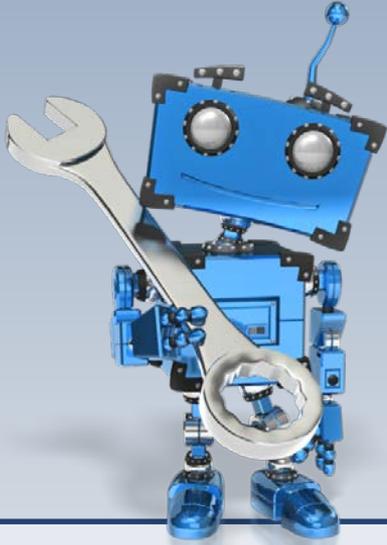


# Mécanique des fluides



**La force des écoulements**



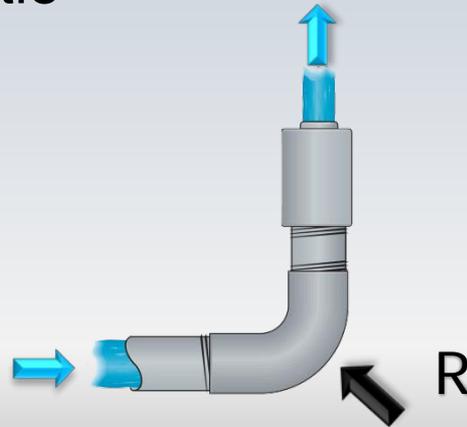
# Lois de conservation Intégrale



# Introduction

Dans plusieurs cas pratiques l'action d'un fluide en mouvement génère une force de réaction  $R$

Pour le coude illustré sur la figure,  $R$  est fondamentalement due à la variation de la quantité de mouvement (vitesse: module et direction) entre l'entrée et la sortie



L'approche privilégiée par le génie pour traiter ce genre de problème utilise la notion de **volume de contrôle**

Celle-ci est une **formulation intégrale** (par rapport à différentielle) qui permet d'effectuer des bilans et des calculs de manière agile

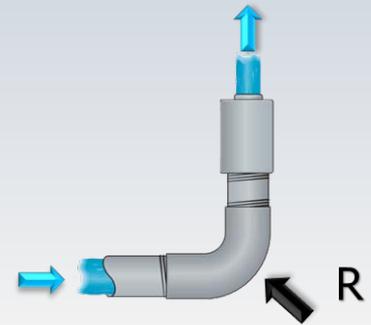
La formulation intégrale générale nous permettra de découvrir des formules spécifiques pour **la conservation de la masse, conservation de l'énergie et la conservation de la quantité de mouvement**

# Introduction

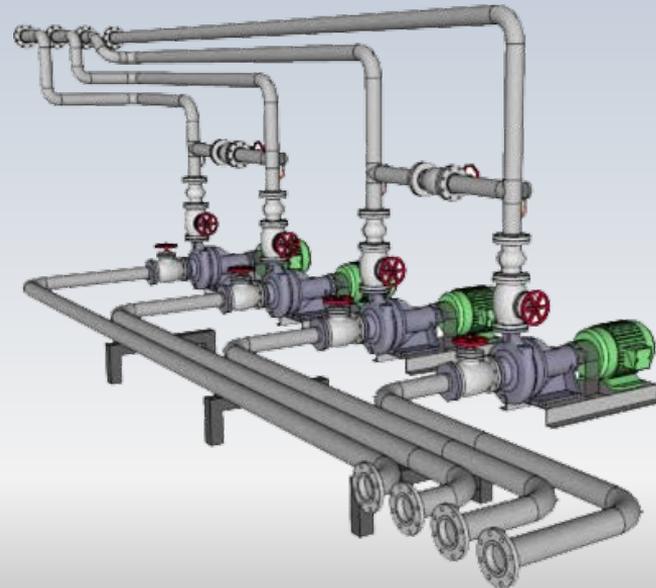
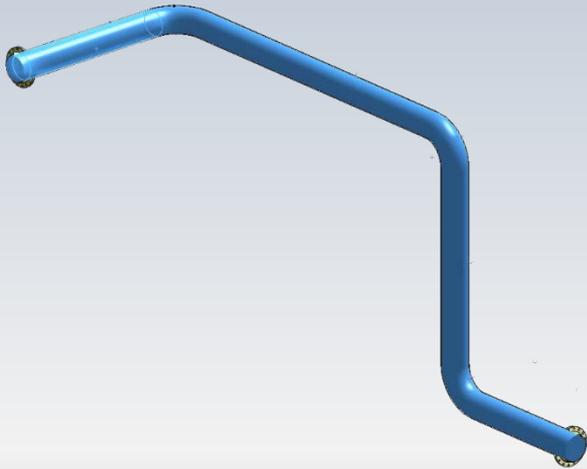
Pour des configurations similaires à celle du coude, l'impact des forces de cisaillement n'est pas crucial et on peut l'ignorer, produisant quand même des résultats étonnement précis

Concrètement, il s'agit de considérer la loi fondamentale de la dynamique sous la forme:

$$\frac{d(m\vec{u})}{dt} = \vec{F}_{gravité} + \vec{F}_{pression} + \cancel{\vec{F}_{cisail}} + \vec{R}$$



On note que lorsqu'on traitera des problèmes similaires à ceux illustrés sur les figures (réseaux hydrauliques), l'effet dissipatif du cisaillement sera pris en compte dans l'équation de l'énergie



# OBJECTIFS

- Comprendre la notion de **bilan** d'une propriété moyenne dans une région utilisant la formulation générale appelée **Théorème de Transport de Reynolds**
- Appliquer ce théorème pour retrouver successivement les équations de **conservation pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie**
- Simplifier les équations de conservation pour l'écoulement unidimensionnel d'un fluide non-visqueux en régime stationnaire

# Chapitre 3 – Lois de conservation intégrale

3.01

3.02

3.03

3.04

3.07

3.01 Quelques lois de la mécanique des fluides

3.02 Le théorème de transport de Reynolds

3.03 Conservation de la masse

3.04 Conservation de la quantité de mouvement

3.07 Conservation de l'énergie



# Les solides et les fluides

**Les lois physiques, comme la quantité de mouvement ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ), sont applicables à des systèmes fermés**

En mécanique des solides, l'application de ces lois est directe et on ne retrouve pas la notion de système fermé confrontée à celle de système ouvert.

Par contre, les fluides se déforment et les domaines à l'étude (une conduite par exemple) possèdent fréquemment des entrées et des sorties (frontières ouvertes). Alors, les lois de conservation sont plus difficiles à implémenter.

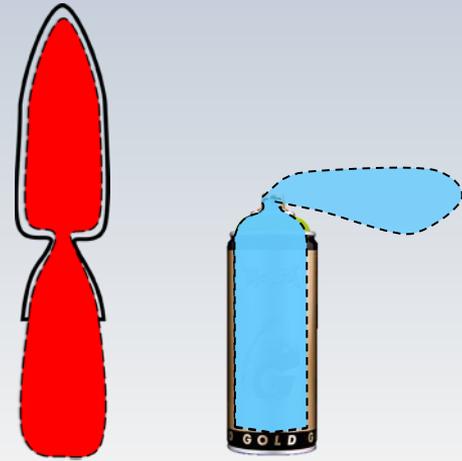
# Systemes fermés

L'aérosol sortant d'un contenant sous pression, ou les gaz s'échappant d'une fusée sont des exemples de systèmes (fermés) qui évoluent dans le temps

Quoi faire ? Le volume change avec  $t$  #!\*&



$$\left. \frac{d(m\vec{u})}{dt} \right|_{\text{syst}} = \sum \vec{F}_{\text{syst}} \quad ?$$



Systemes fermés évolutifs

Pour résoudre cet inconvénient, on analyse plutôt l'évolution des grandeurs physiques (masse, quantité de mouvement, énergie) à l'aide **d'équations intégrales de bilan** sur des domaines macroscopiques.

Il est par conséquent nécessaire d'établir une **correspondance entre un bilan et le transport** des grandeurs physiques par l'écoulement.

# Types de volume

Dans ce contexte, on retrouve les notions de **volume de contrôle**, (souvent fixe), associé à la formulation **eulérienne** et de **volume matériel** (qui se déplace), raccordé à la cinématique **lagrangienne**

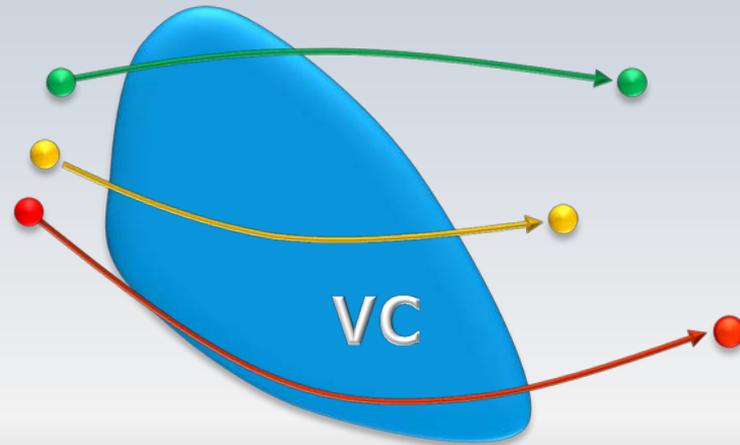
# Volume de contrôle(VC)

3.01 Quelques lois de...

Un volume de contrôle est un volume imaginaire par lequel le fluide peut s'écouler. L'attention est portée sur les quantités physiques qui traversent la surface



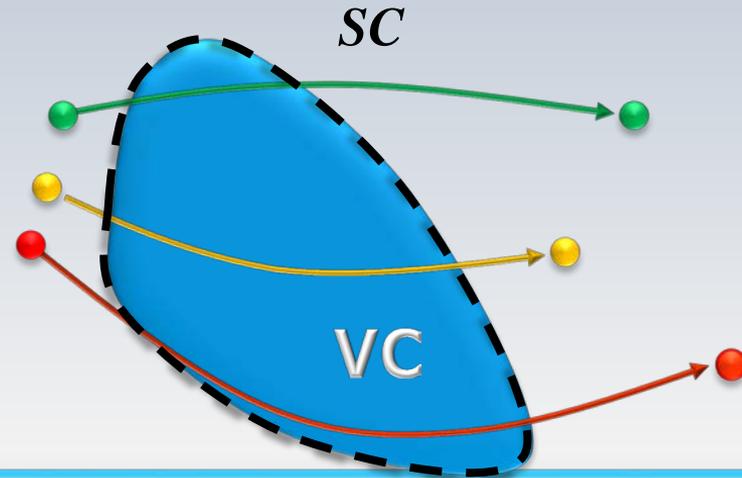
- Masse
- Q. de mouv.
- Énergie



# Surface de contrôle(SC)

3.01 Quelques lois de...

L'enveloppe d'un volume de contrôle est appelé surface de contrôle. Elle peut être fixe ou mobile.

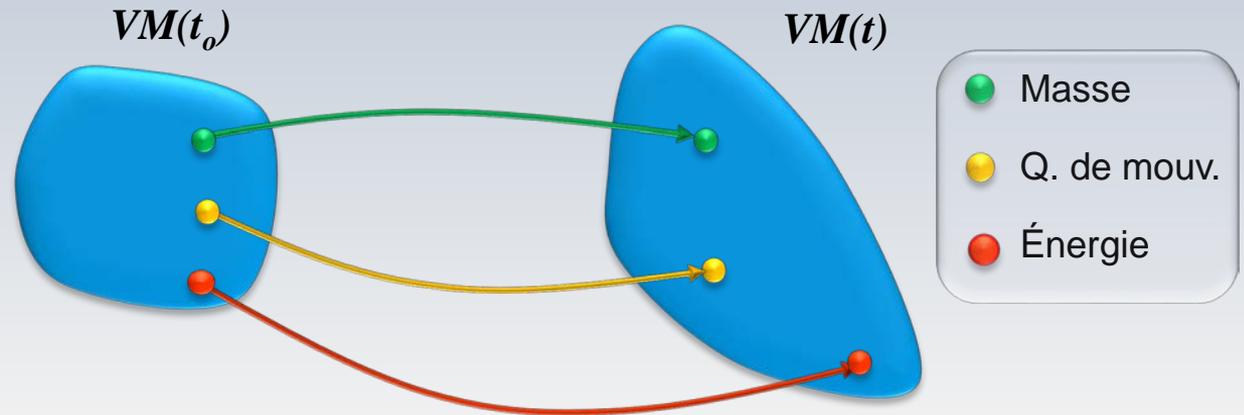


**Un volume de contrôle est un système ouvert!**

# Volume matériel (VM)

3.01 Quelques lois de...

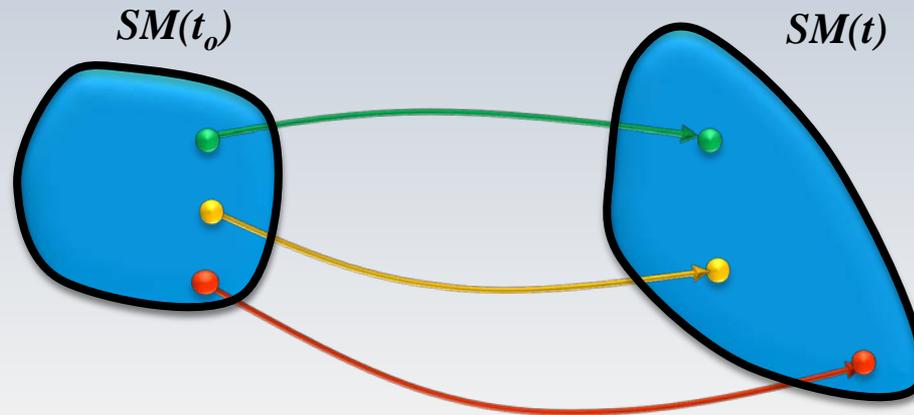
Un volume matériel est un portion de fluide qui se déplace, se déforme mais qui demeure constitué du même ensemble de particules



# Surface matérielle (SM)

3.01 Quelques lois de...

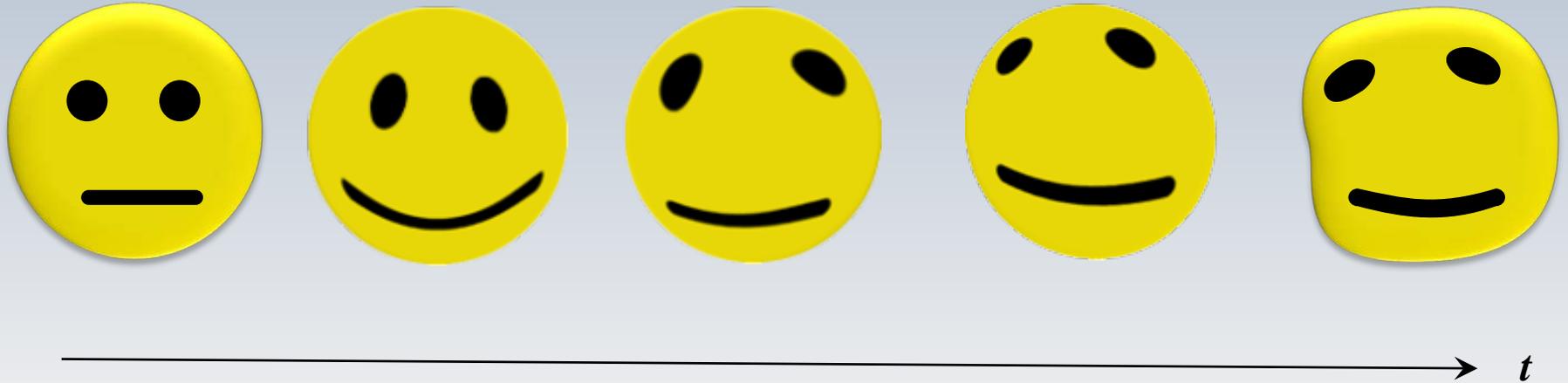
L'enveloppe d'un volume matériel est appelé surface matérielle. Chaque point de cette enveloppe est une particule fluide

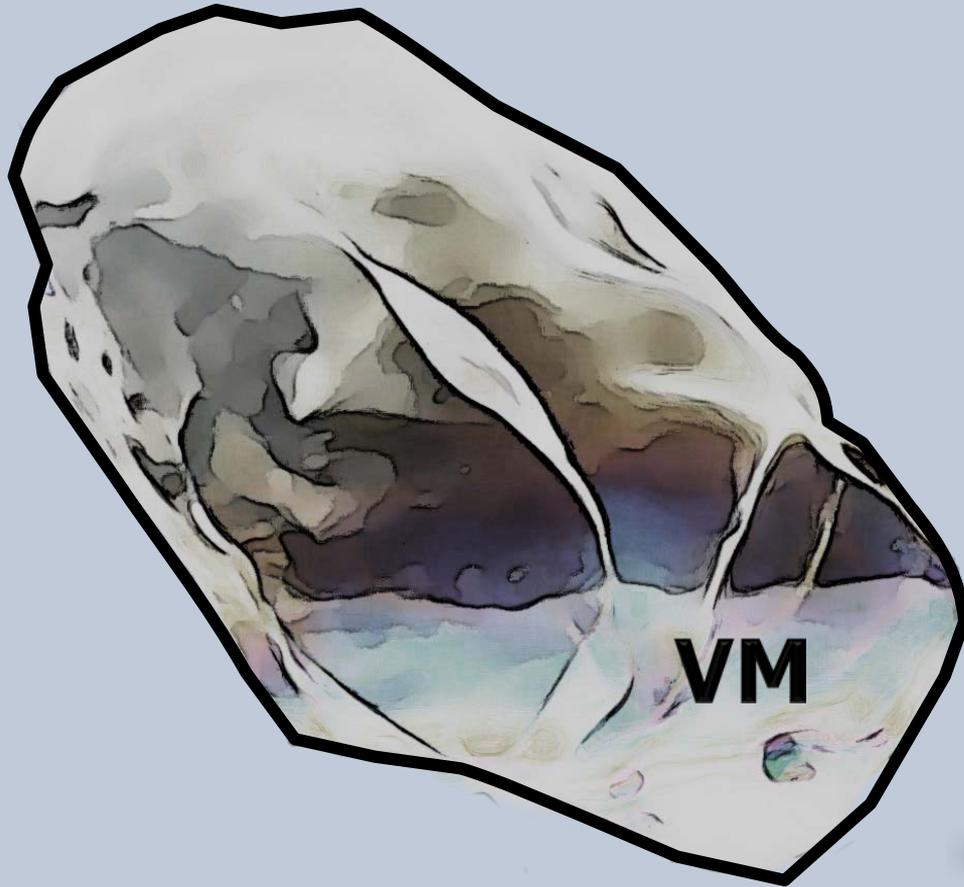


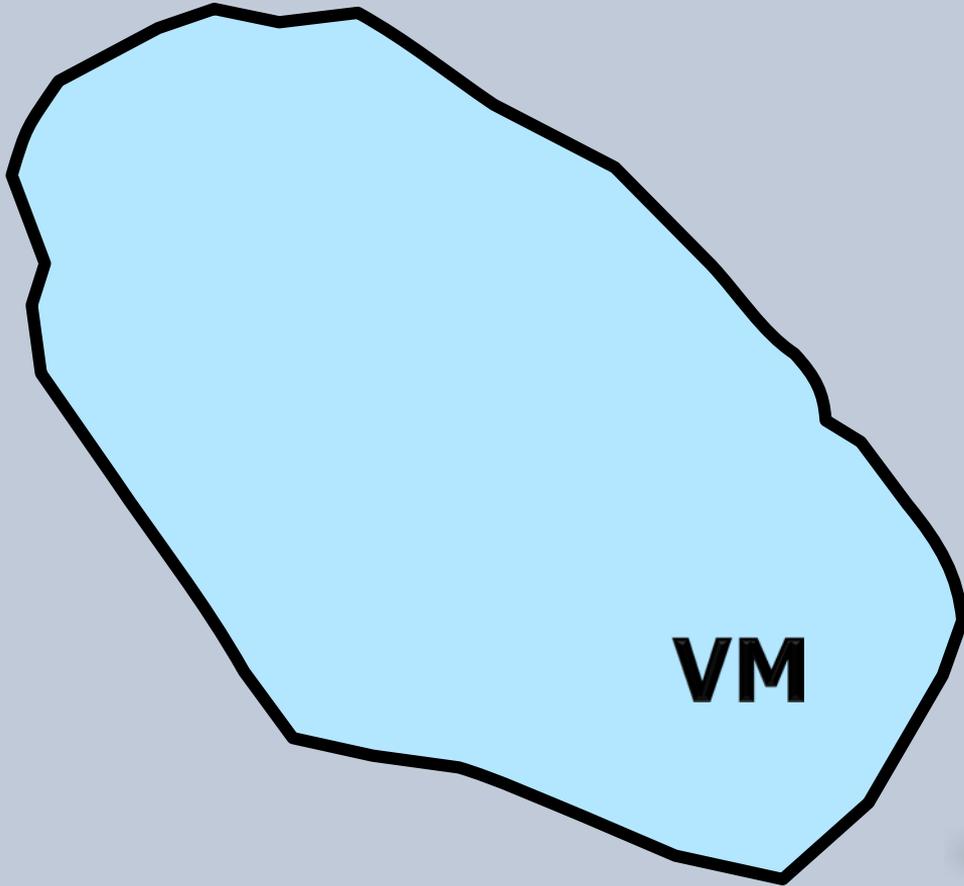
**Un volume matériel est un système fermé!**

# Promenades lagrangiennes

3.01 Quelques lois de...









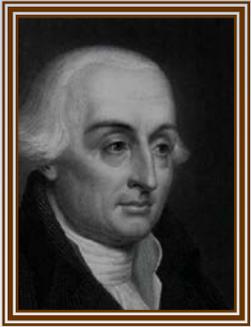
En mécanique de fluides, on propose de trouver la solution dans un **système fermé** mobile ( $VM$ ) au moyen d'une seconde approche représentée par un **système ouvert** ( $VC$ )



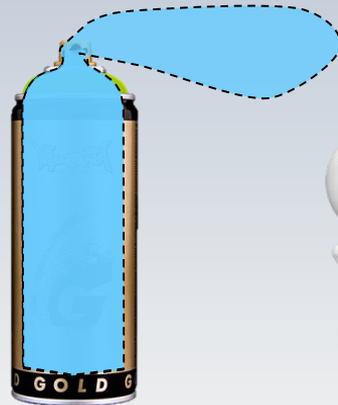
Systeme fermé ( $VM$ )

Systeme ouvert ( $VC$ )

Le système fermé (VM) est associé à la cinématique **Lagrangienne**, tandis que le système ouvert (VC) à l'approche **Eulérienne**.



J.-Louis Lagrange



Système fermé (VM)

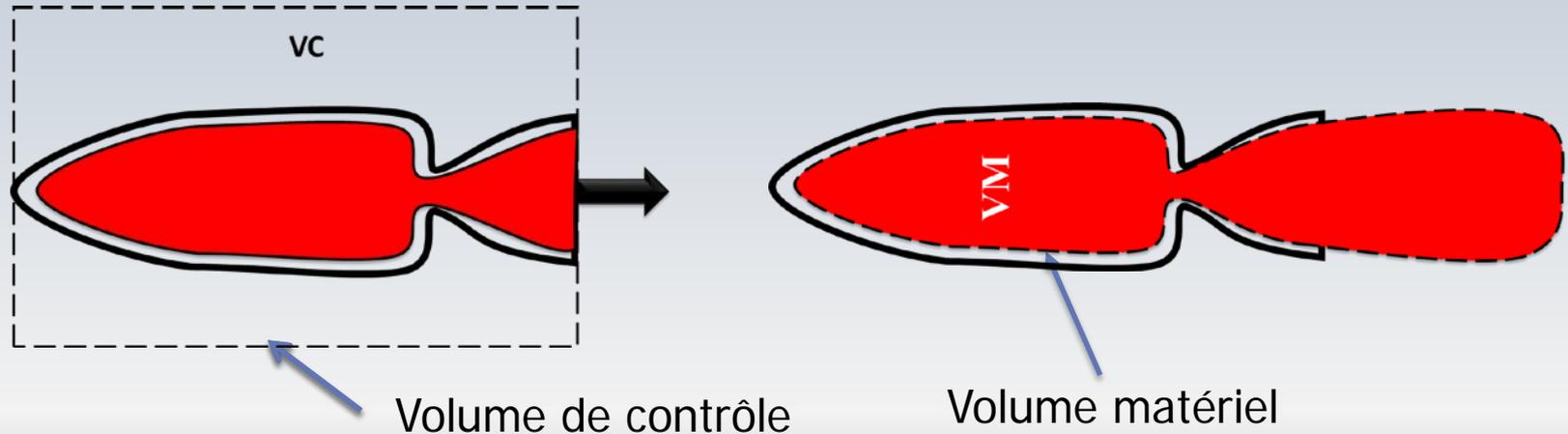


Système ouvert (VC)

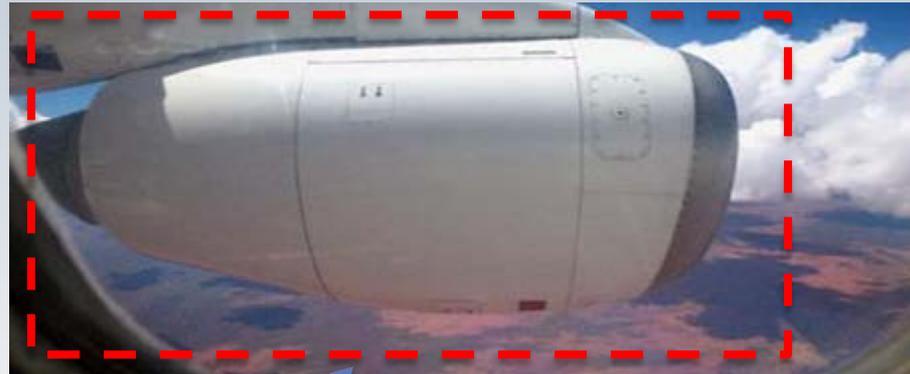
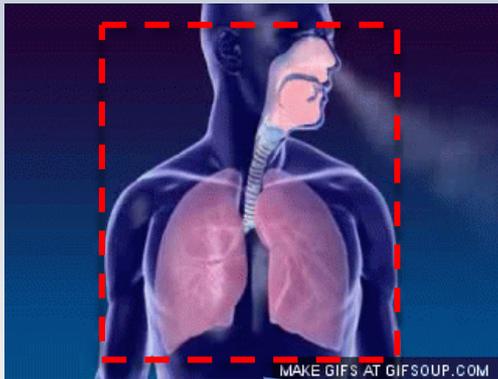


Leonhard Euler

L'approche d'Euler utilisant les **volumes de contrôle (VC)**, avec des entrées et des sorties, permet d'effectuer des bilans de manière intuitive. C'est **la méthode privilégiée par le génie**

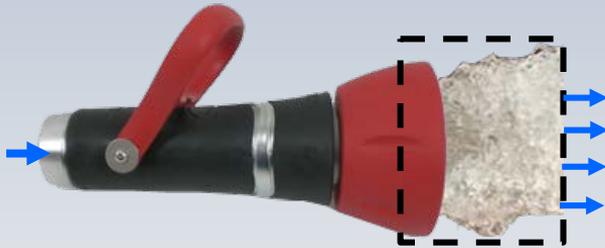


Voici deux exemples utilisant des volumes de contrôle ( $VC$ ). Un pour le système respiratoire et un autre pour un turbojet. On note que le fluide peut s'écouler à travers des frontières.



