ de vitesses \vec{u} à l'aide de l'opérateur $\vec{\nabla}$. Notamment comme:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Pour compléter, notons que la divergence a une interprétation physique bien précise

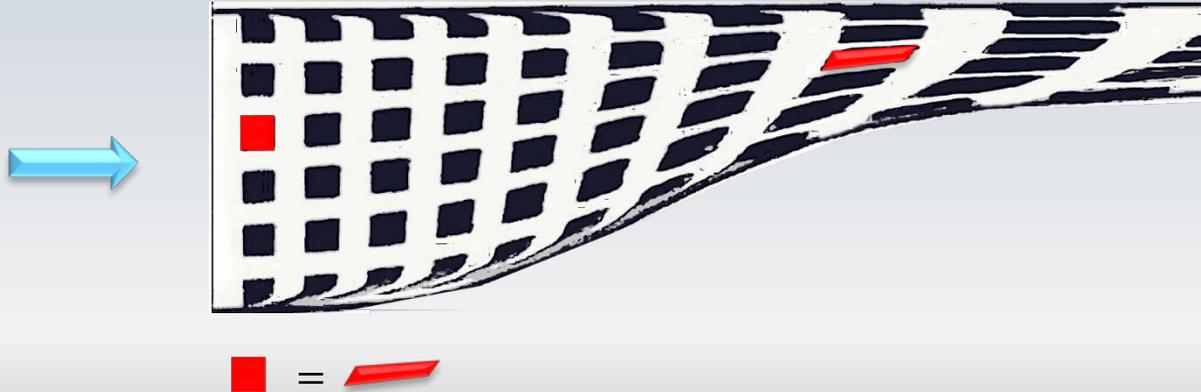
*la divergence de la vitesse $\nabla \cdot \vec{u}$, représente le **taux de dilatation** d'un volume de fluide (δV) en mouvement **par unité de volume***

Mathématiquement, “après quelques étapes”, on peut écrire:

$$\frac{1}{\delta V} \left(\frac{D \delta V}{Dt} \right) = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Remarque

Il ne faut pas confondre **dilatation** avec **déformation**. La figure représente un écoulement dans un passage convergent où la vitesse augmente de gauche à droite. Les éléments carrés se déforment, mais leur volume demeure constant (dilatation nulle)



Divergence et incompressibilité

Un fluide est dit **incompressible** lorsque **son volume**, ou bien sa **masse volumique**, demeure constant sous l'action d'un changement de pression. En mécanique des fluides, on considère souvent que les liquides sont incompressibles

Lors d'un écoulement **incompressible**, le fluide peut se **déformer**, mais **sans changement de volume**

La divergence de l'écoulement est alors nulle ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$):

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Les concepts de divergence et de dérivée matérielle seront utilisés dans la suite pour retrouver l'équation fondamentale pour **la conservation de la masse**

Soit $\delta m = \rho \delta V$ la masse d'un **volume élémentaire fermé** δV d'un fluide **en mouvement**

Puisque la masse dans un système **fermé ne change pas**, alors

$$\frac{D\delta m}{Dt} = 0$$

Conservation de la masse

4.3 Conservation de la masse

Le développement de l'équation précédente mène à

$$\frac{D\delta m}{Dt} = \frac{D\rho dV}{Dt} = 0$$



$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} \right] = 0$$

①

Remarque: Les règles de dérivation de la dérivée matérielle sont analogues à celles pour la dérivée ordinaire

Dérivée matérielle et conservation de la masse

La combinaison de cette équation avec la formule pour $\nabla \cdot \vec{u}$

$$\frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = \nabla \cdot \vec{u} \quad \leftarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} \right] = 0 \quad \textcircled{1}$$

permet de trouver **l'équation de continuité**

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$



$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho$$

Un champ de vitesse est donné par :

$$u = x^2 y, \quad v = y^2 z, \quad \text{et} \quad w = -(2xyz + yz^2)$$

Indiquez si ce champ décrit un écoulement incompressible

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \mathbf{0?} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2yz \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -2xy - 2yz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2xy + 2yz - 2xy - 2yz = \mathbf{0}$$

```
syms x y z
divergence([y*x^2, z*y^2, -(2*x*y*z+y*z^2)], [x, y, z])
ans = 0
```

Oui! Le champ de vitesse donné représente le cas d'un écoulement incompressible

On connaît les composantes d'un champ de vitesse:

$$v = 2y^2, \quad \text{et} \quad w = 2xyz$$

On doit trouver une expression pour *la composante manquante* u de sorte que l'écoulement soit **incompressible**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 4y + 2xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$du = -(4y + 2xy)dx$$

$$u = -(4xy + x^2 y) + f(y, z)$$

Exemple

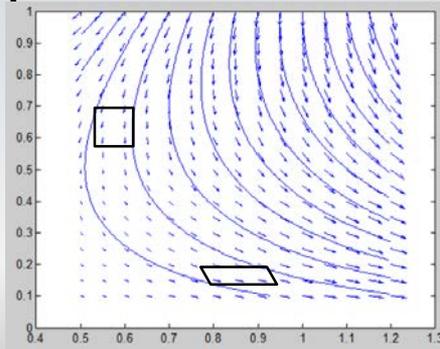
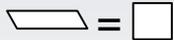
Un champ de vitesse est donné par :

$$u = a(x^2 - y^2), \quad v, \quad \text{et} \quad w = b$$

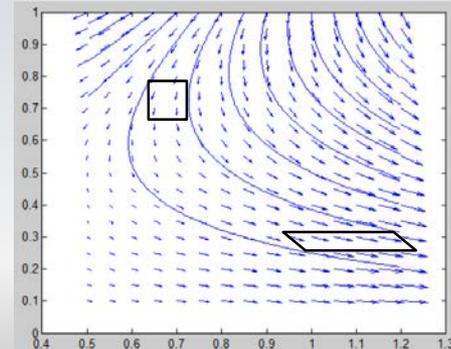
où a et b sont des constantes. Quelle doit être la forme de la composante de vitesse v pour que le champ soit incompressible ?

D'après cette illustration, y a-t-il conservation du volume au cours du mouvement ?

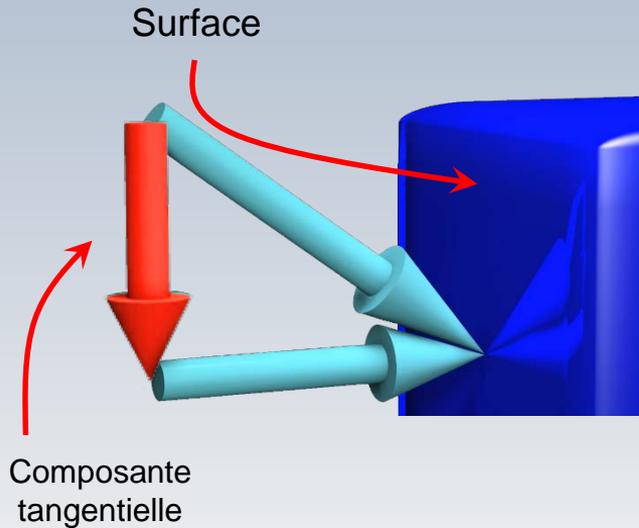
$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$$



La composante tangentielle

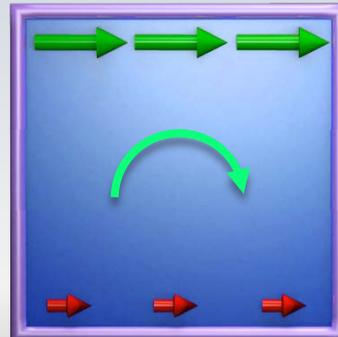
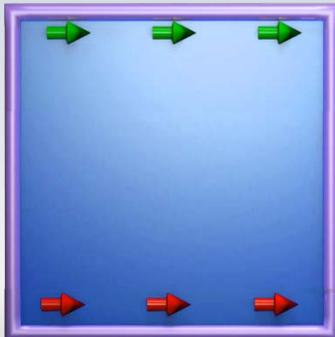


On examine maintenant une quantité liée à l'effet engendré par **la composante tangentielle de la vitesse**. Celle-ci sera imaginée attachée aux faces du volume élémentaire

Le rotationnel I

Pour simplifier l'analyse, nous regarderons le cas bidimensionnel illustré sur les figures ci-dessous.

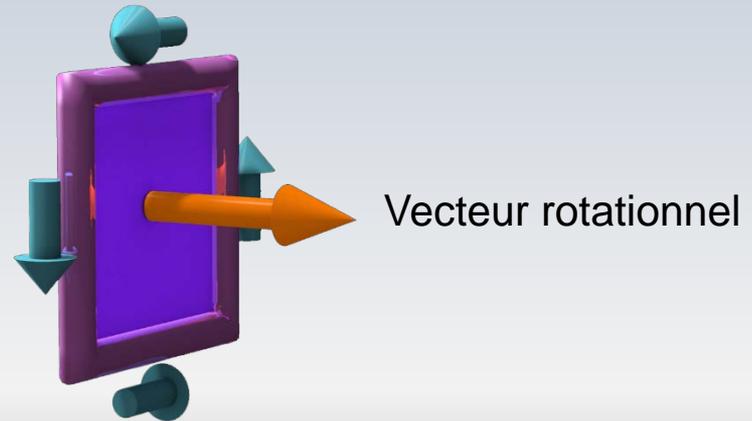
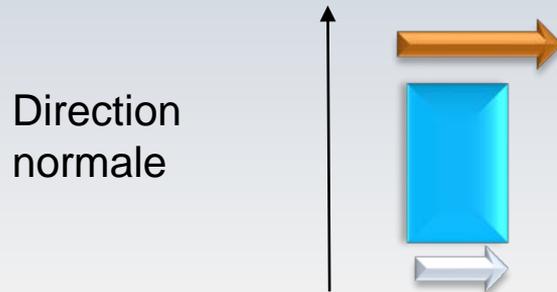
Lorsque les vitesses sur les faces inférieures et supérieures sont égales (à gauche), aucun effet n'est noté. Par contre, la différence de vitesses (à droite) fera tourner le carré dans le sens horaire



Le vecteur rotationnel

4.8 Vorticité et...

Le taux de variation du vecteur vitesse dans la direction normale à celui-ci (à gauche) se mesure par le rotationnel. Il s'agit d'un vecteur perpendiculaire au champ de vitesses (à droite)



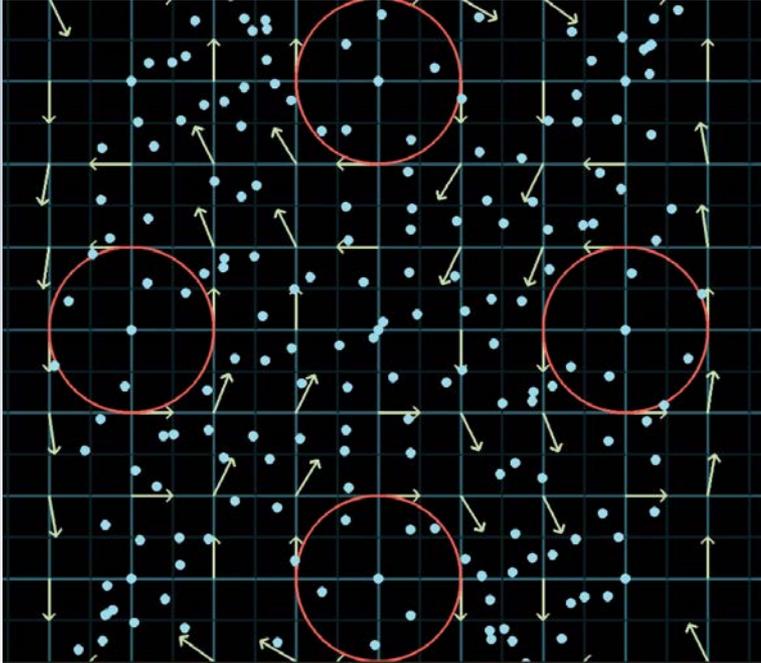
En **deux dimensions**, le rotationnel de la vitesse $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j}$ ayant des composantes cartésiennes de la vitesse u et v est défini par

$$\nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

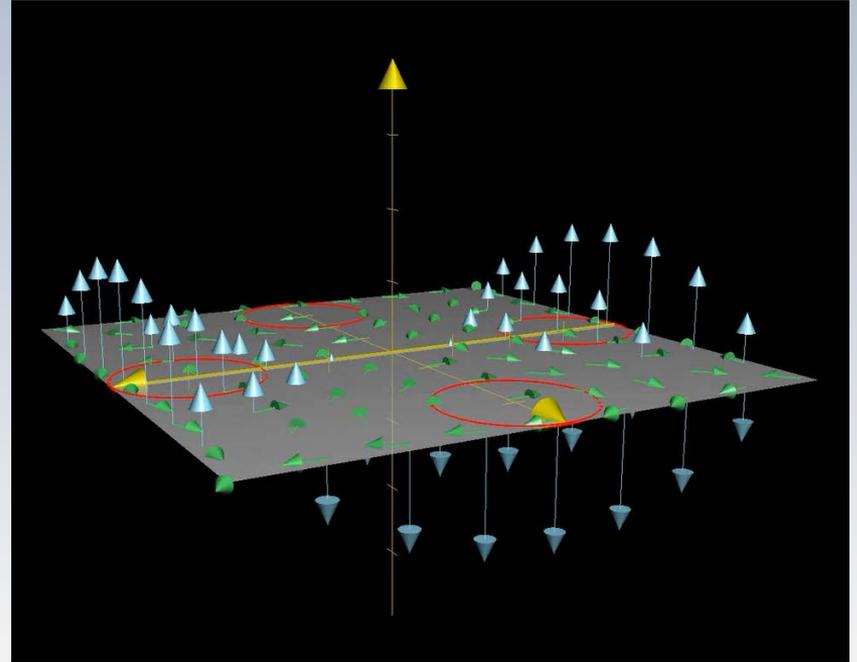
avec

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Visualisation du rotationnel



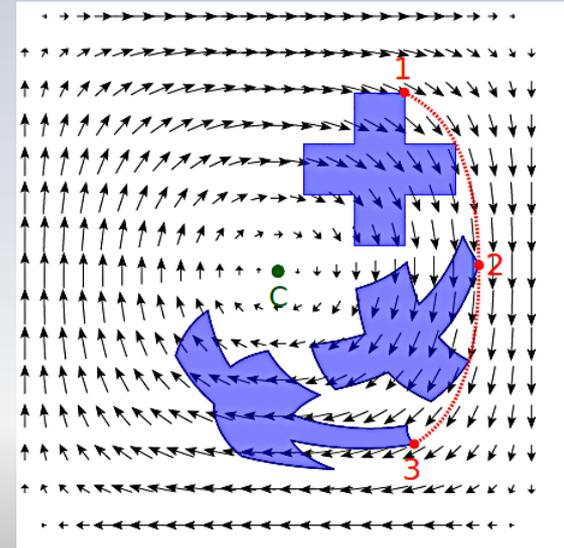
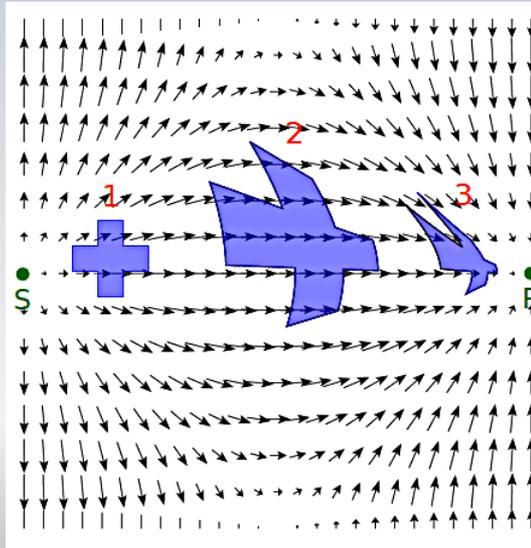
Champ de **vitesses**



Champ du **rotationnel**

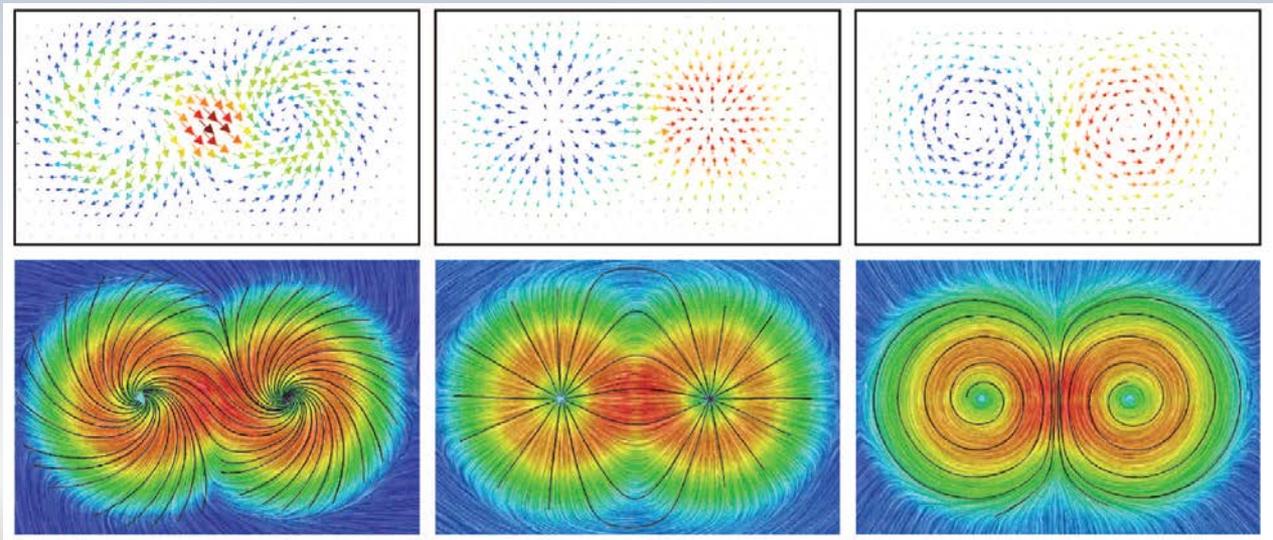
Remarque I

Dans un champ dont le rotationnel est **nul** (à gauche), le transport d'une parcelle de fluide se fait sans rotation (sur elle même) et à volume variable. Dans un champ à divergence **nulle** (à droite), la parcelle peut effectuer des rotations, mais son volume reste constant



Remarque II

Un champ vectoriel (fig. à gauche) peut se représenter comme la combinaison d'un champ à divergence nulle (fig. au centre) et un champ dont le rotationnel et nul (fig. à droite)



Partie solénoïdale

Partie irrotationnelle

Intérêt pratique du rotationnel

L'intérêt porté sur le rotationnel réside dans le fait:

Des couches adjacentes d'un fluide ayant des vitesses différentes, conduisent à une **force de cisaillement**. Le **rotationnel** est une **mesure du gradient de vitesse entre ces couches**

Avec ces deux éléments, divergence et rotationnel, nous retournons aux équations qui gouvernent le mouvement d'un fluide.

Un vidéo vaut 10^6 mots

Chapitre 4 – Lois de conservation locales

1.11

4.1

4.2

4.3

4.10

4.8

1.11 Lignes de courant, lignes d'émission et trajectoires

4.1 L'accélération

4.2 Équation différentielle de la conservation de la masse

4.3 Équation différentielle de la quantité de mouvement

4.10 Quelques solutions des équations de Navier-Stokes

4.8 Vorticité et irrotationnalité



4.9

3.05

L'équation de conservation de la quantité de mouvement correspond à la seconde loi de Newton

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = m\vec{a}$$

Nous avons déjà trouvé une façon pour exprimer l'accélération d'une particule de fluide:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$$

Il faut maintenant s'intéresser à l'autre membre de l'équation, soit aux forces présentes dans l'expression

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Parmi celles-ci on distingue le **poids**, qui représente la force volumique la plus courante, et **la pression** et **le cisaillement** qui sont des forces de surface

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{vol} + \sum \vec{F}_{surf}$$

La force gravitationnelle
(cas le plus courant)

① $\vec{W} = \rho \vec{g}$

La pression

② $\vec{F}_n = -\nabla p$

Le cisaillement

③ \vec{F}_t

La *pression* donne lieu à une *force de surface normale* \vec{F}_n , tandis que le *cisaillement* produit une **force de surface tangentielle** \vec{F}_t . Jusqu'à présent la force tangentielle à été ignorée. Elle sera prise en compte dans la suite.

Remarque: Les expressions pour les forces sont par unité de volume

La force tangentielle \vec{F}_t due au frottement visqueux est particulièrement importante à l'interface entre un fluide en mouvement et les parois solides.

Cette force (dite *traînée de frottement*), a un impact direct sur l'énergie requise pour déplacer un corps dans un fluide.

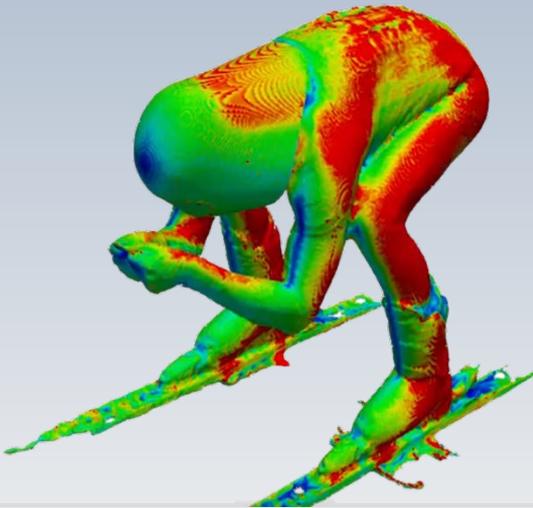
Trainée



Cisaillement

Zones de fort cisaillement (rouge) visqueux sur le corps d'un skieur pendant une descente

L'athlète cherche la position qui minimise le cisaillement



Le cisaillement visqueux est fonction de la **viscosité du fluide**

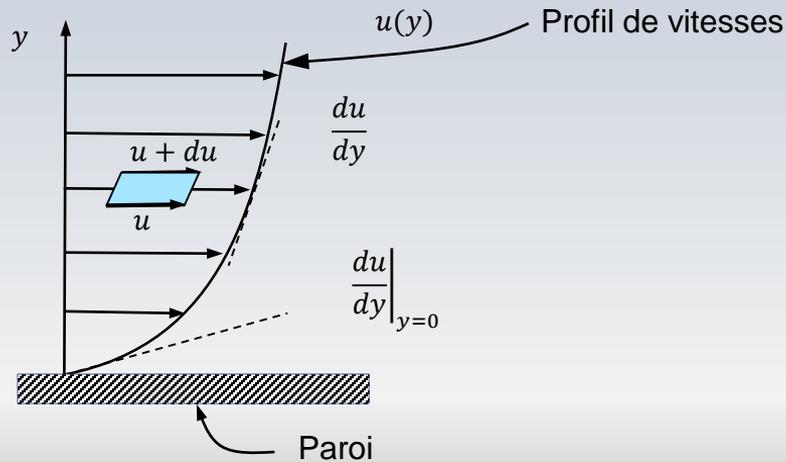
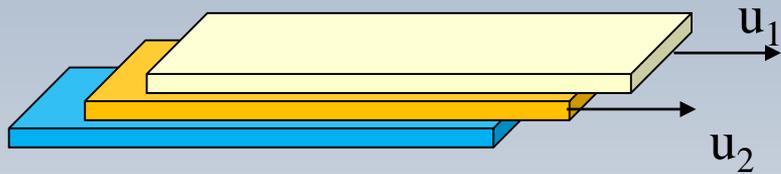
D'un point de vue mécanique, la viscosité peut être interprétée comme **la résistance d'un fluide à l'écoulement.**

On note **qu'un fluide visqueux en mouvement adhère aux parois des solides** avec lesquels il est en contact, c'est ce que l'on appelle **la condition de non-glissement**

Non glissement



Vitesse nulle



La force de cisaillement se manifeste lorsque des couches adjacentes d'un fluide sont en mouvement relatif (la vitesse de chaque couche est différente)

Le taux de cisaillement, ou gradient de vitesse, de ce mouvement relatif est du/dy

La contrainte et la viscosité

4.3 Conservation de la qté. de mvt.

Pour plusieurs fluides rencontrés dans les applications en génie mécanique (eau, l'huile, air, etc.), la **contrainte de cisaillement** τ est proportionnelle au taux de cisaillement, soit $\tau = \alpha \, dU/dy$

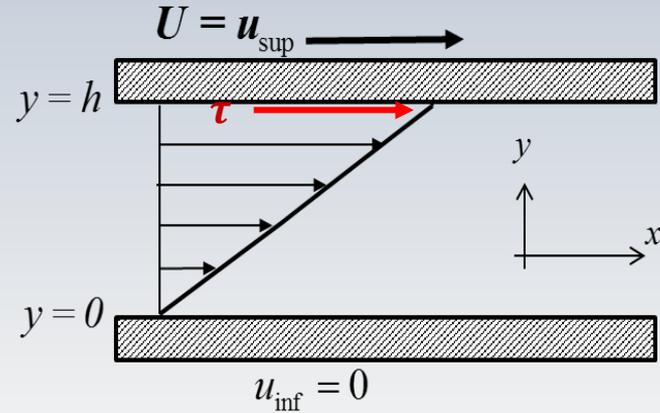
Plus spécifiquement, le coefficient de proportionnalité correspond à la **viscosité dynamique** μ (kg/ms ou $Pa \, s$)*

Ces observations sont formellement exprimées dans la loi de Newton:

*On définit également la *viscosité cinématique* par $\nu = \mu/\rho$, (m^2/s).