Volume de contrôle

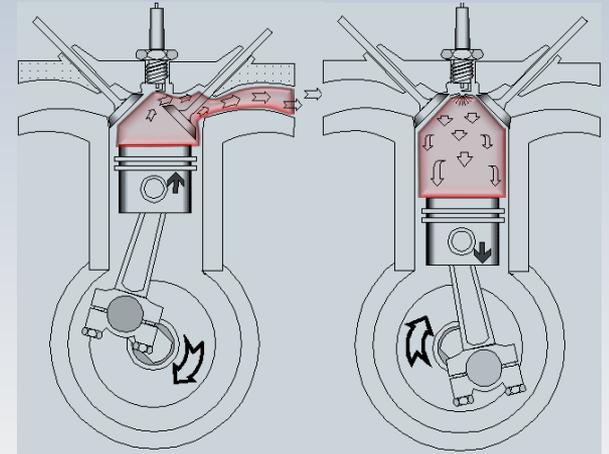
Bien que *fréquemment* le volume de contrôle ( $VC$ ) est fixe, il peut aussi être en mouvement ou se déformer



$VC$  fixe



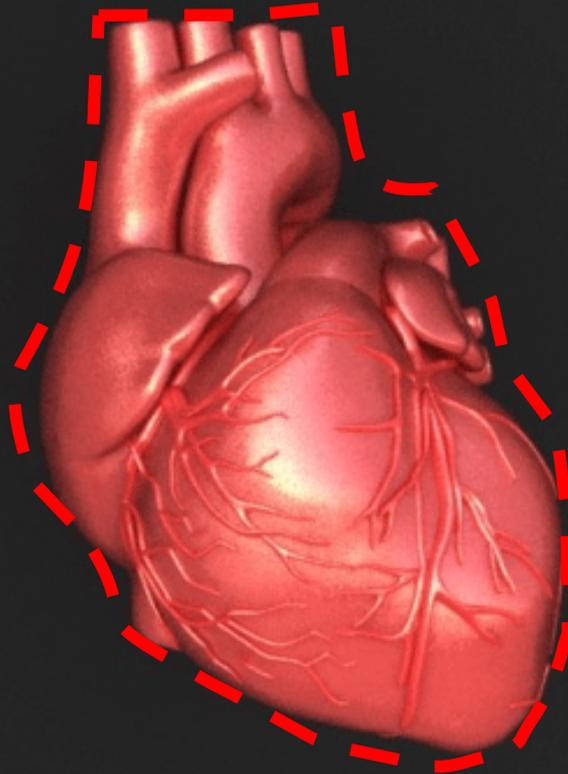
$VC$  mobile, non déformable,  $V_s$  constante



$VC$  déformable

# Volume déformable

3.01 Quelques lois de...



# Chapitre 3 – Lois de conservation intégrale

3.01

3.02

3.03

3.04

3.07

3.01 Quelques lois de la mécanique des fluides

**3.02 Le théorème de transport de Reynolds**

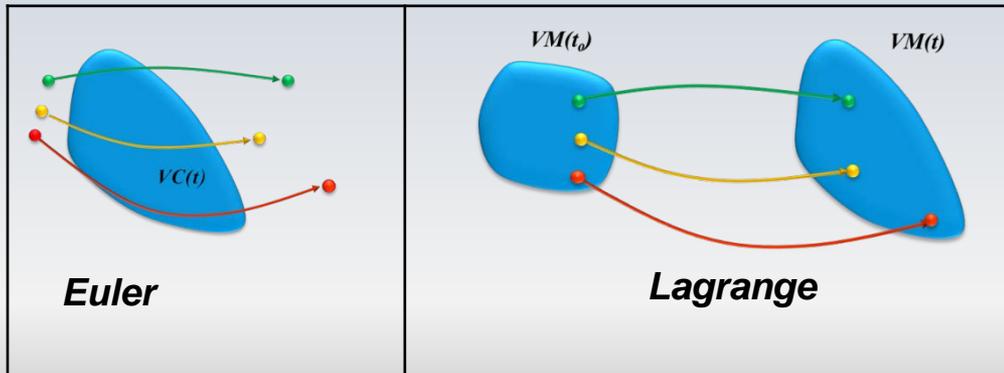
3.03 Conservation de la masse

3.04 Conservation de la quantité de mouvement

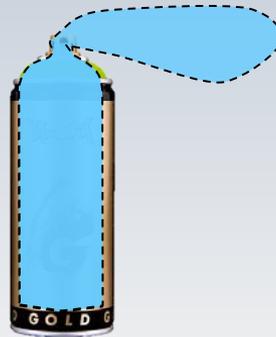
3.07 Conservation de l'énergie



La dualité résultant d'un raisonnement basé sur un *volume de contrôle* (*Euler*), versus celui s'appuyant sur un *volume matériel* (*Lagrange*), mène à la recherche d'une équivalence entre les deux formulations. Celle-ci est donnée par le **Théorème de transport de Reynolds**.



Avant de regarder le *Théorème de transport de Reynolds*, nous devons introduire quelques notions de base



Système fermé (VM)



Système ouvert (VC)

Pour mesurer la quantité de matière qui transite par une surface ( $S$ ) par unité de temps et de surface, on introduit la notion de **flux**:  
*flux de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, etc.*



Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface est un scalaire

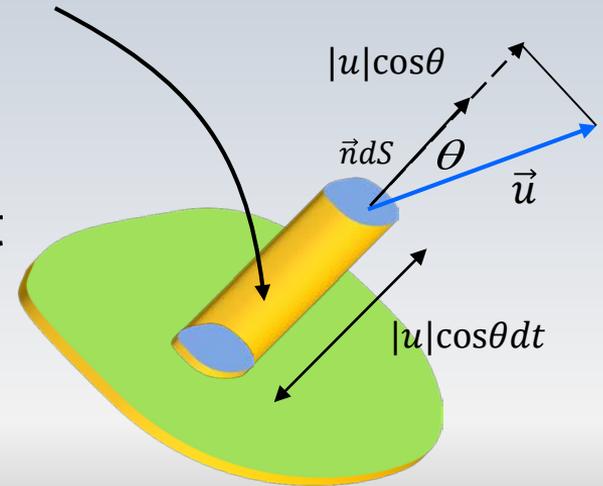
Le **débit volumique élémentaire**  $dQ$  à travers une surface  $dS$  est le volume de fluide  $dV$  qui traverse cette surface dans un intervalle de temps  $dt$ , soit:

$$dV = |u| \cos \theta dt dS$$

$$dQ = \frac{dV}{dt} = |u| \cos \theta dS = \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

Alors, le **débit total**  $Q$  sur une surface  $S$  est

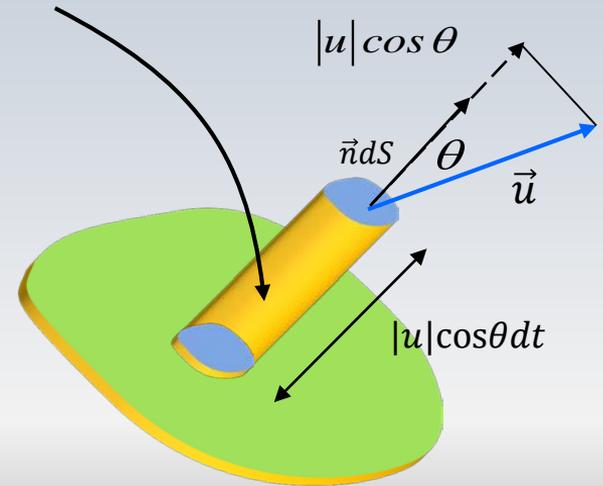
$$Q = \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (m^3/s)$$



De la même manière, **le débit massique**  $\dot{m} = \rho Q$  à travers une surface  $S$  correspond à la masse de fluide par unité de temps, soit

$$\dot{m} = \int_S \rho \vec{u} \cdot d\vec{S} \quad (\text{kg/s})$$

$$dV = |u| \cos \theta dt dS$$



On a donc les relations suivantes:

$$m = \int_V \rho dV \quad \dot{m} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_S \rho (\vec{u} \cdot d\vec{S})$$


La masse  $m$  est une **grandeur extensive** et aussi les deux autres quantités qui nous intéressent en mécanique, soit la quantité de mouvement  $m\vec{v}$ , et l'énergie  $E$

Une **grandeur extensive** est proportionnelle à la masse du système

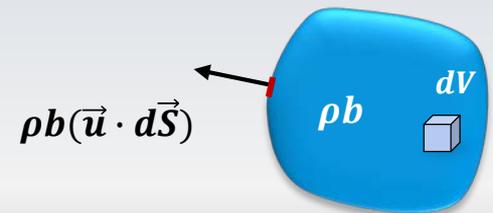


Dans la suite on utilisera plutôt des **propriétés intensives, indépendantes de la masse du système**. En particulier, on regardera des grandeurs associées à la masse  $m$ , la quantité de mouvement  $m\vec{v}$ , et l'énergie  $E$

Pour ce faire, on effectue une réduction de chacune des propriétés  $(m, m\vec{v}, E)$  par la masse  $m$ , pour obtenir alors des quantités intensives  $(1, \vec{v}, e)$

On peut généraliser ces relations pour une *grandeur extensive* quelconque  $B$  ayant une *grandeur intensive* correspondante, c'est à dire *par unité de masse*,  $b = B / m$ :

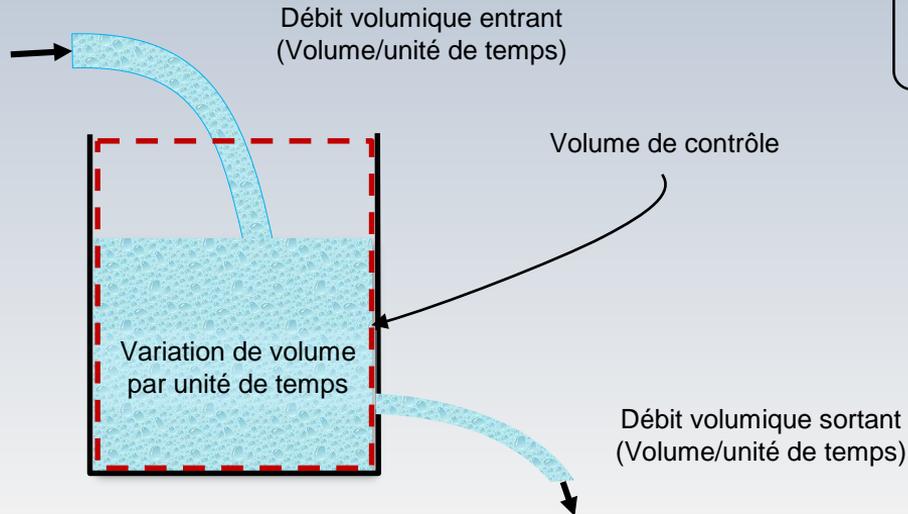
$$B = \int_V \rho b dV \quad \text{et} \quad \dot{B} = \frac{dB}{dt} = \int_S \rho b (\vec{u} \cdot d\vec{S}) \quad (B/s)$$



Le tableau ci-dessous résume les grandeurs extensifs (propriétés) et intensifs fréquemment utilisées en mécanique de fluides

	<b><math>B</math></b> <i>propriété extensive</i>	<b><math>b = \frac{B}{m}</math></b> <i>variable intensive</i>
<i>Masse</i>	<b><math>m</math></b>	<b>1</b>
<i>Q. Mouv</i>	<b><math>m\vec{u}</math></b>	<b><math>\vec{u}</math></b>
<i>Énergie</i>	<b><math>E</math></b>	<b><math>e</math></b>

Pour le volume de contrôle  $VC$  sur la figure, on peut conclure que:

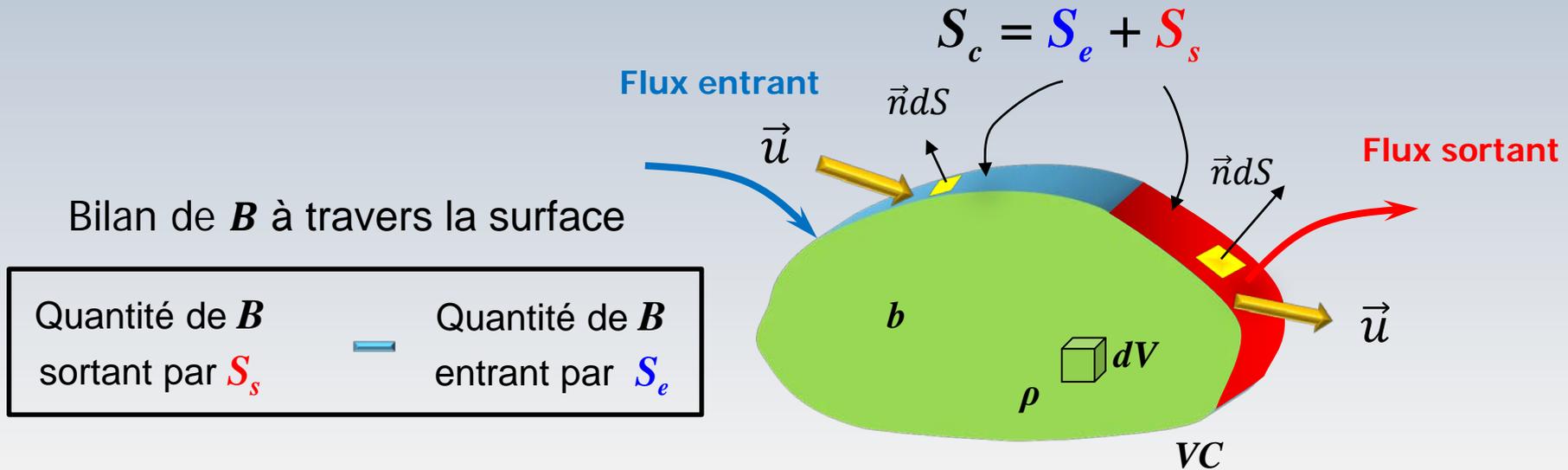


Variation de volume dans le temps dans le  $VC =$   
Débit volumique entrant - Débit volumique sortant



# Débit net de B (bilan)

De façon générale, on considère un volume  $VC$  (fixe) limité par une  $S_c$ , qui est traversé par un fluide transportant une quantité  $B$



Mathématiquement, le **débit net** de  $B$  à travers la surface de contrôle ( $SC$ ) peut s'écrire :

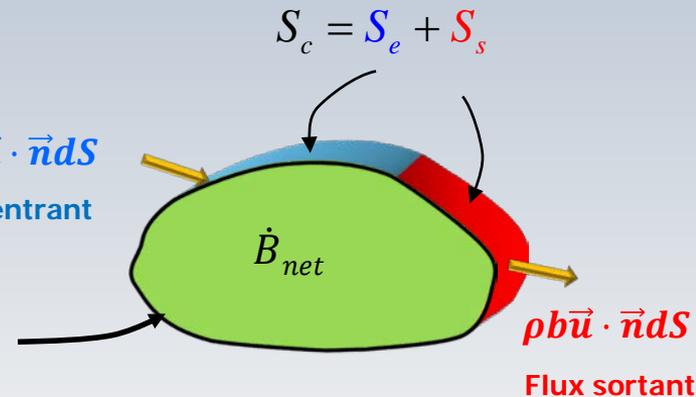
$$\dot{B}_{net} = \frac{dB}{dt} = \int_{S_s} \rho b \vec{u} \cdot d\vec{S} - \int_{S_e} \rho b \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

$$\dot{B}_{net} = \int_{S_c} \rho b \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

avec:  $b = B/m$

Débit net à travers la  $SC$

$\rho b \vec{u} \cdot \vec{n} dS$   
Flux entrant

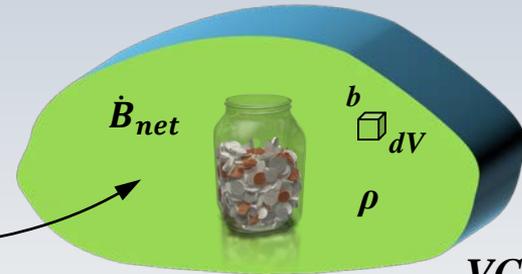


$\vec{n}$  est le vecteur local normal à la surface, **orienté vers l'extérieur**

Le débit  $\dot{B}_{net}$  traversant la surface d'un volume de contrôle, correspond à **la quantité de  $B$  qui "s'accumule"** (négative ou positive) *par unité de temps* dans le volume de contrôle. Cette variation de  $B$  dans le volume de contrôle peut s'écrire:

$$\left(\frac{dB}{dt}\right)_{VC} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV$$

Variation dans le temps dans le volume de contrôle



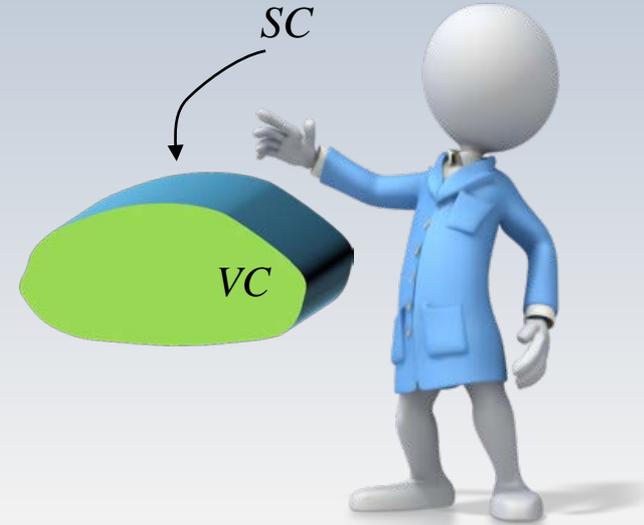
$b = B / m$ : grandeur intensive par unité de masse

On reconnaît ainsi le principe de conservation pour un volume de contrôle, dans l'absence de sources(puits):

$$\text{Variation de } B + \text{ Bilan des flux de } B = 0$$

dans le VC

à travers la SC

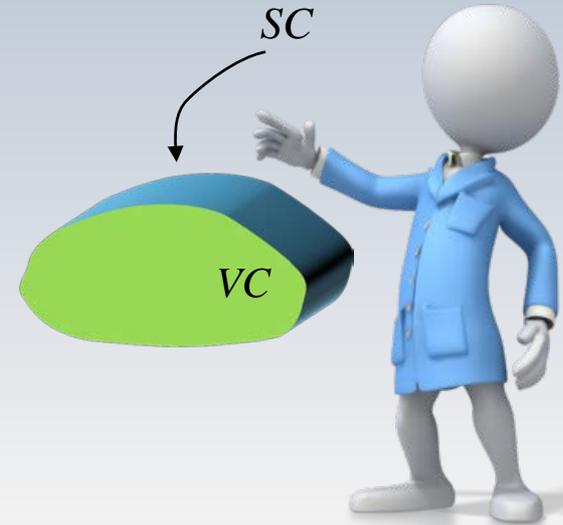


Sous forme mathématique, on écrit le principe précédent comme,

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

Variation de  $B$  dans le  
volume de contrôle

Flux de  $B$  à travers de la  
surface de contrôle



Remarque: Cette forme du principe ne considère ni les sources (production) ni les puits (destruction)

# Cas particulier: la masse

## 3.02 Le Théorème de transport ...

Pour la conservation de la masse, l'équation générale

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

devient ( $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ )

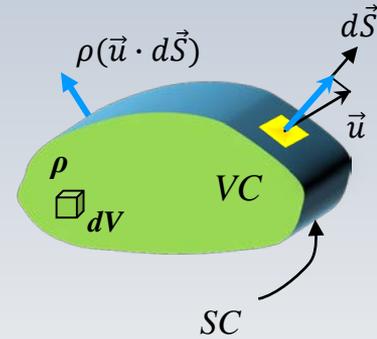
$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

**Accumulation** de masse  
dans le volume dans le temps

$$\left[ \frac{\text{masse}}{\text{temps}} \right]$$

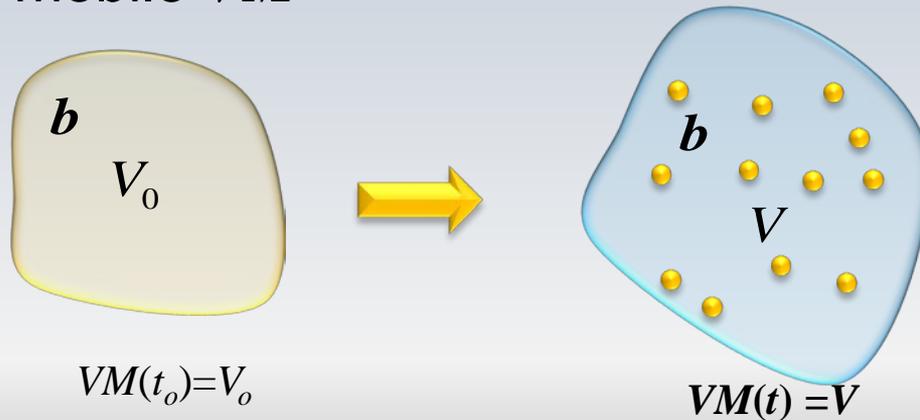
**Flux massique**  
traversant la surface

$$\left[ \frac{\text{masse}}{\text{temps}} \right]$$



On retourne maintenant au *Théorème de transport de Reynolds* dont le rôle est d'établir un lien entre les points de vue lagrangien et eulérien.

On considère l'évolution d'une propriété  $b$  dans un système de particules mobile  $VM$

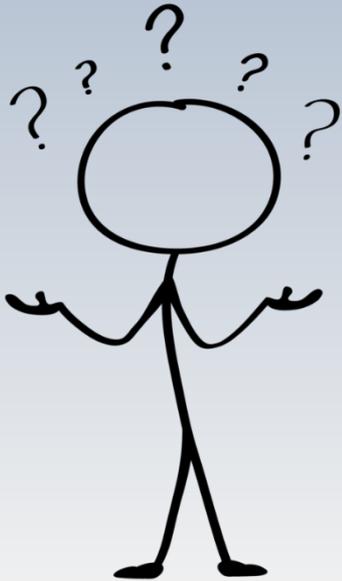


Sur le volume matériel (mobile)  $VM$  on peut regarder la totalité de la grandeur  $B$  comme  $B = \int_{VM(t)} \rho b dV$

Pour obtenir la variation temporelle de  $B$ , on doit calculer:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VM(t)} \rho b dV$$

Cette évaluation présente un inconvénient puisque  $VM(t)$  est également fonction du temps! Autrement dit, le système est en **mouvement et se déforme** :  $VM(t + dt) \neq VM(t)$ !

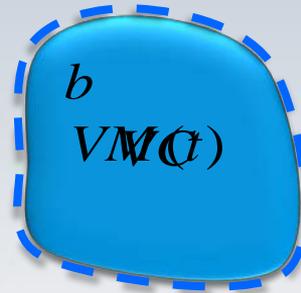


$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{syst} = \frac{d}{dt} \int_{VM(t)} \rho b dV$$

Comment peut-on utiliser cette équation mathématique pour réaliser des calculs pratiques?

# La 'passe magique'

Pour résoudre le problème, on fait coïncider au temps  $t$  le *volume matériel mobile*  $VM$  avec un *volume de control fixe*,  $VC$  sur lequel on pourra effectuer les calculs plus facilement

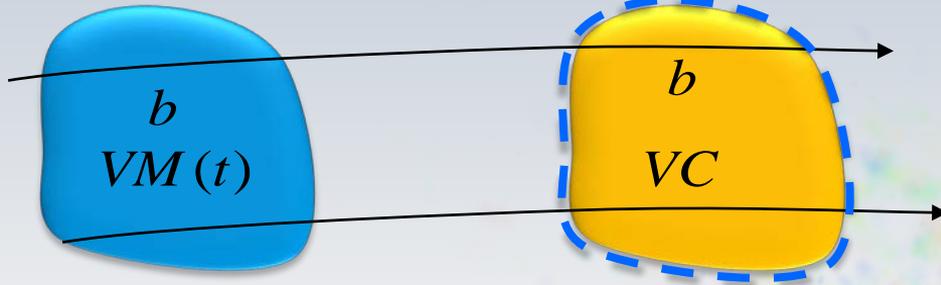


# La 'passe magique'

Pour résoudre le problème, on fait coïncider au temps  $t$  le *volume matériel mobile*  $VM$  avec un *volume de control fixe*,  $VC$  sur lequel on pourra effectuer les calculs plus facilement

Fermé: imperméable

Ouvert: perméable



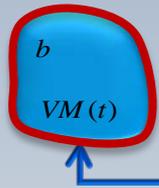
$V_C$  est identique et coïncide avec  $V_M$  au temps  $t$ . Les volumes ont été dessinés séparés pour fins d'illustration seulement



# La 'passe magique'

## 3.02 Le Théorème de transport ...

Fermé: imperméable



$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} =$$

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

Ouvert: perméable



$(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$

Variation temporelle de  $B$   
lorsqu'on suit le système

Variation temporelle de  $B$   
dans le volume  $VC$

Débit net de  $B$  traversant la  
surface  $SC$  du volume  $VC$

Formulation du *Théorème de transport de Reynolds, TTR*

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$



La relation précédente a été présentée pour *un volume de contrôle fixe*.

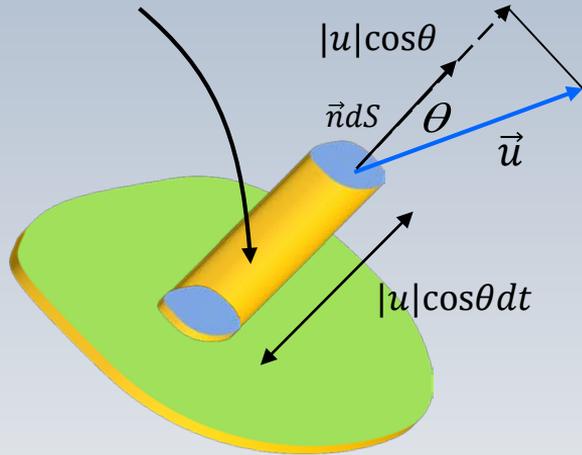
**Si le volume de contrôle se déforme (le coeur), il faut considérer la vitesse relative  $\vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{u}_s$**  entre celle du fluide  $\vec{u}$  et celle de la surface  $\vec{u}_s$  du VC. Dans ce cas:

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

Formulation générale du *Théorème de transport de Reynolds, TTR*

# Remarque

$$dV = |u| \cos\theta dt dS$$



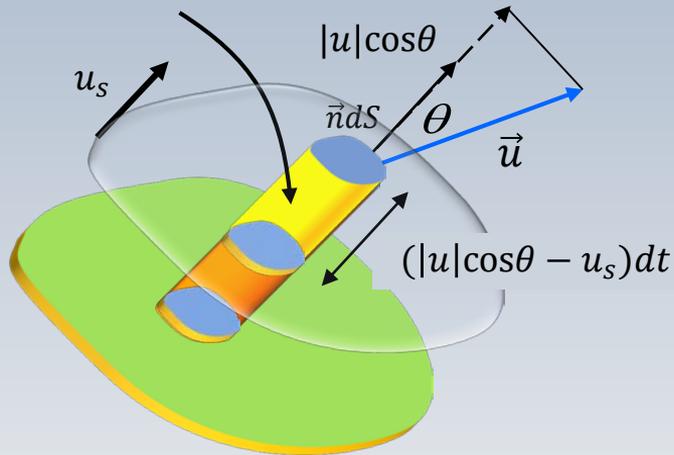
Surface immobile

Le volume élémentaire  $dV$  de fluide traversant la frontière d'un volume de contrôle, dépend de la vitesse de l'écoulement et de la vitesse de déplacement de la surface. Ces grandeurs gouvernent la hauteur de  $dV$ .

Si la surface est fixe, la hauteur atteinte par  $dV$  dans un intervalle  $dt$  est donnée par  $|u| \cos\theta dt$  et le volume devient  $dV = |u| \cos\theta dt dS$ , avec  $|u|$  le module de la vitesse de l'écoulement et  $dS$  la surface élémentaire

# Remarque

$$dV = (|u|\cos\theta - u_s)dtdS$$



Surface mobile avec une vitesse  $u_s$

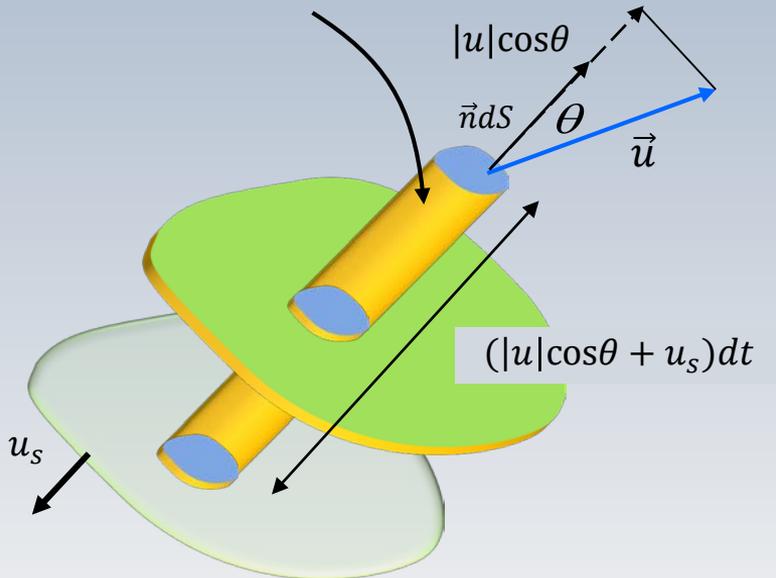
Lorsque la surface se déplace avec une vitesse normale  $u_s$ , dans le même sens que  $|u|\cos\theta$ , la hauteur du volume atteinte dans un intervalle  $dt$  est plus petite que précédemment. En effet, elle est maintenant donnée par:

$$(|u|\cos\theta - u_s)dt$$

de sorte que le volume devient  $dV = (|u|\cos\theta - u_s)dtdS$

# Remarque

$$dV = (|u|\cos\theta + u_s)dtdS$$



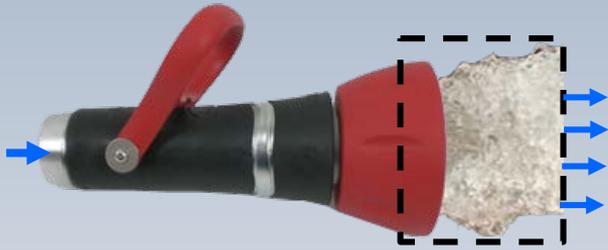
Surface mobile avec ne vitesse  $-u_s$

Si le sens de la vitesse de la surface  $u_s$ , est contraire à la vitesse normale de l'écoulement  $|u|\cos\theta$ , la hauteur du volume atteint dans un intervalle  $dt$  est donnée par  $(|u|\cos\theta + u_s)dt$ .

Le volume élémentaire est alors  $dV = (|u|\cos\theta + u_s)dtdS$

# Formulation générale du TTR

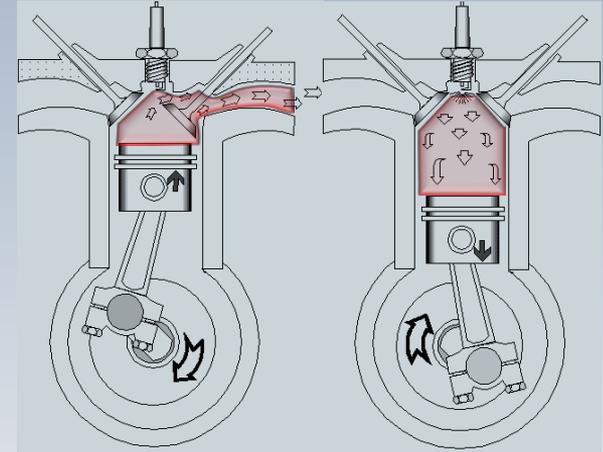
3.02 Le théorème de...



VC fixe



VC mobile  
Vitesse  $u_s$  constante



VC déformable

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{fluide} - \vec{u}_{Surface}$$



$\vec{u}_s = 0$  si le VC est fixe

Formule générale du TTR

Le **Théorème de transport de Reynolds, TTR**, fournit un mécanisme pour traduire les équations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie), décrites dans un repère **lagrangien** (*volume matériel: VM*) vers une forme **eulérienne**, qui les exprime utilisant un *volume de contrôle (VC)*, souvent fixe.

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS}_{}$$

$$dB/dt = DB/Dt$$

*L'ingénieur travaille avec cette forme (mais simplifiée)*

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

	$B$	$b = dB/dm$
Masse	$m$	$1$
Q. Mouv.	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
Énergie	$E$	$e$

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{fluide} - \vec{u}_{Surface}$$

**Remarque:**  $b$  peut être une quantité scalaire (masse, énergie), ou vectoriel (quantité de mouvement)

$B$  = propriété extensive. Une quantité dans les système fermé

$b$  = propriété intensive. La propriété  $B$  par unité de masse

$\rho$  = masse volumique du fluide

$\vec{u}$  = la vitesse du fluide

$\vec{u}_{rel} = \vec{u}$  si la surface du volume de contrôle est fixe

$\vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{u}_s$  si la surface du volume de contrôle se déplace avec une vitesse  $\vec{u}_s$  (un cœur qui bat)

$dS$  = aire élémentaire sur la surface de contrôle,  $SC$

$\vec{n}$  = normale unitaire vers l'extérieur de la  $SC$  élémentaire  $dS$

$d/dt$  = variation dans le temps

$dV$  = élément de volume dans le  $VC$

$\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}$  = vitesse normale traversant la  $SC$  (projection)

# Chapitre 3 – Lois de conservation intégrale

3.01

3.02

3.03

3.04

3.07

3.01 Quelques lois de la mécanique des fluides

3.02 Le théorème de transport de Reynolds

**3.03 Conservation de la masse**

3.04 Conservation de la quantité de mouvement

3.07 Conservation de l'énergie



# Conservation de la masse

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

Un exemple visant illustrer l'équivalence des approches lagrangiennes et eulériennes pour la conservation de la masse et donnée en annexe

**Je clique pour le voir**

**Non merci!**



# Conservation de la masse

## 3.03 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse peut être obtenu directement du TTR, soit:

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

	$B$	$b = dB/dm$
<b>Masse</b>	$m$	<b>1</b>
<b>Q. Mouv</b>	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
<b>Énergie</b>	$E$	$e$

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{fluide} - \vec{u}_{Surface}$$

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

L'élégance et généralité (ou la complexité?) de la formulation mathématique du TTR n'est pas retenue pour les applications du génie de tous les jours

En effet, fréquemment on se confronte à des problèmes à **l'état stationnaire (ou permanent)**, pour des **écoulements incompressibles**, dont les équations deviennent essentiellement **unidimensionnelles**

Dans la suite nous regarderons des **simplifications** appliquées à l'équation de **conservation de la masse**

# Cas particuliers utiles (VC fixe)

3.03 Conservation de la masse

- I) Pour un **volume de contrôle fixe**,  $\vec{u}_S=0, \vec{u}_{rel} = \vec{u}$  (la vitesse de l'écoulement) et si de plus l'écoulement est **en régime permanent (stationnaire)**, alors

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{SC} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

- II) Si le fluide est **incompressible**  $\rho = cnste$ , alors on a, **même en instationnaire**,

$$\int_{SC} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

# Cas particuliers utiles (VC fixe)

3.03 Conservation de la masse

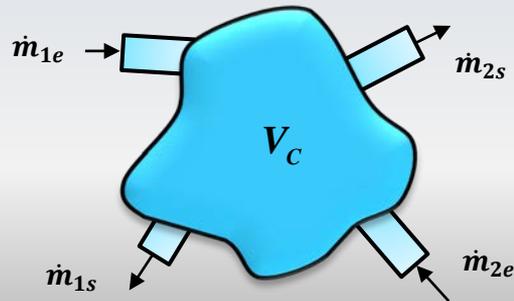
III. Dans le cas d'entrées et sorties uniformes (1D), les équations précédentes deviennent

$$\int_{SC} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\text{sortie}} \rho_i u_i S_i = \sum_{\text{entrée}} \rho_j u_j S_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{\text{sortie}} \dot{m}_i = \sum_{\text{entrée}} \dot{m}_j$$

Débit massique

$$\int_{SC} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\text{sortie}} u_i S_i = \sum_{\text{entrée}} u_j S_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{\text{sortie}} Q_i = \sum_{\text{entrée}} Q_j$$

Débit volumique



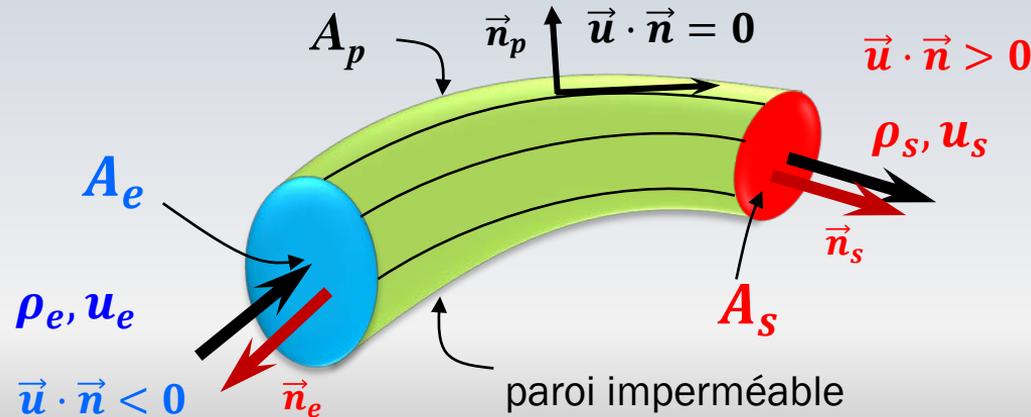
# Cas particuliers utiles (VC fixe)

3.03 Conservation de la masse

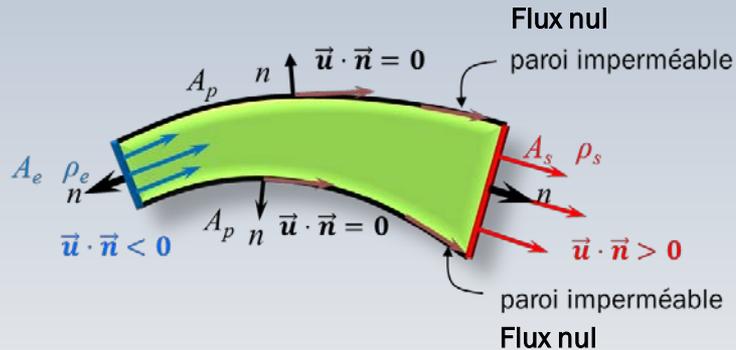
Souvent on trouve des applications avec une seule entrée et une seule sortie, tels qu'une conduite transportant de l'eau, ou un passage pour la ventilation dans un immeuble. Ce type de problèmes sont modélisés au moyen de la notion **de tube de courant**

# Tube de courant

Il s'agit d'une conduite conceptuellement fictive (pouvant parfois correspondre à **un tube physique**), limitée par des lignes de courant, ayant une section d'entrée  $A_e$ , une section de sortie  $A_s$ , toutes les deux planes, et des parois latérales  $A_p$  où les vitesses sont orthogonales au vecteur surface



Étant donné qu'aux parois latérales  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ , l'intégrale de surface ne revient qu'à considérer l'entrée et la sortie, soit:



$$\int_{SC} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA =$$

$$\int_{se} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA + \int_{ss} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA + \int_{sp} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0$$

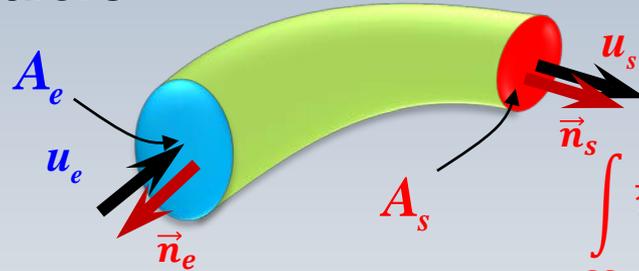
# Tube de courant ?



# Tube de courant

En incompressible ( $\rho = \text{cnste}$ ) et si les vitesses  $u_e$  et  $u_s$  sont considérées uniformes, alors

$$\int_{se} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = -u_e A_e = Q_e$$



$$\int_{ss} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = u_s A_s = Q_s$$

$$\int_{se} \vec{u} \cdot \vec{n} dA + \int_{ss} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0$$

$$u_e A_e = u_s A_s$$

$$Q_e = Q_s$$

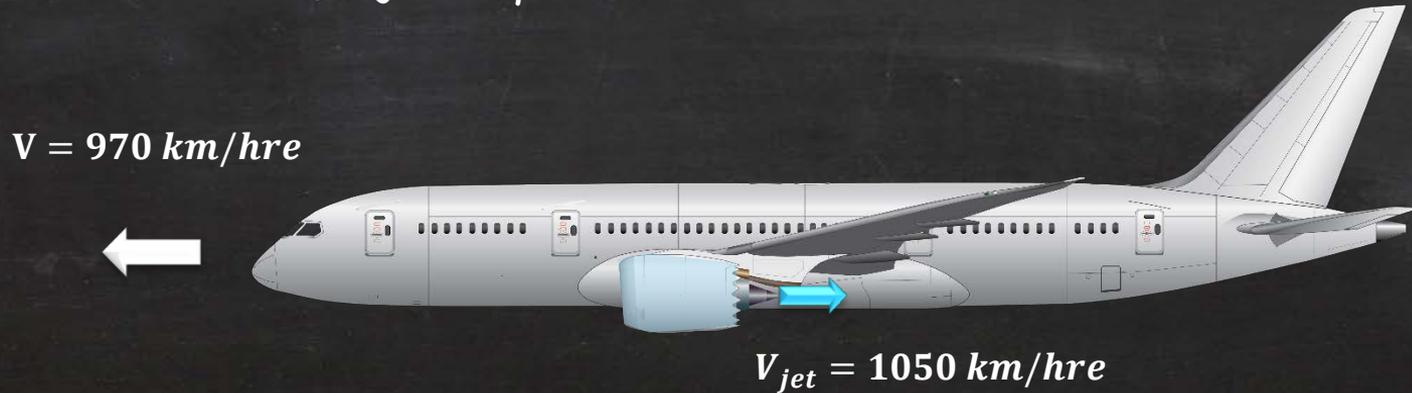
Débit volumique = cnste

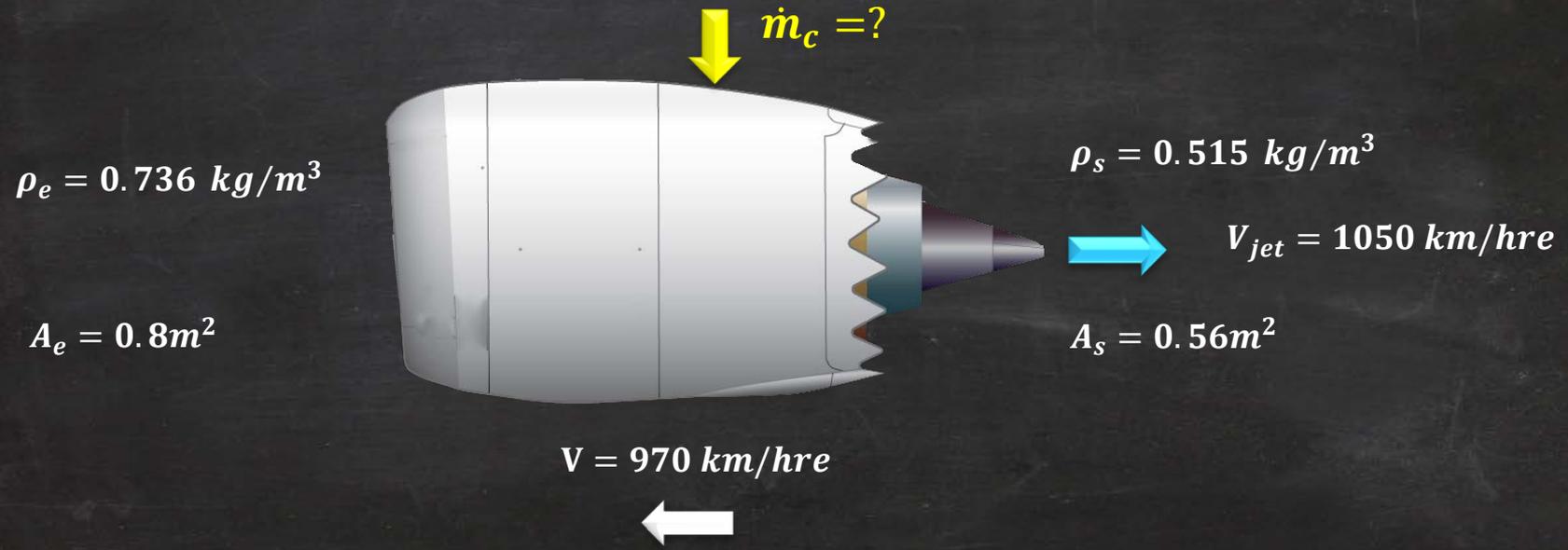
Lorsque  $\rho \neq \text{cnste}$ , on a:  $\dot{m} = \rho_e A_e u_e = \rho_s A_s u_s$

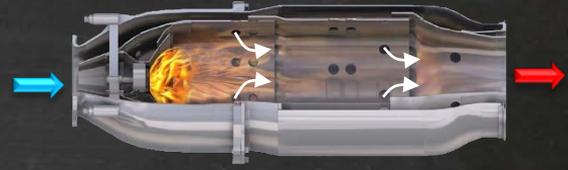
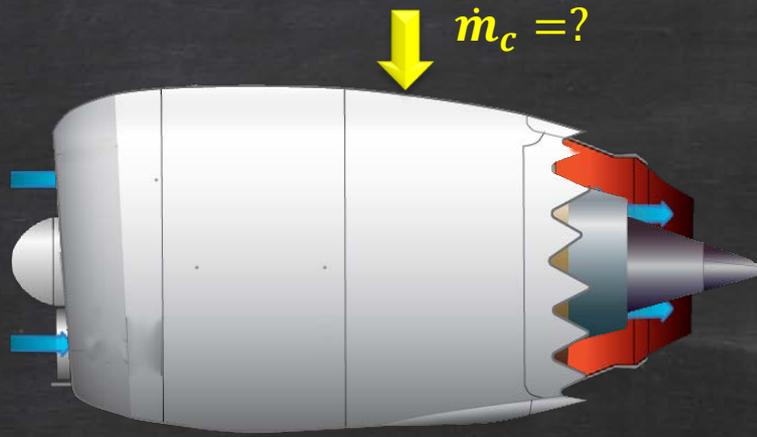
## Avion

Un avion vole à  $V=970$  km/hre. La vitesse du jet à la sortie du turbomoteur est de  $V_s=1050$  km/hre. L'aire frontale du moteur à l'entrée est de  $A_e=0.8\text{m}^2$  tandis que celle à la sortie est de  $A_s=0.56\text{m}^2$ . La masse volumique de l'air à l'entrée est de  $\rho_e=0.736$  kg/m<sup>3</sup> et celle des gaz à la sortie de  $\rho_s=0.515$  kg/m<sup>3</sup>.

On veut connaître, en régime permanent, le débit massique de carburant  $\dot{m}_c$  injecté pour réaliser la combustion







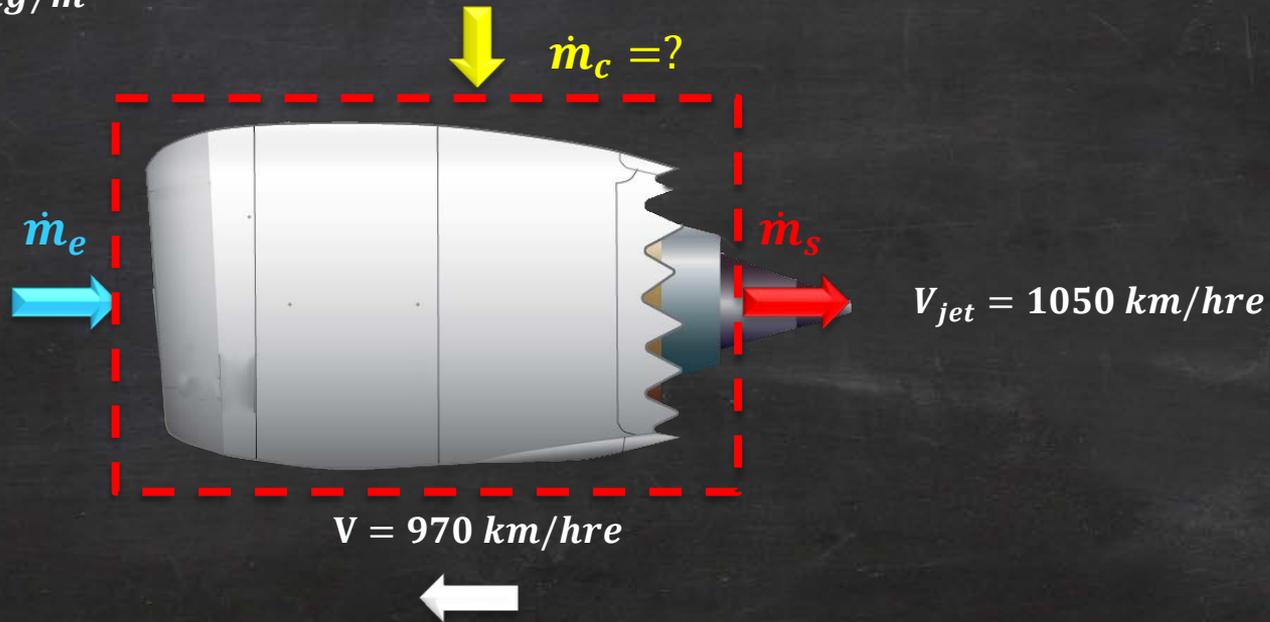
$$\dot{m}_e + \dot{m}_c = \dot{m}_s$$

$$A_e = 0.8 \text{ m}^2$$

$$\rho_e = 0.736 \text{ kg/m}^3$$

$$A_s = 0.56 \text{ m}^2$$

$$\rho_s = 0.515 \text{ kg/m}^3$$



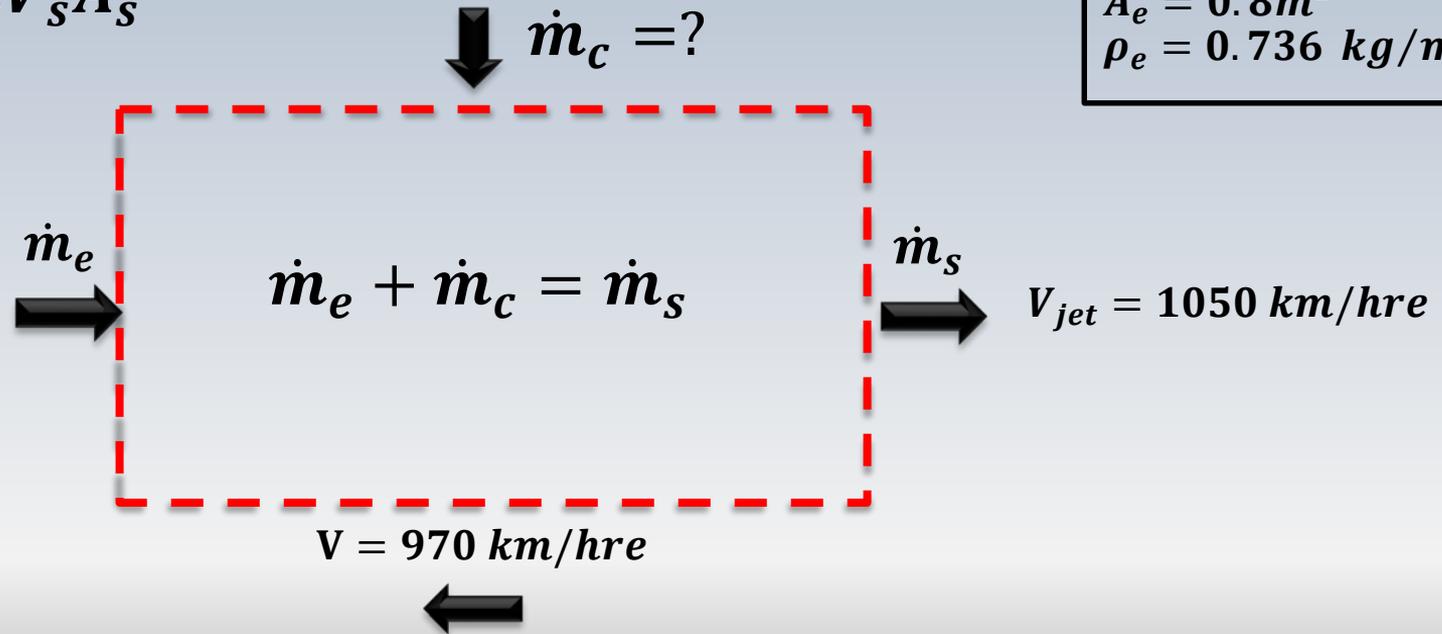
# La notion de flux

## 3.02 Le Théorème de transport ...

$$\dot{m}_e = \rho_e V_e A_e$$

$$\dot{m}_s = \rho_s V_s A_s$$

$A_s = 0.56 \text{ m}^2$
$\rho_s = 0.515 \text{ kg/m}^3$
$A_e = 0.8 \text{ m}^2$
$\rho_e = 0.736 \text{ kg/m}^3$