*La contrainte de cisaillement τ produite dans un écoulement avec un taux de cisaillement du/dy donné, est directement proportionnelle à la viscosité dynamique du fluide μ

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

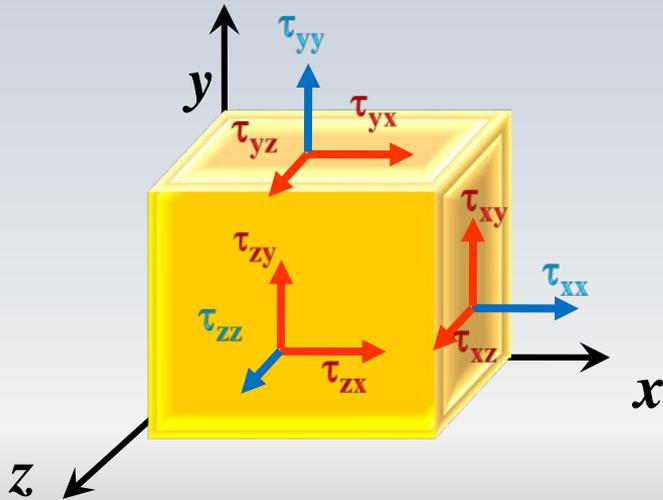


*Ces fluides sont appelés **Newtoniens**

Le tenseur des contraintes

4.3 Conservation de la qté. de mvt.

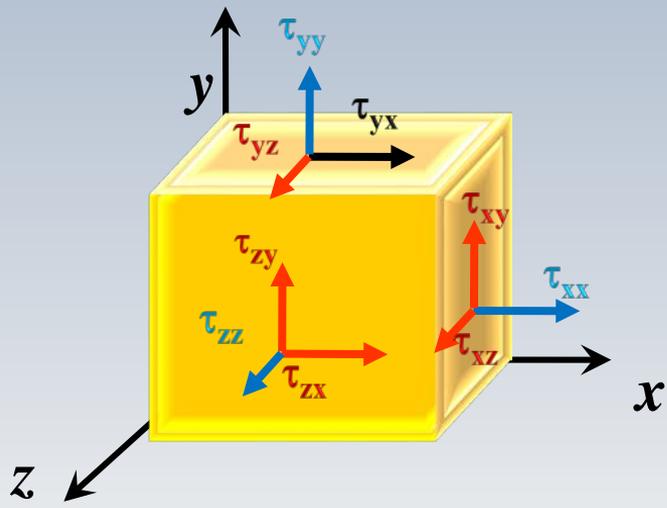
Pour un écoulement 3D quelconque, les forces surfaciques peuvent être renfermées dans un tenseur des contraintes $\tilde{\tau}$ (d'ordre 2) avec neuf composantes scalaires



$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

Bilan des forces visqueuses

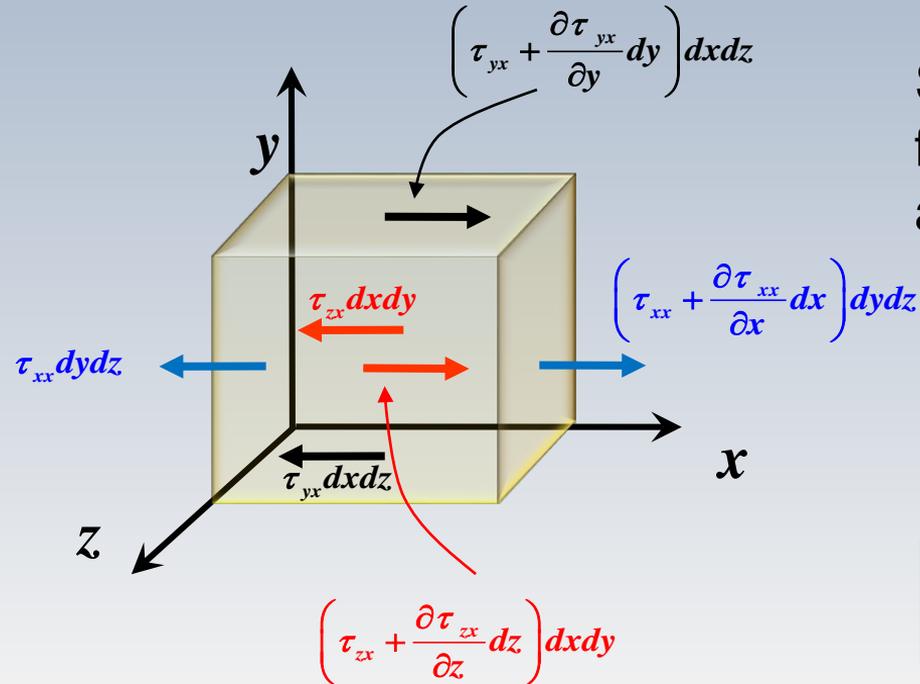
4.3 Conservation de la qté. de mvt.



On regardera maintenant seulement la force dans la *direction x*

Bilan des forces visqueuses

4.3 Qté. de mouvement.



Sur un volume élémentaire, la force totale (par unité de volume!) agissant dans *la direction x* est :

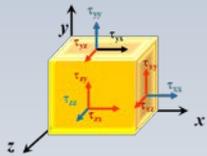
$$F_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Il faut maintenant une expression pour chacune des composantes de $\tilde{\tau}$!

Bilan des forces visqueuses

$$F_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

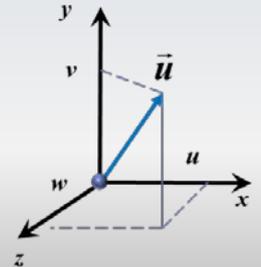
Pour un fluide *Newtonien* en écoulement *incompressible*, la généralisation* de $\tau = \mu du/dy$, est



Ce tenseur est symétrique !

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En notation compacte $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$



Bilan des forces visqueuses

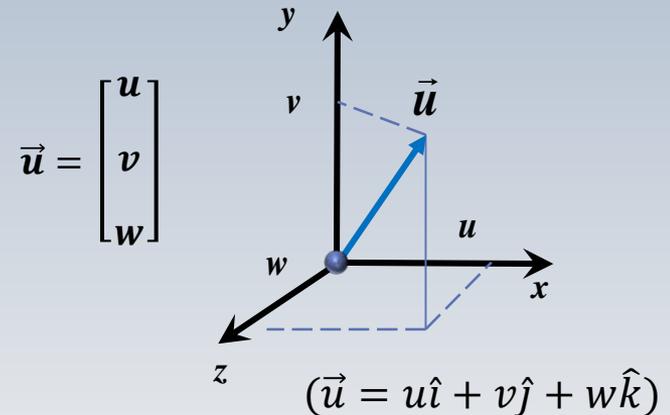
$$F_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

On peut alors trouver (la condition $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ a aussi été utilisée):

$$F_x = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \mu \nabla^2 u$$

également

$$F_y = \mu \nabla^2 v, \quad F_z = \mu \nabla^2 w$$



et de façon compacte, **la force tangentielle par unité de volume produite par les effets visqueux** peut s'écrire $\vec{F}_t = \mu \nabla^2 \vec{u}$

Bilan de quantité de mouvement

Nous pouvons maintenant revenir sur la 2^{ème} loi de Newton appliquée sur un volume élémentaire δV de masse $\delta m = \rho \delta V$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{vol} + \sum \vec{F}_{surf} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visc} = \delta m \vec{a}$$

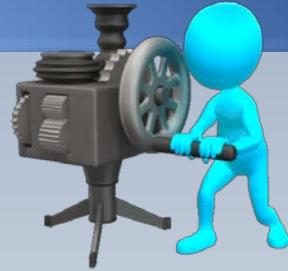
$$\vec{F}_{grav} = \rho \vec{g} \delta V$$

$$\vec{F}_{press} = -\vec{\nabla} p \delta V$$

$$\vec{F}_{visc} = \mu \nabla^2 \vec{u} \delta V$$

$$\vec{a} = \partial \vec{u} / \partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

Bilan de quantité de mouvement



Ce qui conduit à:

OMG!

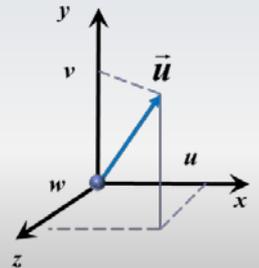


$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\nu = \mu / \rho,$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$



Les équations de Navier-Stokes

L'équation de la quantité de mouvement et celle de la conservation de la masse représentent les équations de NAVIER-STOKES (N-S)

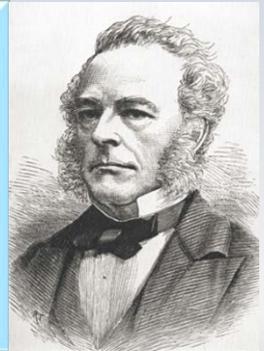
Pour un fluide newtonien en écoulement incompressible elles s'écrivent



Henri Navier

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$



Gabriel Stokes

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

sur

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS

ET DES MACHINES.

DEUXIÈME PARTIE,

LEÇONS SUR LE MOUVEMENT ET LA RÉSISTANCE DES FLUIDES,
LA CONDUITE ET LA DISTRIBUTION DES EAUX.

TROISIÈME PARTIE,

LEÇONS SUR L'ÉTABLISSEMENT DES MACHINES.

PAR NAVIER,

Membre de l'Institut (Académie des Sciences), Professeur d'Analyse et de Mécanique à l'École
Polytechnique, Inspecteur Général des Ponts et Chaussées.



A PARIS,

CHEZ CARILIAN-GOEURY,

Libraire des Corps Royaux des Ponts et Chaussées et des Mines,

Quai des Augustins, N° 41.

1838.

XXII. *On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids.* By G. G. STOKES, M.A., Fellow of Pembroke College.

[Read April 14, 1845.]

THE equations of Fluid Motion commonly employed depend upon the fundamental hypothesis that the mutual action of two adjacent elements of the fluid is normal to the surface which separates them. From this assumption the equality of pressure in all directions is easily deduced, and then the equations of motion are formed according to D'Alembert's principle. This appears to me the most natural light in which to view the subject; for the two principles of the absence of tangential action, and of the equality of pressure in all directions ought not to be assumed as independent hypotheses, as is sometimes done, inasmuch as the latter is a necessary consequence of the former*. The equations of motion so formed are very complicated, but yet they admit of solution in some instances, especially in the case of small oscillations. The results of the theory agree on the whole with observation, so far as the time of oscillation is concerned. But there is a whole class of motions of which the common theory takes no cognizance whatever, namely, those which depend on the tangential action called into play by the sliding of one portion of a fluid along another, or of a fluid along the surface of a solid, or of a different fluid, that action in fact which performs the same part with fluids that friction does with solids.

Thus, when a ball pendulum oscillates in an indefinitely extended fluid, the common theory gives the arc of oscillation constant. Observation however shows that it diminishes very rapidly in the case of a liquid, and diminishes, but less rapidly, in the case of an elastic fluid. It has indeed been attempted to explain this diminution by supposing a friction to act on the ball, and this hypothesis may be approximately true, but the imperfection of the theory is shown from the circumstance that no account is taken of the equal and opposite friction of the ball on the fluid.

Again, suppose that water is flowing down a straight aqueduct of uniform slope, what will be the discharge corresponding to a given slope, and a given form of the bed? Of what magnitude must an aqueduct be, in order to supply a given place with a given quantity of water? Of what form must it be, in order to ensure a given supply of water with the least expense of materials in the construction? These, and similar questions are wholly out of the reach of the common theory of Fluid Motion, since they entirely depend on the laws of the transmission of that tangential action which in it is wholly neglected. In fact, according to the common theory the water ought to flow on with uniformly accelerated velocity; for even the supposition of a certain friction against the bed would be of no avail, for such friction could not be transmitted through the mass. The practical importance of such questions as those above mentioned has made them the object of numerous experiments, from which empirical formulæ have been constructed. But such formulæ, although fulfilling well enough the purposes for which they were

* This may be easily shown by the consideration of a tetrahedron of the fluid, as in Art. 4.

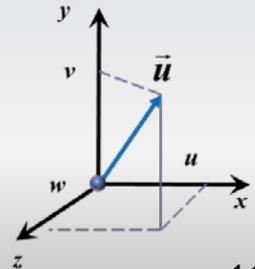
Navier-Stokes en 2D

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Pour un écoulement 2D plan ($w = 0$), on a explicitement pour la quantité de mouvement pour les directions x et y :

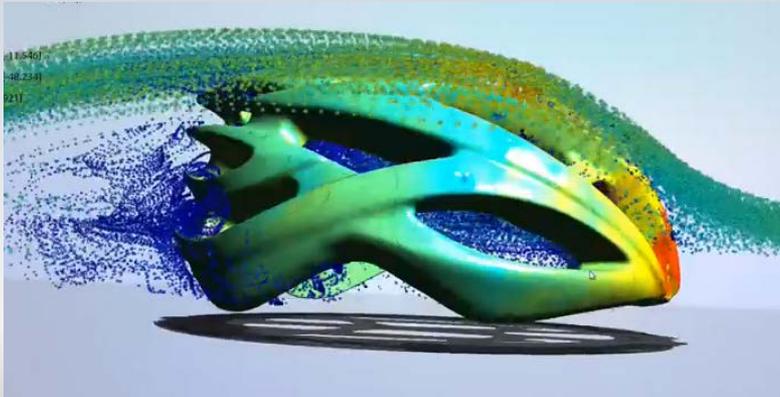
$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ \vec{g} $-\nabla p / \rho$ $\nu \nabla^2 \vec{u}$



Les équations de Navier-Stokes

Avec les équations de Navier-Stokes en 3D nous pouvons résoudre des problèmes d'ingénierie tels qu'illustrés sur les figures. Cependant, la complexité des équations ne permet pas de trouver des solutions analytiques que pour des cas simples



Chapitre 4 – Lois de conservation locales

1.11

4.1

4.2

4.3

4.10

4.8

1.11 Lignes de courant, lignes d'émission et trajectoires

4.1 L'accélération

4.2 Équation différentielle de la conservation de la masse

4.3 Équation différentielle de la quantité de mouvement

4.10 Quelques solutions des équations de Navier-Stokes

4.8 Vorticité et irrotationnalité



4.9

3.05

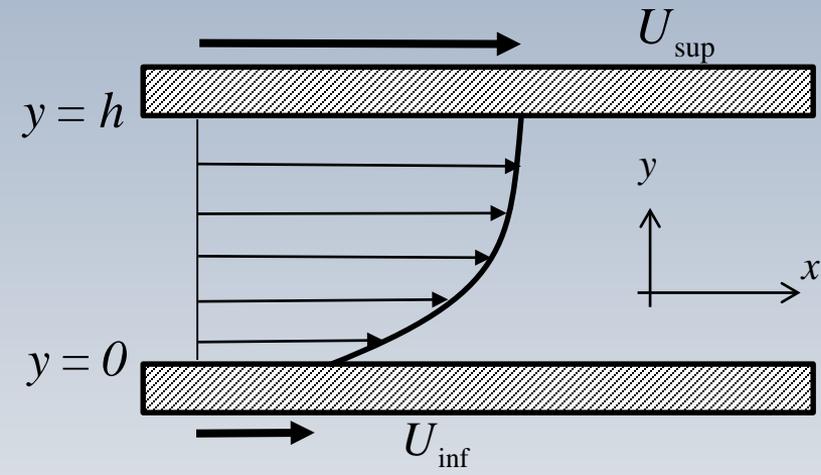


$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$



Écoulement entre deux plaques

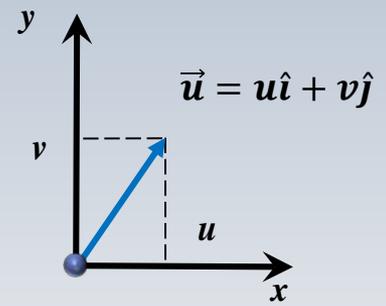
4.10 Qqs. solutions..



Écoulement 2D stationnaire pleinement développé*
 u et v les composantes cartésiennes de la vitesse

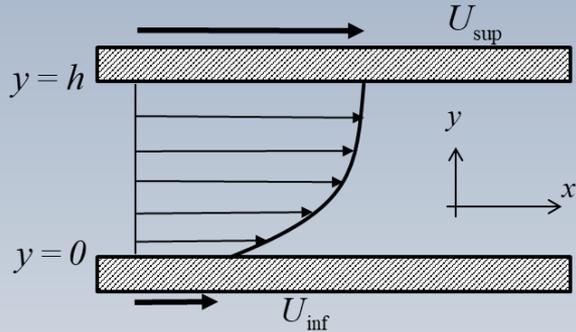
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$



* Pour ce cas, un écoulement pleinement développé implique que le profil de vitesse ne change pas dans la direction x

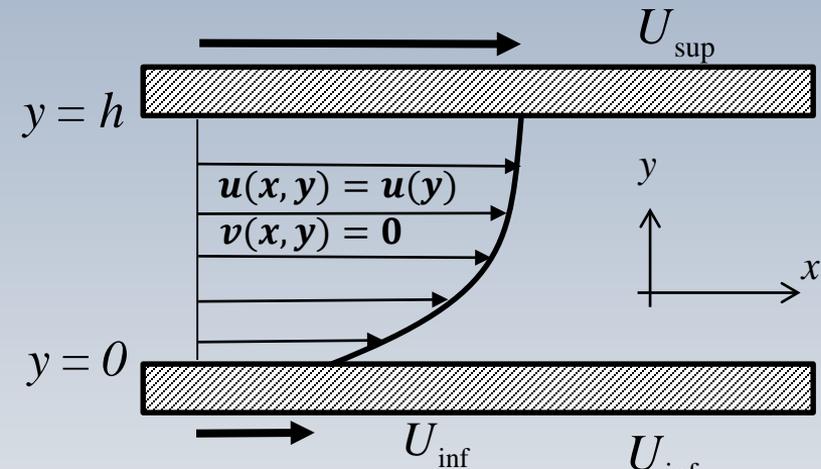
Écoulement entre deux plaques



$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Hypothèses	Conditions aux frontières
<ul style="list-style-type: none"> Écoulement permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ Écoulement développé $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ Écoulement parallèle 2D $v = 0$ Gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{connu}$ 	$u(x, 0) = U_{inf}$ $v(x, 0) = 0$ $u(x, h) = U_{sup}$ $v(x, h) = 0$

Écoulement entre deux plaques



Écoulement 2D stationnaire pleinement développé*
 u et v les composantes cartésiennes de la vitesse

$$(\vec{u} \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad \nabla p = \begin{bmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{①}$$

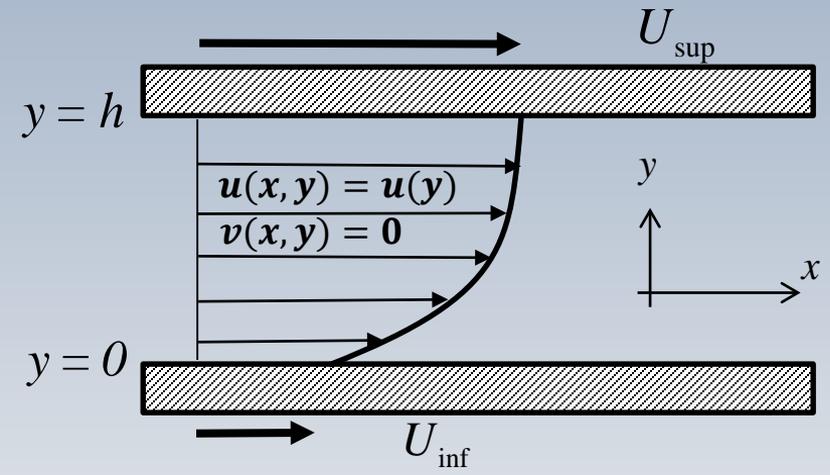
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$



* Pour ce cas, un écoulement pleinement développé implique que le profil de vitesse ne change pas dans la direction x

Écoulement entre deux plaques

4.10 Qqs. solutions..



Écoulement **2D stationnaire pleinement développé***
 u et v les composantes cartésiennes de la vitesse

$$(\vec{u} \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad \nabla p = \begin{bmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

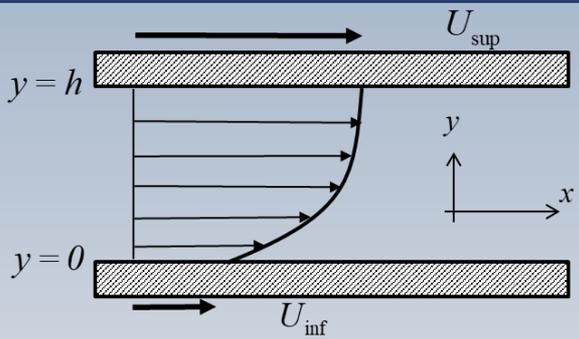
$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$



Écoulement entre deux plaques

4.10 Qqs. solutions..



② $\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = p(x)$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

$u = u(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dy^2}$

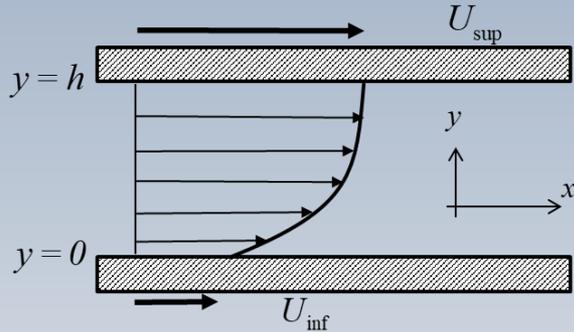
① $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Rightarrow -\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) = 0$

$(\nu = \mu/\rho)$

Équation à résoudre

Écoulement entre deux plaques

4.10 Qqs. solutions..



$$-\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} \rightarrow \text{valeur connue}$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^2}{2} \right) + ay + b = 0$$

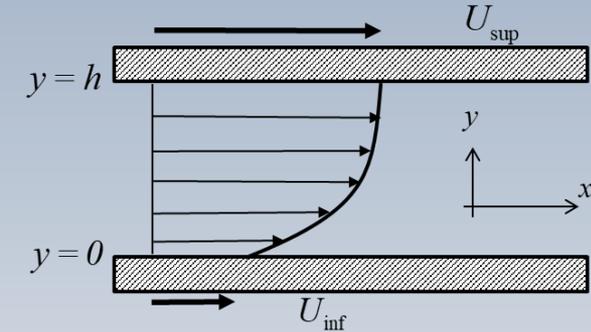


Pour déterminer les constantes a et b , on utilisera les **conditions aux limites** sur la vitesse axiale u sur les parois inférieure et supérieure

$$u(0) = U_{\text{inf}} \quad u(h) = U_{\text{sup}}$$

Écoulement entre deux plaques

4.10 Qqs. solutions..



La solution du problème s'écrit finalement

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) + \left(\frac{U_{sup} - U_{inf}}{h} \right) y + U_{inf}$$

Cette solution permet de décrire deux écoulements classiques souvent rencontrés en mécanique des fluides: **l'écoulement de Couette** et **l'écoulement de Poiseuille**

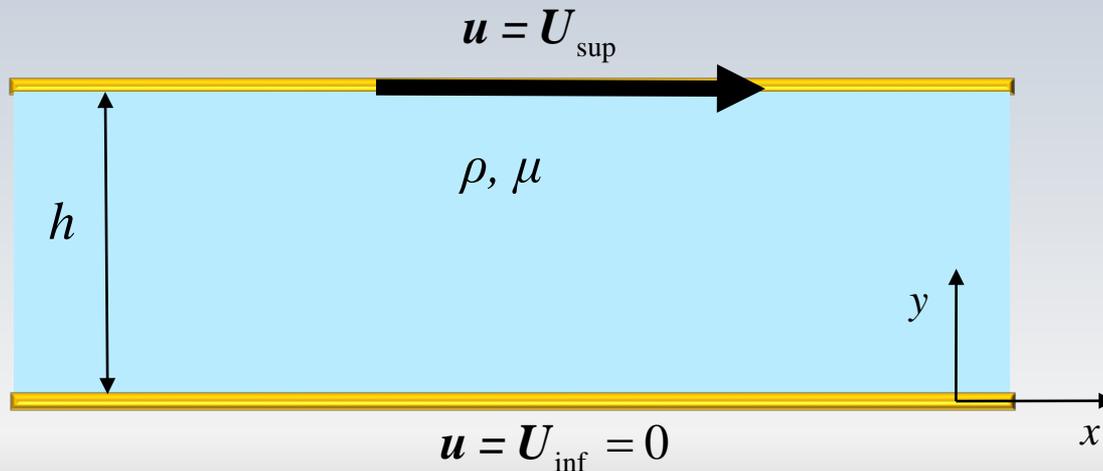


Écoulement de Couette



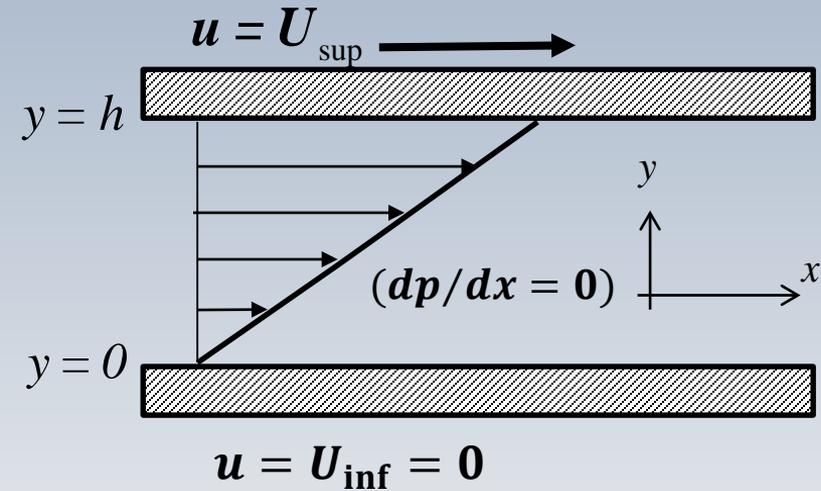
Maurice Marie
Alfred Couette
(1858-1943)

Cet écoulement est caractérisé par une paroi inférieure immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{U}_{inf} = \mathbf{0}$) et une paroi supérieure se déplaçant à une vitesse constante ($\mathbf{u} = \mathbf{U}_{sup}$). La pression est constante partout ($dp/dx = 0$)