# La notion de flux

3.02 Le Théorème de transport ...

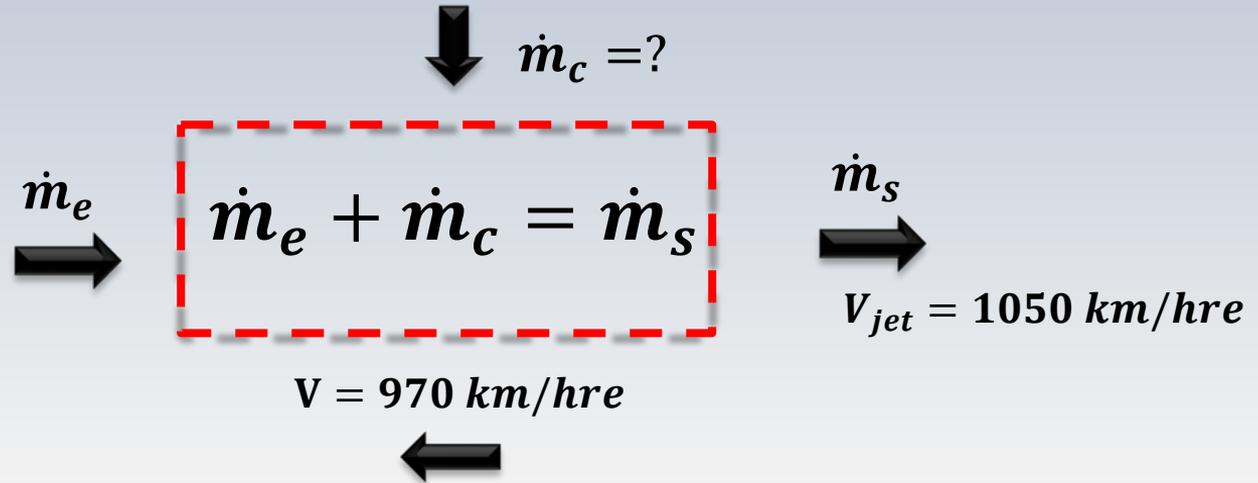
$$\dot{m}_e = \rho_e V_e A_e$$

$$V_e = 970 \text{ km/hre}$$

$$\dot{m}_s = \rho_s V_s A_s$$

$$V_s = 1050 + 970 \text{ km/hre}$$

$A_s = 0.56 \text{ m}^2$
$\rho_s = 0.515 \text{ kg/m}^3$
$A_e = 0.8 \text{ m}^2$
$\rho_e = 0.736 \text{ kg/m}^3$



# La notion de flux

## 3.02 Le Théorème de transport ...

$$\dot{m}_e = \rho_e V_e A_e$$

$$V_e = 970 \text{ km/hre}$$

$$\dot{m}_s = \rho_s V_s A_s$$

$$V_s = 2020 \text{ km/hre}$$

$$A_s = 0.56 \text{ m}^2$$

$$\rho_s = 0.515 \text{ kg/m}^3$$

$$A_e = 0.8 \text{ m}^2$$

$$\rho_e = 0.736 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_e + \dot{m}_c = \dot{m}_s$$

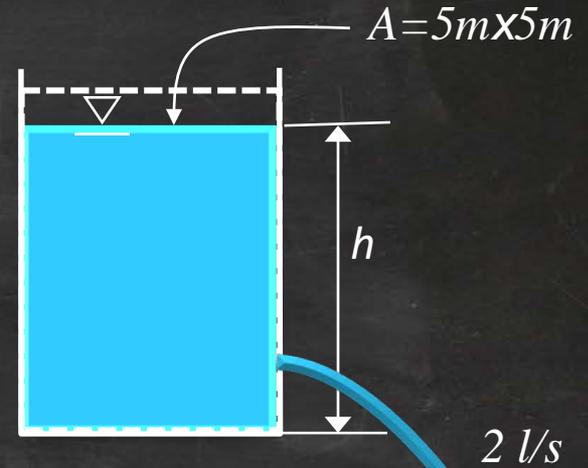
$$\dot{m}_c = \dot{m}_s - \dot{m}_e$$

$$\dot{m}_c = (0.515 \times 2020 \times 0.56 - 0.736 \times 970 \times 0.8) \times 10^3$$

$$\dot{m}_c = 11432 \text{ kg/hre}$$

## À la carte

Le débit d'eau sortant du réservoir est  $2 \text{ l/s}$ .  
La surface du réservoir est de  $5\text{m} \times 5\text{m}$ .  
Trouvez la vitesse de décroissance de la surface du liquide



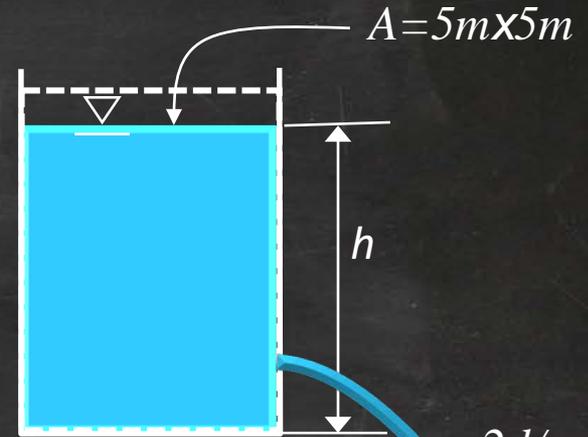
$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = - \int_{S_c} \vec{u} \cdot \vec{n} dA$$

$$Q_{sor} - Q_{ent} = - \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow$$

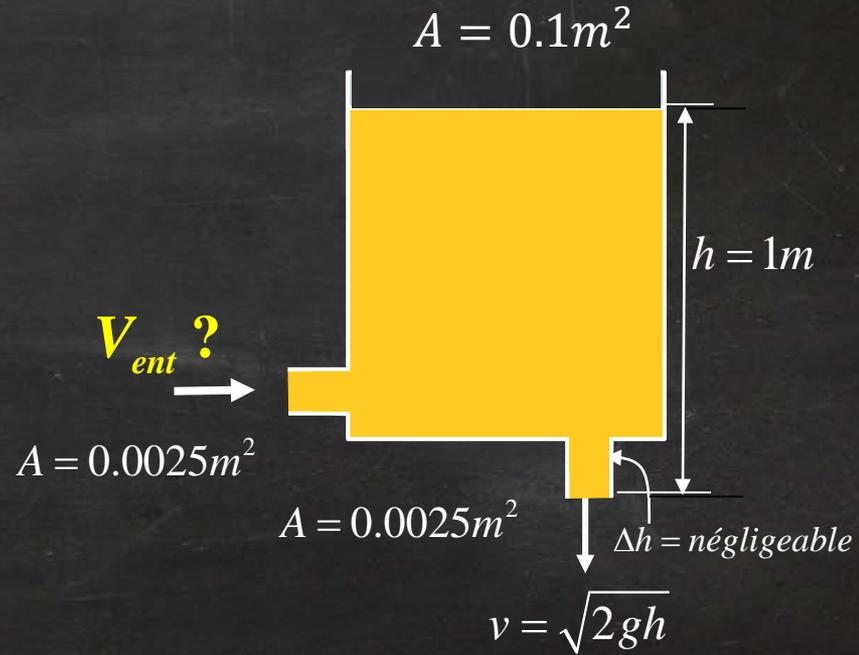
$$Q_{sor} = - \frac{A dh}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = - \frac{Q_{sor}}{A}}$$



## MENU du JOUR

On vous demande de calculer  $V_{ent}$  pour obtenir une variation  $dh/dt = 1 \text{ mm/s}$



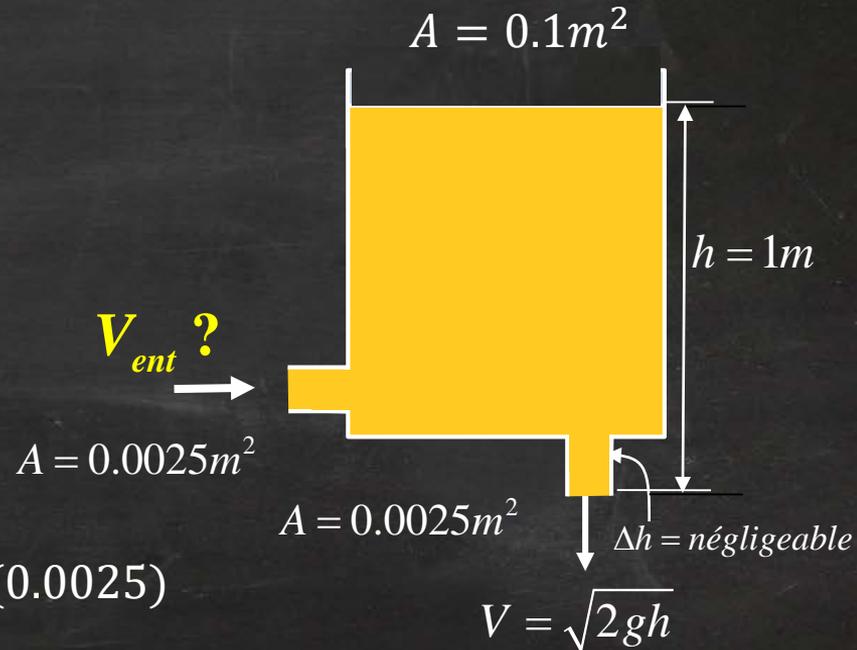
On vous demande de calculer  $V_{ent}$  pour obtenir une variation  $dh/dt=1 \text{ mm/s}$

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \sum_{S_c} \rho v A$$
$$= \frac{d}{dt} (\rho A h) - \rho V_{ent} A_{ent} + \rho V_{sor} A_{sor}$$

$$= A \frac{dh}{dt} - V_{ent} A_{ent} + V_{sor} A_{sor}$$

$$= 0.1 \times 10^{-3} - V_{ent} (0.0025) + \sqrt{2g \times 1} \times (0.0025)$$

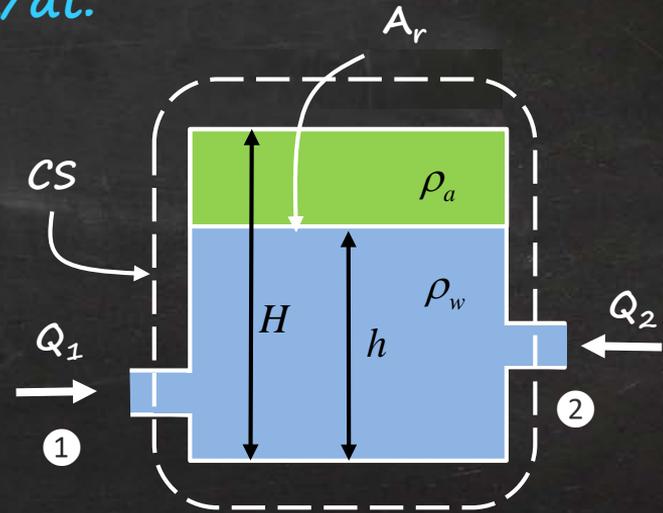
$$V_{ent} = 4.47 \text{ m/s}$$



## Spécial du jour

Le réservoir illustré sur la figure est alimenté par les entrées 1D 1 et 2. La partie supérieure renferme de l'air dont la masse demeure constante. La hauteur de l'eau est notée par le symbole  $h$

-Trouvez une expression mathématique pour calculer le taux de variation de  $h$  en fonction du temps, soit  $dh/dt$ .



$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV - Q_1 - Q_2 = 0$$

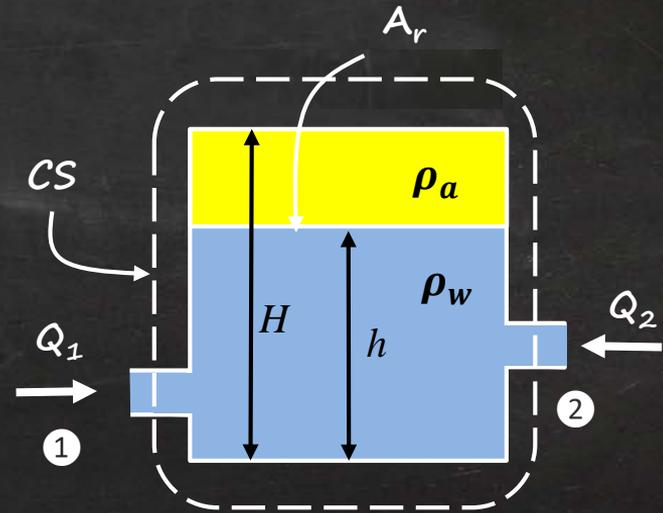
$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV - \rho_w V_1 A_1 - \rho_w V_2 A_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = \frac{d}{dt} (\rho_w A_r h) + \frac{d}{dt} (\rho_a A_r (H - h))$$

$$\frac{d}{dt} (\rho_a A_r (H - h)) = 0 \quad \text{Le mass d'air } m = \text{cnste}$$

$$\rho_w A_r \frac{dh}{dt} - \rho_w V_1 A_1 - \rho_w V_2 A_2 = 0$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{V_1 A_1 + V_2 A_2}{A_r} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_r}$$



# Chapitre 3 – Lois de conservation intégrale

3.01

3.02

3.03

3.04

3.07

3.01 Quelques lois de la mécanique des fluides

3.02 Le théorème de transport de Reynolds

3.03 Conservation de la masse

**3.04 Conservation de la quantité de mouvement**

3.07 Conservation de l'énergie



# Application du TTR à la Q.M.

3.02

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

	$B$	$b = dB/dm$
Masse	$m$	$1$
Q. Mouvement	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
Énergie	$E$	$e$

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{fluide} - \vec{u}_{Surface}$$

**Remarque:**  $b$  peut être une quantité scalaire (masse, énergie), ou vectoriel (quantité de mouvement)

# Application du TTR à la Q.M.

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{syst} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

$$(\vec{u}_{rel} = \vec{u})$$

Pour la quantité de mouvement,  $B = m\vec{u}$ , donc  $b = dB/dm = \vec{u}$ . Le TTR prend alors la forme:

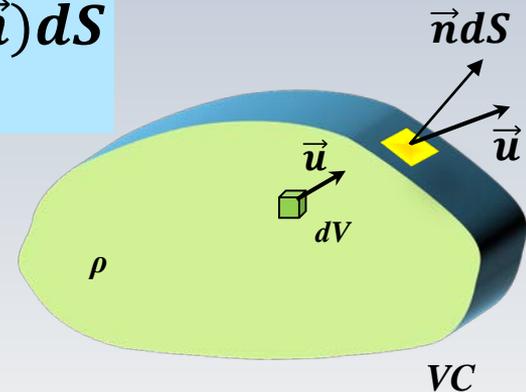
$$\left. \frac{d(m\vec{u})}{dt} \right|_{syst} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

La 2<sup>ème</sup> loi de Newton établie que:

$$\left. \frac{d(m\vec{u})}{dt} \right|_{syst} = \sum \vec{F}_{syst}$$

alors

Note:  $syst = VM(t)$



$$\sum \vec{F}_{syst} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

et puisque à un instant  $t$ , *le volume matériel* (en mouvement) coïncide avec *le volume de contrôle*, on a l'expression:

$$\sum \vec{F}_{VC} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

Forces exercées  
sur le VC

Variation de la Q.de M  
dans le VC

Flux de la Q. de M.  
au travers la SC

- On note que **les forces sur le volume de contrôle sont des sources (+) ou de puits(-) de quantité de mouvement.**
- Une source (force subie par le fluide), correspond à un accroissement de sa quantité de mouvement.
- Un puit (force exercée par le fluide) correspond à une diminution de sa quantité de mouvement

- Le terme de flux:  $\int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$  n'apparaît pas dans la formulation traditionnelle (système fermé) de la quantité de mouvement
- Ce terme provient de l'utilisation d'un volume de contrôle "perméable" (formulation eulérienne), au lieu d'un volume "imperméable" qui suit un fluide (formulation lagrangienne) en mouvement

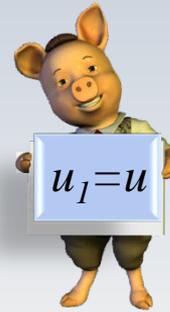
# Cas particuliers utiles (VC fixe)

3.04 La qté. de ...

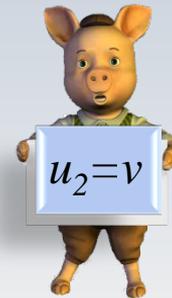
L'équation de la quantité de mouvement est **une équation vectorielle**, on peut donc l'écrire pour les 3 composantes de vitesse  $u$ ,  $v$  et  $w$ , ou en notation indicielle pour  $u_i$  avec  $i=1,2,3$

$$\sum \vec{F}_{VC} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

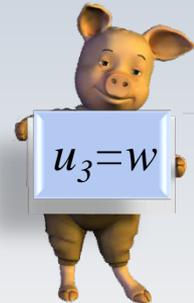
$$\sum F_i = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho u_i dV + \int_{SC} \rho u_i (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$



$$F_1 = F_x$$



$$F_2 = F_y$$



$$F_3 = F_z$$

Si le volume de contrôle ne se déforme pas,  $\vec{u}_{rel} = \vec{u}$ , et si l'écoulement est **en régime permanent**, alors

$$\sum \vec{F}_{syst} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

Si de plus, les entrées et sorties ont des **vitesse uniformes**, l'intégrale sur la  $SC$  est remplacée par le bilan des flux entrant et sortant, alors

$$\int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \vec{u} \int_{SC} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad \sum \vec{F}_{VC} = \sum_{sortie} \dot{m}_i \vec{u}_i - \sum_{entrée} \dot{m}_j \vec{u}_j$$

**Remarque:** Les sommations sur  $i$  et  $j$  correspondent aux nombres d'entrées/sorties

S'il n'y a qu'une entrée et qu'une sortie

$$\sum \vec{F}_{VC} = \dot{m} (\vec{u}_{sortie} - \vec{u}_{entrée})$$

L'hypothèse de vitesses d'entrée et de sortie uniformes n'est qu'une approximation, mais pratique pour les calculs requis en ingénierie. Pour mieux l'utiliser, on peut introduire un **facteur de correction**  $\beta \geq 1$  qui permet de corriger l'erreur introduit par cette l'hypothèse. Notamment:

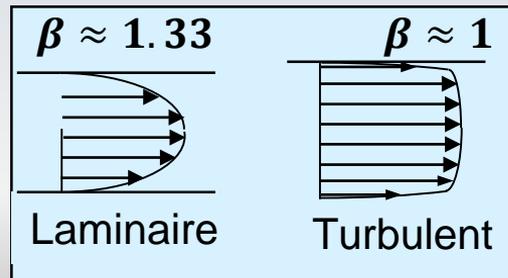
$$\sum \vec{F}_{VC} = \dot{m} (\beta_s \vec{u}_{sortie} - \beta_e \vec{u}_{entrée})$$

Pour des écoulements turbulents (les plus fréquents)  $\beta \approx 1$  de sorte que ce facteur est souvent négligé

Le facteur de correction  $\beta$  (cas incompressible) es défini par l'équation:

$$\beta = \frac{1}{A} \int \left( \frac{u}{V_{Moy}} \right)^2 dA$$

où  $V_{Moy}$  indique la vitesse moyenne de l'écoulement. D'après la forme des profils de vitesse, laminaire ou turbulent, on trouve approximativement:



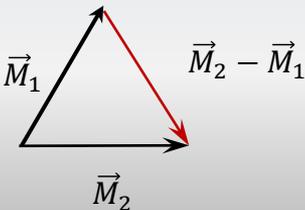
# Tube de courant

Le tube de courant peut aussi être utilisé pour représenter ce cas

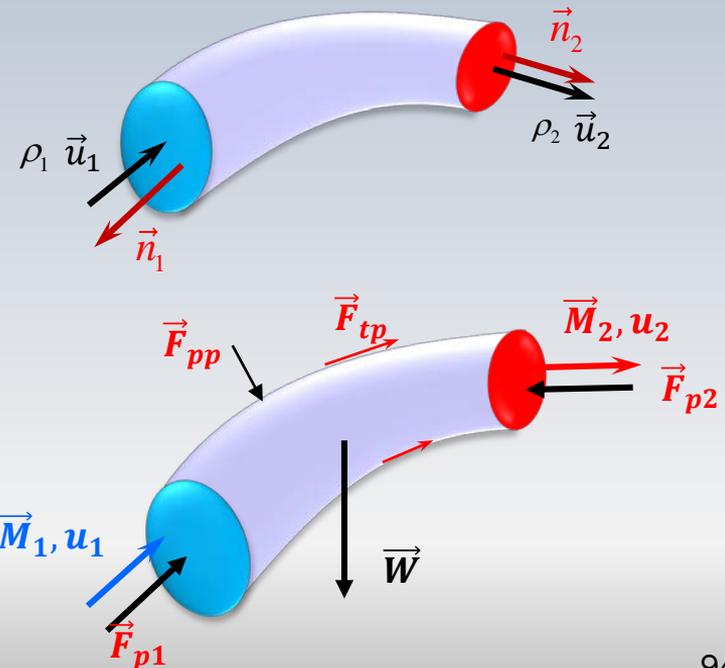
$$\sum \vec{F} = \dot{m} (\vec{u}_{\text{sortie}} - \vec{u}_{\text{entrée}})$$

$$\sum \vec{F} = \underbrace{(\rho_2 u_2 A_2) \vec{u}_2}_{\dot{\vec{M}}_2} - \underbrace{(\rho_1 u_1 A_1) \vec{u}_1}_{\dot{\vec{M}}_1}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{W} + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_{pp} + \vec{F}_{tp}$$

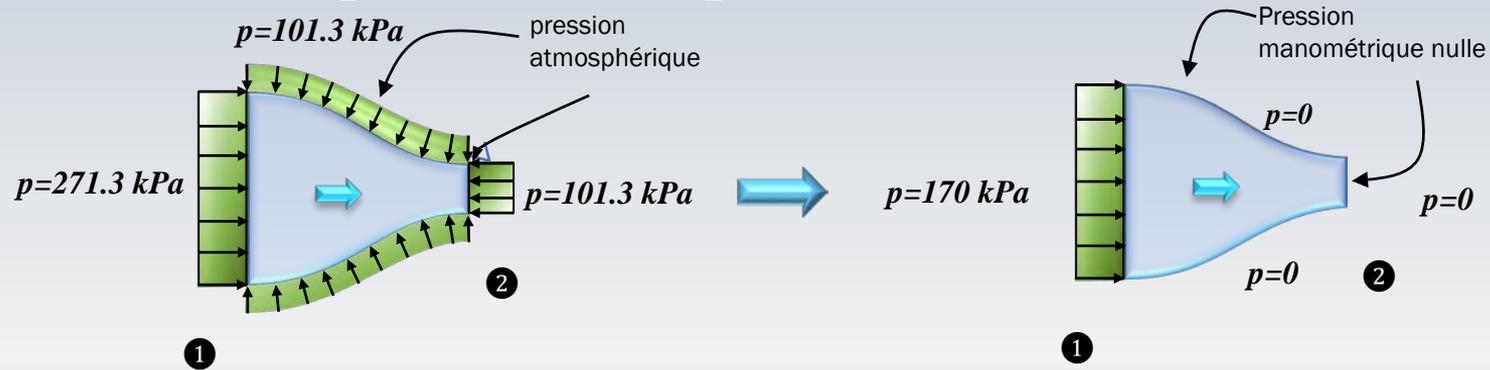
$$\sum \vec{F} = \vec{M}_2 - \vec{M}_1$$


$$\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$



# Exemple

Le volume de contrôle autour d'une buse est soumis à une **pression absolue** uniforme de **271.3 kPa** sur la section d'entrée **1** et à une pression atmosphérique de **101.3 kPa** sur la section de sortie **2** et sur les parois solides. Calculez la force de pression résultante si les diamètres sont  **$D_1 = 7.5 \text{ cm}$**  et  **$D_2 = 2.5 \text{ cm}$**

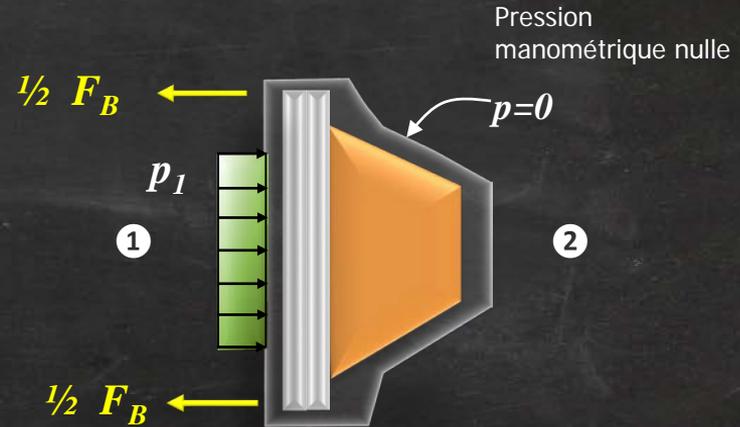
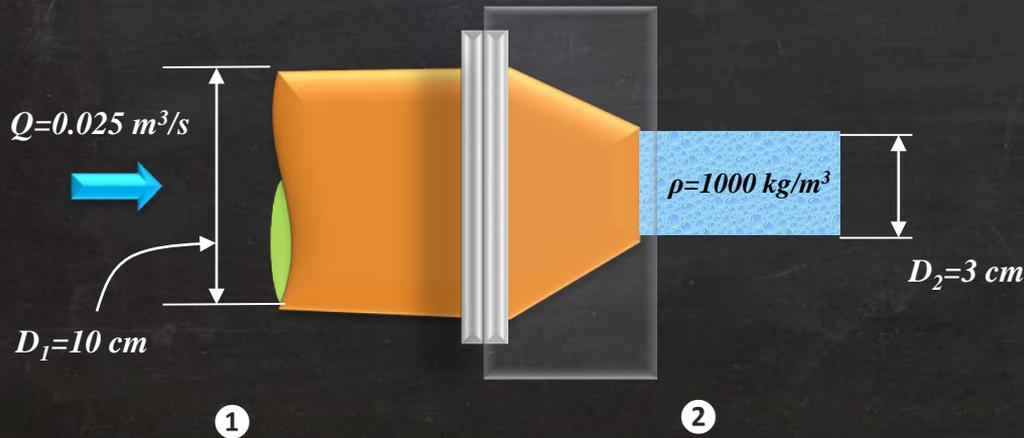


**Remarque:** À la sortie d'une buse, la pression du jet d'un fluide incompressible correspond approximativement à la pression ambiante.