Écoulement de Couette

4.10 Qqs. solutions..



$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y - h) + \left(\frac{U_{\text{sup}} - U_{\text{inf}}}{h} \right) y + U_{\text{inf}}$$

$$u(y) = \left(\frac{U_{\text{sup}}}{h} \right) y$$

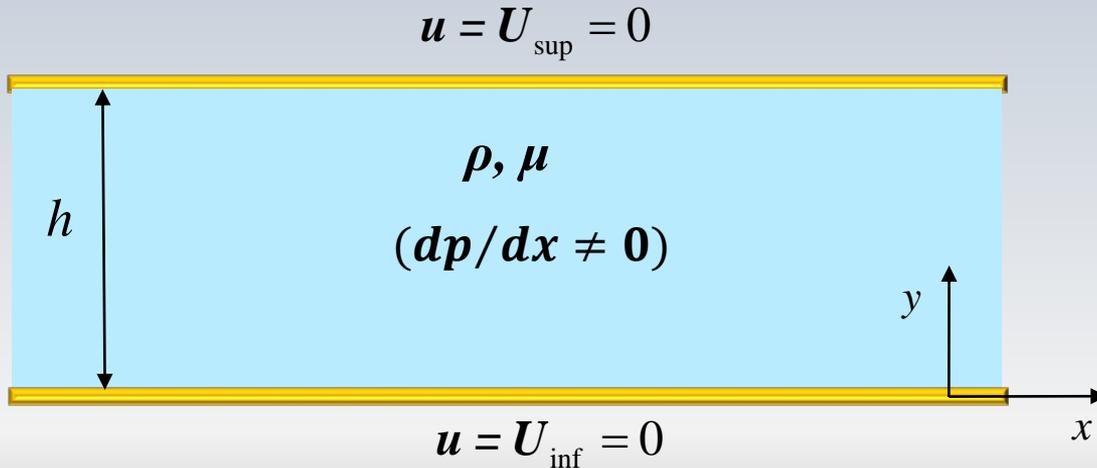
Ce profil de vitesses est linéaire

Écoulement de Poiseuille



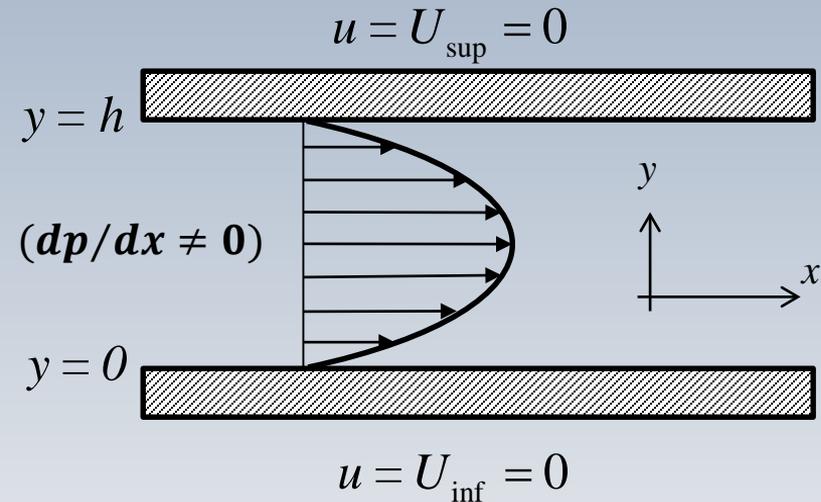
Jean Léonard Marie
Poiseuille
(1797-1869)

Cet écoulement entre deux plaques est caractérisé par des parois immobiles ($u = U_{inf} = U_{sup} = 0$) et un gradient de pression axial constant et non nul ($dp/dx \neq 0$)



Écoulement de Poiseuille

4.10 Qqs. solutions..



$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h) + \left(\frac{U_{\text{sup}} - U_{\text{inf}}}{h} \right) y + U_{\text{inf}}$$

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h)$$

Ce profil de vitesses est parabolique

Profil expérimental de vitesse

YouTube

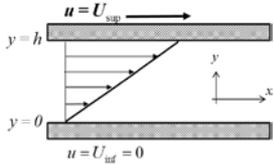
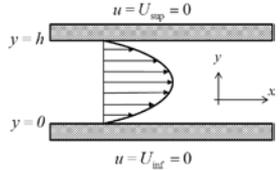


Pas de vidéo!



$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h)$$

Quantités utiles: Q et τ

<p style="text-align: center;">Couette</p> 	<p style="text-align: center;">Poiseuille</p> 
<ul style="list-style-type: none"> Vitesse $u(y) = \left(\frac{U_{sup}}{h}\right)y, \quad \frac{dp}{dx} = 0$	<ul style="list-style-type: none"> Vitesse $u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h), \quad \frac{dp}{dx} \neq 0$
<ul style="list-style-type: none"> Débit $Q = \int_0^h u(y) dy = \frac{h}{2} U_{sup}$	<ul style="list-style-type: none"> Débit $Q = \int_0^h u(y) dy = -\frac{dp}{dx} \frac{h^3}{12\mu}$
<ul style="list-style-type: none"> Cisaillement à $y = 0$ $\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right _{y=0} = \mu \frac{U_{sup}}{h}$	<ul style="list-style-type: none"> Cisaillement à $y = 0$ $\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right _{y=0} = -\frac{dp}{dx} \frac{h}{2}$

Chapitre 4 – Lois de conservation locales

1.11

4.1

4.2

4.3

4.10

4.8

1.11 Lignes de courant, lignes d'émission et trajectoires

4.1 L'accélération

4.2 Équation différentielle de la conservation de la masse

4.3 Équation différentielle de la quantité de mouvement

4.10 Quelques solutions des équations de Navier-Stokes

4.8 Vorticité et irrotationnalité

4.9

3.05

Les équations de **Navier Stokes (NS)** ne peuvent pas être résolues analytiquement que pour des cas académiques

Pour des résultats rapides, l'ingénieur utilise une formule simple qui peut être expliquée comme un modèle dérivé des équations de NS

Le concept fut formulé par **Daniel Bernoulli** (dont sa forme mathématique est attribuée à Léonard Euler) bien avant le développement des équations de NS, mais aujourd'hui on peut l'obtenir formellement à partir de celles-ci

De Navier-Stokes à Bernoulli

3.05 Le Théorème de Bernoulli

L'équation de Bernoulli est de loin privilégiée par le génie quotidien pour les calculs d'écoulements. Sans doute quelqu'un est en train de l'appliquer en ce moment!

Pour retrouver l'équation de Bernoulli on fera un long détour mathématique



En mécanique de fluides, le **rotationnel** d'un **champ de vitesses** est appelé **vorticité** et elle est notée par le symbole $\vec{\omega}$

En **deux dimensions**, en fonction des composantes cartésiennes de la vitesse u et v , **la vorticité** est alors décrite par

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

- Si $\vec{\omega} = \mathbf{0}$, l'écoulement est dit **irrotationnel**
- Si $\vec{\omega} \neq \mathbf{0}$, l'écoulement est dit **tourbillonnaire (rotationnel)**

En 3D, la **vorticité** est mathématiquement définie par:

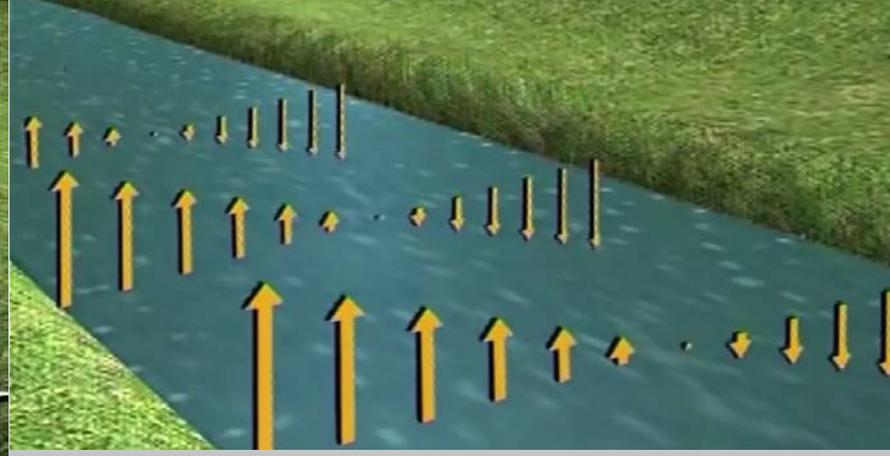
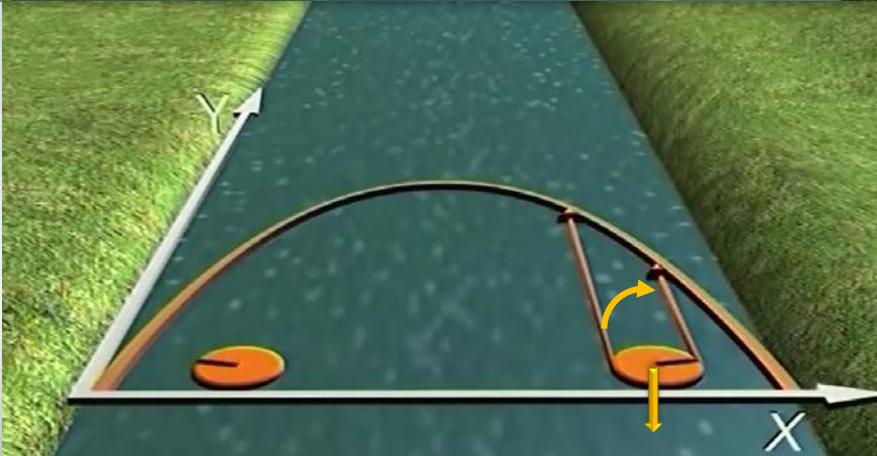
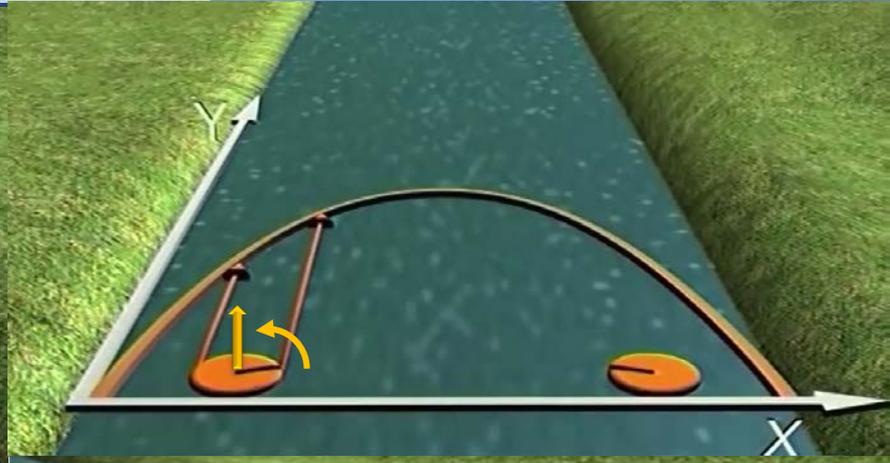
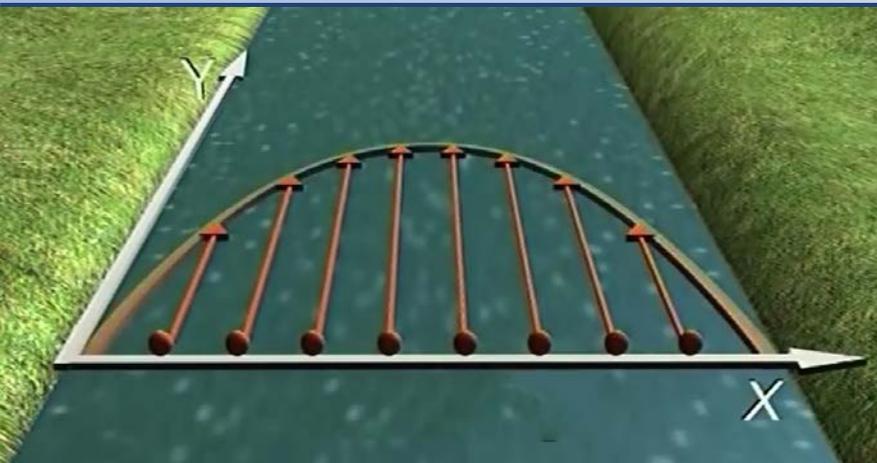
$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

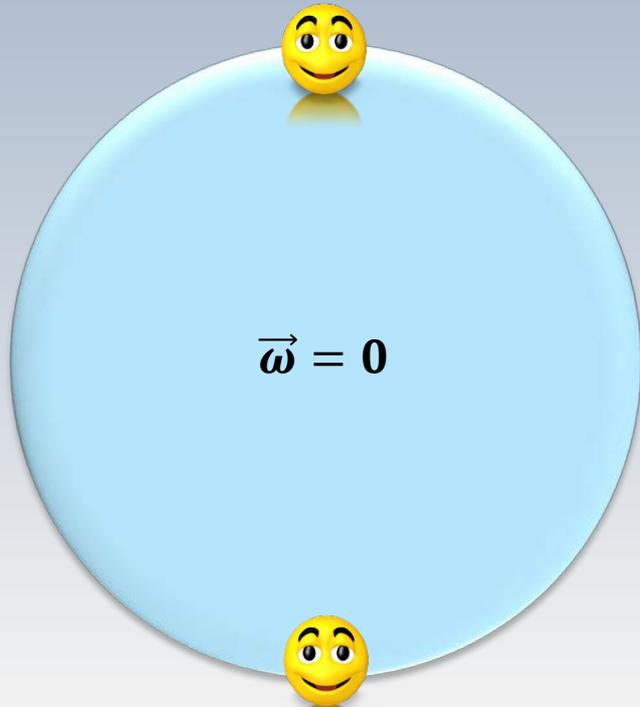
Dans cette expression, les symboles u, v, w correspondent aux composantes de la vitesse dans les directions x, y et z .

Physiquement, la vorticité $\vec{\omega}$ d'un champ de vitesse \vec{u} correspond à deux fois la vitesse de rotation angulaire locale du fluide

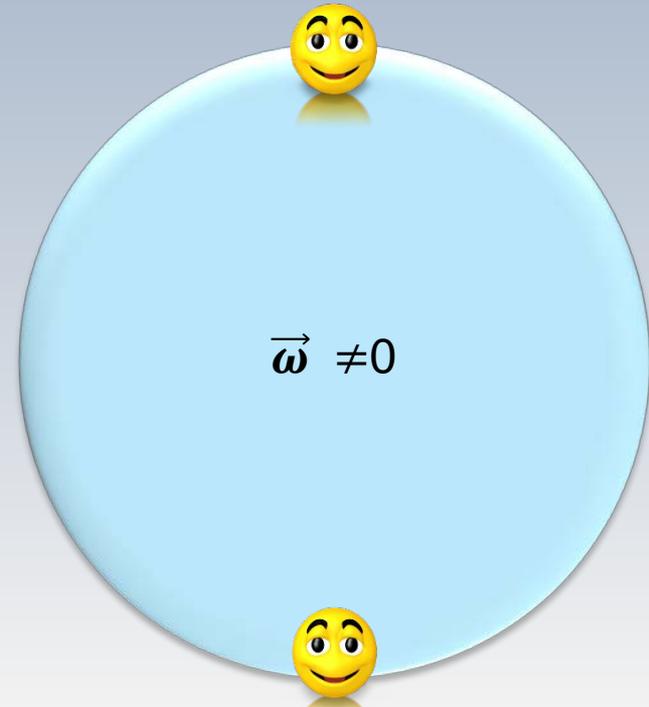
Rotationnel

4.9 Écoulement irrotationnel...





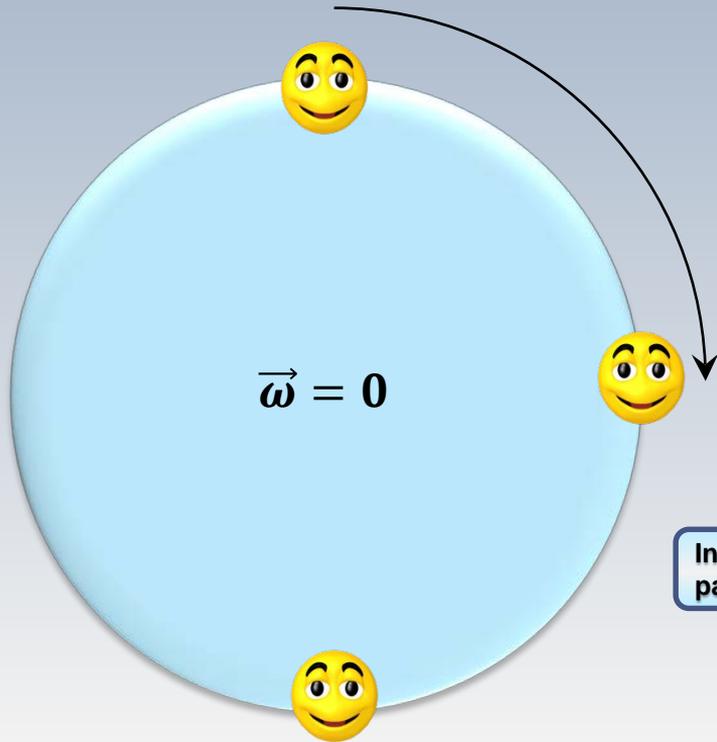
Écoulement irrotationnel



Écoulement rotationnel

Rotationnel/Irrotationnel

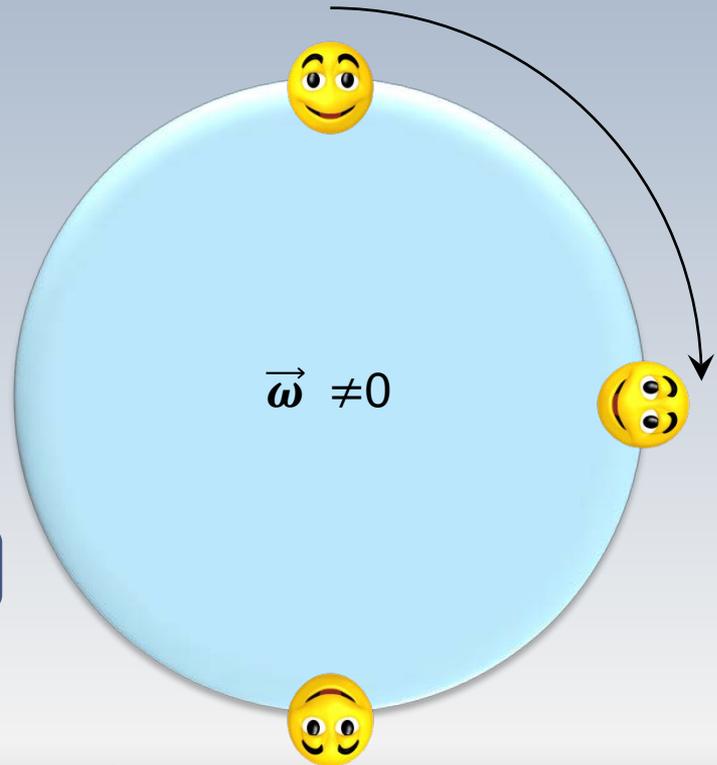
4.9 Écoulement irrotationnel...



Écoulement irrotationnel

(Les particules fluides ne tournent pas sur leur axe)

Intéressant vidéo (10 min)
par Open University



Écoulement rotationnel

(Les particules fluides tournent sur leur axe)

Rotationnel/Irrotationnel

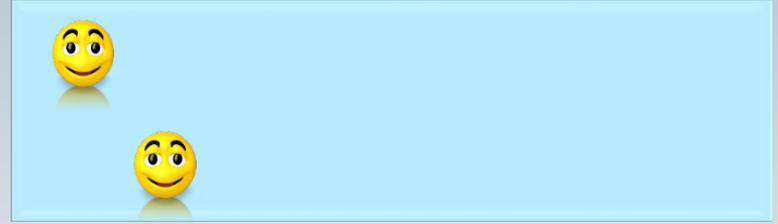
4.9 Écoulement irrotationnel...

$$\vec{\omega} = 0$$



Écoulement irrotationnel

$$\vec{\omega} \neq 0$$



Écoulement rotationnel

Rotationnel/Irrotationnel

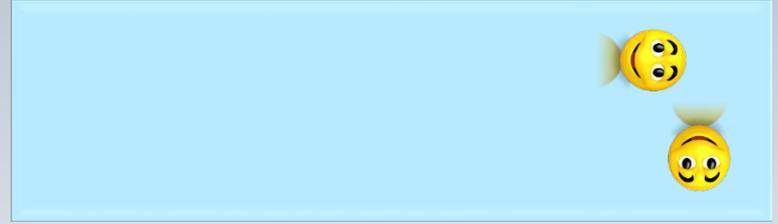
4.9 Écoulement irrotationnel...

$$\vec{\omega} = 0$$



Écoulement irrotationnel

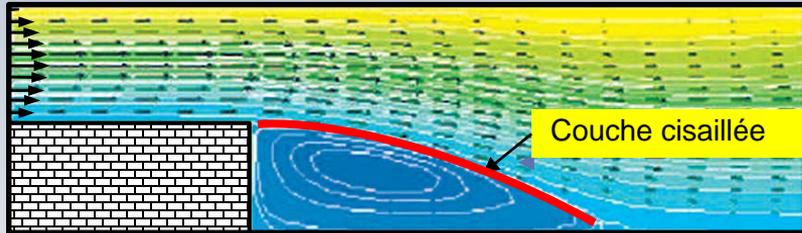
$$\vec{\omega} \neq 0$$



Écoulement rotationnel

Un classique illustrant la vorticité

4.8 Vorticité et...

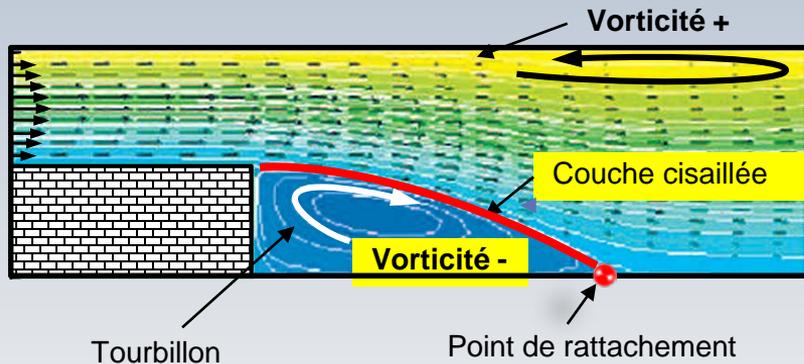


La figure illustre un écoulement laminaire (notion à venir) sur une marche descendante. Après la marche, l'écoulement dépourvu d'une paroi pour le guider, entre en contact avec un région de fluide au repos

Ce phénomène se manifeste par une **couche cisailée** (ligne rouge)   forte vorticité

Un classique illustrant la vorticité

4.8 Vorticité et...



La couche cisailée induit un tourbillon dans le sens horaire, à **vorticité négative**

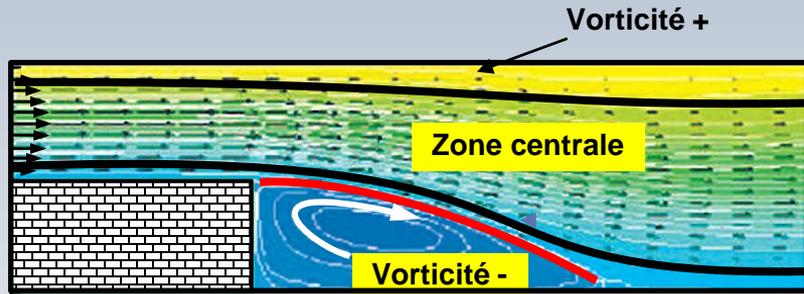
L'écoulement se rattache par après, en même temps qu'une séparation et une recirculation ont lieu sur la partie supérieure

Une zone à **vorticité positive** apparaît alors près de la paroi supérieure

Un classique illustrant la vorticité

4.8 Vorticité et...

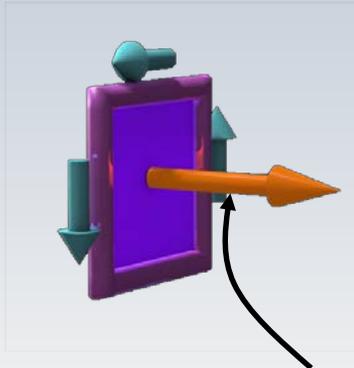
Dans la **zone centrale**, l'écoulement est *relativement* uniforme et **sans tourbillon**. La **vorticité** y est **plus faible** que sur la paroi supérieure et que sur la couche cisillée



Le tourbillon (zone de recirculation) après la marche se trouve dans une région à **faible vorticité**

Vorticité et tourbillon ne sont pas des synonymes

La vorticité décrit **la tendance** de l'écoulement à tourbillonner



Vecteur vorticité

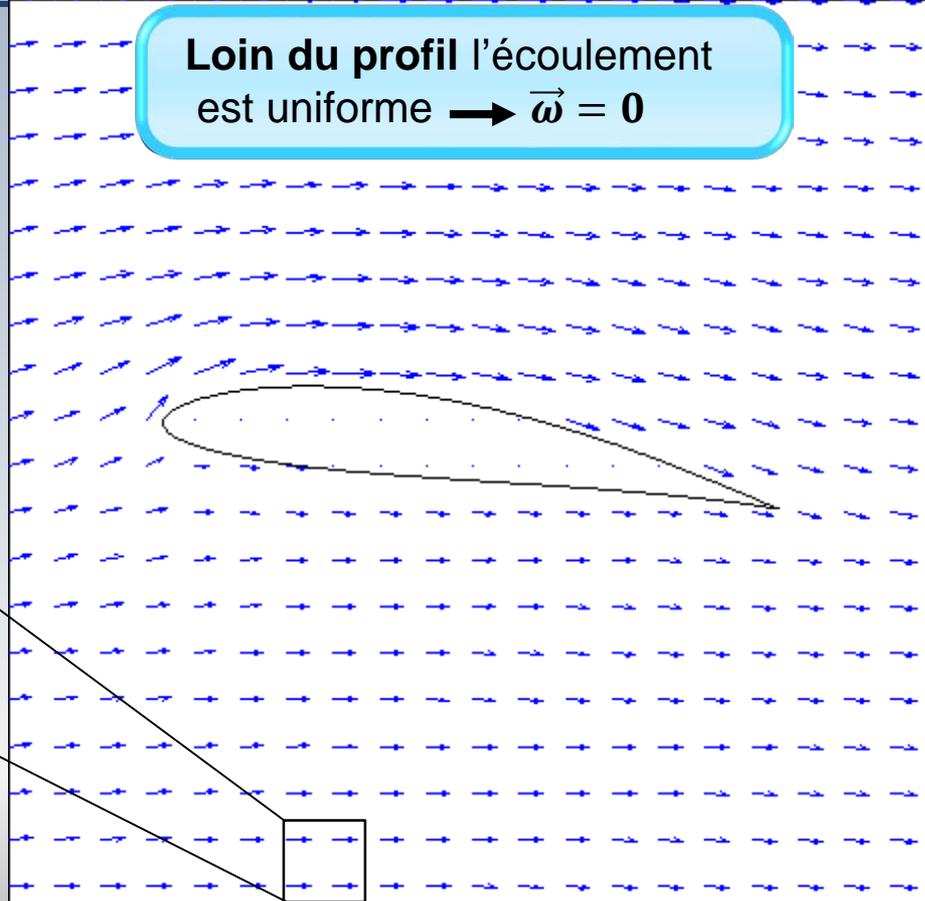


Vitesse autour d'un profil

Loin du profil l'écoulement
est uniforme $\rightarrow \vec{\omega} = 0$

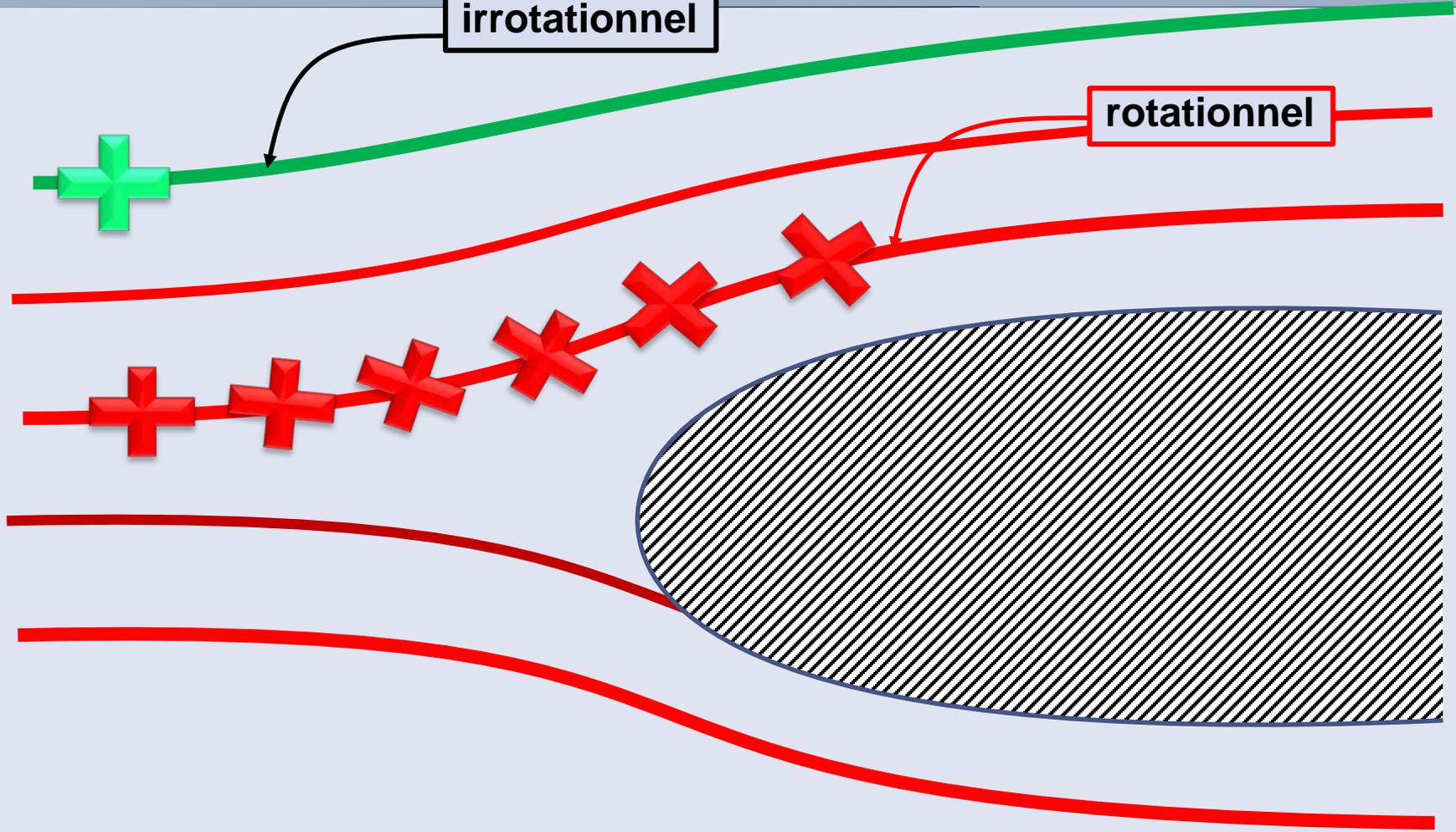


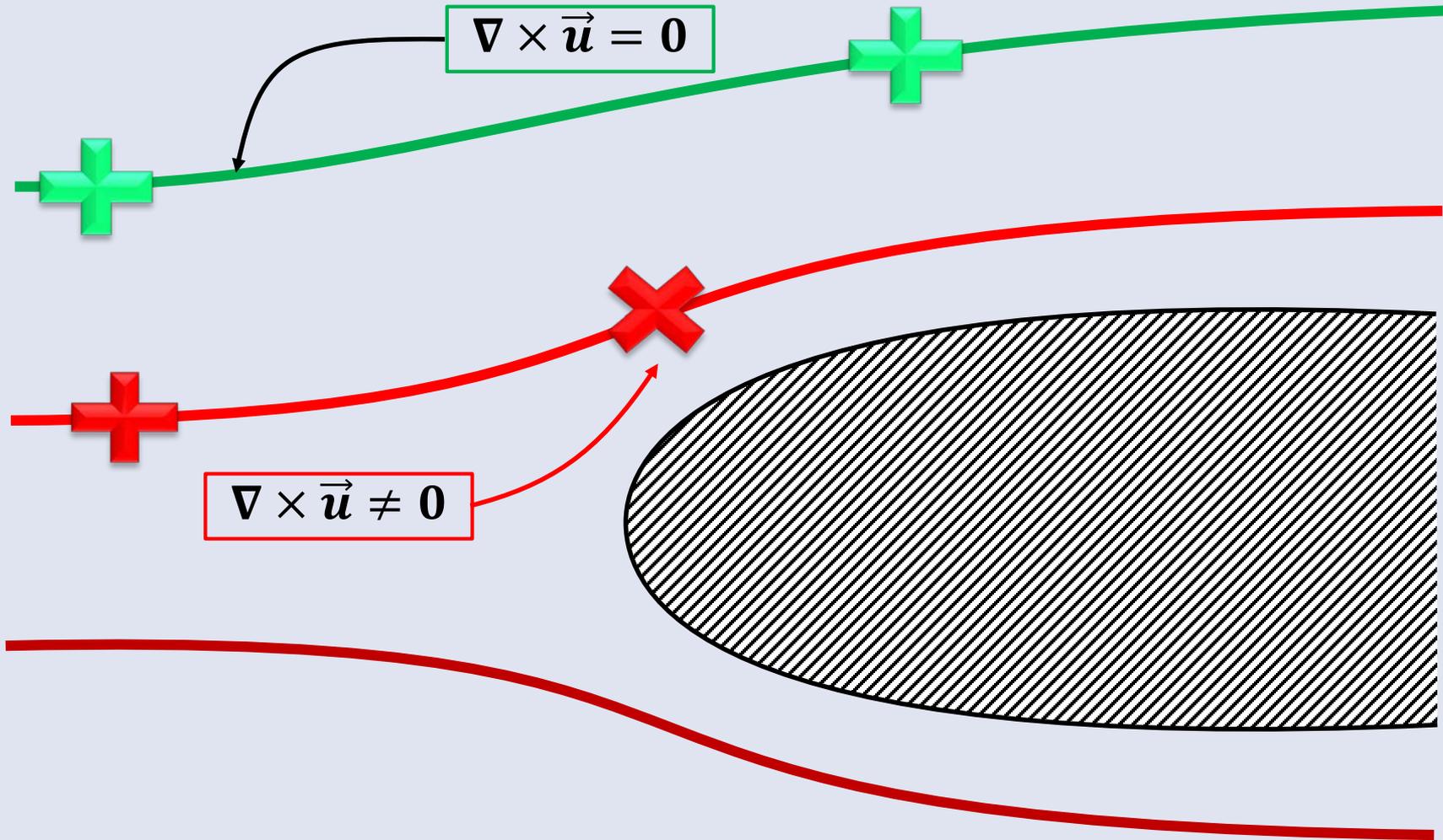
$$\vec{\omega} = 0$$



irrotationnel

rotationnel







Chapitre 4 – Lois de conservation locales

4.9

3.05

4.9 Écoulement irrotationnel

3.05 Le théorème de Bernoulli

1.11

4.1

4.2

4.3

4.10

4.8



Pourquoi étudier les écoulements irrotationnels ?

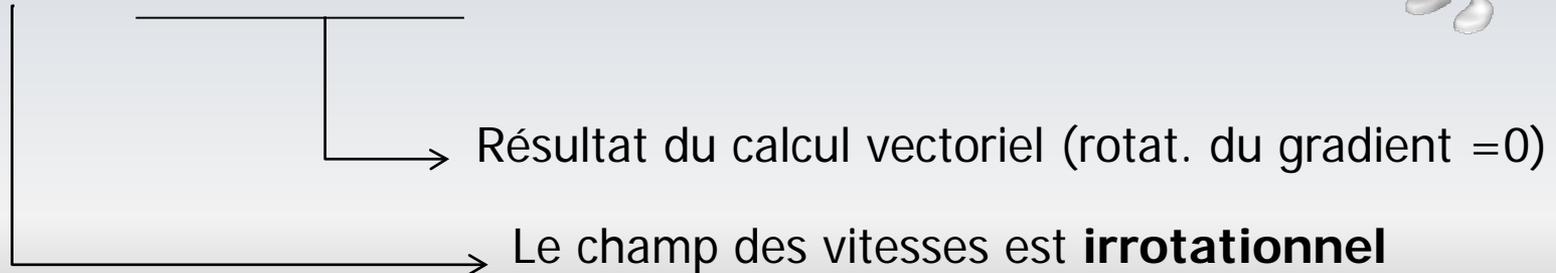
Associé aux écoulements irrotationnels on trouve la notion de **potentiel de vitesse**. Elle est intéressante à regarder car :

- l'approche mathématique conduit à des résultats rapides (calcul d'une seule variable Φ au lieu de 3 en 3D)
- l'hypothèse d'écoulement irrotationnel permet d'analyser la **génération de portance** par une aile

Si l'écoulement est **irrotationnel**, ($\vec{\omega} = 0$), il existe une fonction scalaire Φ appelée **potentiel** des vitesses. En pratique, Φ réduit le problème au **calcul d'un seule variable**. Pourquoi?

Si $\vec{u} = \nabla\Phi$

$$\nabla \times \vec{u} = \nabla \times \nabla\Phi = 0$$



Pour le cas **incompressible** $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, et si $\vec{u} = \nabla\Phi$ on trouve:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi = 0$$

Ainsi, l'équation de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$, avec des conditions appropriées aux frontières, permet de déterminer le champ d'un écoulement (irrotationnel)

Une fois Φ connu, on trouve le champ de vitesse donné par $\vec{u} = \nabla\Phi$

Par exemple, en 2D

$$\vec{u} = \nabla\Phi \quad \longrightarrow \quad u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$u = a(x^2 - y^2), \quad v = -2axy, \quad w = 0$$

Champ vectoriel donné

$$\vec{u} = \nabla\Phi \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases} \quad \omega\hat{k} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2ay \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2ay \quad \longrightarrow \quad \vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = 0$$

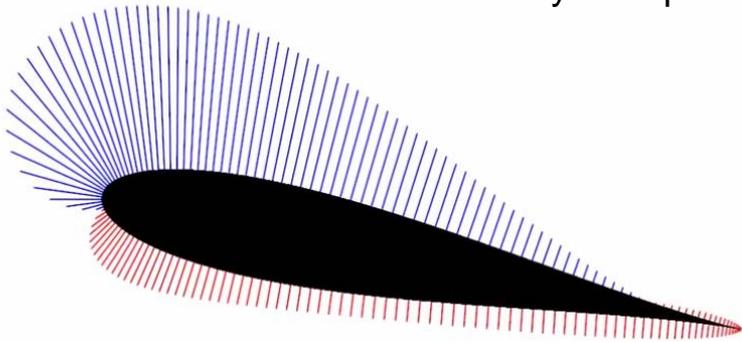
Cet écoulement est *irrotationnel*, ($\vec{\omega} = \mathbf{0}$)!

Le calcul du potentiel, ou champ irrotationnel de vitesses, peut être combiné avec les équations de NS pour obtenir **l'équation de Bernoulli** (à venir). Celle-ci permettra de déterminer la distribution de pression

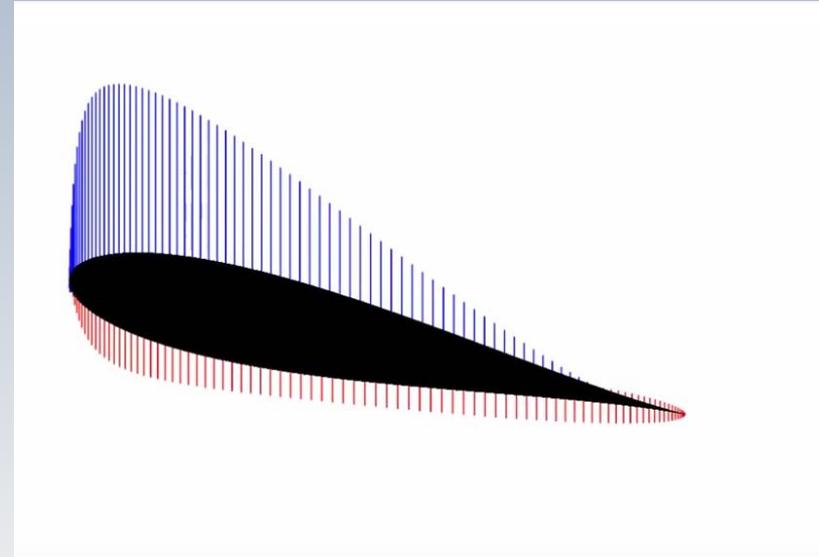
Une fois la distribution de pression connue, il est possible d'estimer **la force de portance sur un corps profilé**

$$\cancel{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \cancel{\nu \nabla^2 \vec{u}}$$

Profil aérodynamique



Distribution de pression



Force de pression projetée
(Portance)

Pour **un écoulement non-visqueux**, les forces tangentielles sont nulles et seules la pression et la gravité agissent.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \cancel{\vec{F}_{cis}}$$

La force de pression \vec{F}_{press} est **normale** aux surfaces et la force de gravité \vec{F}_{grav} est **unidirectionnelle**. Aucune d'entre elles ne peut donc entraîner la rotation d'une particule fluide.

On peut alors conclure que **si un écoulement est non-visqueux il est aussi irrotationnel (s'il ne l'était pas)!**

Analogie électrique et Hele-Shaw

Une analogie entre les potentiel électrique et le potentiel en mécanique des fluides permet de mieux saisir l'idée d'un écoulement potentiel

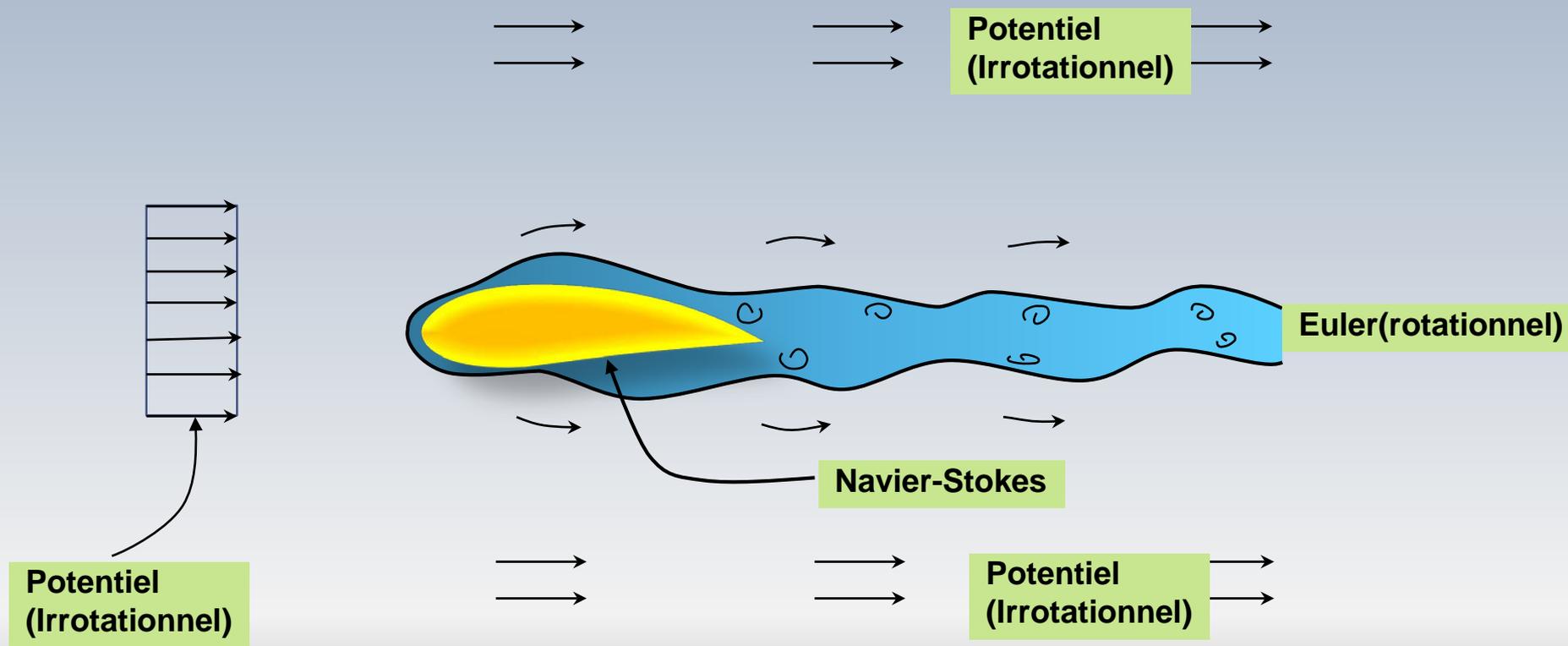
On peut aussi visualiser un écoulement potentiel lorsque un fluide très visqueux se déplace lentement entre deux plaques séparés par une faible distance

Je veux regarder +



Régions des écoulements

4.9 Écoulement irrotationnel...



Chapitre 4 – Lois de conservation locales

4.9

3.05

4.9 Écoulement irrotationnel

3.05 Le théorème de Bernoulli

1.11

4.1

4.2

4.3

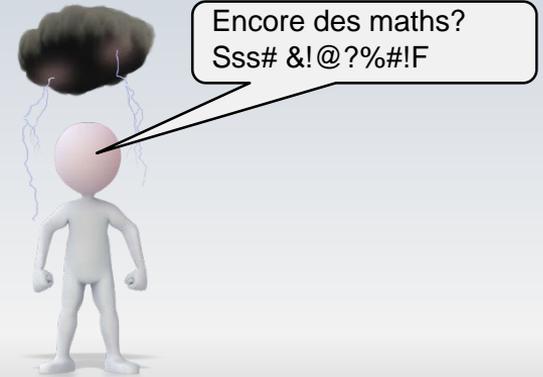
4.10

4.8



Retour à l'équation de Bernoulli

Nous pouvons **FINALEMENT** revenir sur l'équation de Bernoulli



Le théorème de Bernoulli

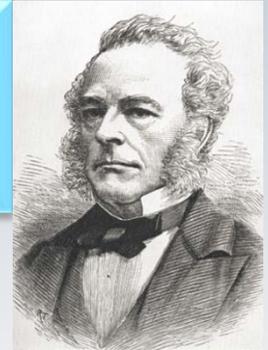
3.05 Le Théorème de Bernoulli

Pour la retrouver, on reprend les équations de Navier-Stokes (la quantité de mouvement) et on considère le cas d'un **écoulement stationnaire irrotationnel de fluide incompressible**



Henri Navier

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$



Gabriel Stokes

Simplifications

3.05 Le Théorème de Bernoulli

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Écoulement
stationnaire

$$\vec{g} = -\nabla gz$$



$$\textcircled{1} \quad (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) + (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u} \leftarrow \text{Relation de L. Crocco}$$

$$\textcircled{2} \quad \nabla^2 \vec{u} = \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) - \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$$



$$\nabla \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) + (\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla gz + \nu [\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) - \nabla(\nabla \cdot \vec{u})]$$

En notant $V^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ (la norme de \vec{u}), et avec $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ on obtient:

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = -(\vec{\omega} \times \vec{u}) + \nu (\nabla \times \vec{\omega} - \nabla(\nabla \cdot \vec{u}))$$

Écoulement irrotationnel

Incompressible

Notez que la viscosité peut être non nulle

Pour un écoulement irrotationnel, $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \mathbf{0}$ on a:

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

alors

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cnste.}$$

Formule de Bernoulli

L'expression de Bernoulli est perçue comme **la conservation de l'énergie** issue de la combinaison des énergies cinétique, de pression et potentielle

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cnste}$$

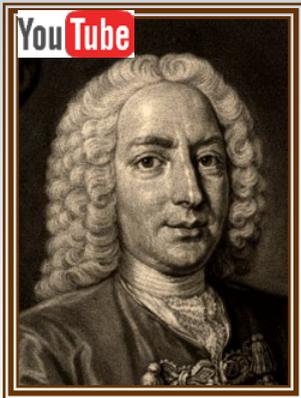
Nous allons revenir
lors de la formulation
intégrale

Elle ne s'applique que si les conditions suivantes sont respectées

- 1) Écoulement stationnaire, incompressible
- 2) Écoulement irrotationnel (cas non visqueux)
- 3) Pas d'échange de chaleur
- 4) Pas de travail



L'expression de Bernoulli peut être aussi obtenue pour chaque ligne de courant. Elle demeure valide, mais **la constante change d'une ligne à l'autre** (Pouvons-nous identifier facilement un ligne de courant pour appliquer la formule?)



Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Je veux regarder le développement



Non merci!