## Exemple

Un boyau d'incendie a un diamètre de **10 cm**, tandis que la buse a un diamètre de **3 cm**. Le débit circulant est de **0.025 m<sup>3</sup>/s**. Calculez **p<sub>1</sub>** et la force **F<sub>B</sub>** exercé par le boulons (2) pour tenir la buse attachée au boyau. L'écoulement est en régime permanent.



$$p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{V_2^2}{2} \rightarrow$$

# Exemple

$$p_1 = \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2)$$

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

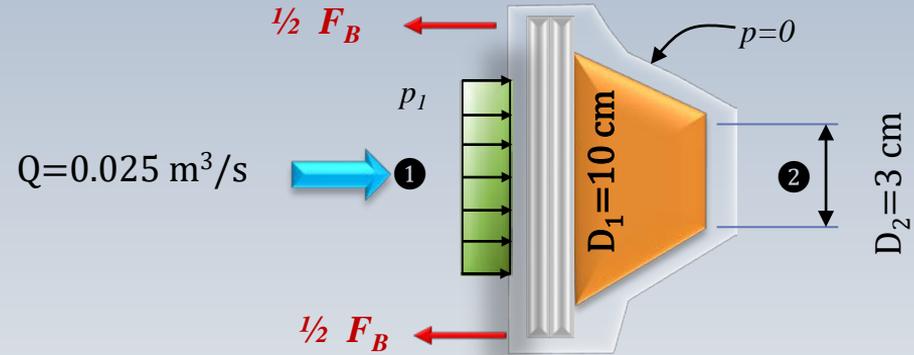
$$V_1 = \left( \frac{Q}{A_1} \right) = \left( \frac{0.025 \text{ m}^3 / \text{s}}{\pi \times (0.1 \text{ m})^2 / 4} \right) = 3.2 \text{ m} / \text{s}$$

$$V_2 = \left( \frac{Q}{A_2} \right) = \left( \frac{0.025 \text{ m}^3 / \text{s}}{\pi \times (0.03 \text{ m})^2 / 4} \right) = 35.4 \text{ m} / \text{s}$$

$$p_1 = \frac{1000 \text{ kg} / \text{m}^3}{2} (35.4^2 - 3.2^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$p_1 = 620 \text{ kPa}$$

(manométrique)

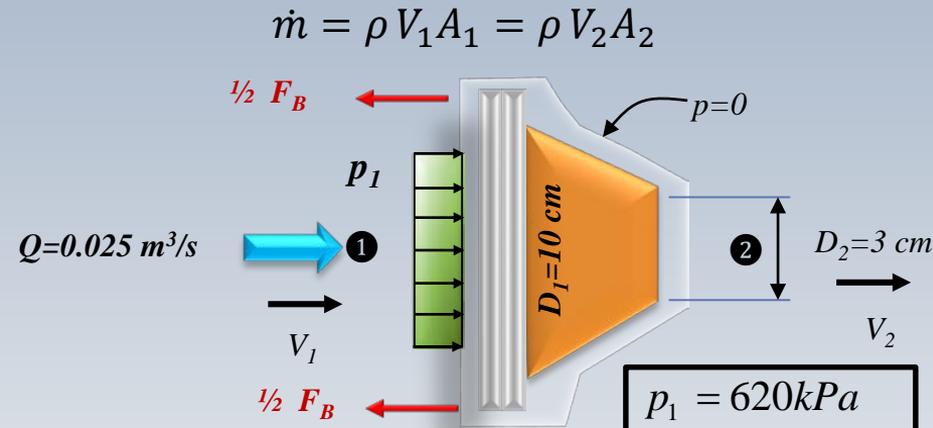


# Exemple

$$\sum \vec{F}_{VC} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_r \cdot \vec{n}) dS$$

$$\sum F_x = \int_{SC1} \rho V_1 (V_1 dS) + \int_{SC2} \rho V_2 (V_2 dS)$$

$$\sum F_x = -V_1 \rho (V_1 A_1) + V_2 \rho (V_2 A_2)$$



$$p_1 = 620 \text{ kPa}$$

$$D_1 = 0.1 \text{ m}$$

$$V_1 = 3.2 \text{ m/s}$$

$$V_2 = 35.4 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\sum F_x = \dot{m}(V_2 - V_1) \quad \dot{m} = \rho Q = 1000 \text{ kg/m}^3 \times 0.025 \text{ m}^3/\text{s} = 25 \text{ kg/s}$$

$$p_1 A_1 - F_B = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

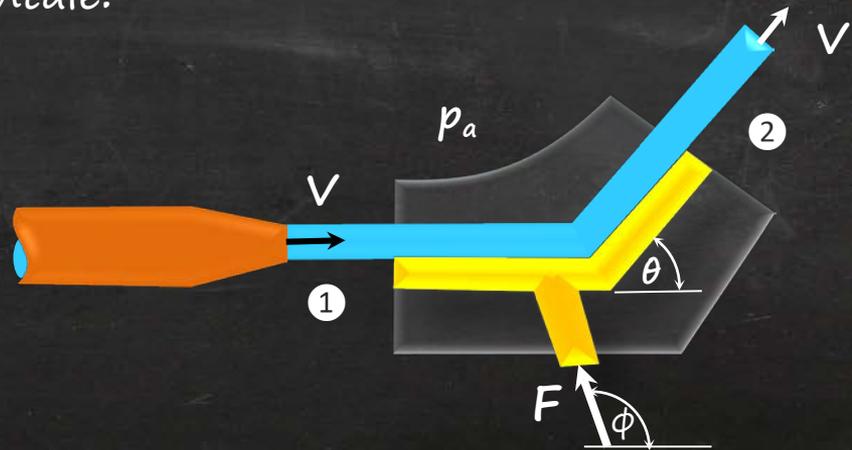
$$F_B = p_1 A_1 - \dot{m}(V_2 - V_1) \quad F_B = 620000 \times \pi \times 0.1^2 / 4 - 25(35.4 - 3.2)$$

$$F_B = 4067 \text{ N}$$

## Table d'hôte

On considère l'impact d'un jet bidimensionnel d'eau sur une vanne fixe. Le jet a une **aire  $A$  constante** et il est dévié par la vanne d'un angle  $\theta$ . L'écoulement est **en régime permanent** et la **vitesse est constante** le long du jet. Une **pression  $p_a$  uniforme** agit partout sur l'ensemble et on néglige les forces dues au frottement.

- Déterminer les composantes  $F_x$  and  $F_y$  de la force exercée sur les parois de la vanne
- Trouvez des expressions pour définir la grandeur de la force  $F$  et l'angle  $\phi$  entre celle-ci et l'horizontale.



# Exemple

## 3.04 La qté. de mouvement

Conservation de la masse (à l'état stationnaire)

$$\dot{m} = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2$$

$$V_1 = V_2 = V \quad (A_1 = A_2, \quad \rho_1 = \rho_2)$$

Conservation de la Q. de M.

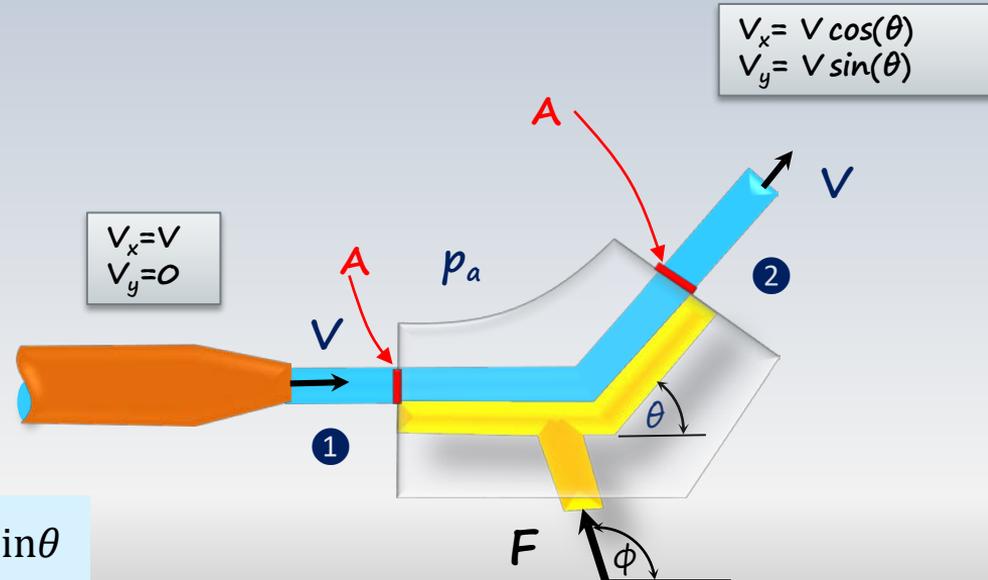
$$\sum \vec{F}_{VC} = \dot{m}(\vec{V}_{sort} - \vec{V}_{ent})$$

$$\sum F_x = \dot{m}V \cos\theta - \dot{m}V$$

$$\sum F_x = \dot{m}V(\cos\theta - 1)$$

$$\sum F_y = \dot{m}V \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = 0$$



# Exemple

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \dot{m}V\sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta}$$

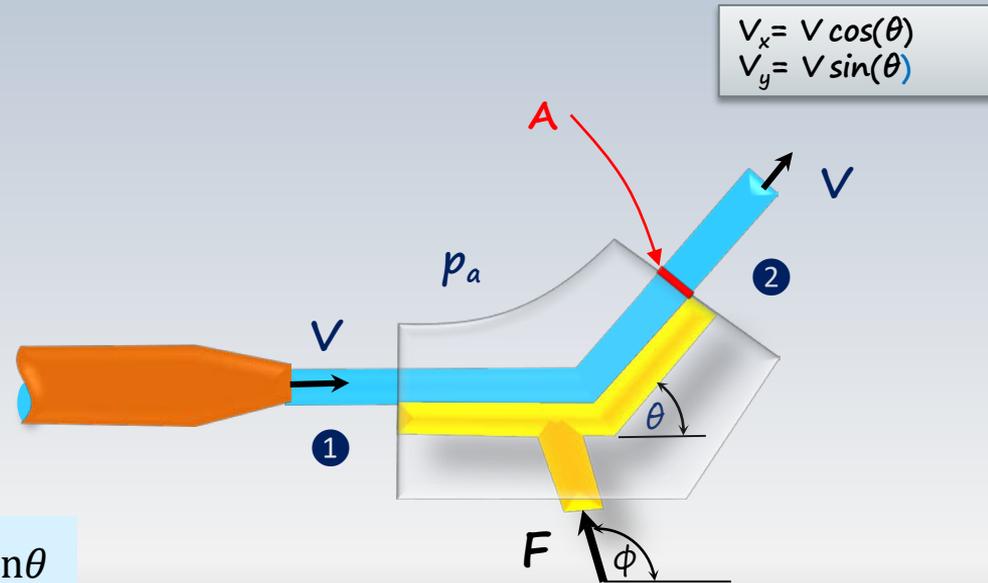
$$F = \dot{m}V\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Max pour  $\theta=180^\circ$

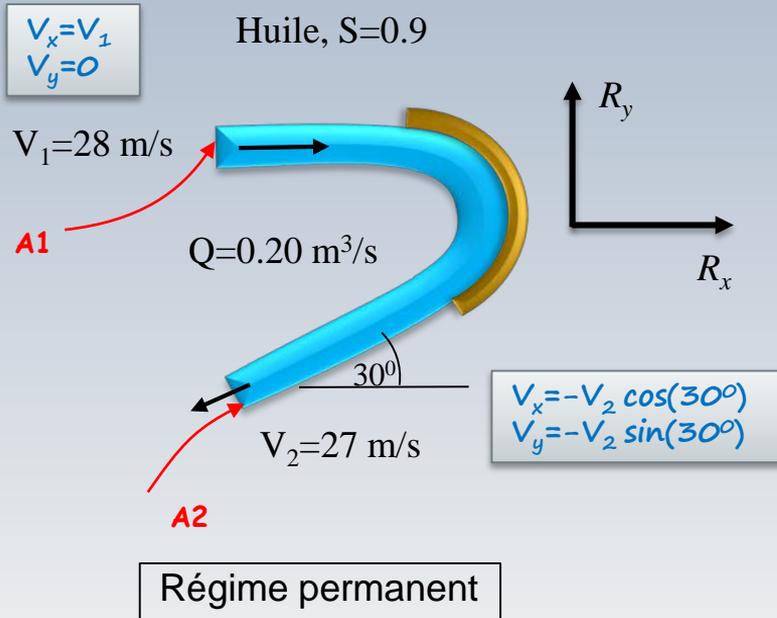
$$\Phi = 180 - \text{atan}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

$$\sum F_x = \dot{m}V(\cos\theta - 1)$$

$$\sum F_y = \dot{m}V\sin\theta$$



# Jet sur un coude

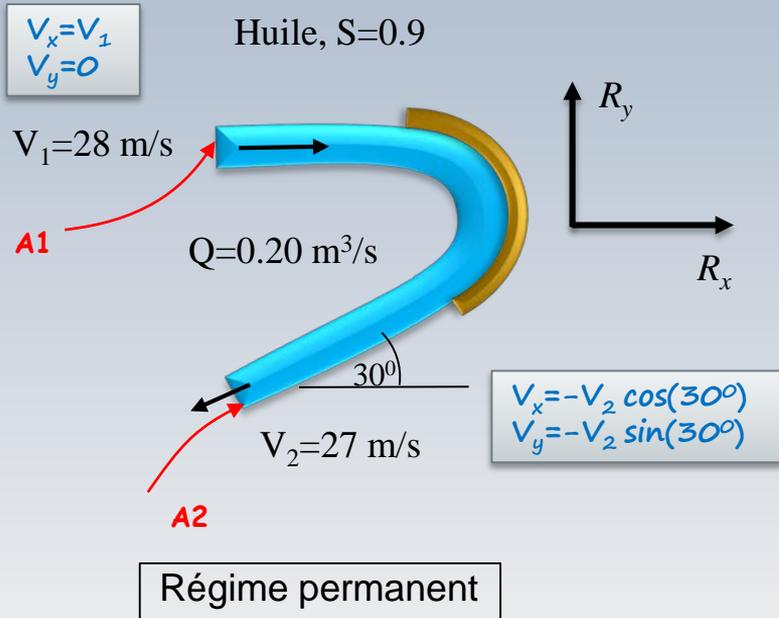


L'écoulement décrit sur la figure est dévié par la présence d'un coude

On veut calculer les composantes de la force de réaction  $R_x, R_y$  pour maintenir le coude immobile

Le calcul des **forces** fait appel à la variation de la **quantité de mouvement** pour un écoulement: **stationnaire, incompressible, avec une entrée et une sortie**

# Jet sur un coude



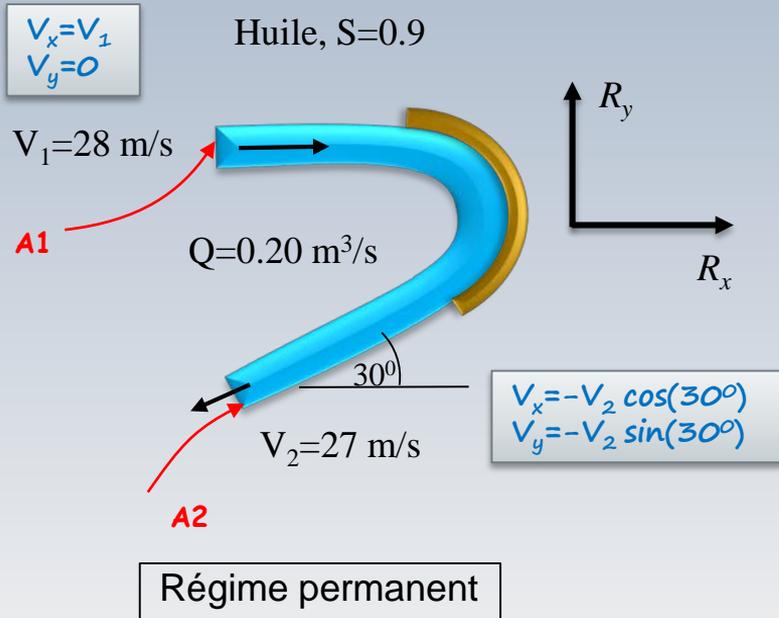
$$\sum \vec{F}_{VC} = \dot{m} (\vec{u}_{sortie} - \vec{u}_{entrée})$$

On écrit des équations scalaires pour les directions  $x$  et  $y$

$$\dot{m} = \rho Q = \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \quad \text{Continuité}$$

$$\sum F_x = \overbrace{-(\rho V_2 A_2) V_2 \cos 30^\circ}^{\text{notez le signe négatif}} - (\rho V_1 A_1) V_1$$

# Jet sur un coude



$$(\dot{m} = \rho Q)$$

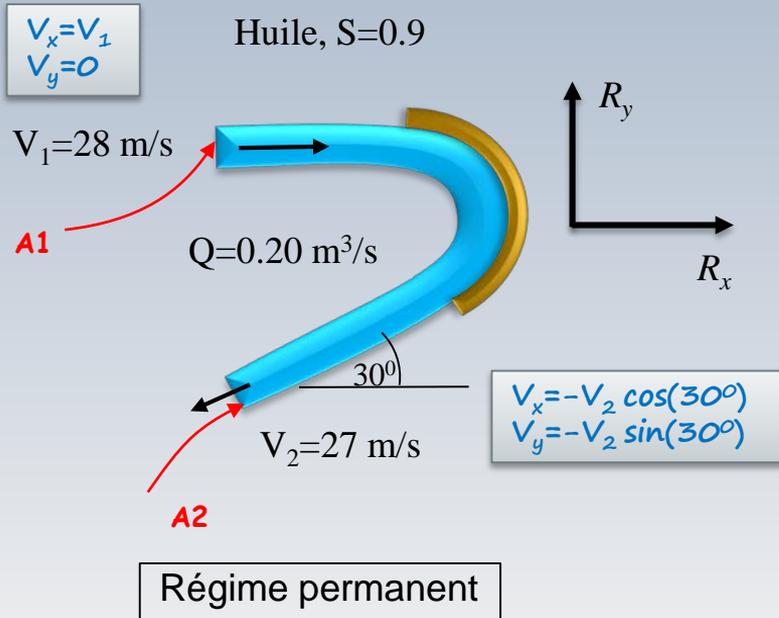
$$\sum F_x = -\rho Q(V_1 + V_2 \cos 30^\circ)$$

$$\rho = 0.9 \times 1000$$

$$\sum F_x = -900 \times 0.2 \times (28 + 27 \cos 30^\circ)$$

$$\sum F_x = R_x = -9.25 \text{ kN}$$

# Jet sur un coude



$$\sum F_y = M_{2y}$$

$$\sum F_y = (-V_2 \sin 30^\circ) \overbrace{\rho V_2 A_2}^{\dot{m}}$$

$$\sum F_y = -(V_2 \sin 30^\circ) \rho Q$$

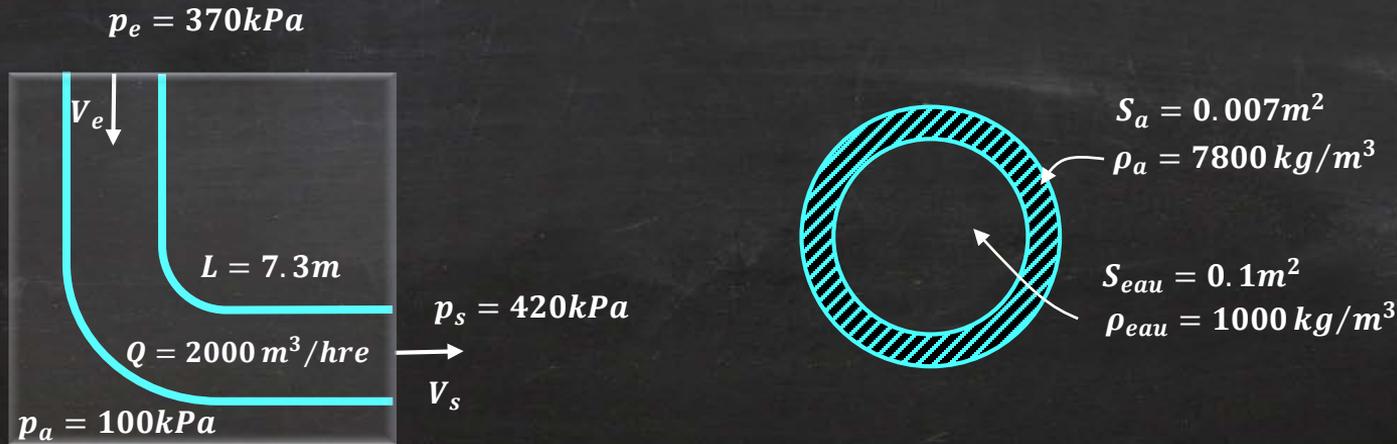
$$\sum F_y = -(27 \sin 30^\circ) 0.9 \times 1000 \times 0.2$$

$$\sum F_y = R_y = -2.43 \text{ kN}$$

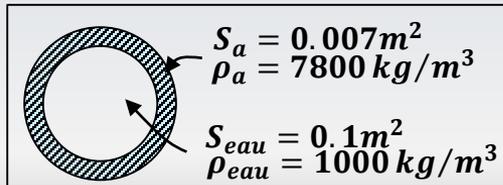
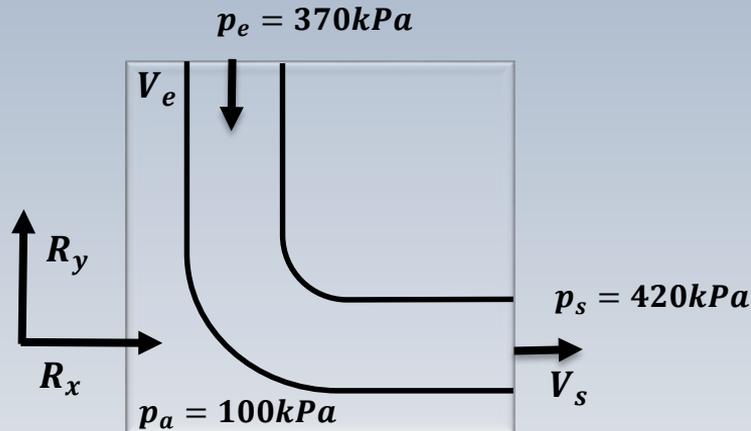
# Conduite

Une conduite en acier ( $\rho_a = 7800 \text{ kg/m}^3$ ) transporte de l'eau à un débit volumique  $Q$ . La pression absolue est  $p_e$  à l'entrée et  $p_s$  à la sortie. La pression à l'extérieur ou ambiante est  $p_a = 100 \text{ kPa}$

1. Donnez l'expression de la force  $\vec{F}$  nécessaire pour maintenir la conduite en place ( $\beta = 1$ )
2. Effectuez l'application numérique



# Quantité. de Mouvement



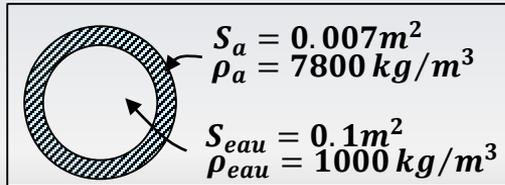
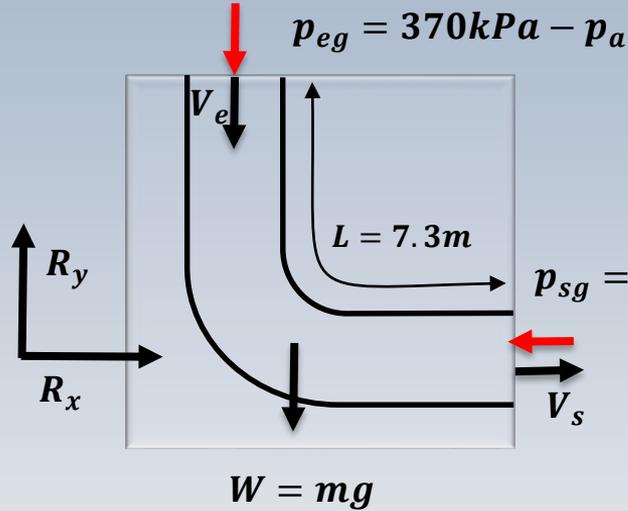
$$\sum \vec{F}_{Vc} = \dot{m}(\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} \quad \sum F_x &= \dot{m}(V_s - 0) \\ \textcircled{2} \quad \sum F_y &= \dot{m}(0 - (-V_e)) \end{aligned} \right\} \text{Équations scalaires}$$