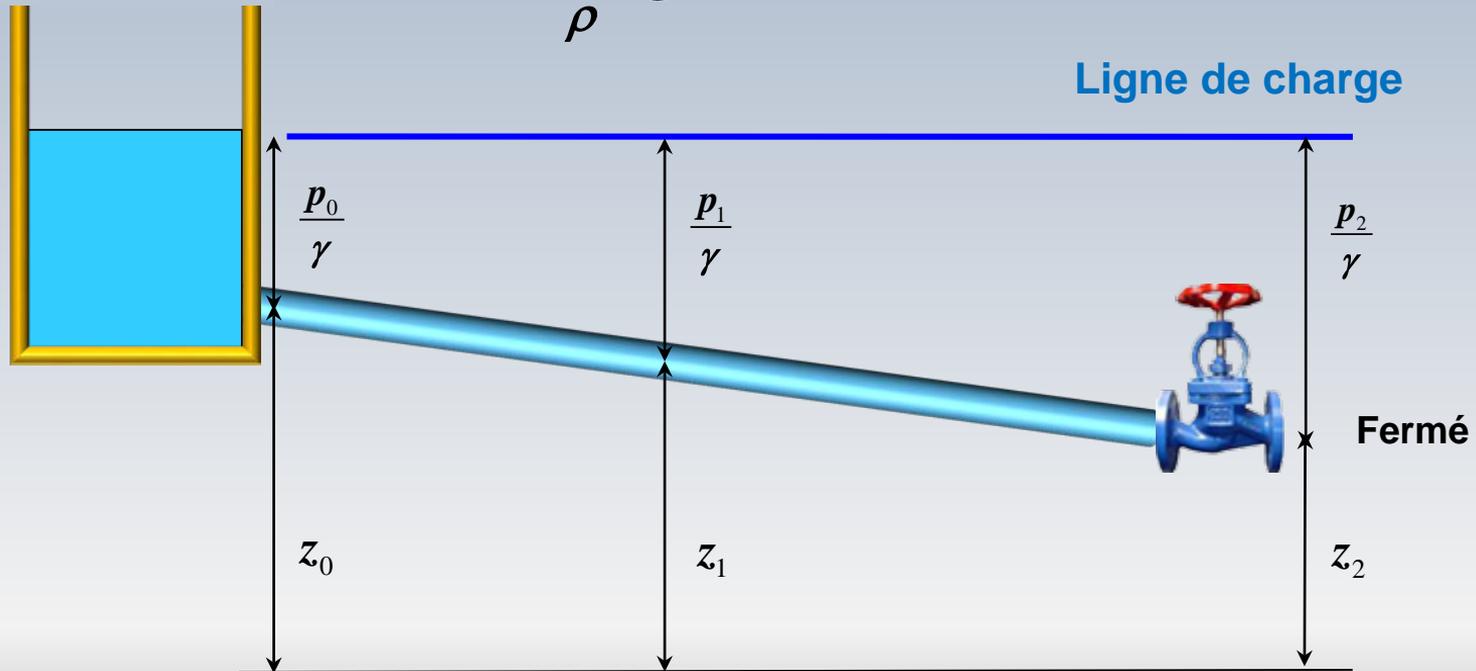


Un vidéo (15 min) sur la vie et l'oeuvre de Daniel Bernoulli, est disponible sur YouTube

Cas hydrostatique

3.05 Le Théorème de Bernoulli

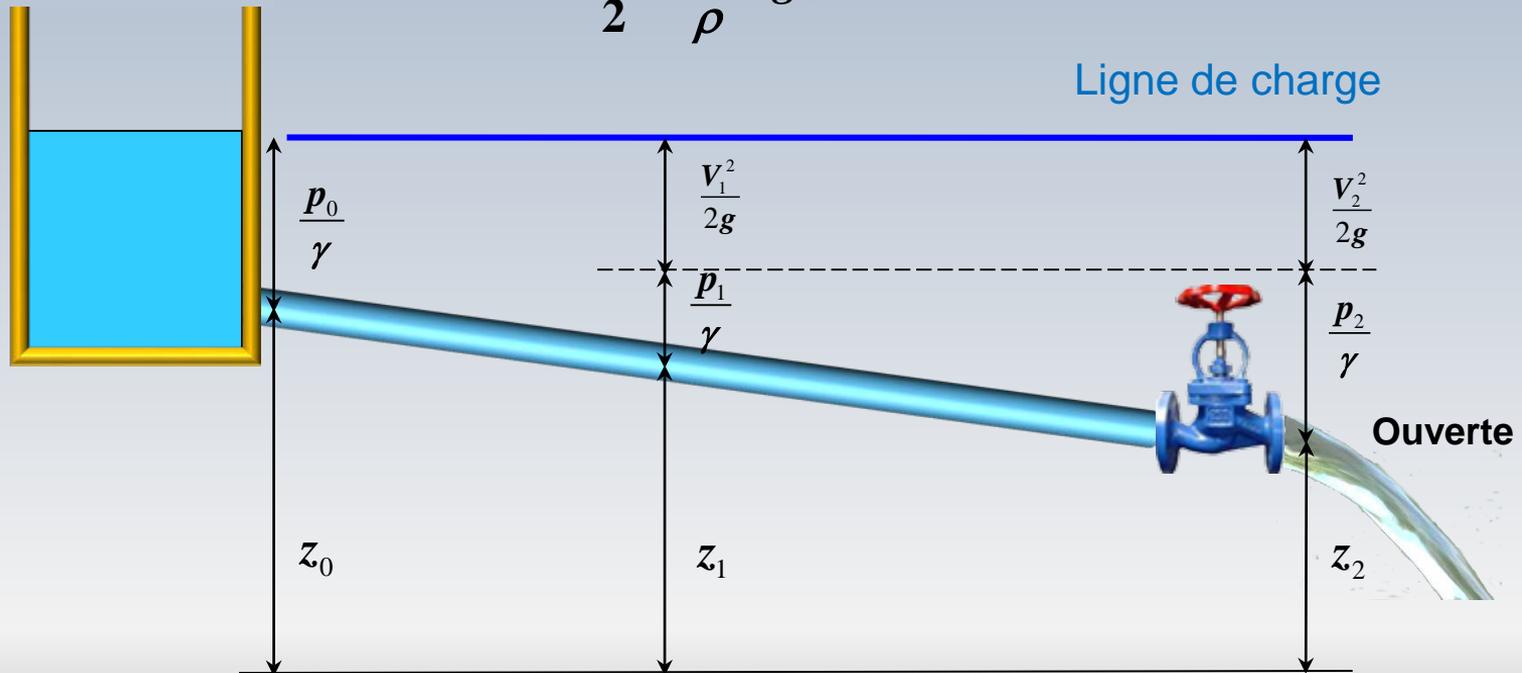
$$\frac{p}{\rho} + gz = \text{cnste.}$$



Cas hydrodynamique

3.05 Le Théorème de Bernoulli

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cnste.}$$



Lorsqu'on ouvre la vanne et si l'on néglige toute sorte de pertes, la ligne de charge, **initialement donnée par $(z + p/\gamma)$, restera inchangée.** Cependant, un écoulement s'établira et *une partie de l'énergie de pression se transformera en énergie cinétique.*

L'équation de Bernoulli modélise ce changement dans lequel on combine **hauteur physique z , hauteur de pression p/γ et hauteur de vitesse $V^2/2g$**

Forme classique en génie civil

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{cnste} \quad \text{Hauteur de charge}$$

hauteur de pression *hauteur de vitesse* *cote verticale*

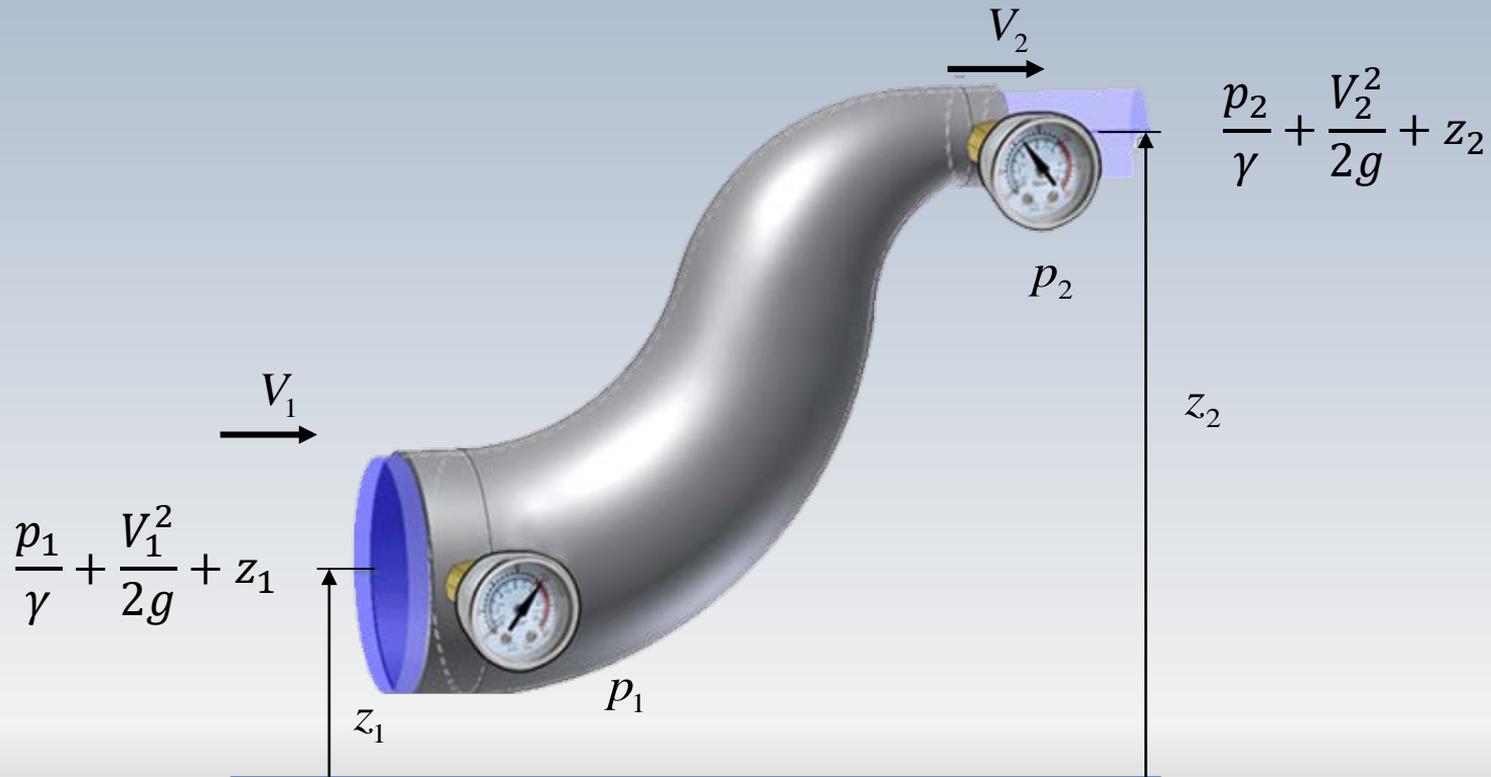
Forme classique en génie mécanique

$$p + \frac{\rho V^2}{2} + \gamma z = \text{cnste} \quad \text{Pression totale}$$

pression statique *pression dynamique* *pression hydrostatique*

Dans une conduite

3.05 Le Théorème de Bernoulli

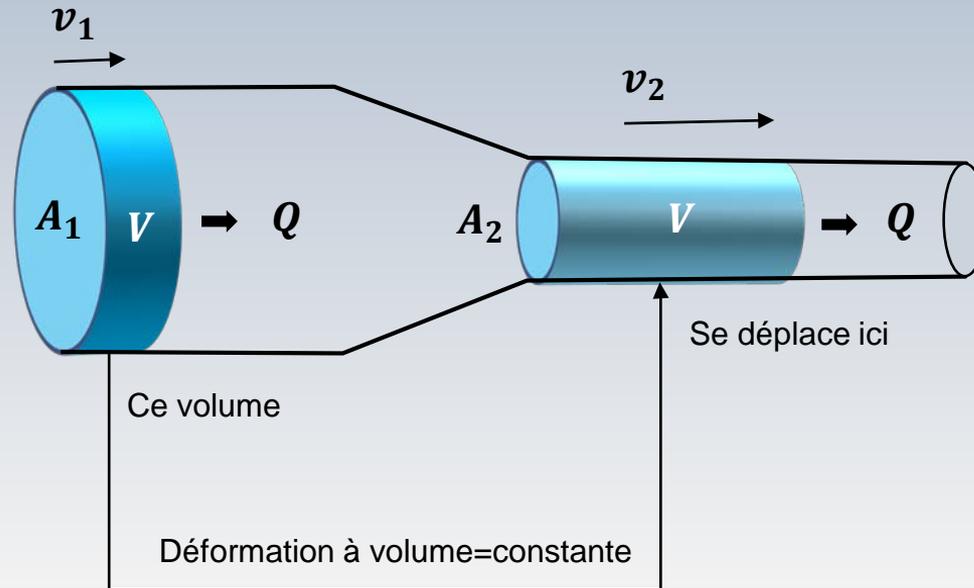




Applications classiques

Conservation du débit volumique Q

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$



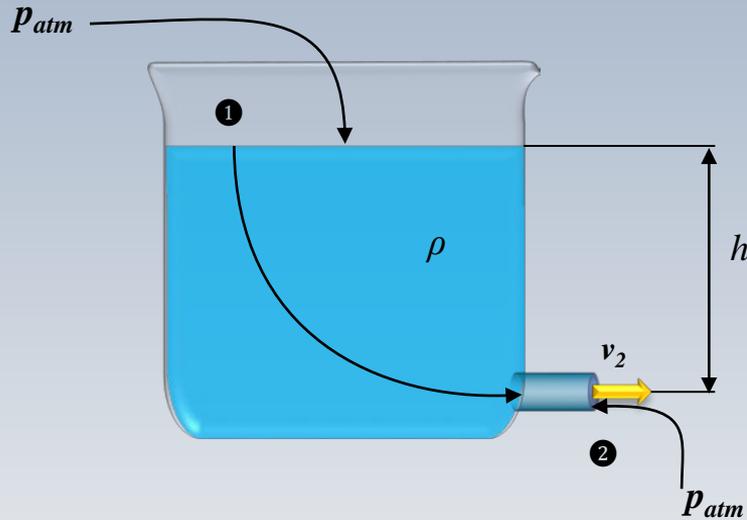
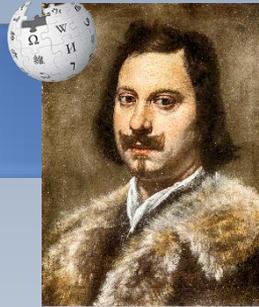
Formule de E. Torricelli

Je clique sur l'image pour un Wiki sur Evangelista Torricelli



Formule de E. Torricelli

Je clique sur l'image pour un Wiki sur Evangelista Torricelli



Bernoulli entre ① et ②

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g(z_2 - z_1)$$

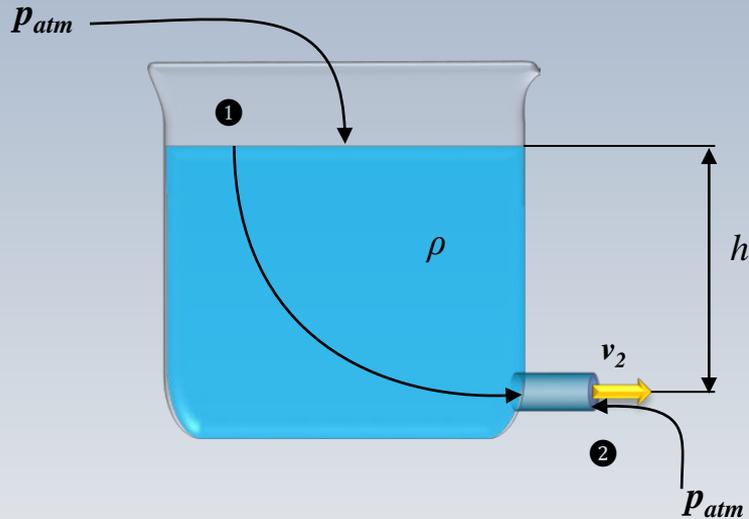
Conservation du débit

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1^2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2$$

$$v_2^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = 2g(z_2 - z_1)$$

Formule de E. Torricelli

Je clique sur l'image pour un Wiki sur Evangelista Torricelli

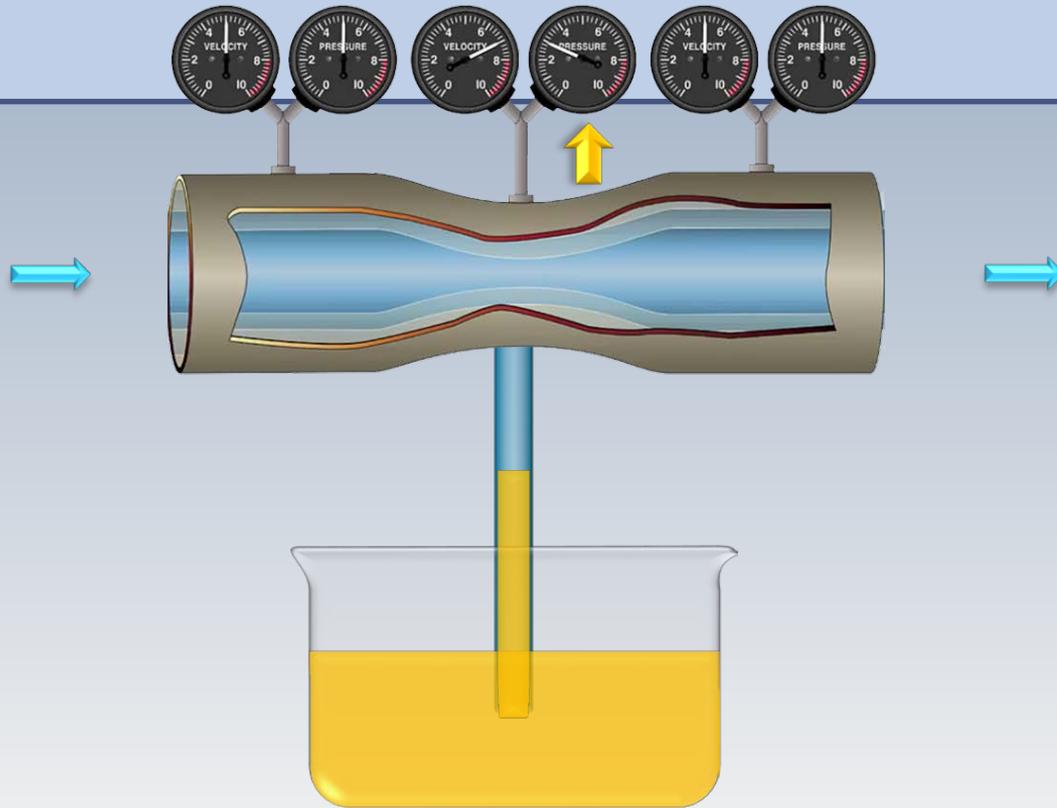


Bernoulli entre ① et ②

$$v_2^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = 2g(z_2 - z_1)$$

$$v_2 = \sqrt{2gh/1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}$$

$$v_2 \approx \sqrt{2gh} \quad (\text{lorsque } A_2 \ll A_1)$$



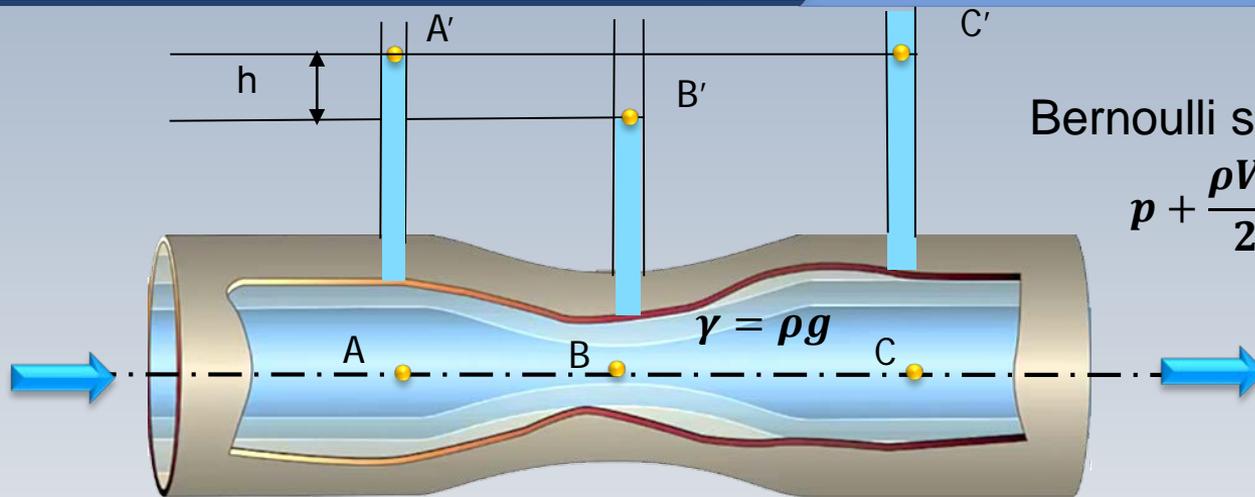
Giovanni Venturi
(1746-1822)

Je clique sur l'image
pour un Wiki sur
G.Battista Venturi



La pression est plus basse là où la section est plus faible

Venturi: mesure de débit



Bernoulli sur la ligne ABC

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \gamma z = \text{cnste}$$

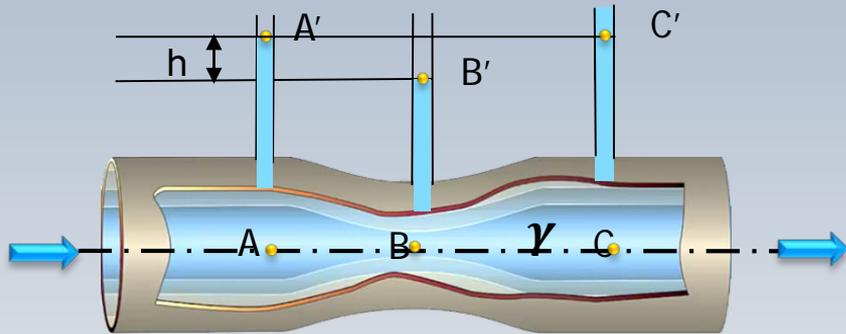
$$p_A + \rho g z_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = p_B + \rho g z_B + \frac{\rho v_B^2}{2} = p_C + \rho g z_C + \frac{\rho v_C^2}{2}$$

$$z_A = z_B = z_C$$

$$p_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = p_B + \frac{\rho v_B^2}{2}$$

$$p_A - p_B = \frac{\rho v_B^2}{2} - \frac{\rho v_A^2}{2} = \gamma h$$

Venturi: mesure de débit Q



Bernoulli sur la ligne ABC

$$\frac{\rho v_B^2}{2} - \frac{\rho v_A^2}{2} = \gamma h$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2h(\rho g / \rho)$$

$$Q = A_A v_A = A_B v_B$$

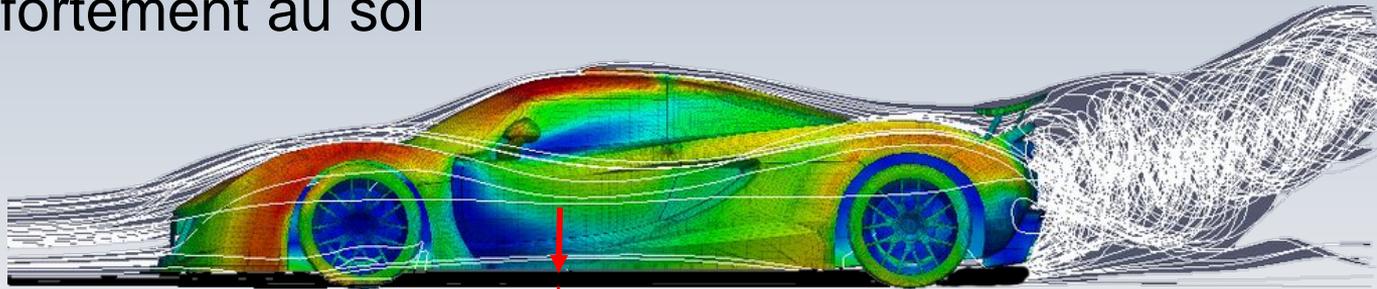


$$Q = \left(\frac{A_A^2 - A_B^2}{A_A^2 A_B^2} \right) \sqrt{2gh}$$

Venturi: voitures

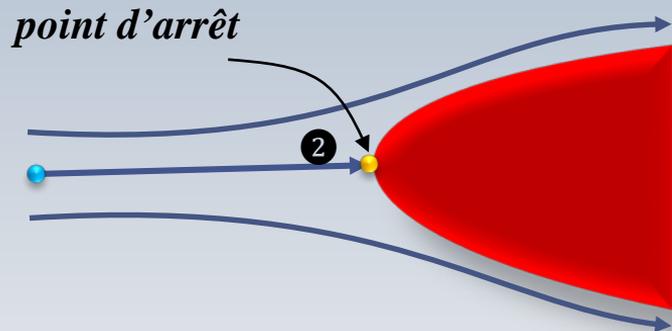
L'effet Venturi est utilisé dans les voitures de course

La vitesse augmente dans la région où il y a un rétrécissement entre la voiture et le sol, la pression chute et la voiture "adhère" plus fortement au sol



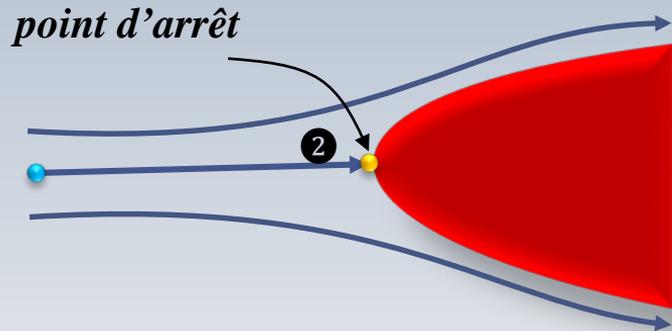
Effet Venturi

Pression d'arrêt ou de stagnation



En présence d'un obstacle, les lignes de courant contournent l'objet, mais il y a au moins un point où l'écoulement est complètement arrêté ($v = 0$). Ce point est appelé **point de stagnation** ou **point d'arrêt**

Pression d'arrêt ou de stagnation



On applique maintenant l'équation de Bernoulli entre les points ① et ②, avec $z_1 = z_2$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

La pression au point ②

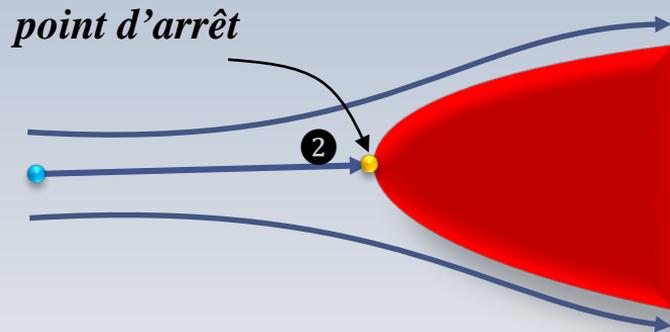
$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}$$

est appelée **pression totale** ou **d'arrêt**

Pression d'arrêt ou de stagnation

La formule précédente indique qu'une fois que p_1 et p_2 sont connues, on peut donc déterminer **la vitesse du fluide**

En pratique, ceci est fait à l'aide de la **sonde de Pitot**



Pitot mesure de vitesse



Henri Pitot
(1695-1771)

NOUVELLE METHODE

Pour connoître & déterminer l'effort de toutes sortes de Machines muës par un Courant, ou une chute d'eau.

Où l'on déduit de la loi des Méchaniques des Formules generales, par le moyen desquelles on peut faire les Calculs de l'effet de toutes ces Machines.

Par M. P I T O T.