La pression ambiante agit partout. On travaillera donc avec des pressions jauges (gages)

$$p_{eg} = p_e - p_a \quad p_{sg} = p_s - p_a$$

# Forces



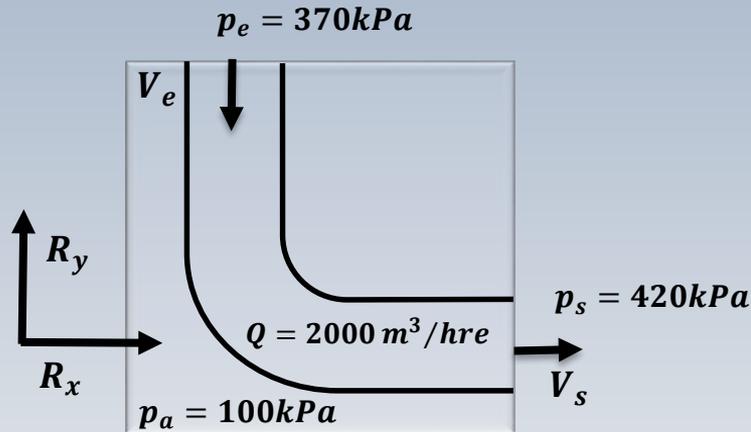
$$\textcircled{3} \quad \sum F_x = R_x - p_{sg} S_{eau}$$

$$\textcircled{1} \quad \sum F_x = \dot{m}(V_s - 0)$$

$$\textcircled{2} \quad \sum F_y = \dot{m}(0 - (-V_e))$$

$$\textcircled{4} \quad \sum F_y = R_y - p_{eg} S_{eau} - \underbrace{(\rho_a S_a + \rho_{eau} S_{eau}) L g}_{\text{Poids } W = mg}$$

$$\Sigma \vec{F} = \dot{m}(\vec{V}_s - \vec{V}_e):$$



$$\dot{m}V_s = R_x - p_{sg}S_{eau}$$

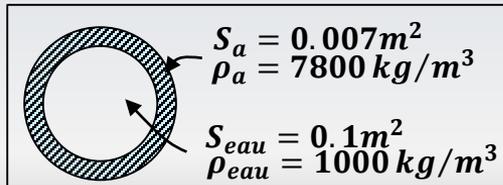
$$R_x = \dot{m}V_s + p_{sg}S_{eau}$$

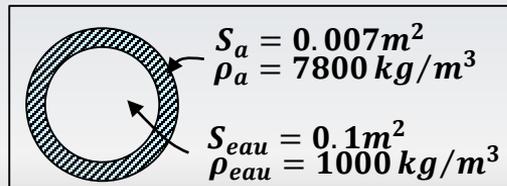
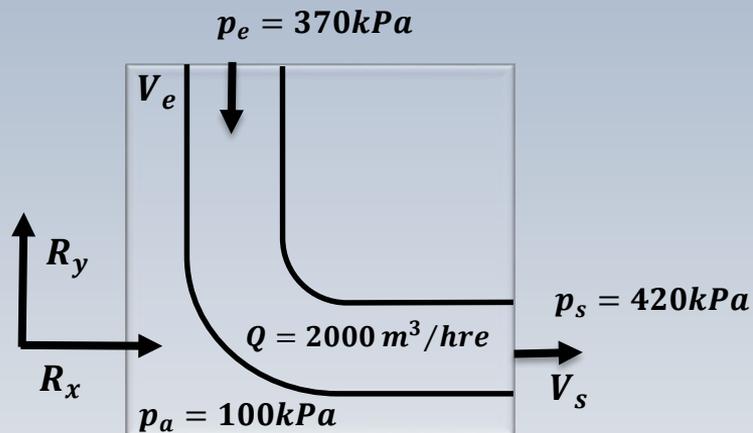
$$\dot{m}V_e = R_y - p_{eg}S_{eau} - (\rho_a S_a + \rho_{eau} S_{eau})Lg$$

$$R_y = \dot{m}V_e + p_{eg}S_{eau} + (\rho_a S_a + \rho_{eau} S_{eau})Lg$$

$$\dot{m} = \rho Q$$

$$\dot{m} = 1000 \times \left( \frac{2000}{3600} \right) = 555.56 \text{ kg/s}$$





$$\dot{m} = 555.56 \text{ kg/s}$$

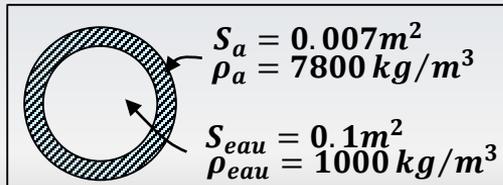
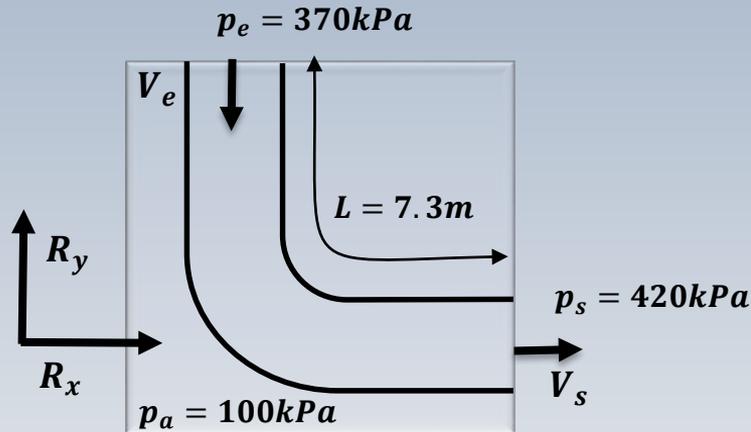
$$Q = V_s S_{eau} \rightarrow V_s = \left( \frac{2000}{3600} \right) / 0.1$$

$$V_s = 5.5556 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$p_{sg} = p_s - p_a = 420 - 100 = 320 \text{ kPa}$$

$$R_x = \dot{m} V_s + p_{sg} S_{eau}$$

$$R_x = 35.086 \text{ kN}$$



$$\dot{m} = 555.56 \text{ kg/s}$$

$$Q = V_s S_{eau} = V_e S_{eau} \rightarrow$$

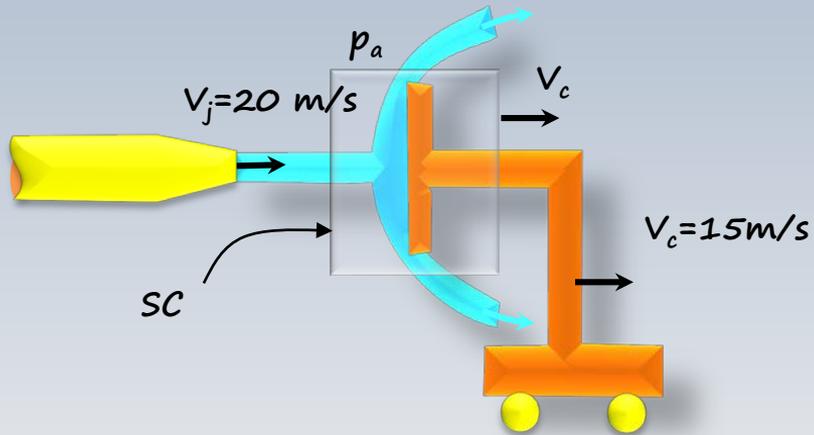
$$V_e = 5.5556 \text{ m/s}$$

$$p_{eg} = p_e - p_a = 370 - 100 = 270 \text{ kPa}$$

$$R_y = \dot{m} V_e + p_{eg} S_{eau} + (\rho_a S_a + \rho_{eau} S_{eau}) L g$$

$$R_y = 41.06 \text{ kN}$$

# Jet sur un charriot en mouvement

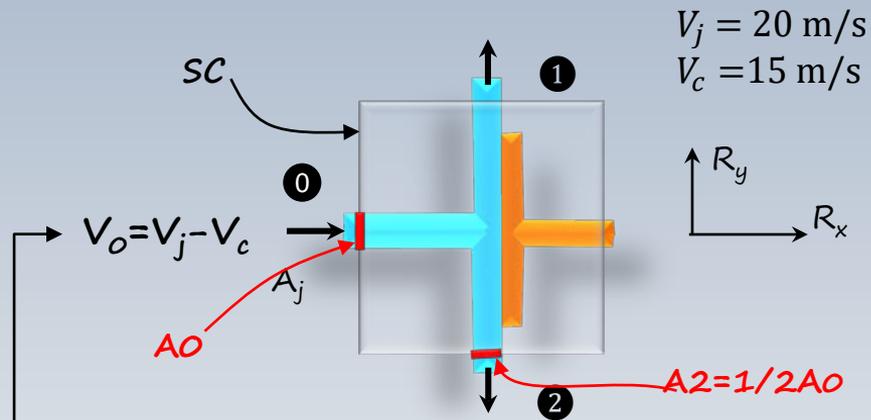


Un jet d'eau avec une vitesse  $V_j = 20 \text{ m/s}$  impacte une plaque plane se déplaçant à une vitesse constante  $V_c = 15 \text{ m/s}$ . L'aire du jet est  $A_j = 3 \text{ cm}^2$ . La masse volumique de l'eau est  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

Ce problème est considéré à l'état stationnaire. Le jet est divisé en deux parties égales. Le poids de l'eau et de la plaque peuvent être négligés.

Déterminez la force à être appliquée sur le charriot pour que la vitesse de celui-ci demeure constante.

# Jet sur un charriot en mouvement



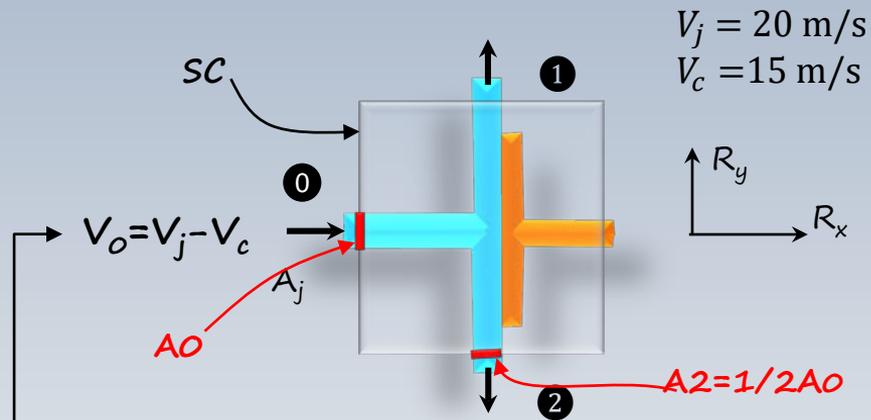
Le volume de contrôle ne se déforme pas, mais il est attaché au charriot. Sa vitesse est donc  $V_c$

On applique le volume de contrôle illustré sur la figure. Ce volume ne se déforme pas, mais il se déplace avec le charriot. Sa vitesse est donc est  $V_c = 15 \text{ m/s}$ .

La conservation de **la masse** à l'état stationnaire s'écrit

$$\sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{sortie}} = \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{entrée}}$$

# Jet sur un charriot en mouvement



Le volume de contrôle ne se déforme pas, mais il est attaché au charriot. Sa vitesse est donc  $V_c$

$$\text{Alors } \dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_0$$

$$\rho_1 A_1 V_1 + \rho_2 A_2 V_2 = \rho_0 A_0 V_0 = \rho_0 A_0 (V_j - V_c)$$

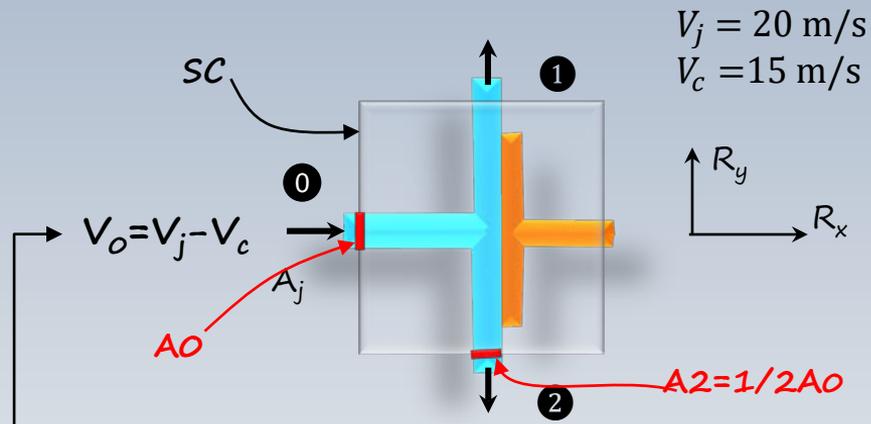
$$\rho (A_0/2) V_1 + \rho (A_0/2) V_2 = \rho A_0 (V_j - V_c)$$

$$V_1 + V_2 = 2(V_j - V_c)$$

$$V_1 = V_2 = (V_j - V_c) = 20 - 15 = 5 \text{ m/s}$$

Le jet est divisé en deux parties égales!

# Jet sur un charriot en mouvement



Le volume de contrôle ne se déforme pas, mais il est attaché au charriot. Sa vitesse est donc  $V_c$

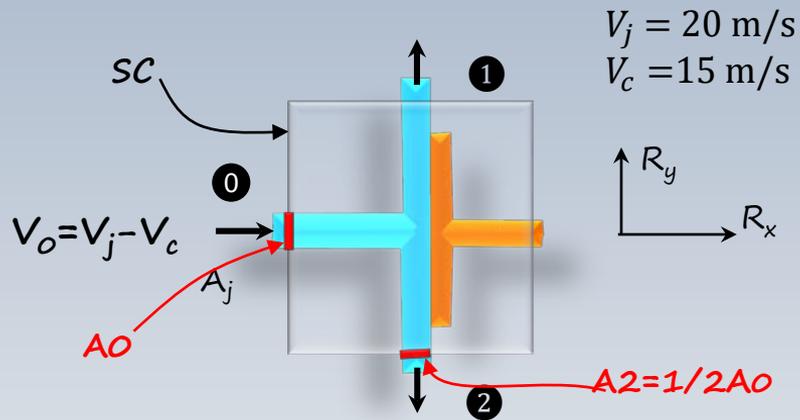
La conservation de la **quantité de mouvement** à l'état stationnaire s'écrit

$$\sum \vec{F} = \vec{M}_2 + \vec{M}_1 - \vec{M}_0$$

$$\sum F_x = M_{2x} + M_{1x} - M_{0x}$$

$$\sum F_x = -M_{0x} = -\dot{m}_0 V_0$$

# Jet sur un charriot en mouvement



$$\sum F_x = -M_{0x} = -\dot{m}_0 V_0$$

$$\begin{cases} V_0 = (V_j - V_c) \\ \dot{m}_0 = \rho(V_j - V_c)A_0 \end{cases}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$V_0 = 5 \text{ m/s}$$

$$A_0 = 3 \text{ cm}^2$$

$$\sum F_x = -\underbrace{\rho(V_j - V_c)A_0}_{\dot{m}_0} \underbrace{(V_j - V_c)}_{V_0}$$

$$\sum F_x = -1000 \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \times \left( 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \times 0.0003 \text{ m}^2$$

$$\begin{cases} \sum F_x = -7.5 \text{ N} \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

Vitesse relative??

$$\int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS??$$

# $(V_j - V_c) ?$

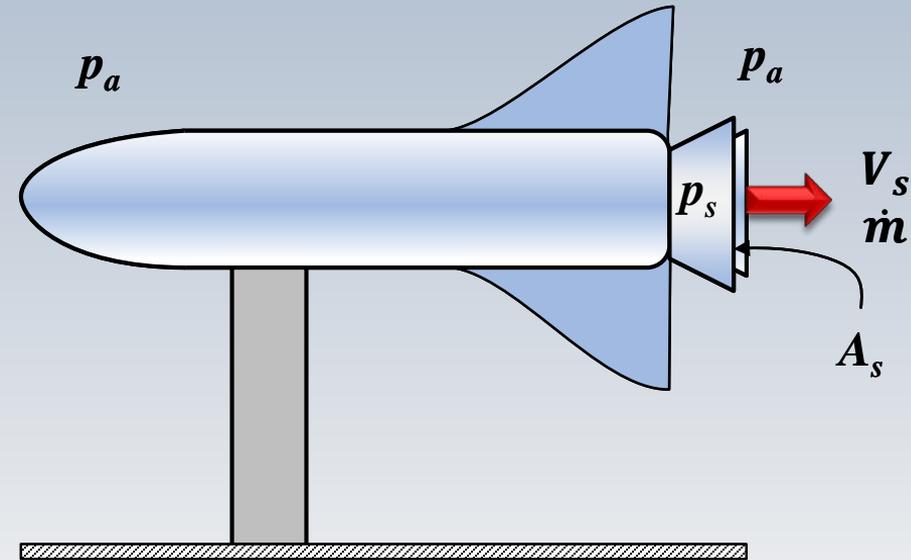
Le problème précédent renferme un cas particulier dont l'explication peut être trouvée en annexe

**Je clique pour l'explication**

**Non merci!**

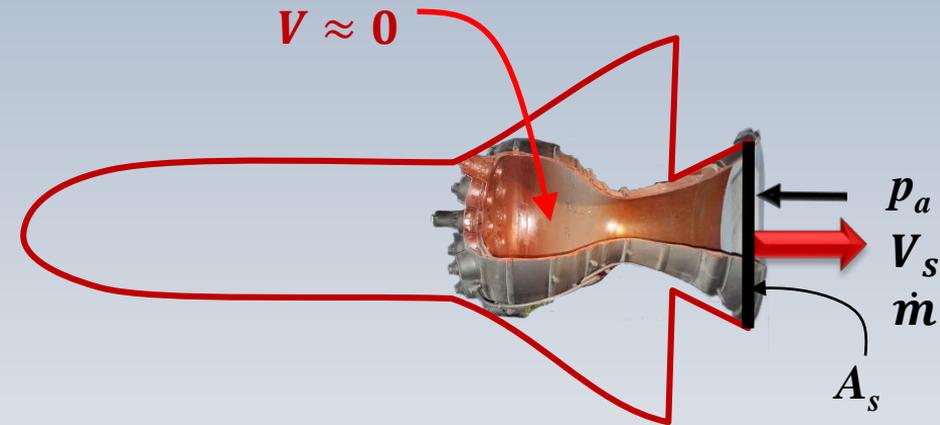


# Fusée



Le calcul de la poussée produite par une fusée utilise le principe de la quantité de mouvement. Pour simplification, on considère la fusée attache à un support. La pression ambiante et celle des gaz à la sortie sont  $p_a$  et  $p_s$ .  $A_s$  indique l'aire à la section de sortie et  $V_s, \dot{m}$  la vitesse à la sortie et le débit massique du gaz, respectivement

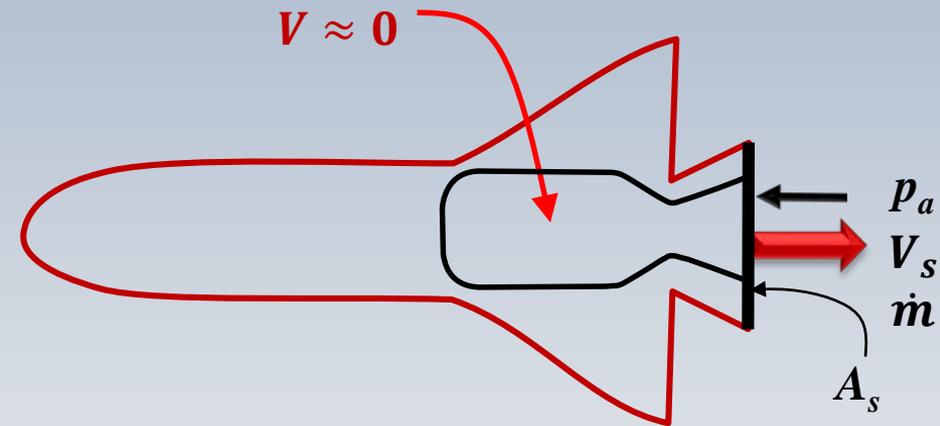
# Fusée



Voici un schéma illustrant la chambre de combustion et la tuyère de sortie.

Dans la chambre de combustion la vitesse est faible. Celle-ci peut alors être considérée négligeable

# Fusée

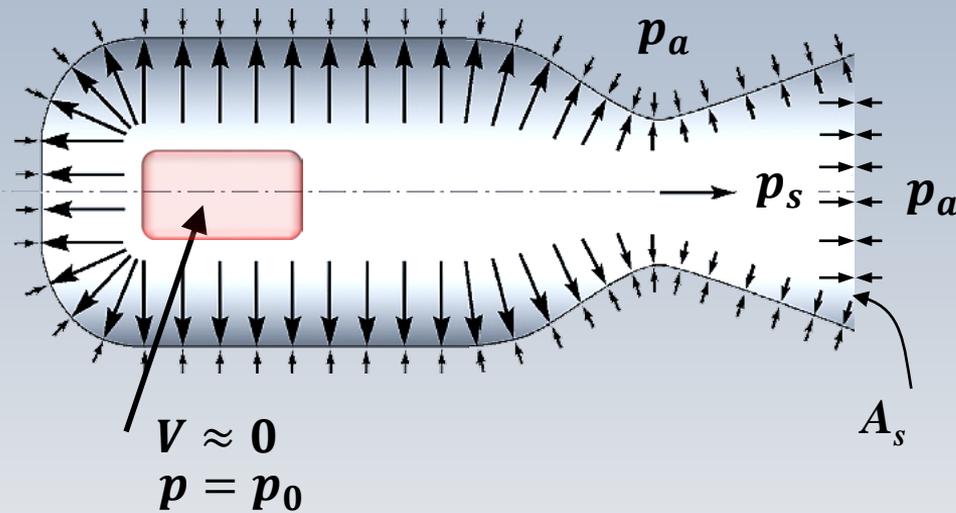


Voici le schéma précédent simplifié

Dans la suite nous allons regarder l'ensemble du moteur formé par la chambre de combustion et la tuyère

Ce dispositif produira la poussée requise par la fusée

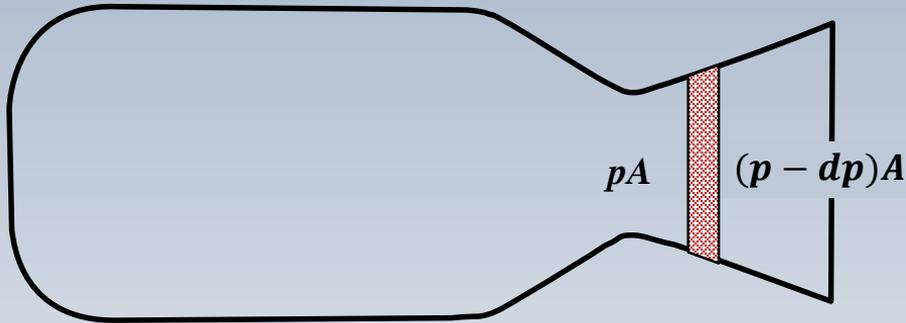
# La force d'accélération des gaz



À l'extérieur du moteur, incluant la sortie, agit la pression atmosphérique  $p_a$

Dans chambre de combustion, la vitesse est considérée nulle. A cette endroit la pression peut être notée par  $p_0$ . Les gaz sont ensuite accélérés vers la sortie, tandis que la pression chute jusqu'y atteindre un niveau  $p_s$

# La force d'accélération des gaz



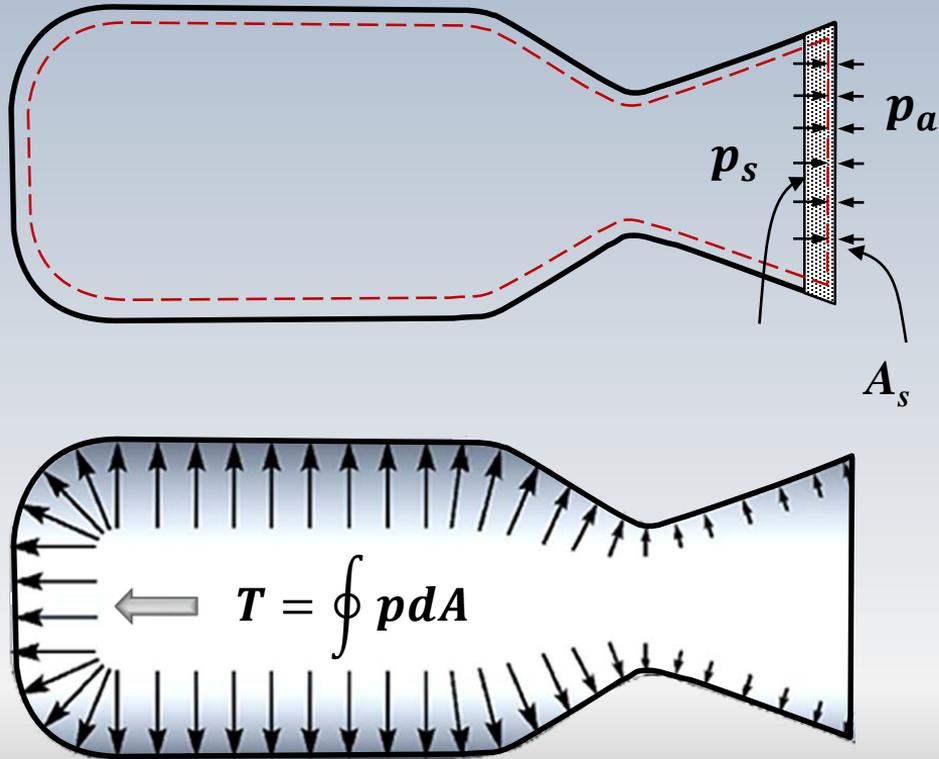
Si l'on considère la section de la conduite d'aire  $A$  (hachurée), on note que la chute de pression vers l'aval produit l'accélération des gaz.

Cette variation de pression génère une force infinitésimale

$$dF_G = pA - (p - dp)A$$

l'indice  $G$  dénote gaz

# La poussée

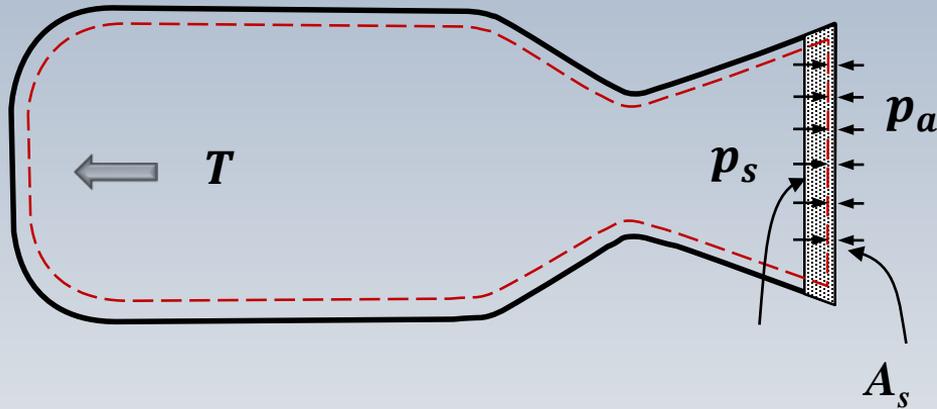


On regarde maintenant le volume de contrôle illustré sur la figure et on analyse l'action de la force de pression des gaz.

La résultante sur les parois est noté par  $\oint p dA$ . Cette force engendre une poussée, soit

$$T = \oint p dA$$

# Les pression en sortie



Sur l'élément hachuré, juste à la sortie, le bilan des forces de pression  $F_G = dpA$ , peut être approchée par

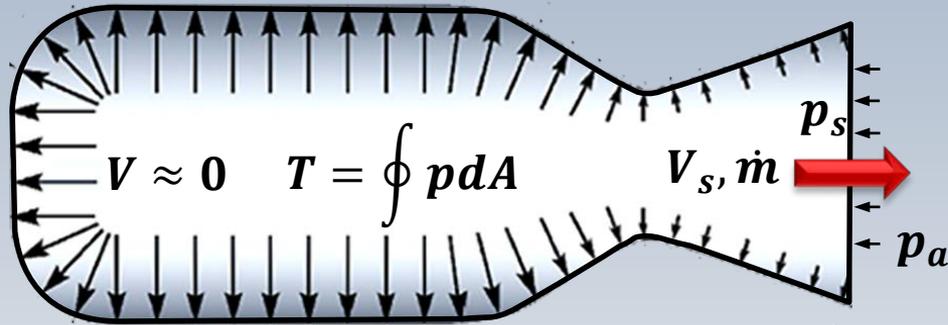
$$F_G = (p_s - p_a)A_s$$

Alors, la force totale est

$$F = T - (p_s - p_a)A_s$$

$p_s > p_a$ ,  $T$  et  $(p_s - p_a)A_s$  agissent dans des sens opposés

# Formule pour la poussée



Enfin, l'application du principe de la quantité de mouvement permet d'écrire

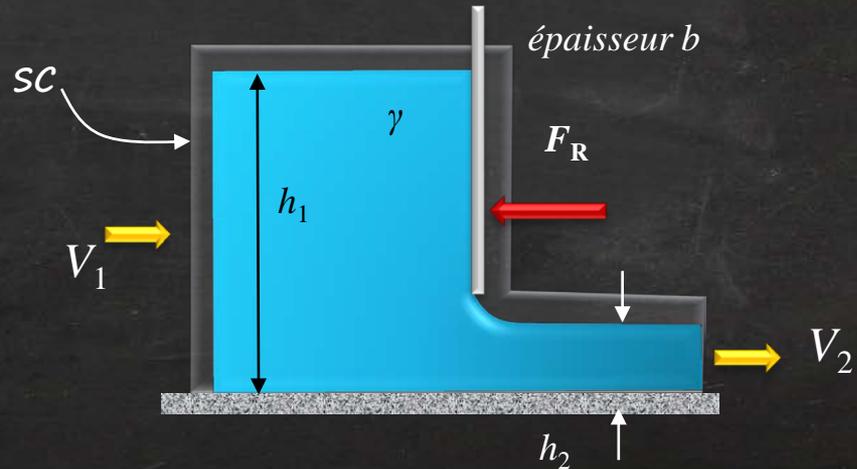
$$T - (p_s - p_a)A_s = \dot{m}V_s$$

ainsi, la poussée est donnée par

$$T = \dot{m}V_s + (p_s - p_a)A_s$$

## À la carte

Trouvez une formule en fonction de  $h_1$  et  $h_2$ , ainsi que de  $v_1$  et  $v_2$  pour déterminer la force  $F_R$  nécessaire pour maintenir la vanne en place. Supposez un état permanent, que la pression est de nature hydrostatique et que le débit est uniforme sur les sections d'entrée et de sortie.