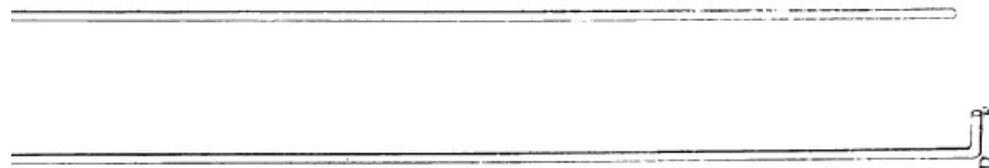
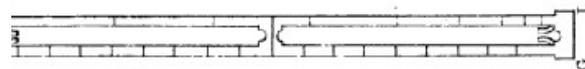
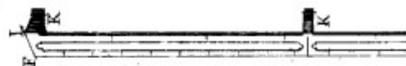
5 Dec.
1725.

1725

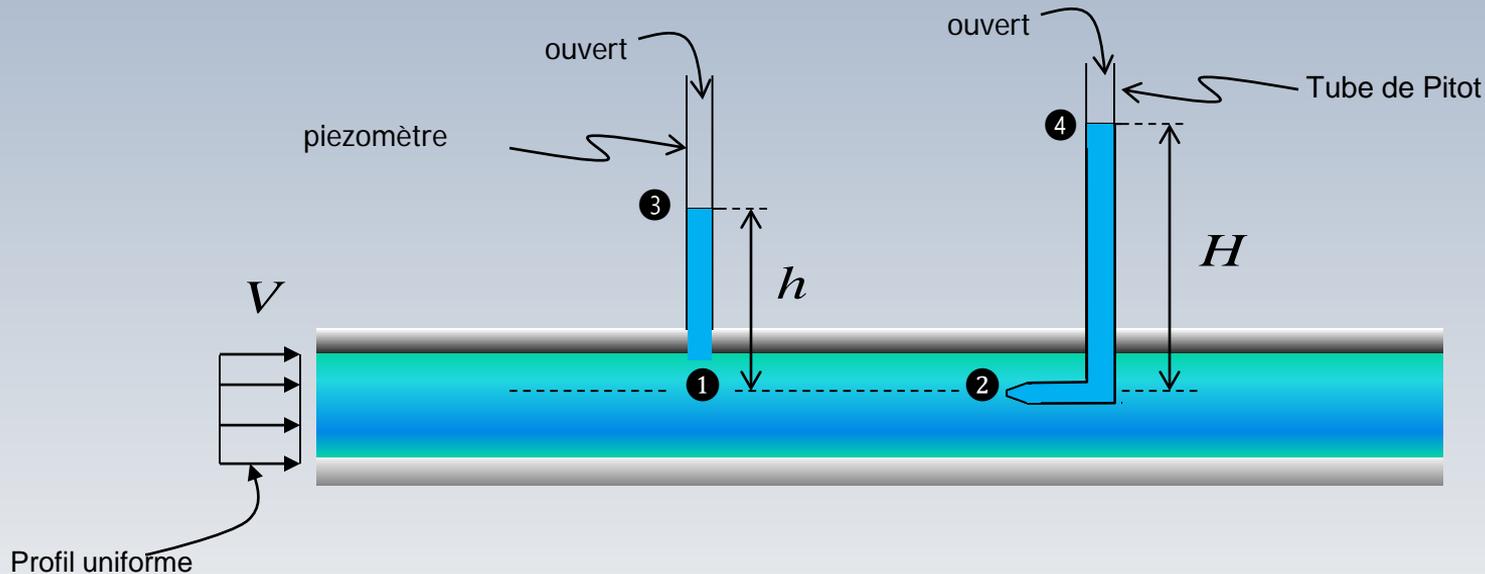
I. LA force de toutes sortes de Machines, quelles que soient leurs compositions ou leurs rouïages, se peut réduire à celle du Levier simple. Cela posé, je dis que sans avoir égard à leur mécanisme, je puis en faire un Examen general des plus parfaites même qu'il soit possible de faire, ou de celles par le moyen desquelles, avec une puissance motrice donnée, on peut mouvoir toute sorte de grands poids; car il est évident que plus le poids ou le fardeau sera grand, ainsi en raison réciproque il sera mû avec moins de vitesse.

II. Quoi-que les frottements soient une cause de perte ou de diminution de force dans toutes les Machines, nous n'y aurons cependant nul égard; par-là on sera toujours très assuré que si on connoît qu'une Machine ne peut produire l'effet qu'on se propose sans y comprendre les frottements, qu'elle sera totalement rejettable.

III. Nous pouvons considerer aussi que la superficie des aubes, vannes ou pallettes, &c. choquées par le courant ou la chute de l'eau, lui est opposée directement ou perpendiculairement, parce que dans l'examen d'une Machine en particulier, on pourra toujours réduire les chocs obliques aux chocs directs, car il est démontré que les forces des



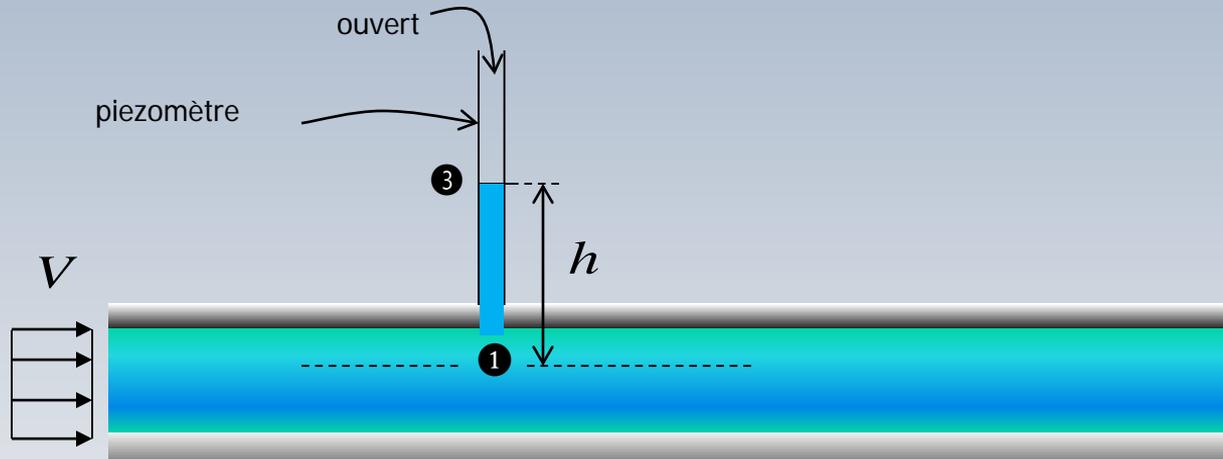
Pitot mesure de vitesse



Au point ① la vitesse est $v_1 = v$

Au point ② (l'entrée du tube de Pitot) **la vitesse est nulle**

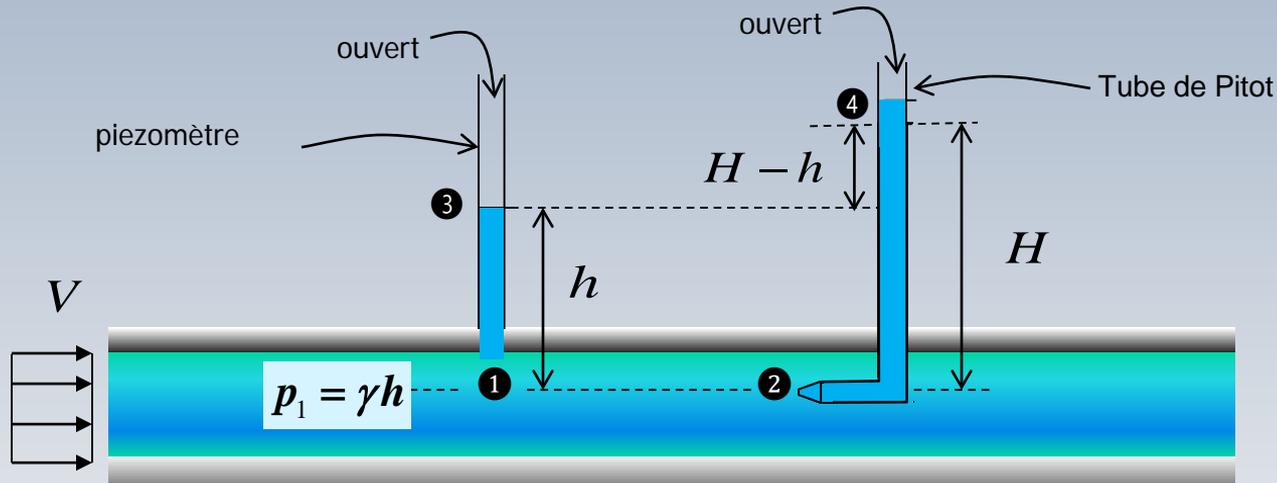
Pitot mesure de vitesse



Pour mesurer la **pression statique** au point ①, on utilise une prise de pression (piezomètre). Sachant que $p + \gamma z = cte$ entre les points 1 et 3, on a:

$$p_1 = p_3 + \gamma h \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_{atm} + \gamma h \quad \Rightarrow \quad p_1 = \gamma h \quad \text{Manométrique } (p_{atm} = 0)$$

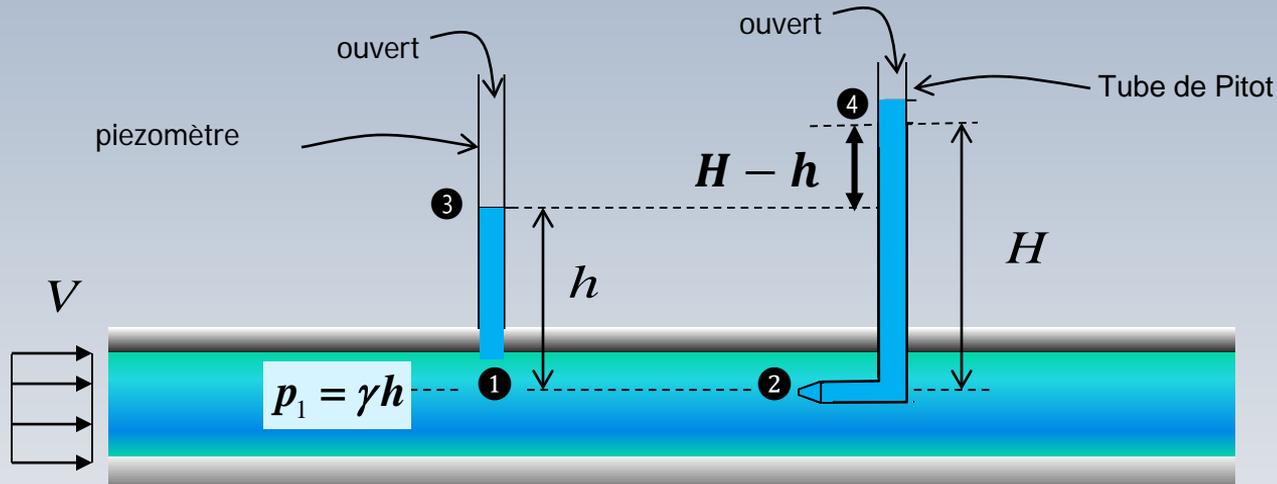
Pitot mesure de vitesse



Pour mesurer la vitesse, on utilise le tube de Pitot qui permet l'obtention de la pression d'arrêt au point ②, soit:

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \quad \text{A}$$

Pitot mesure de vitesse



D'autre part, la pression au point ② est: $p_2 = \gamma H \Rightarrow p_2 = p_1 + \gamma(H - h)$
 ($p_1 = \gamma h$) ②

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}$$

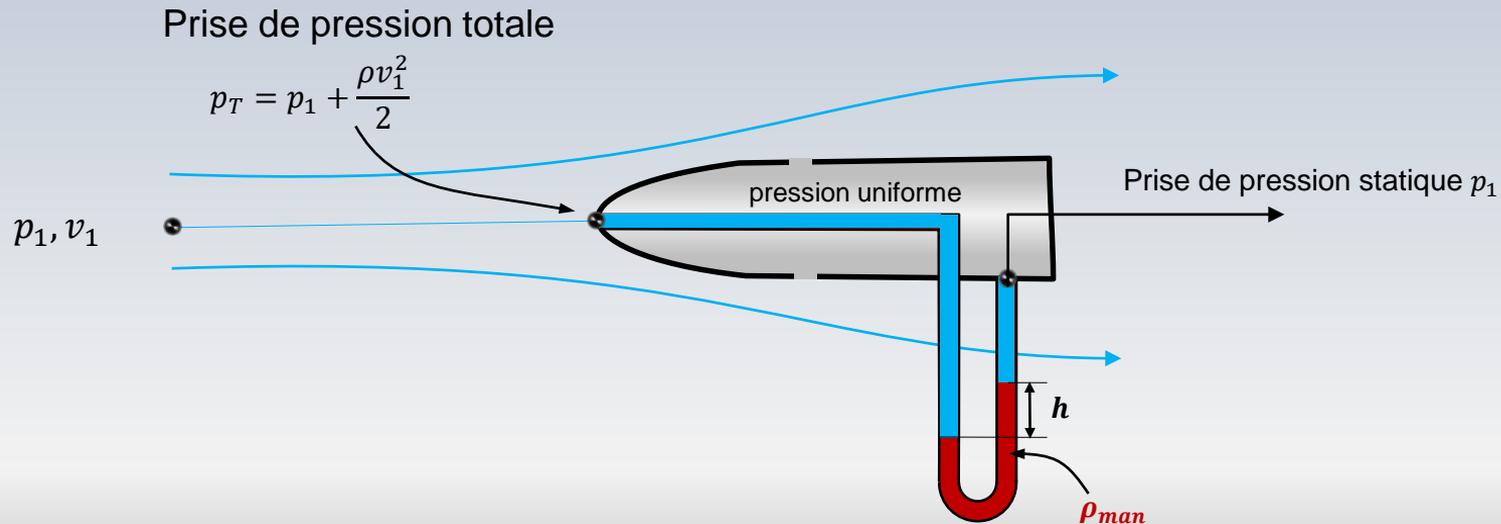
① + ②



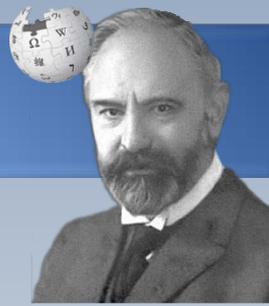
$$v_1 = \sqrt{2g(H - h)}$$

Sonde de Pitot-Prandtl

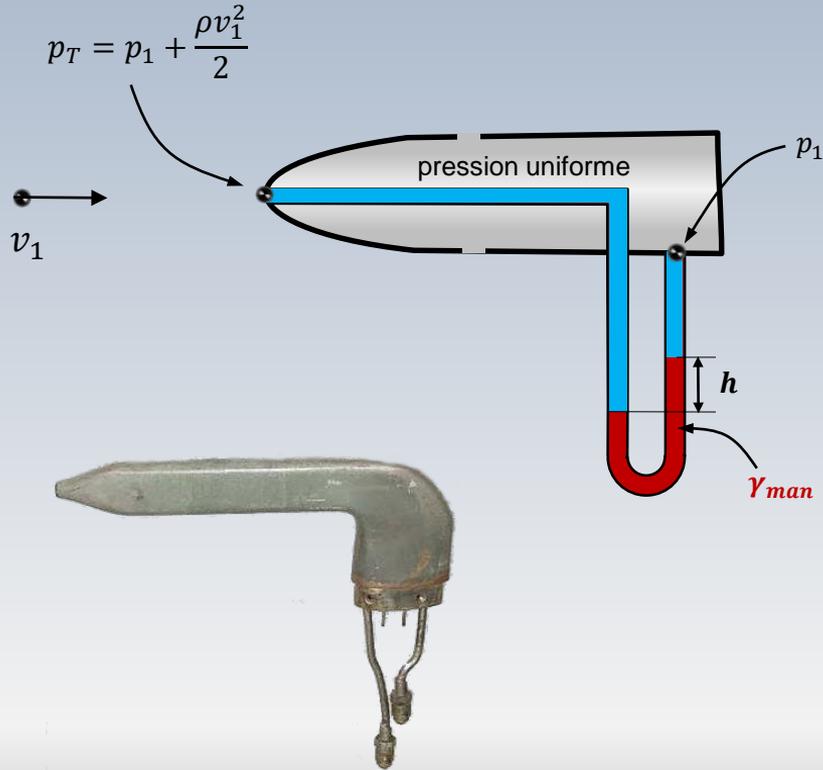
Cette sonde, à forme profilée, est munie de deux prises de pression. Une sur le côté enregistre la pression statique, alors que l'autre, implantée au bord d'attaque, la **pression** totale



Sonde de Pitot-Prandtl



Ludwig Prandtl
(1875-1953)



$$p_T - p_1 = \frac{\rho v_1^2}{2}$$

$$p_T - p_1 = \gamma_{man} h$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} = \gamma_{man} h$$

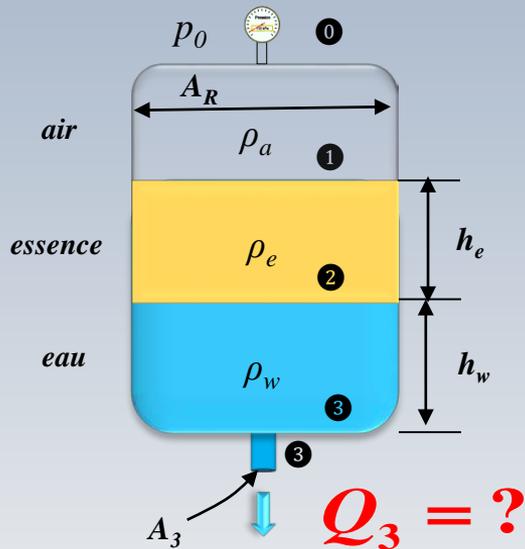
$$v_1 = \sqrt{\frac{2\gamma_{man} h}{\rho}}$$

Sonde de Pitot-Prandtl



Remarque: Pour un écoulement compressible ($Mach > 0.3$), il faut utiliser une formulation élargie du théorème de Bernoulli. À suivre...

Application



$$p_1 = p_0 + p_{atm}$$

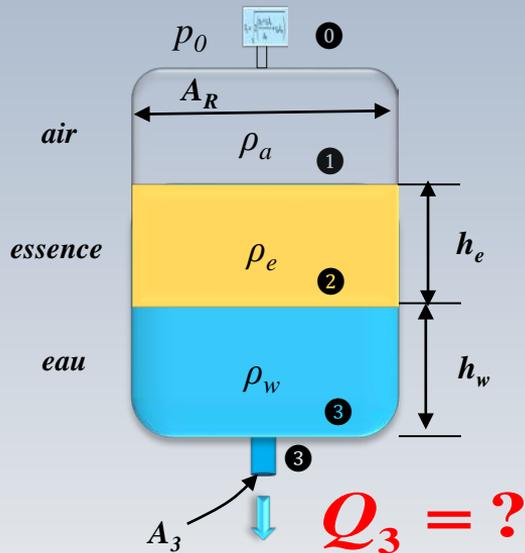
$$p_2 = p_1 + \gamma_e h_e$$

$$p_2 = p_0 + p_{atm} + \gamma_e h_e \quad \longrightarrow$$

$$\frac{A_3}{A_R} \ll 1 \quad V_2 = V_1 \approx 0$$

(par rapport à V_3)

Application



$$Q_3 = ?$$

$$\frac{A_3}{A_R} \ll 1 \quad V_2 = V_1 \approx 0$$

(par rapport à V_3)

p_{atm}

$$p_2 = p_0 + p_{atm} + \gamma_e h_e$$

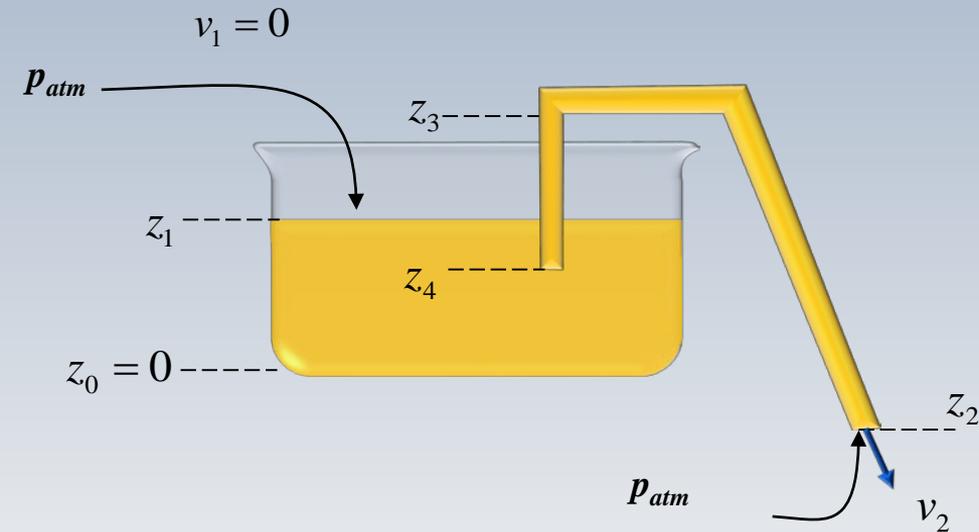
$$p_2 + \frac{\rho_w V_2^2}{2} + \gamma_w z_2 = p_3 + \frac{\rho_w V_3^2}{2} + \gamma_w z_3$$

$$\frac{V_3^2}{2} = \frac{p_2 - p_{atm}}{\rho_w} + \gamma_w h$$

$$\frac{V_3^2}{2} = \frac{p_0 + p_{atm} + \gamma_e h_e - p_{atm}}{\rho_w} + \gamma_w h_w$$

$$V_3 = \sqrt{2 \left(\frac{p_0 + \gamma_e h_e}{\rho_w} + \gamma_w h_w \right)}$$

Application



$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2$$

$$p_1 = p_2 = P_{atm}$$

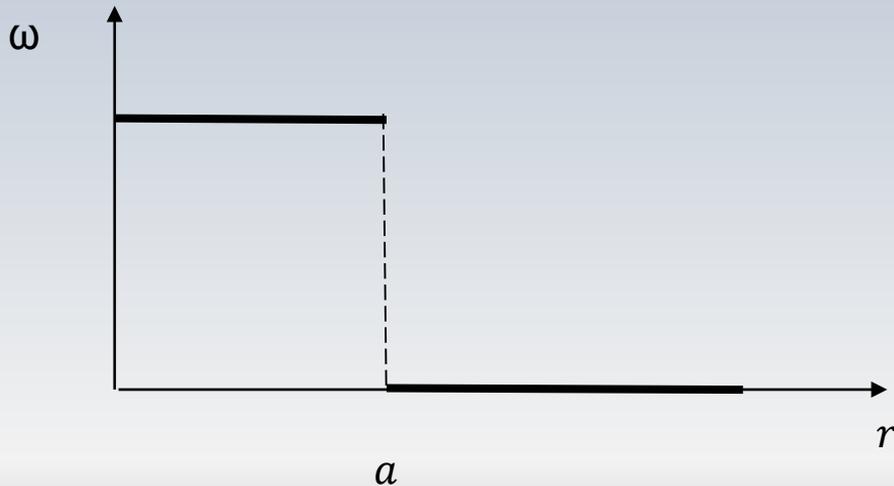
$$v_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

Le tourbillon de Rankine



William Rankine
(1820-1872)

Le tourbillon de Rankine est un modèle classique simple constitué d'un tube de rayon a de vorticité ω constante et d'une enveloppe de vorticité nulle.