# Exemple

3.04 Qté. de mouvement

$$\sum F_x = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_r \cdot \vec{n}) dS$$

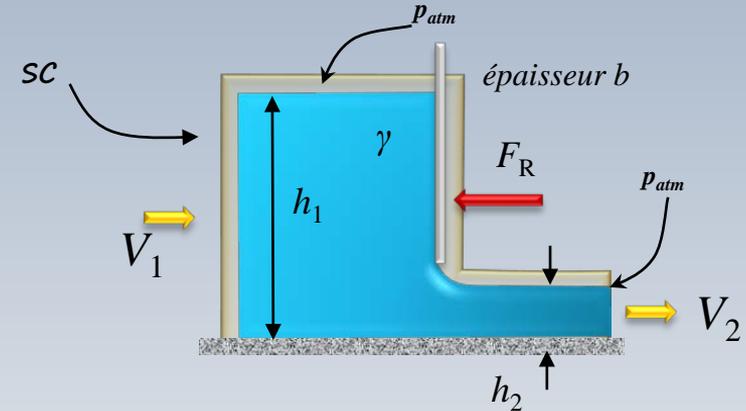
$$\sum F_x = \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{A}) = \rho V_2 (V_2 A_2) - \rho V_1 (V_1 A_1)$$

$$\bar{p}_1 A_1 - \bar{p}_2 A_2 - F_R = \rho V_2 (V_2 A_2) - \rho V_1 (V_1 A_1)$$

$$\bar{p}_1 A_1 - \bar{p}_2 A_2 - F_R = \rho V_2 Q - \rho V_1 Q$$

$$F_R = \bar{p}_1 A_1 - \bar{p}_2 A_2 + \rho V_1 Q - \rho V_2 Q$$

$$F_R = \bar{p}_1 A_1 - \bar{p}_2 A_2 + \rho Q (V_1 - V_2)$$

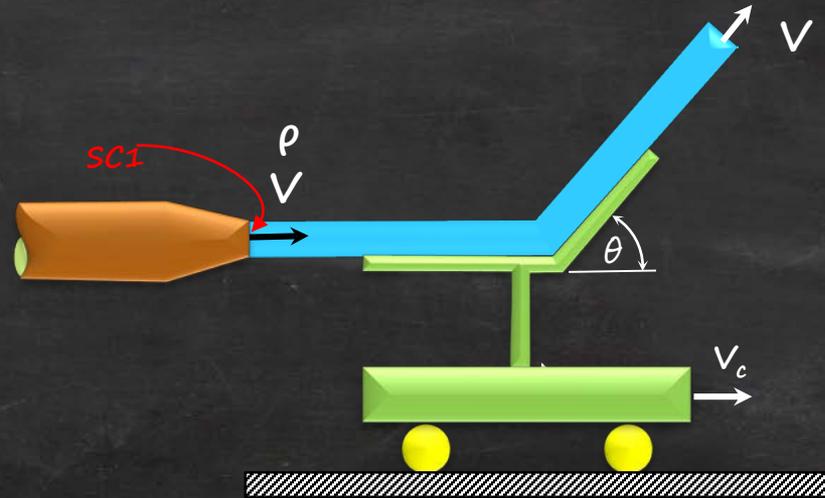


$$F_R = \left( \frac{\gamma h_1}{2} h_1 b - \frac{\gamma h_2}{2} h_2 b \right) + \rho Q (V_1 - V_2)$$

$$F_R = \frac{\gamma b}{2} (h_1^2 - h_2^2) + \rho Q (V_1 - V_2)$$

## Systeme de référence fixe

Tel qu'illustré sur la figure, un jet d'eau avec une masse volumique  $\rho$  et une vitesse  $V$  impacte un charriot. La section du jet est  $sc_1$  et la masse du charriot est  $m_c$ . À un instant donné, la vitesse du charriot est  $V_c$ . Trouvez une expression pour établir l'évolution de la vitesse du charriot en fonction du temps. Négligez toute sorte de frottement.



Ce problème est en régime non permanent. Il est légèrement avancé pour le cadre du cours

[Je clique pour le développ.](#)

Non merci!

# Chapitre 3 – Lois de conservation intégrale

3.01

3.02

3.03

3.04

3.07

3.01 Quelques lois de la mécanique des fluides

3.02 Le théorème de transport de Reynolds

3.03 Conservation de la masse

3.04 Conservation de la quantité de mouvement

3.07 Conservation de l'énergie



# Application du TTR à la Q.M.

3.02

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

	$B$	$b = dB/dm$
<b>Masse</b>	$m$	$1$
<b>Q. Mouvement</b>	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
<b>Énergie</b>	$E$	$e$

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{fluide} - \vec{u}_{Surface}$$

**Remarque:**  $b$  peut être une quantité scalaire (masse, énergie), ou vectoriel (quantité de mouvement)

# Application du TTR à l'énergie

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{syst}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

$$(\vec{u}_{rel} = \vec{u})$$

Pour l'énergie, on pose  $B = E = me$  et  $b = e = E/m$ . Ainsi, le *TTR* (correspondance entre un système ouvert et un système fermé), devient

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\text{syst}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho e (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

L'énergie  $e$ , par unité de masse, comprend de nombreuses sources, mais les plus importantes en génie mécanique sont:

$$e = e_{\text{int}} + e_{\text{cin}} + e_{\text{pot}} = \hat{u} + \frac{V^2}{2} + gz \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}: \text{ énergie interne} \\ gz: \text{ énergie potentielle} \\ V^2/2: \text{ énergie cinétique} \end{array} \right.$$

D'autre part, la première loi de la thermodynamique exprime la conservation de l'énergie **d'un système fermé** en considérant le *travail produit* et de la *chaleur fournie* sous la forme:

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{syst} = \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}$$

$\dot{Q}$  comprend les différents formes de chaleur (conduction, convection, etc.) et  $\dot{W}$  le travail à l'arbre (turbomachine) et celui des forces de pression et visqueuses (frottement). Notamment:

$$\dot{W} = \dot{W}_{arbre} + \dot{W}_{press} + \dot{W}_{visq}$$

Tel que dans la conservation de la quantité de mouvement, où les forces constituent de sources et de puits, **la puissance des forces  $\dot{W}$**  et la **puissance thermique  $\dot{Q}$**  représentent des **sources/puits** pour la variation de la grandeur énergie  $e$ .

Alors, le ***TTR*** conduit à l'expression suivante pour le bilan d'énergie sur un volume de contrôle fixe:

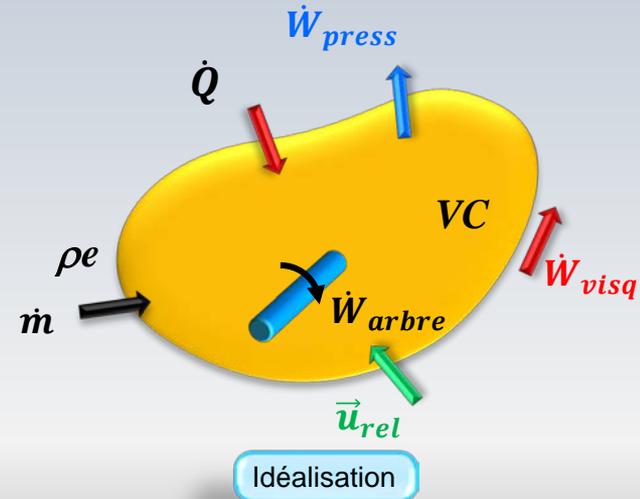
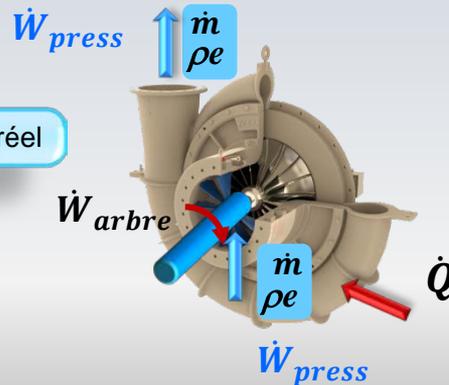
# Application du TTR à l'énergie

3.07 Énergie ...

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho e (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS = \dot{Q} - (\dot{W}_{arbre} + \dot{W}_{press} + \dot{W}_{visq})$$

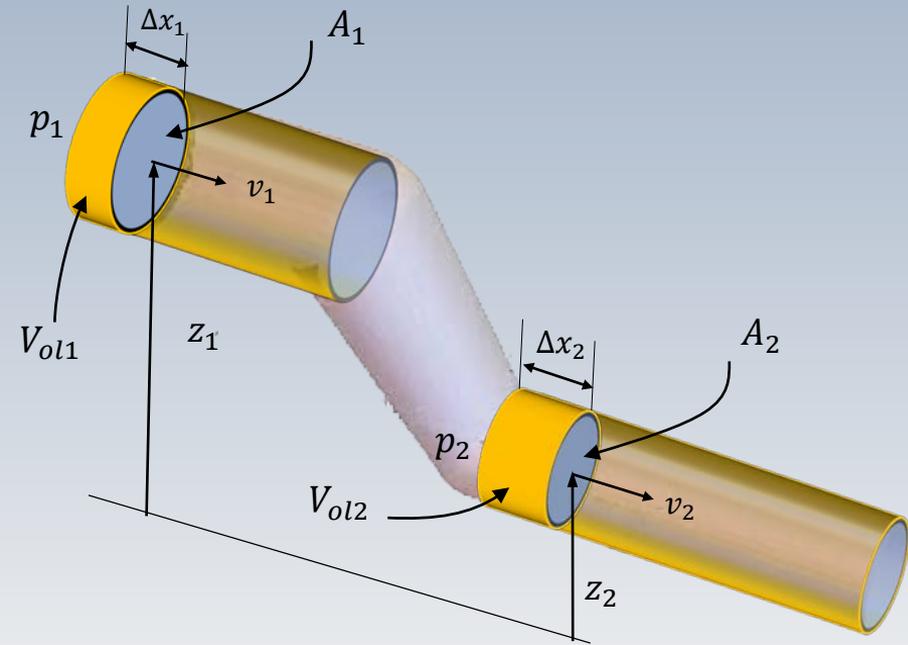
Cette forme générale est trop complexe pour le cadre de ce cours. Alors, on ne regardera que:

Compresseur: cas réel



- i. Des écoulements **stationnaires** et **incompressibles**
- ii. L'écoulement ne comporte qu'une seule entrée/sortie avec des propriétés uniformes
- iii. Aucun transfert de chaleur
- iv.  $e = V^2/2 + gz$  ( $p/\gamma$  est considéré dans  $W_{press}$ )

# Travail de pression : $p/\gamma$



Le travail de pression  $W_p$  correspond à celui fait par la force de pression  $F_p = p \times A$  pour déplacer “un bouchon” de fluide une distance  $\Delta x = v\Delta t$ . Alors,  
$$W_p = p \times A\Delta x = pV_{ol}$$

De cette manière, le travail spécifique, par unité de poids, devient:  $W_p/mg = p/\rho g = p/\gamma$

Avec ces simplifications le bilan d'énergie devient simple est pratique

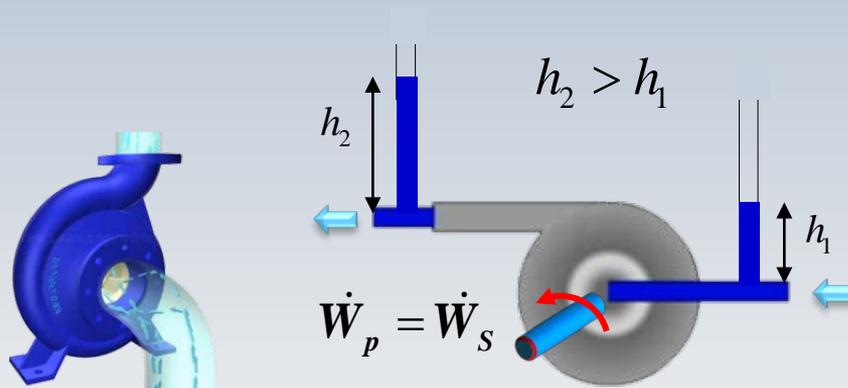
$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho e dV + \int_{SC} \rho e (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS = \dot{Q} - (\dot{W}_{arbre} + \dot{W}_{press} + \dot{W}_{visq})$$

Si l'on regarde des écoulements industriels dans un circuit hydraulique, **le travail à l'arbre** est typiquement dû à la présence **d'une pompe ou d'une turbine**

# Pompe: travail spécifique

3.05 Conservation de l'énergie

On utilisera  $h_{pompe} = \dot{W}_p / \dot{m}g$  pour noter **le travail spécifique fourni** (positif) par une pompe au fluide

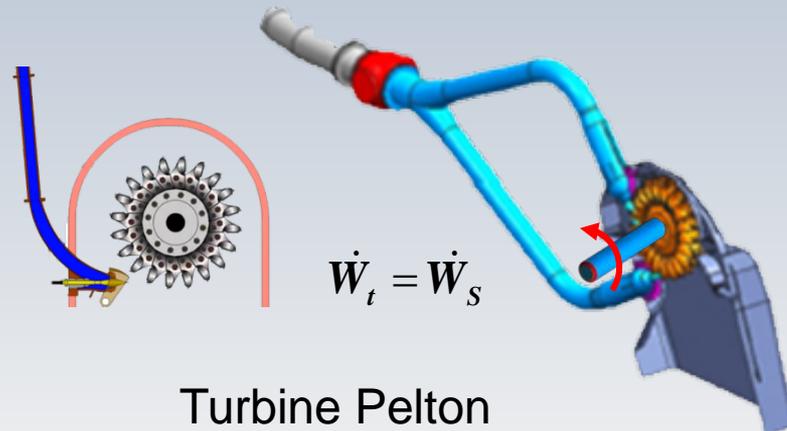


Pompe centrifuge

# Turbine: travail spécifique

3.05 Conservation de l'énergie

On utilisera  $h_{turb} = \dot{W}_t / \dot{m}g$  pour indiquer **le travail spécifique enlevé** (négatif) au fluide par une turbine



Le symbole  $h_{frott} = \dot{W}_{visq.}/\dot{m}g$  sera employé pour noter l'énergie nécessaire pour vaincre le cisaillement (**pertes**) dans un circuit hydraulique (conduites)

Pour l'instant, le frottement  $h_{frott}$  est regardé de manière globale (presque had oc) sans l'utilisation d'une formule explicite pour l'évaluer en fonction de la viscosité du fluide

# Formule simplifiée

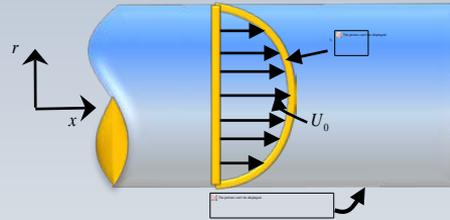
Alors, d'après les hypothèses et simplifications adoptées, l'expression pratique recherchée pour la conservation d'énergie (spécifique) par unité de poids par unité de temps ( $\dot{m}g$ ) est:

$$\left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{ent} + h_{pompe} - h_{turbine} - h_{frott.} = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{sort}$$

Entrée: travail de pression + énergie  
cinétique + énergie potentielle

Sortie: travail de pression + énergie  
cinétique + énergie potentielle

A cause de l'adhérence à la paroi, des effets visqueux et d'inertie, la vitesse n'est pas uniforme dans le sens transversal d'une conduite.



Tel que pour le bilan de quantité de mouvement, on introduit un **facteur de correction**  $\alpha$  sur l'énergie cinétique pour tenir compte de cet effet. En particulier:

$$\left( \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + z \right)_{ent} + h_{pompe} - h_{turbine} - h_{frott.} = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + z \right)_{sort}$$

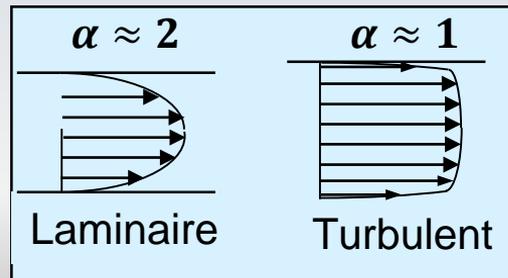
On note que toutes les quantités du bilan d'énergie sont homogènes à des hauteurs et s'appellent **des charges**.

**Remarque:** la puissance consommée par une pompe, ou produite par une turbine, est donnée par l'expression  $\dot{W} = \rho Q g H$ . Ainsi, le terme  $\dot{W} / \dot{m} g$  a les unités d'une longueur.

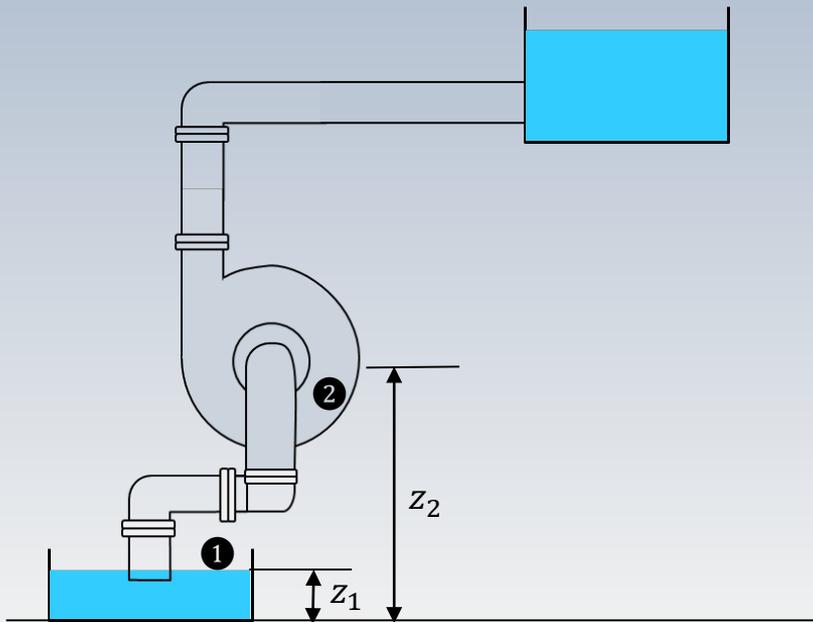
Le facteur de correction  $\alpha$  (cas incompressible) es défini par l'équation:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left( \frac{u}{V_{Moy}} \right)^3 dA$$

où  $V_{Moy}$  indique la vitesse moyenne de l'écoulement. D'après la forme des profils de vitesse, laminaire ou turbulent, on trouve approximativement:



# Exemple de $h_{f(1-2)}$



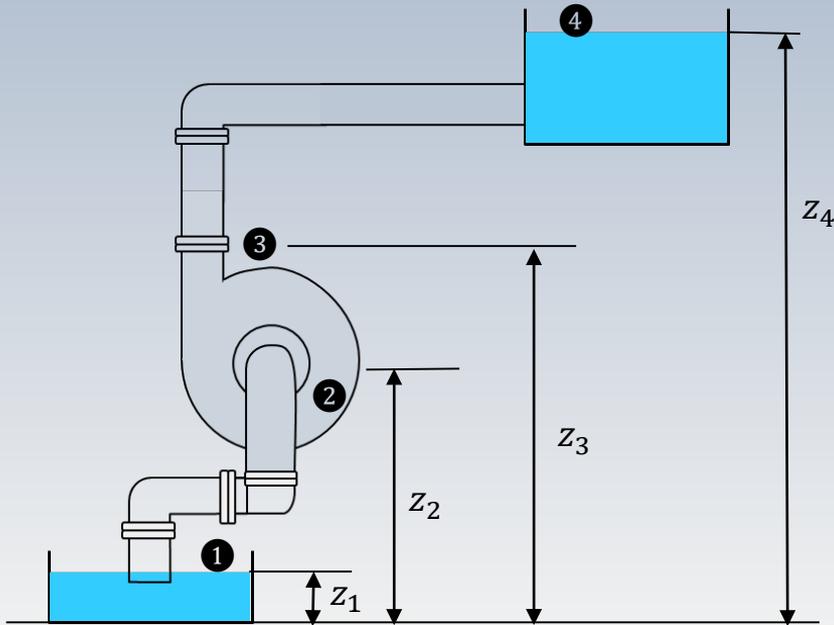
$$E_2 = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2$$

$$E_1 = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1$$

$$E_2 = E_1 - h_{f(1-2)}$$

$$h_{f(1-2)} = E_1 - E_2$$

# Exemple de $h_p$ et $h_{f(3-4)}$



$$E_3 = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_3$$

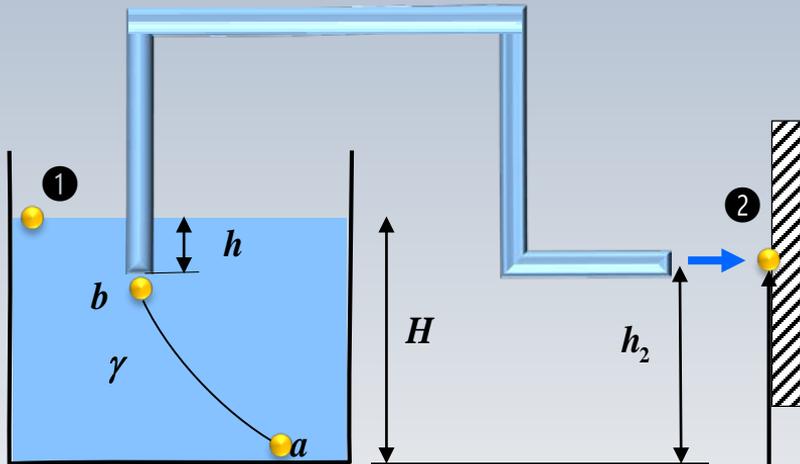
$$E_2 = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2$$

$$h_p = E_3 - E_2$$

$$E_4 = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_4$$

$$h_{f(3-4)} = E_3 - E_4$$

# Problème



Pression d'arrêt ou dynamique?

$$p_a = \gamma H + p_1 \quad \text{manométrique}$$

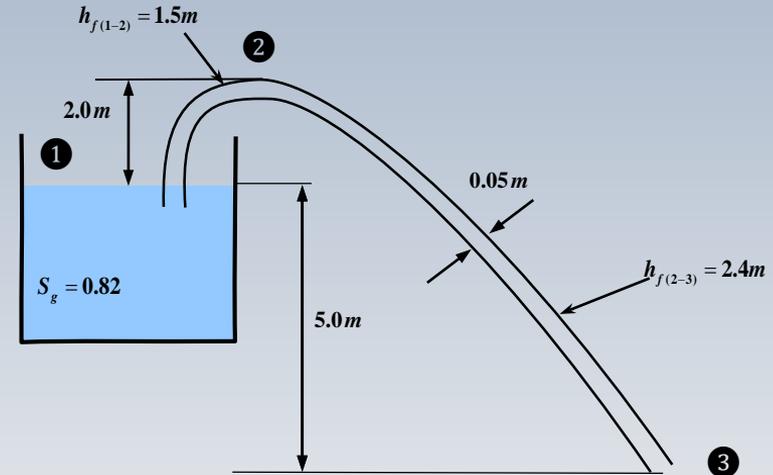
$$\frac{p_a}{\gamma} + \frac{V_a^2}{2g} + z_a = \frac{p_b}{\gamma} + \frac{V_b^2}{2g} + z_b$$

$$\frac{p_b}{\gamma} + \frac{V_b^2}{2g} + z_b = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

# Problème

Un siphon de  $0.05\text{m}$  de diamètre est utilisé pour verser de l'huile ( $S_g=0.82$ ). Les pertes par frottement entre les points 1 et 2 et 2 et 3 sont, respectivement, de  $1.5\text{m}$  et de  $2.4\text{m}$ . Déterminer le débit  $Q$  circulant par le siphon et la pression au point 2. On considère  $\alpha=1$



**Remarque:** On s'intéresse au point 2 puisqu'on veut éviter que la pression tombe en dessous de la pression de saturation ( $p_2 > p_s$ )

# Problème

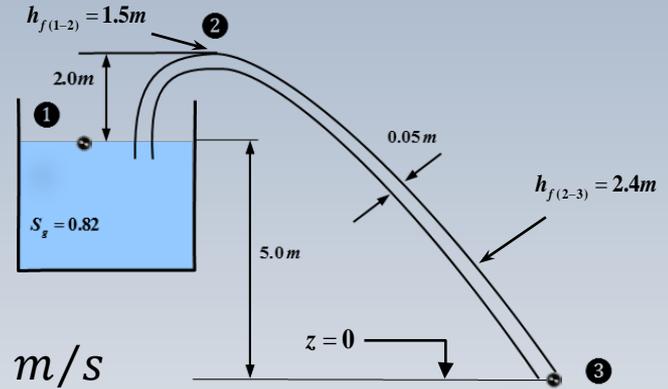
$$\left( \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + z \right)_1 - h_{frott.} = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + z \right)_3$$

$$(0 + 0 + 5) - (1.5 + 2.4) = \left( 0 + \frac{V_3^2}{2g} + 0 \right)$$

$$V_3 = 4.65 \text{ m/s}$$

$$Q = VA = V_3 \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) = 4.65 \left( \frac{\pi \times 0.05^2}{4} \right) = 0.0091 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\left( \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + z \right)_1 - h_{frott.} = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha V^2}{2g} + z \right)_2$$