Le tourbillon de Rankine



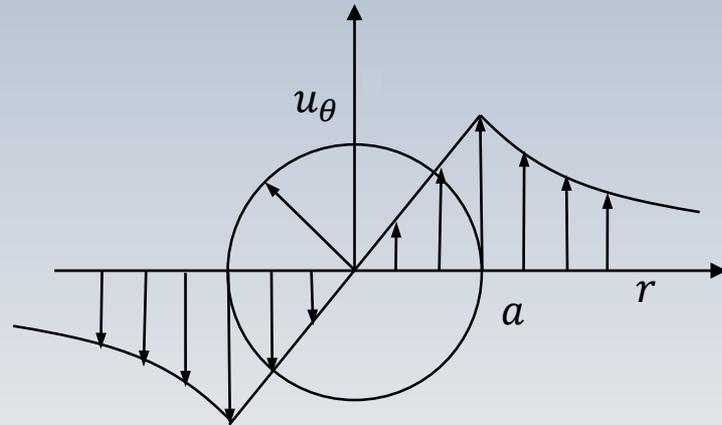
Ce modèle de tourbillon est caractérisé par une loi de vitesse azimutale u_θ donnée par:

$$u_\theta = \begin{cases} r\Omega & r < a \\ \frac{\Omega a^2}{r} & r > a \end{cases}$$

avec

$$u_r = u_z = 0$$

Ω indique la vitesse de rotation angulaire du cœur du tourbillon



Le tourbillon de Rankine

En coordonnées polaires, les équations de NS en régime stationnaire, sans prendre en compte la force gravitationnelle et avec une viscosité supposée négligeable, deviennent:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z \\ \vec{e}_r &= \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j} \\ \vec{e}_\theta &= -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j} \end{aligned}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \leftarrow \quad u_r = u_z = 0$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial (u_\theta \vec{e}_\theta)}{\partial \theta} = \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{u_\theta^2}{r} \vec{e}_r$$

Le tourbillon de Rankine

D'autre part

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

$$\frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{u_\theta^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$

1

2

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_r = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

Le tourbillon de Rankine

$$\textcircled{1} \quad \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad p = p(r, z)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

L'équation $\textcircled{2}$ conduit à des expressions pour la pression pour $r < a$ et $r > a$. Notamment avec $u_\theta = r\Omega$ et $u_\theta = \frac{\Omega a^2}{r}$, respectivement

$$p = \rho \Omega^2 \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$r < a$$



$$u_\theta = r\Omega$$
$$u_\theta = \frac{\Omega a^2}{r}$$



$$p = -\frac{\rho \Omega^2 a^4}{2r^2} + C_2$$

$$r > a$$

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$$
$$\vec{e}_r = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

Le tourbillon de Rankine

Pour déterminer C_1 et C_2 on utilise les conditions aux frontières

$$r \rightarrow \infty \quad \longrightarrow \quad p = p_a = C_2$$

Raccordement des solutions à $r = a$

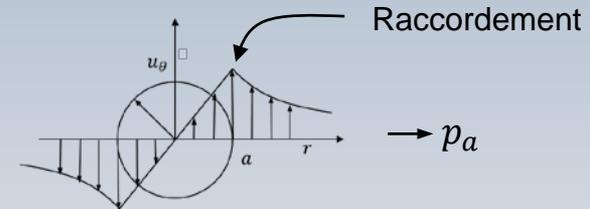
$$p = \rho\Omega^2 \frac{a^2}{2} + C_1 = -\frac{\rho\Omega^2 a^4}{2a^2} + p_a$$

$$C_1 = p_a - \rho\Omega^2 a^2$$

Alors, la pression à $r = 0$ devient

$$p(r = 0) = \rho\Omega^2 \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$p(r = 0) = p_a - \rho\Omega^2 a^2$$



Le tourbillon de Rankine

$$p(r = 0) = p_a - \rho\Omega^2 a^2 = p_a - \rho u_\theta^2$$

On veut utiliser ces résultats pour calculer la pression au coeur d'un ouragan (en $r = 0$), modélisé par le tourbillon de Rankine avec

$$p_a = 101350 \text{ Pa}, u_\theta = 100 \text{ m/s}, \rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

Alors,

$$p(r = 0) = 101350 - 1.2 \times (100)^2 = \mathbf{89350 \text{ Pa}}$$

Rétrospective I

En mécanique de fluides on utilise un champ de vitesses, à des endroits fixes, pour exprimer l'accélération \vec{a} requise **dans la loi de Newton**:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visc} = m\vec{a}$$

Le calcul de \vec{a} est fait à l'aide de **la dérivée matérielle**

$$\vec{a} = \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$$

On a remarqué deux caractéristiques d'un champ de vitesses : **la divergence et le rotationnel**

La divergence de la vitesse \vec{u} , représente le **taux de dilatation** d'un volume de fluide en mouvement **par unité de volume**

Mathématiquement parlant, la divergence s'exprime comme:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

La divergence d'un **écoulement incompressible est nulle**

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Rétrospective III

Le rotationnel, appelé **vorticité** pour un champ de vitesses, décrit **la tendance** d'un l'écoulement à tourbillonner

La vorticité peut être imaginée comme une **sonde à cisaillement**

Mathématiquement elle est définie par:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

- Si $\vec{\omega} = \mathbf{0}$, l'écoulement est dit **irrotationnel**
- Si $\vec{\omega} \neq \mathbf{0}$, l'écoulement est dit **tourbillonnaire (rotationnel)**

Rétrospective IV

La 2^{ème} loi de Newton

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{press} + \vec{F}_{visc} = m\vec{a}$$

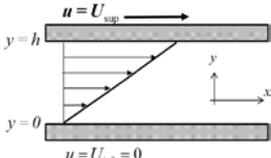
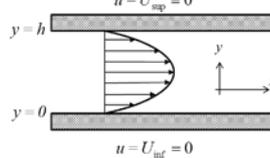
appliquée aux fluides devient l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Rétrospective V

La complexité des équations de NS ne permet pas de trouver des solutions analytiques que pour des cas académiques

Dans ce contexte on a regardé les écoulements de Couette et de Poiseuille

Couette 	Poiseuille 
<ul style="list-style-type: none">Vitesse $u(y) = \left(\frac{U_{sup}}{h}\right)y, \quad \frac{dp}{dx} = 0$	<ul style="list-style-type: none">Vitesse $u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y-h), \quad \frac{dp}{dx} \neq 0$

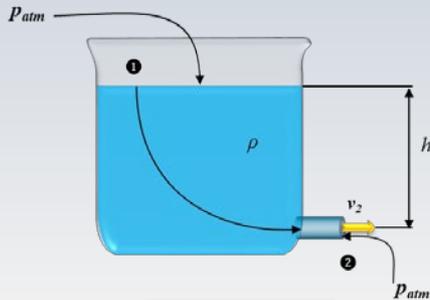
Pour des résultats rapides, l'ingénieur utilise une formule simple qui peut être expliquée comme un modèle dérivé des équations de NS

Il s'agit de **l'équation de Bernoulli**

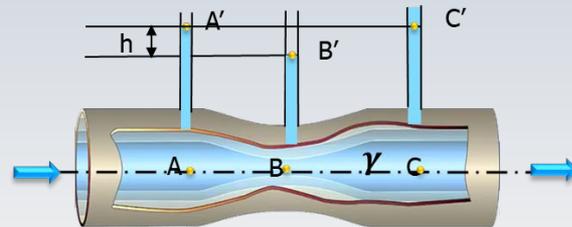
$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cnste$$

Elle ne s'applique que si l'écoulement est incompressible stationnaire et inviscide. On ajoute à ces conditions qu'il soit irrotationnel, ou bien appliqué sur une ligne de courant

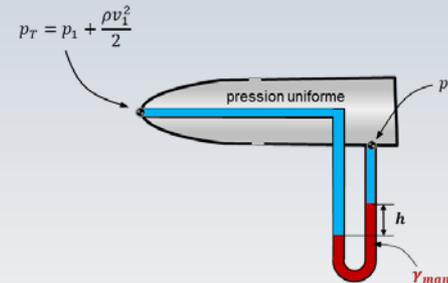
Les formules pour le vidange d'un réservoir de Torricelli, pour l'effet Venturi: dépression provoquée par le rétrécissement local d'une conduite et le tube de Pitot, qui permet une mesure de la vitesse d'un écoulement, peuvent être retrouvées comme des applications de la formule de Bernoulli



$$v_2 = \sqrt{2gh / \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}$$



$$Q = \left(\frac{A_A^2 - A_B^2}{A_A^2 A_B^2}\right) \sqrt{2gh}$$



$$v_1 = \sqrt{2\gamma_{man} h / \rho}$$

Annexes

À Venir:



Gradient et divergence I

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

Gradient d'un scalaire f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

Divergence d'un vecteur $\vec{V} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \hat{k}$$

Gradient et divergence II

Gradient d'un vecteur $\vec{V} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$

$$\nabla\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Gradient et divergence II

Divergence d'un vecteur tenseur $\boldsymbol{\tau}$ symétrique

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$$

Le Laplacien d'un vecteur $\vec{V} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$

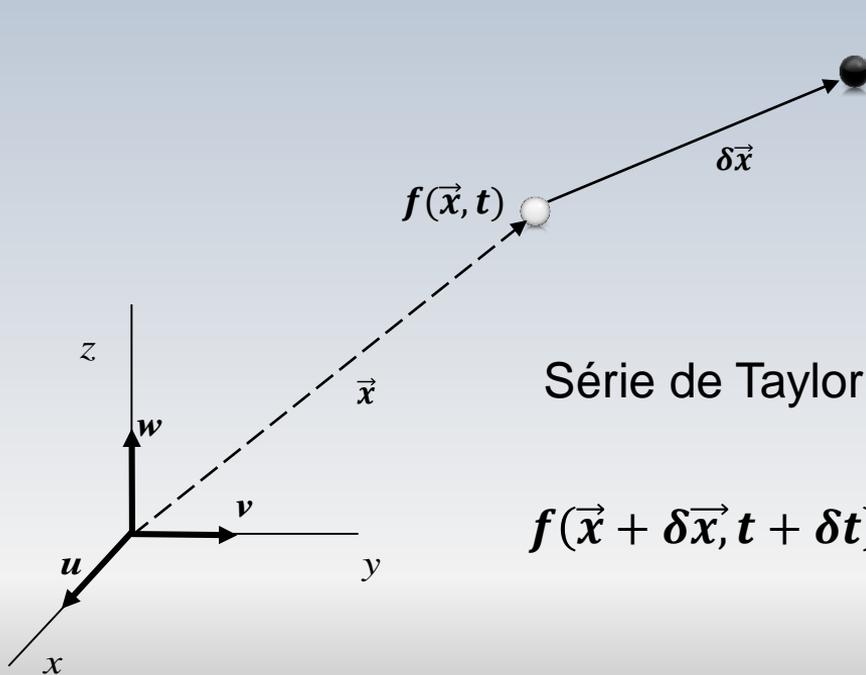
$$\nabla^2 \vec{V} = \begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} \end{cases}$$



Dérivée matérielle: encore

4.1: accélération

$\frac{Df}{Dt} = \frac{df}{dt}$: définition (on suit le mouvement d'une particule)



$$f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t + \delta t)$$

$$f(\vec{x}, t)$$

$$\delta\vec{x}$$

$$\frac{Df}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t + \delta t) - f(\vec{x}, t)}{\delta t}$$

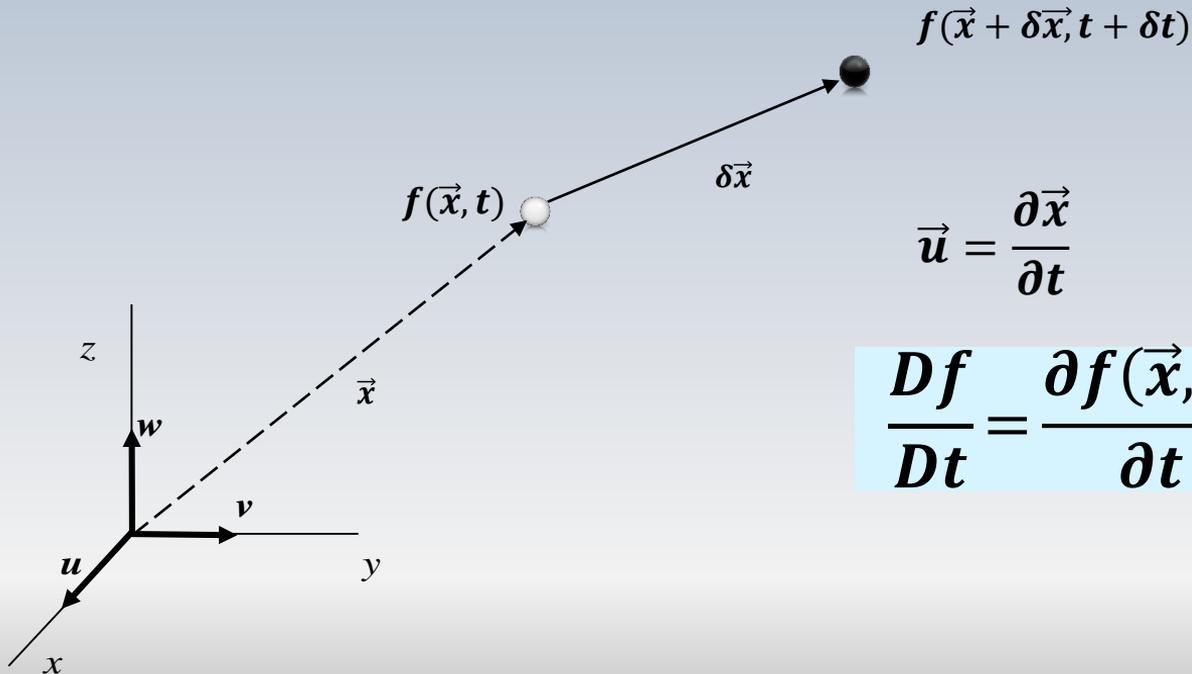
Série de Taylor vectorielle

$$f(\vec{x} + \delta\vec{x}, t + \delta t) = f(\vec{x}, t) + \delta t \left[\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} + \delta\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}, t) + \dots \right]$$

Dérivée matérielle: encore

4.1: accélération

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \nabla f(\vec{x}, t)$$



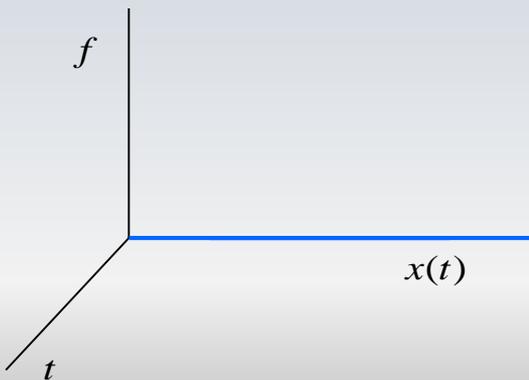
$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f(\vec{x}, t)$$

En 4D (t+ 3D)

$$f(t; x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} u + \frac{\partial f}{\partial x_2} v + \frac{\partial f}{\partial x_3} w$$

$$f=f(t, x_1, x_2, x_3) \text{ avec} \\ u= dx_1/dt, v= dx_2/dt, w= dx_3/dt$$



$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{(u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k})}_{\vec{V}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \hat{k} \right)_{\vec{\nabla}f}$$

Les termes

Formule pour un scalaire dans l'espace 3D

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} f$$

Variation temporelle de f
lorsqu'on suit le système

Variation temporelle de f
à un endroit fixe.

Variation de f causée par le mouvement
d'une particule d'un point à un autre

Accélération I

L'accélération est la dérivée du vecteur vitesse d'une particule lorsqu'on suit le mouvement:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Pour la composante a_i ($i=1,2,3$), la dérivée substantielle est:

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Variation de } v_i \text{ vue par un observateur fixe}} + \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} v_3}_{\text{Transport de la composante } v_i \text{ par le champ des vitesses}} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{\nabla} v_i \cdot \vec{v}$$

Variation de v_i vue par un observateur fixe

Transport de la composante v_i par le champ des vitesses

Accélération II

On peut écrire alors pour les trois composantes (des scalaires)

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \vec{\nabla} v_1 \cdot \vec{v}, \quad a_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \vec{\nabla} v_2 \cdot \vec{v}, \quad a_3 = \frac{\partial v_3}{\partial t} + \vec{\nabla} v_3 \cdot \vec{v}$$

Ou encore

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

\vec{a}

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

$\nabla \vec{v}$

\vec{v}

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Remarque I

Afin de noter ces équations de manière compacte, on a utilisé la notion de "matrice gradient" (tenseur d'ordre deux), dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est le gradient de la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur. Notamment:

$$\nabla_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Remarque II

L'équation :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \vec{V} \cdot \vec{V}$$

est aussi retrouvée sous la forme

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

Accélération due à la variation
de la vitesse dans le temps

Accélération causée
par le transport

[Retour](#)





Équations de N-S en coordonnées. cartésiennes

Q. de mouvement

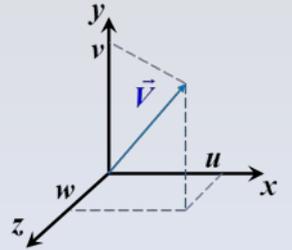
$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

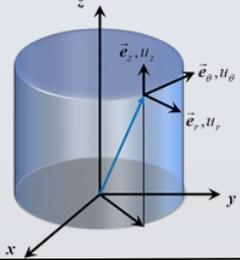
Continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Équations de N-S en coordonnées cylindriques

Direction radiale



$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{u_\theta^2}{r^2} \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)$$

Direction tangentielle

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} - \frac{u_r u_\theta}{r^2} \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

Direction axiale

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right)$$

Continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

Identité de Crocco

Algèbre de l'identité de Crocco

4.3 Conservation de la masse

Dans le repère cartésien, l'accélération de la composante u le long de la direction x , s'écrit

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

En ajoutant et en soustrayant deux termes on peut écrire

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Algèbre de l'identité de Crocco

4.3 Conservation de la masse

Ou encore $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x}$

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

mais

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

alors

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) - v\omega_z + w\omega_y$$

De la même manière, les deux autres composantes de l'accélération peuvent s'écrire:

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) - u\omega_z + w\omega_x$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) - u\omega_y + v\omega_x$$

Si on regarde le produit:

$$\vec{\omega} \times \vec{u} = (\omega_y w - v\omega_z, \omega_x w - u\omega_z, \omega_x v - u\omega_y),$$

Algèbre de l'identité de Crocco

4.3 Conservation de la masse

on constate que les composantes de $\vec{\omega} \times \vec{u}$ correspondent aux deux derniers termes de chacune des composantes de l'accélération On peut ainsi écrire:

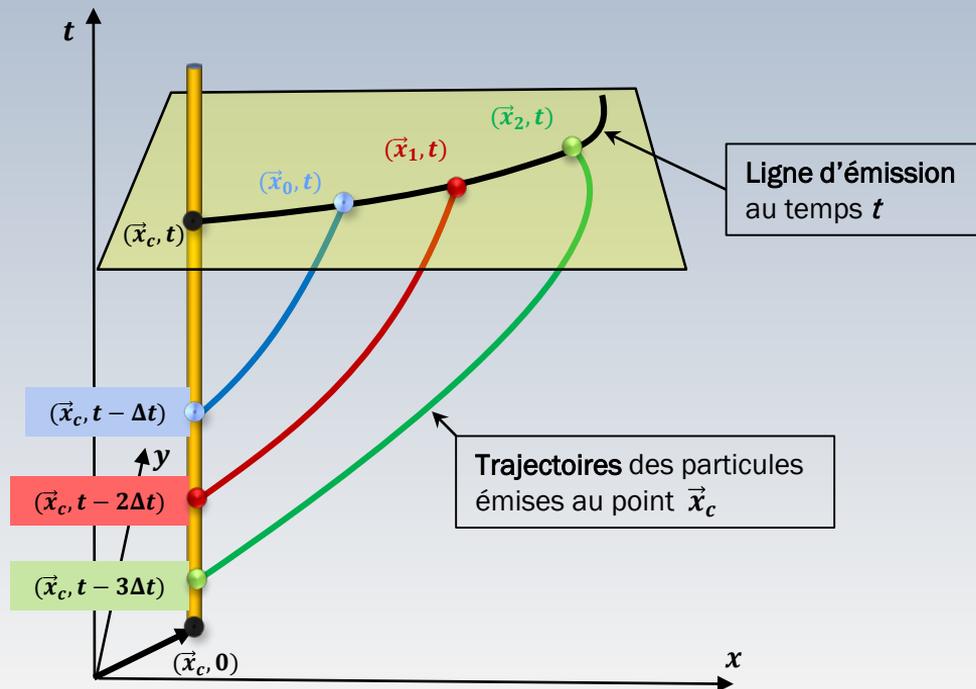
$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

Retour



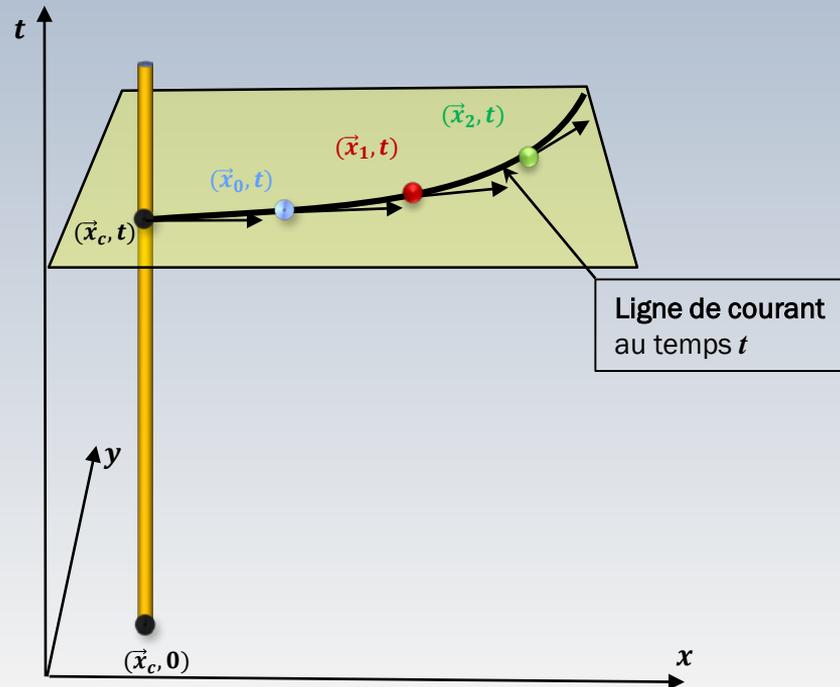
Interprétation en espace-temps

1.11 lignes de ...



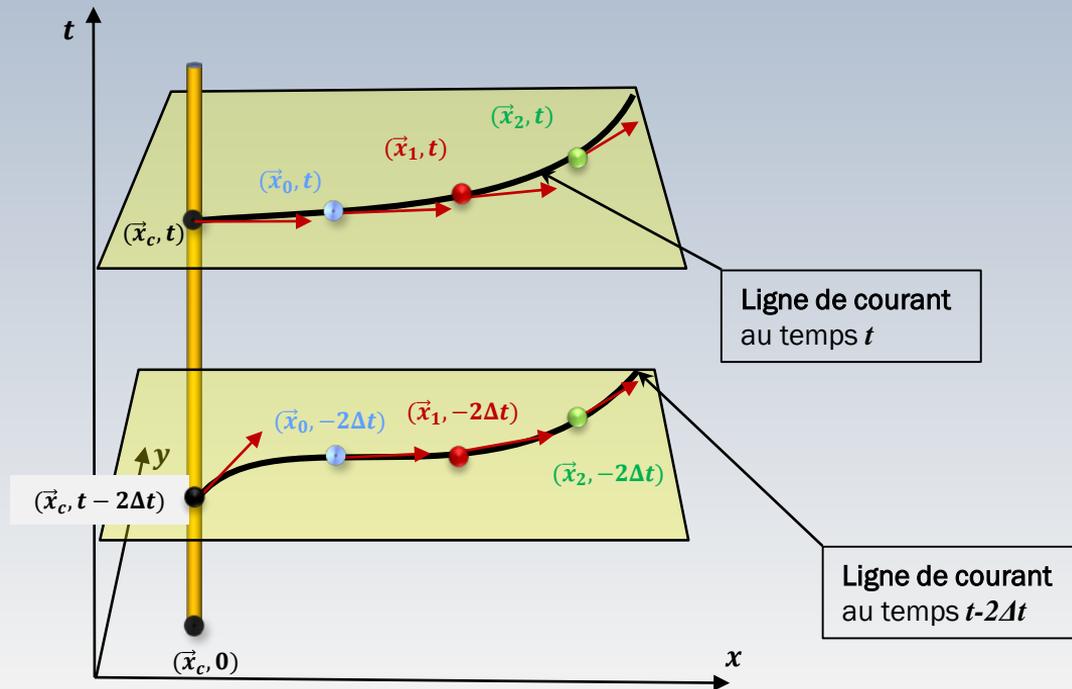
Interprétation en espace-temps

1.11 lignes de



Interprétation en espace-temps

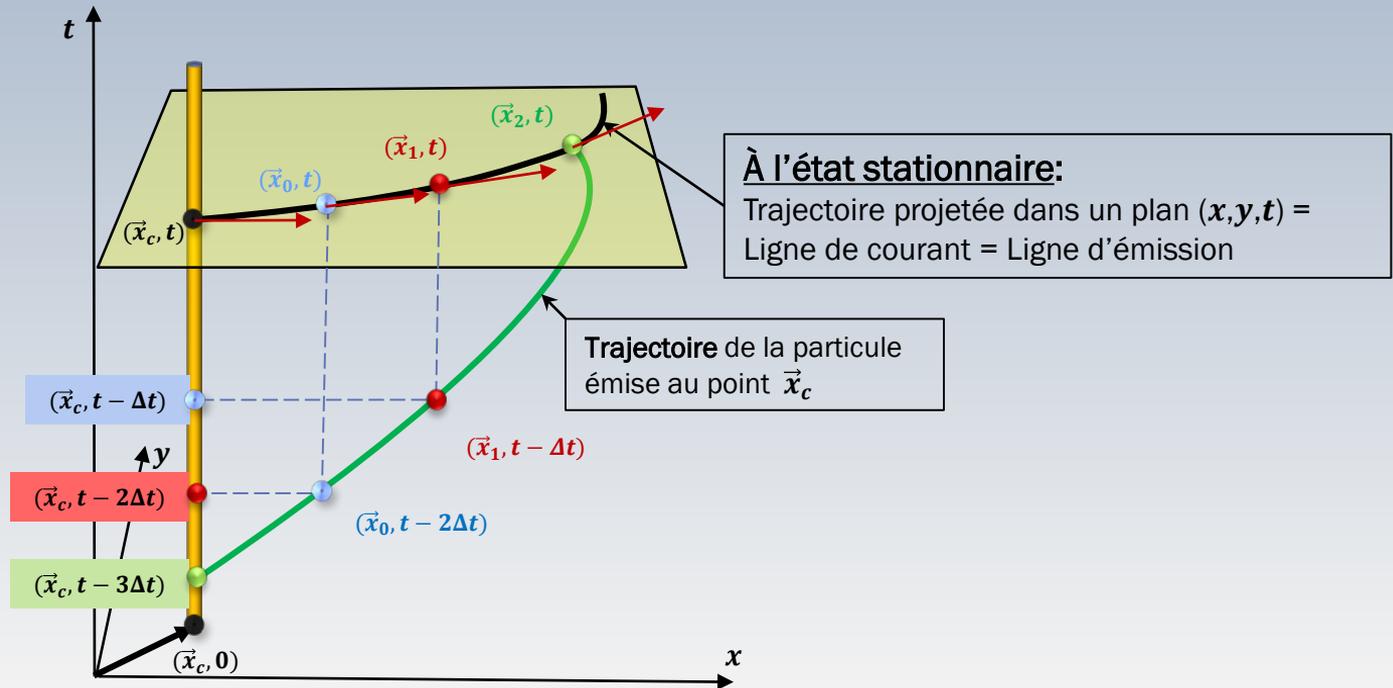
1.11 lignes de ...



Cliquez pour obtenir un très bon article qui a inspiré ces images (Le sujet est avancé!)

État stationnaire

1.11 lignes de ...

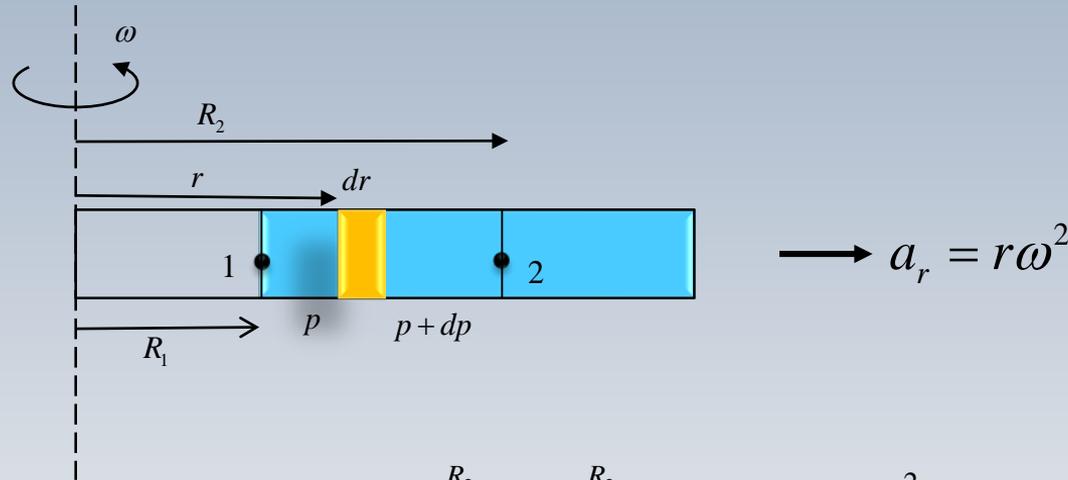


Retour



La portance

3.05 Le Théorème de Bernoulli



$$dp = \rho r \omega^2 dr \quad \Rightarrow \quad p_2 - p_1 = \int_{R_1}^{R_2} dp = \int_{R_1}^{R_2} \rho r \omega^2 dr = \frac{\rho \omega^2}{2} (R_2^2 - R_1^2)$$

La pression croît dans la direction radiale

ou encore

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2 = \frac{\rho V_T^2}{r}$$

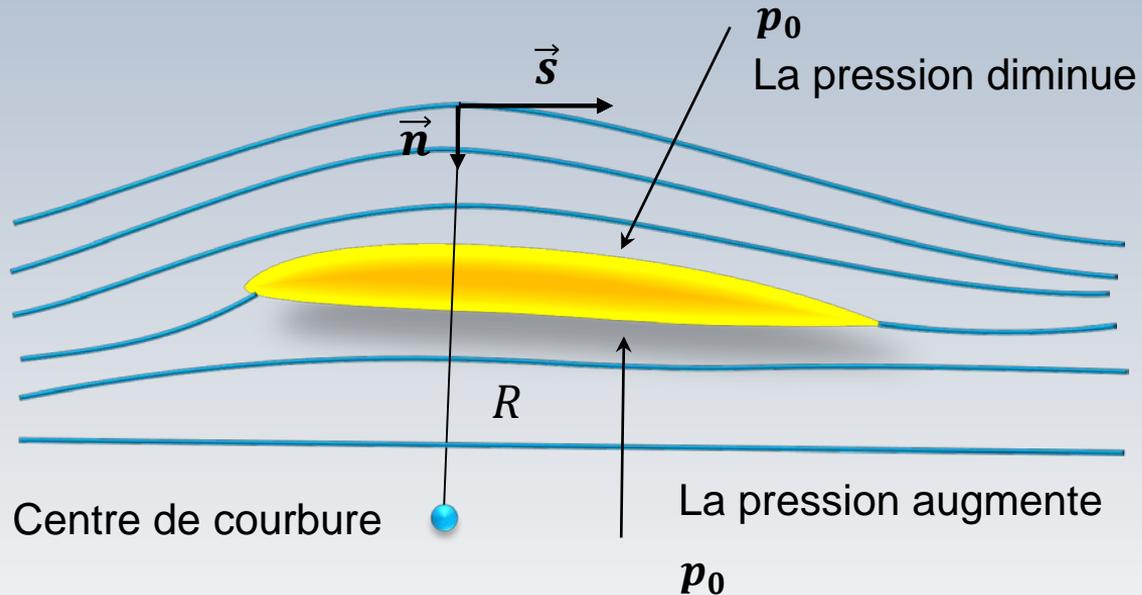
La portance

On peut expliquer la portance comme une conséquence de la forme d'un profil d'aile qui force les lignes de courant à se courber. À partir des équations du mouvement (en coordonnées curvilignes), on sait qu'un gradient de pression, $\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{R}$, conduit à la déformation des les lignes de courant. Dans cette formule R est la courbure de la ligne de courant et V la vitesse.

La portance

Ce gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{R}$, agit comme la force centripète produite par un mouvement circulaire. Puisqu'il y a une pression p_0 loin du profil, l'équation nous indique que la pression sur l'extrados est plus faible que p_0 , tandis qu'elle est plus élevée que p_0 sur l'intrados. Cette différence de pression produit alors la force de portance sur le sur le profil.

La pression augmente lorsqu'on s'éloigne du centre de courbure



$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{R}$$

Sans tenir compte de la force gravitationnelle

Retour



Fonction de courant

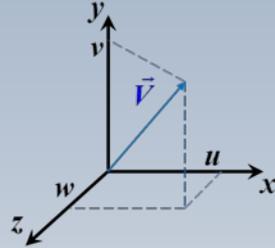
En coordonnées cartésiennes 2D

$$\vec{V} = u(x, y, t)\hat{i} + v(x, y, t)\hat{j}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$



$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = 0$$



Soit la fonction continue et dérivable $\psi = \psi(x, y, t)$

Alors,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Pourquoi?

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \right)$$



Propriétés de la fonction de courant

1) La fonction de courant satisfait l'équation de continuité

$$\begin{aligned} 2) \quad \nabla^2 \psi = ? \quad \nabla^2 \psi &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (-v) + \frac{\partial}{\partial y} (u) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi = -\nabla \times \vec{V} = -\omega$$

Le Laplacien de ψ correspond au négatif de la vorticité

Propriétés de la fonction de courant

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k$$

3) $\nabla^2 \Psi = 0$ Pour un fluide parfait

Pour un fluide parfait, le champ de vitesse s'obtient du gradient d'une fonction scalaire Φ appelée le **potentiel de vitesse**

$$\vec{V} = \nabla \Phi$$

Fonction de courant et potentiel

Remarque: Lorsque

$$\vec{V} = \nabla\Phi$$

$$\nabla \times \vec{V} = \nabla \times \nabla\Phi = 0$$

→ Résultat du calcul vectoriel

→ Le champ de vitesse est **irrotationnel**

$$\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$



$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Fonction de courant et potentiel

Alors

$$\nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{lorsque } \vec{V} = \nabla \Phi)$$

Équation de continuité

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 0$$

4) $\nabla \Phi \cdot \nabla \Psi = 0$ Pour un fluide parfait

Les lignes de potentiel et de courant sont-elles orthogonales?

Fonction de courant et potentiel

$$\vec{V} = \nabla\Phi \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases} \quad \nabla\Psi = \begin{cases} u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

$$\nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = 0? \quad \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ = u(-v) + vu = 0$$

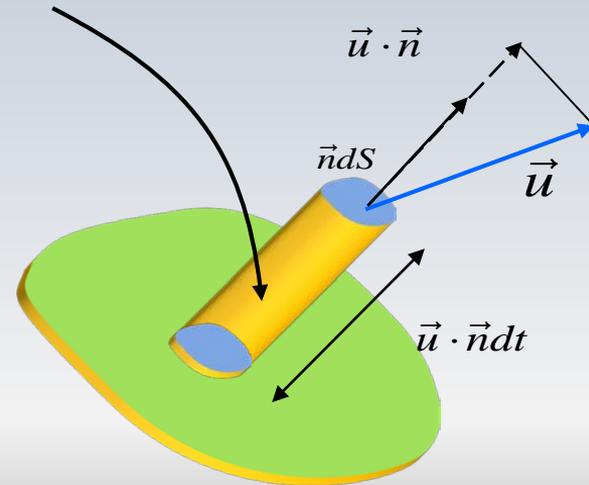
OUI, les lignes de potentiel et de courant sont orthogonales!

On définit la dilatation d'une parcelle de fluide comme le taux de variation temporel du volume δV par unité de volume, soit:

$$\text{Dil} = \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt}$$

Le terme $\vec{u} \cdot \vec{n} dS$ correspond au taux d'avancement de la surface dans le temps. Cette quantité équivaut à la variation par unité de temps d'un volume lagrangien élémentaire δV

$$\delta V = \vec{u} \cdot \vec{n} dS dt$$



La variation par unité de temps d'un volume V est alors:

$$\frac{DV}{Dt} = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad \xrightarrow{\text{Gauss}} \quad \frac{DV}{Dt} = \int_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV$$

$$\text{Dil} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \frac{1}{V} \int_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV$$

$$\text{Dil} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV = \nabla \cdot \vec{u}$$

Retour



Résumé

Potentiel vecteur Φ

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$

Automatiquement satisfaite

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

Fonction de courant Ψ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Automatiquement satisfaite

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\nabla^2 \Psi = 0$$

[Retour](#)



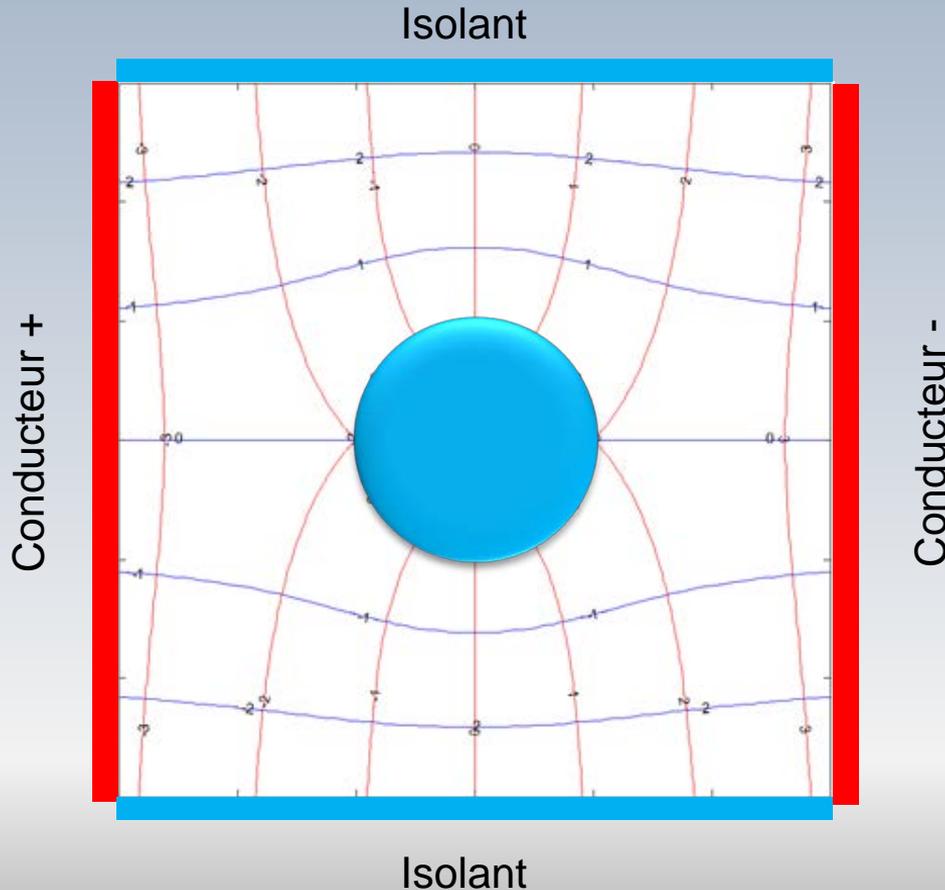
Idée sympathique, basée sur le fait qu'il existe une fonction de courant électrique I et un potentiel électrique E , régi par des équations analogues ($\nabla^2 I = 0, \nabla^2 E = 0$) à celles décrivant les écoulements potentiels pour les fluides ($\nabla^2 \Psi = 0, \nabla^2 \Phi = 0$).

Une méthode expérimentale, virtuellement disparue, utilisait un papier conducteur sur lequel on appliquait une peinture isolante pour décrire géométriquement des corps (2D) à l'étude.

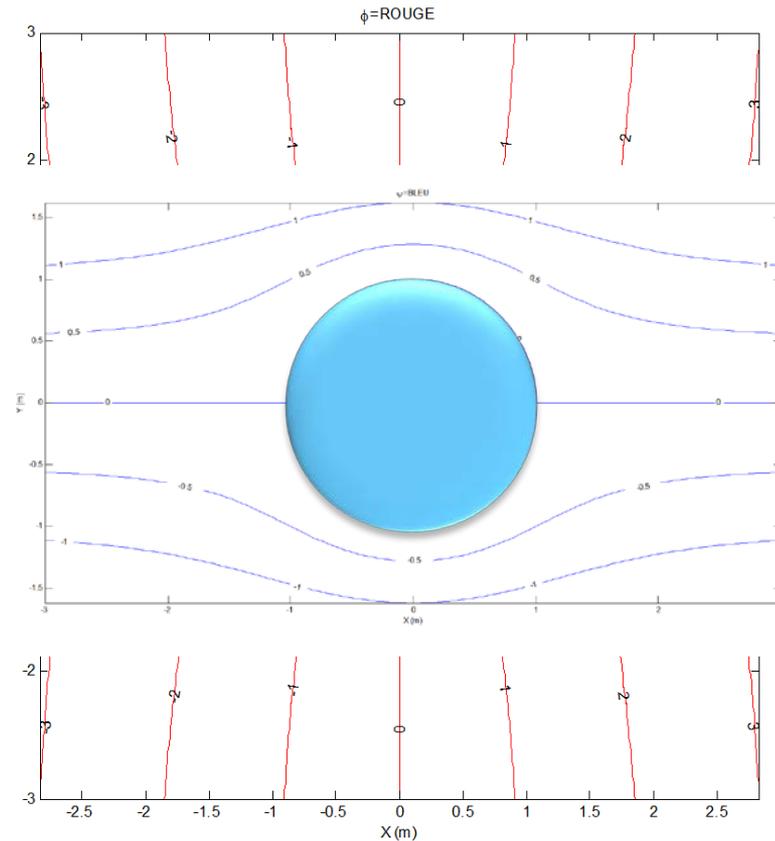
Avec un voltmètre, on pouvait suivre les lignes équipotentielles Φ et les lignes de fonction de courant Ψ pour obtenir une approximation grossière de l'écoulement

Courant et potentiel

4.8 Vorticité et...



Remarque: pour obtenir les lignes de courant on interverti les parties isolantes et conductrices



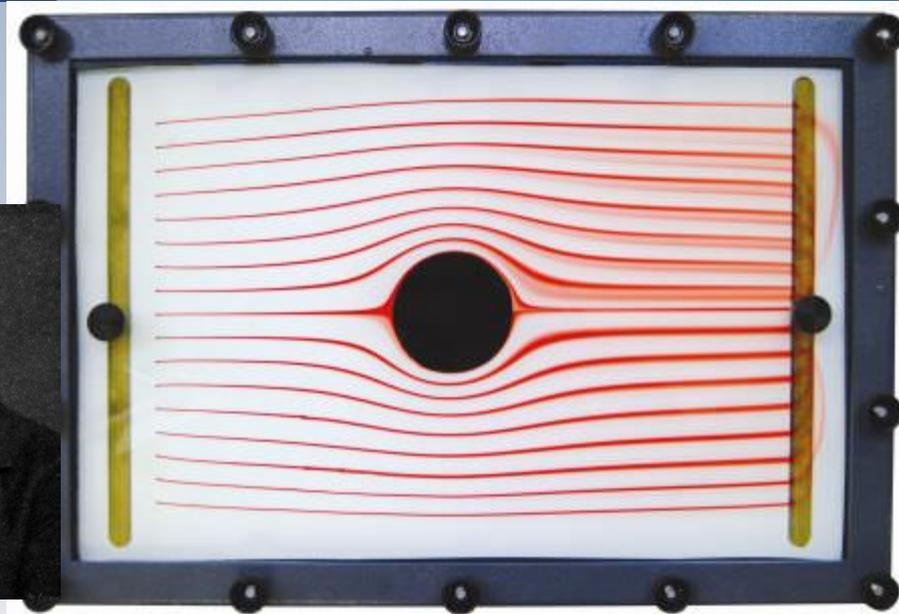
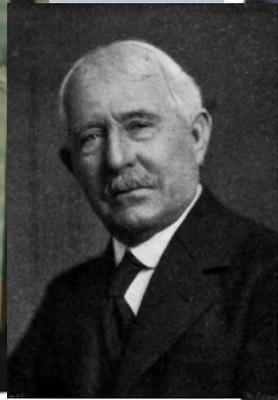
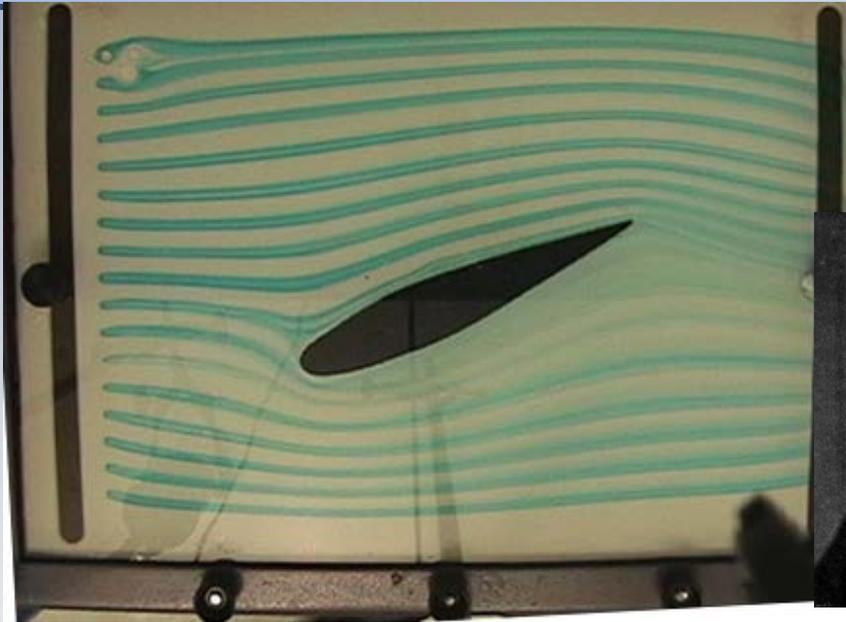
$$\phi = U \cos \theta \left(r + \frac{R^2}{r} \right)$$

$$\psi = U \sin \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right)$$

Hele-Shaw

H. S. Hele-Shaw, *The flow of water*, Nature **58** (1898), no. 1489, 33–36

4.9 Écoulement irrotationnel...



Henry Selby Hele-Shaw

Un écoulement potentiel a lieu lorsqu'un fluide très visqueux se déplace à faible vitesse entre deux plaques parallèles distants d'une faible épaisseur

À partir des équations de Navier-Stokes, on trouve pour cette configuration que la vitesse \vec{u} du fluide est seulement fonction du gradient de pression p :



$$\vec{u} = -\frac{b^2}{12\mu} \nabla p$$

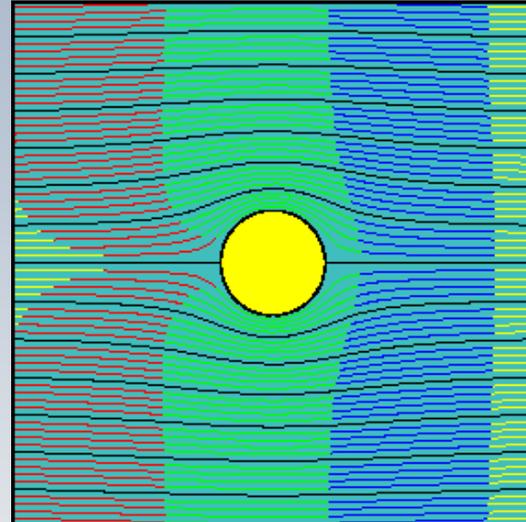
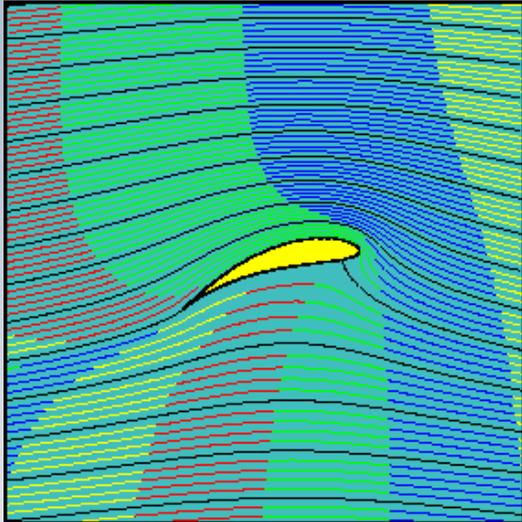
(Solution de H. Lamb, 1932).

avec b étant la distance qui sépare les plaques et μ la viscosité du fluide.

La vitesse satisfait $\vec{u} = \nabla\Phi$ avec le potentiel $\Phi = -pb^2/12\mu$

Écoulement irrotationnel

4.9 Écoulement irrotationnel...



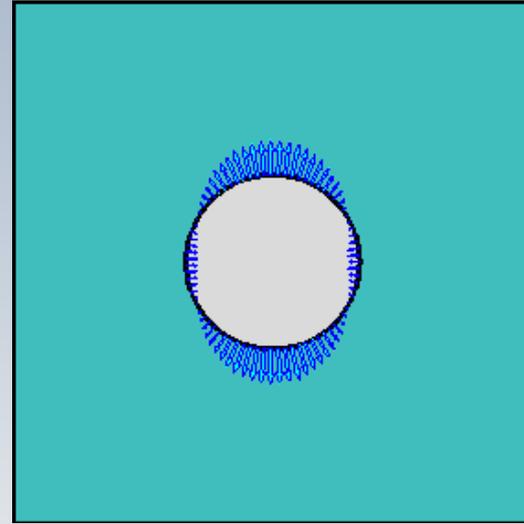
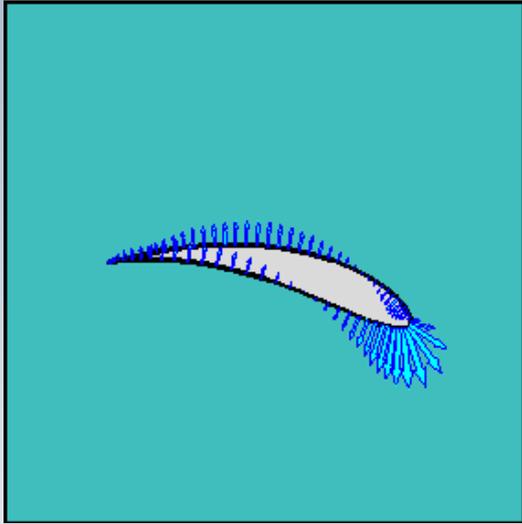
Écoulement irrotationnel autour d'un profil d'aile d'avion et d'un cylindre. La force résultante sur chaque corps ne dépend que du champ de pression autour des objets. Celle-ci est nulle sur le cylindre (symétrie) et normale (portance) aux lignes de courant pour le profil. Les fronts des couleurs sont utilisés pour indiquer des lignes d'émission

Les animations proviennent du site:

[Je veux regarder +](#)



pas envie



Forces de pression sur un cylindre et sur un profil d'aile d'avion

Les animations proviennent du site:

[Je veux regarder +](#)

[Retour](#)

Je ne veux pas



Simplifications

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\substack{\vec{g} = -\nabla gz \\ \text{Fluide non visqueux}}} = \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

Écoulement stationnaire



Relation vectorielle attribué à L. Crocco

Je veux regarder le développement



Non merci!

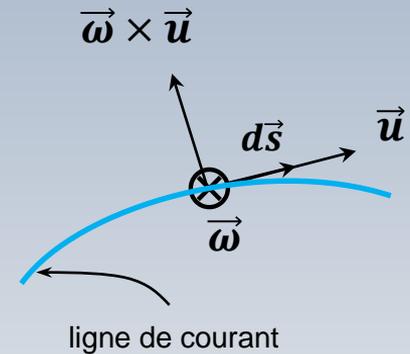


$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right) + \underbrace{(\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u}}_{\vec{\omega}}$$

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = -(\vec{\omega} \times \vec{u}) + \cancel{\nu(\nabla \times \vec{\omega})}$$

La figure indique que le vecteur $d\vec{s}$ est orthogonal à $\vec{\omega}$ et aussi au produit $(\vec{\omega} \times \vec{u})$

Alors $(\vec{\omega} \times \vec{u}) \cdot d\vec{s} = 0$, ainsi



$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \cdot d\vec{S} = (-(\vec{\omega} \times \vec{u})) \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Alors, la quantité $(V^2/2 + p/\rho + gz)$ **se conserve le long de lignes tangentes à \vec{u}** : cas stationnaire, incompressible, inviscide

Le théorème de Bernoulli considère une ligne de courant (tangente à \vec{u}) et s'écrit:



$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cnste.}$$

Sur une ligne de courant!

Retour



La constante normalement diffère d'une ligne de courant à l'autre.
Cette propriété a mené à des polémiques en aérodynamique, en particulier pour expliquer la portance sur une aile.

Pour voir un explication sur la portance

Pour regarder un (long) vidéo sur le sujet

Je ne veux pas des Xtras!



Bien qu'il s'agit d'un sujet avancé, on note qu'un cas particulier du [Théorème de Crocco](#) établie une relation pour un écoulement stationnaire isenthalpique entre la vorticité $\vec{\omega}$ et l'entropie S , notamment:

$$-(\vec{u} \times \vec{\omega}) + T\nabla S = 0$$

Retour



Wow! L'entropie est constante sur tout le domaine si le champ de vitesse est irrotationnel

À bientôt