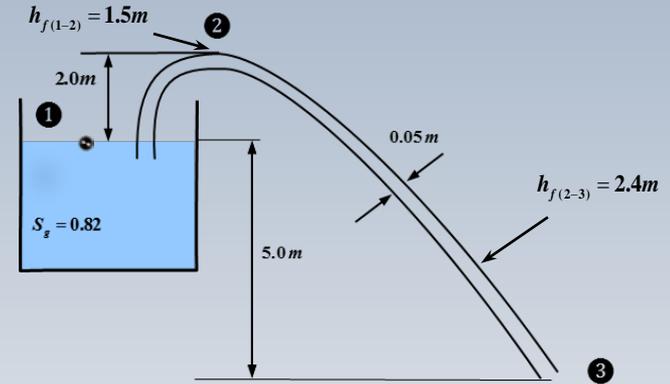


# Problème

$$(0 + 0 + 5) - 1.5 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + 7$$

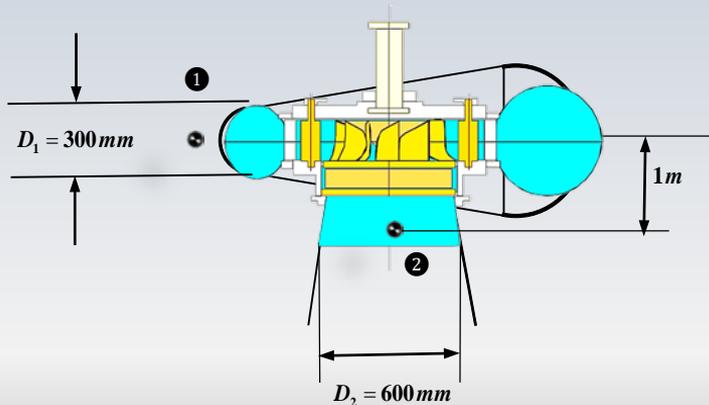
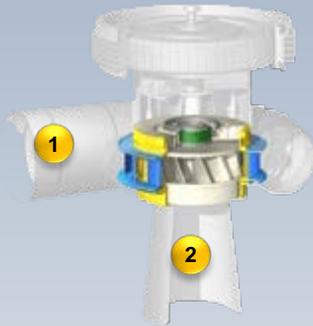
$\Rightarrow \frac{p_2}{\gamma} = -4.6m$

$$V_2 = V_3 = 4.65 \text{ m/s}$$

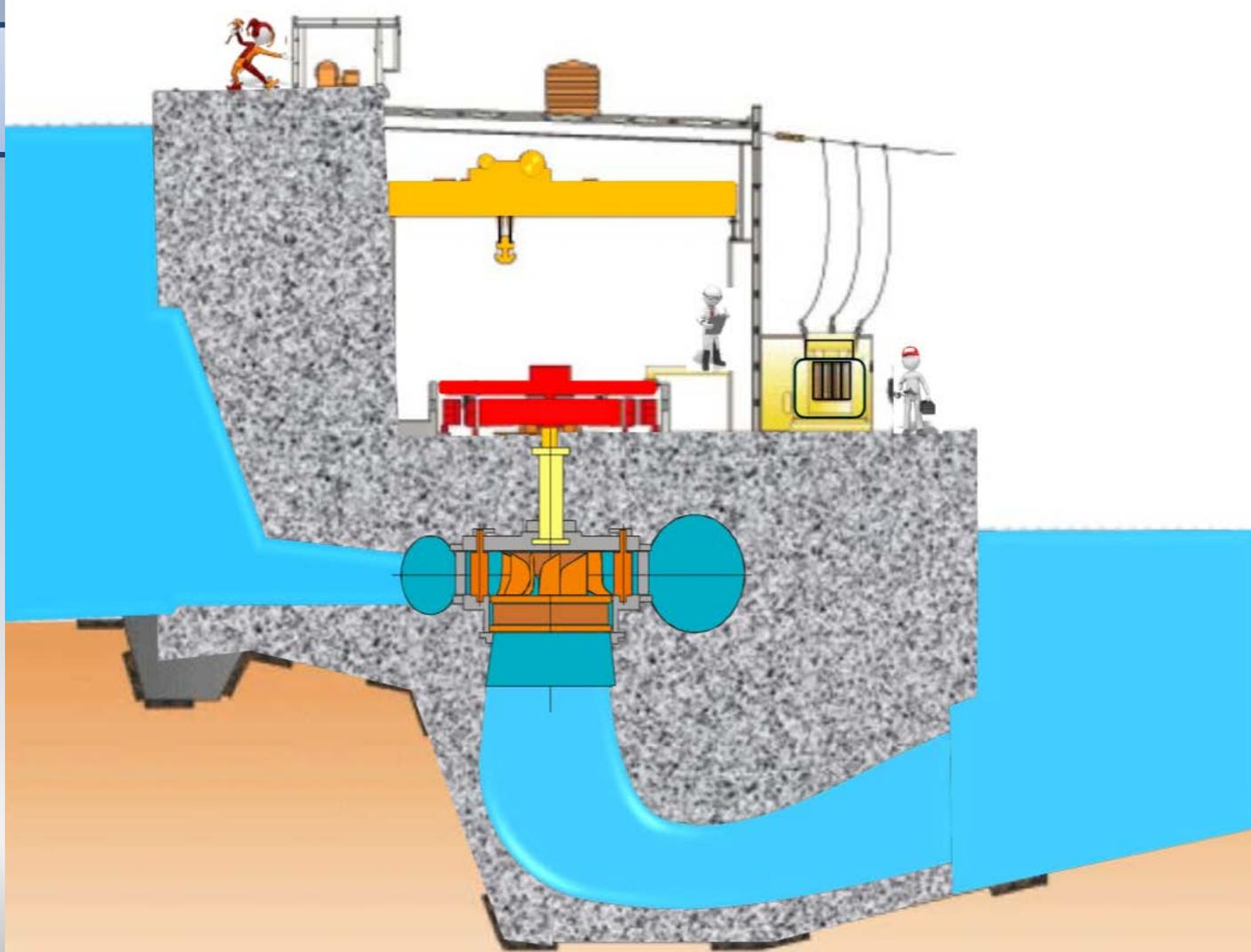


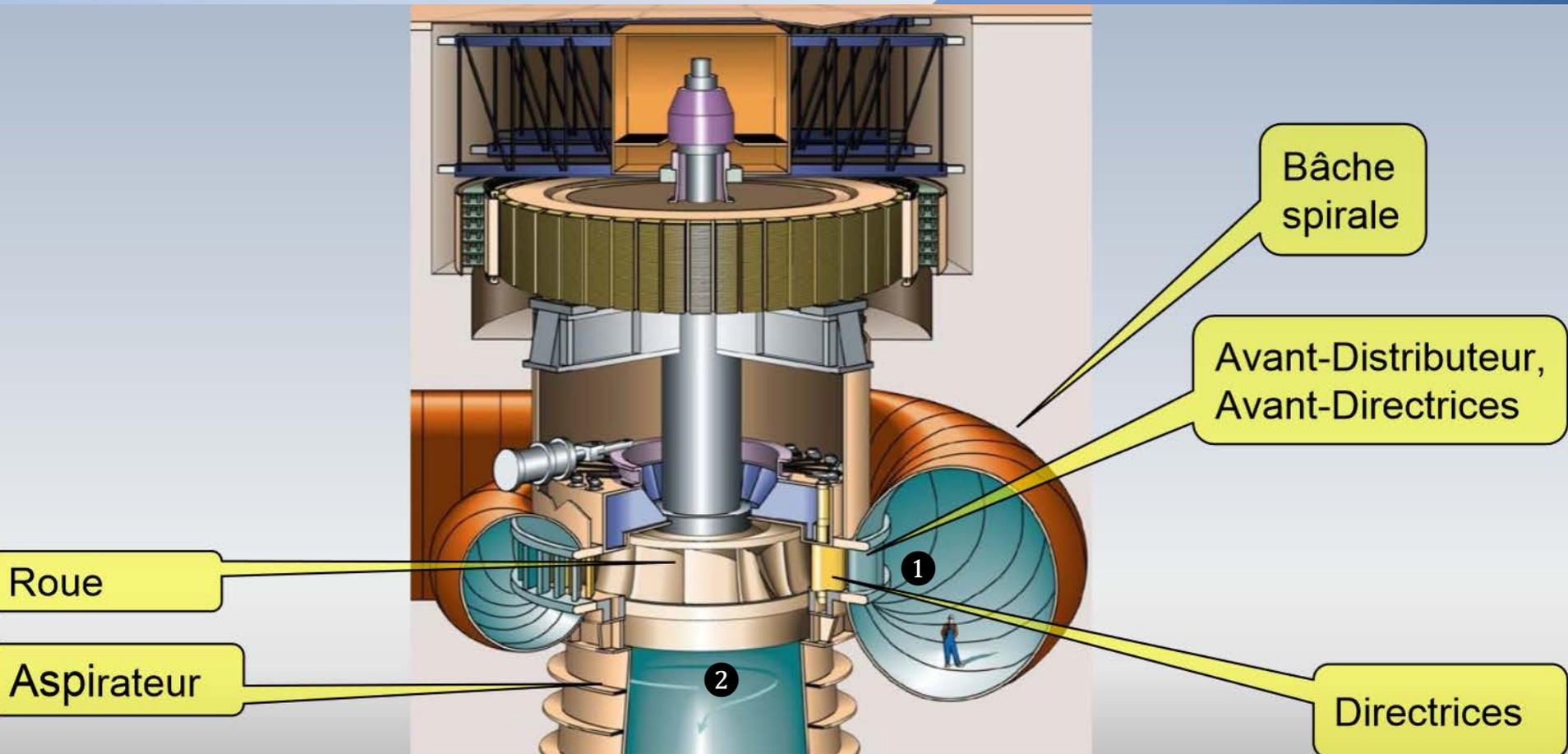
$$p_2 = -4.6m \times 9.800 \frac{kN}{m^3} \times 0.82 = -36.9 kPa$$

# Problème



Le débit circulant par une turbine hydraulique à réaction est de  $Q = 0.215 \text{ m}^3/\text{s}$ . La distance verticale qui sépare l'entrée 1 et la sortie de 2 de la turbine est  $h = 1 \text{ m}$ . Les pressions aux points 1 et 2 sont, respectivement,  $p_1 = 147.5 \text{ kPa}$  et  $p_2 = -34.5 \text{ kPa}$ . On doit déterminer la **puissance** transmise par l'eau à la turbine





$$Q=0.215\text{m}^3/\text{s}, p_1=147.5\text{ kPa}, p_2=-34.5\text{ kPa}$$

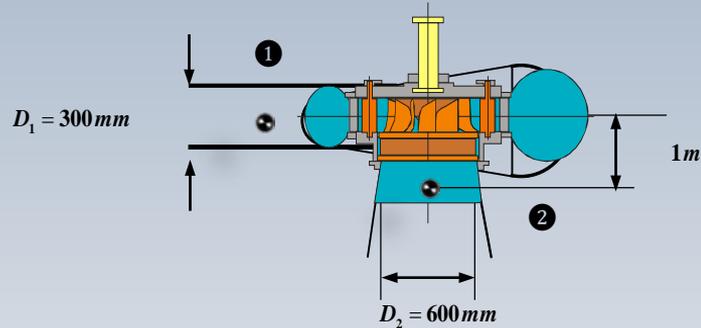
$$\left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_1 - h_{turb.} = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_2$$

$$Q = V_1 A_1$$



$$V_2 = \frac{V_1}{4} = 0.758$$

$$A_2 = 4A_1$$



$$\left( \frac{147.5}{9.8} + \frac{3.03^2}{2 \times 9.8} + 1.00 \right)_1 - h_{turb.} = \left( \frac{-34.5}{9.8} + \frac{0.758^2}{2 \times 9.8} + 0 \right)_2$$



$$h_{turb.} = 20\text{m}$$

$$\dot{W}_{turb.} = \gamma Q h_{turb.} = 9.8(\text{kN}/\text{m}^3) \times 0.215 \text{ m}^3/\text{s} \times 20.0\text{m} = 41.9\text{kW}$$

# Turbine (suite)

La turbine fonctionne maintenant sur un autre point d'opération. La puissance enregistrée est  $\dot{W} = 48.8 \text{ kW}$  et les pressions aux points 1 et 2 sont,  $p_1 = 141.3 \text{ kPa}$  et  $p_2 = -33.1 \text{ kPa}$ . Sous ces conditions, quel est le débit volumique  $Q$  ?

$$\left( \frac{141.3}{9.8} + \frac{V_1^2}{2g} + 1.00 \right)_1 - h_{\text{turb.}} = \left( -\frac{33.1}{9.8} + \frac{(V_1/4)^2}{2g} + 0 \right)_2$$

$$Q = V_1 A_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times Q}{\pi \times 0.3^2} \quad \Rightarrow \quad Q = 0.0706 V_1$$

$$\dot{W}_{\text{turb.}} = \gamma Q h_{\text{turb.}} = 9.8 \times Q \times h_{\text{turb.}} = 48.8 \text{ kW} \quad \Rightarrow \quad h_{\text{turb.}} = 70.5 / V_1 \quad \Rightarrow$$

$$\left( \frac{141.3}{9.8} + \frac{V_1^2}{2g} + 1.00 \right)_1 - \frac{70.5}{V_1} = \left( -\frac{33.1}{9.8} + \frac{(V_1/4)^2}{2g} + 0 \right)_2$$

$$18.1 \times V_1 + 0.0478 V_1^3 = 70.5$$

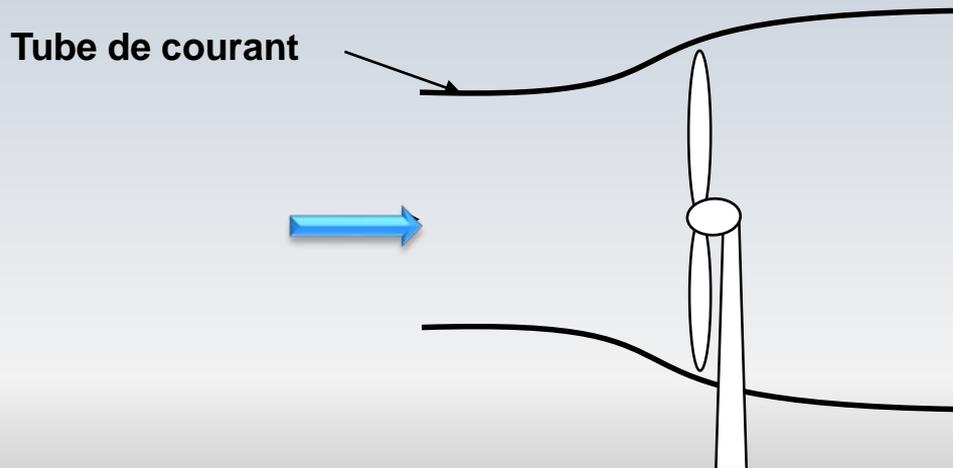


$$V_1 = 3.63 \text{ m/s}$$

$$Q = V_1 A_1 = 0.257 \text{ m}^3/\text{s}$$

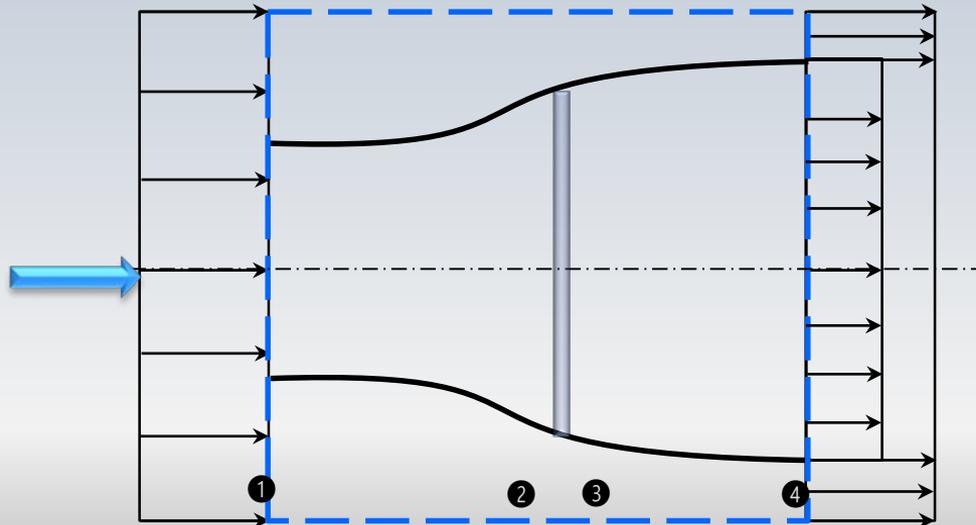
# Éolienne

La figure illustre une éolienne entourée par un tube de courant pour fins d'analyse. L'idée c'est de **trouver quel pourcentage de la puissance du vent peut être récupérée par l'éolienne dans le cas idéal, sans pertes, 100%?**



# Éolienne

La méthode utilise la théorie du disque actuateur (Rayleigh+Froude). Celle-ci introduit un disque perméable à la place de l'éolienne et par la suite on effectue des bilans utilisant le volume de contrôle montré sur la figure



On comparera la puissance enlevée au fluide avec celle fournie à l'éolienne

# Éolienne

Conservation de la masse ( $\rho \approx \text{cnste}$ )

$$Q = V_1 A_1 \Rightarrow \boxed{V_2 A_2 = V_3 A_3} = V_4 A_4 \quad \longrightarrow \quad V_2 = V_3 \quad (A_2 = A_3)$$

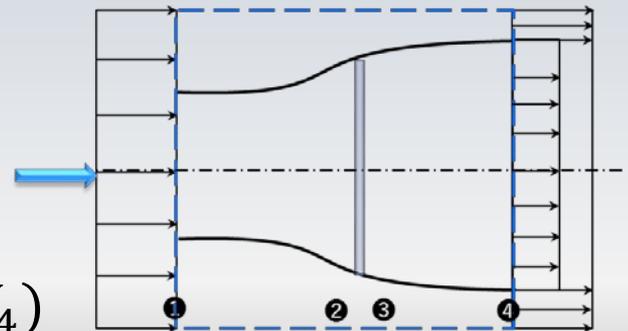
Quantité de mouvement

$$\dot{m} = \rho Q$$

$$F = \rho Q (V_1 - V_4) \quad F: \text{force sur l'éolienne}$$

Puissance fournie à l'éolienne

$$\dot{W}_e = F V_2 = \rho Q (V_1 - V_4) V_2 = \rho A_2 \overset{?}{V_2^2} (V_1 - V_4)$$



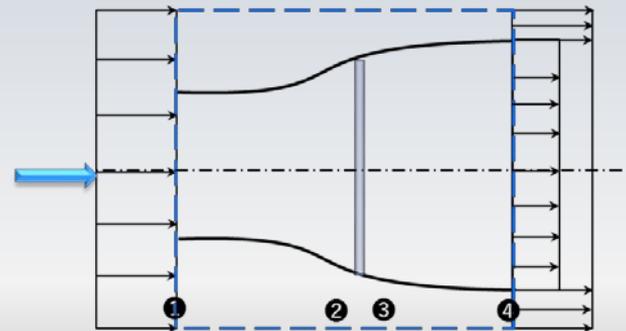
Puissance enlevée au fluide

$$\dot{W}_f = \rho Q \left( \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \frac{V_4^2}{2} - \frac{p_4}{\rho} \right) \Rightarrow \dot{W}_f = \rho Q \left( \frac{V_1^2}{2} - \frac{V_4^2}{2} \right) \quad (p_1 = p_4)$$

$$\dot{W}_f = \dot{W}_e$$

$$\rho V_2 A_2 \left( \frac{V_1^2}{2} - \frac{V_4^2}{2} \right) = \rho A_2 V_2^2 (V_1 - V_4)$$

$$V_2 = \frac{(V_1 + V_4)}{2}$$



Puissance récupérable par l'éolienne

$$\dot{W} = FV_2 = \rho QV_2(V_1 - V_4) = \frac{1}{4}\rho A_2(V_1 + V_4)^2(V_1 - V_4)$$

$$\frac{d\dot{W}}{dV_4} = 0 \quad \xrightarrow{\text{MAX}} \quad V_1 = 3V_4$$

$$\dot{W}_{max} = \frac{8}{27}\rho A_2 V_1^3$$

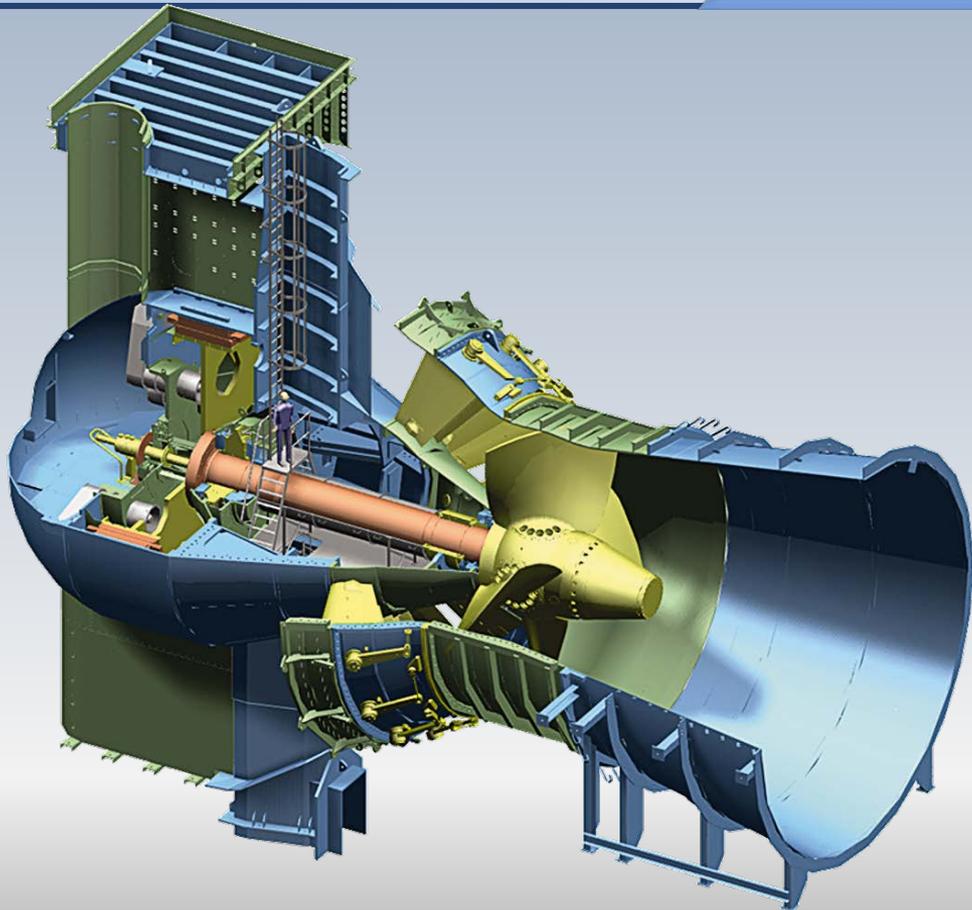
$$\dot{W}_{disp} = 1/2 \overset{\dot{m}}{(\rho A_2 V_1)} V_1^2$$

$$\dot{W}_{max} = \frac{16}{27} \left[ \frac{1}{2} \rho A_2 V_1^3 \right]$$

**Puissance disponible**

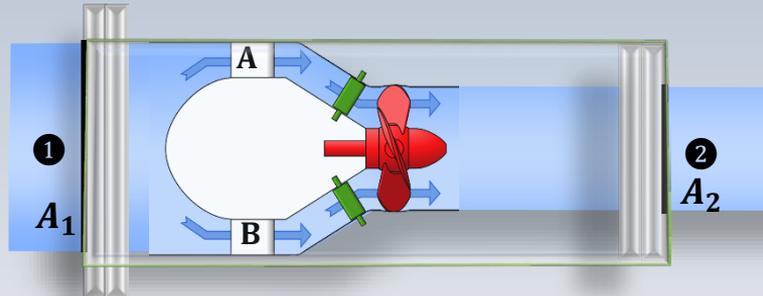
La formule indique que la puissance maximale utile ne pourra jamais dépasser  $16/27$  (59.26%) de la puissance disponible due au vent. Ce résultat est connue comme la **limite de Betz**.

# Turbine Bulbe



# Turbine Bulbe

La figure représente une turbine hydraulique de type axial (bulbe). On vous demande de trouver **la force de réaction** totale aux brides *A* et *B*.



Données: La puissance produite par la turbine  $\dot{W}_s$ , le débit volumique  $Q$ , la masse volumique  $\rho$ , l'aire aux sections d'entrée et de sortie  $A_1$  et de sortie  $A_2$ , la pression  $p_1$  à la section 1. L'écoulement est considéré isothermique.

# Turbine Bulbe

$$\sum F_x = \dot{m}(v_2 - v_1)$$

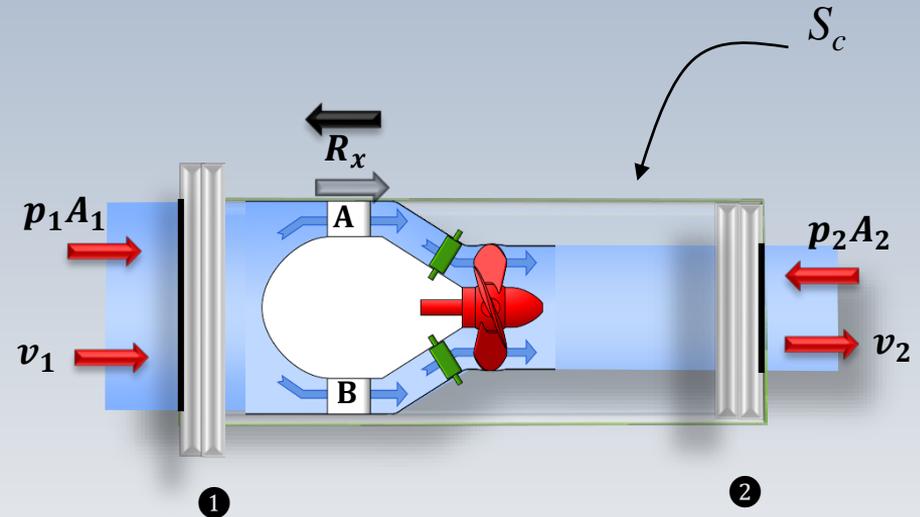
$$\dot{m} = \rho Q$$

$$\sum F_x = R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2$$

$$R_x = p_2 A_2 - p_1 A_1 + \rho Q(v_2 - v_1)$$

$$\left( \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z \right)_1 - h_{turbine} = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z \right)_2$$

Données:  $W_s, Q, \rho, A_1, A_2, p_1$



# Turbine Bulbe

$$\left(\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right)_1 - h_{trb} = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right)_2$$

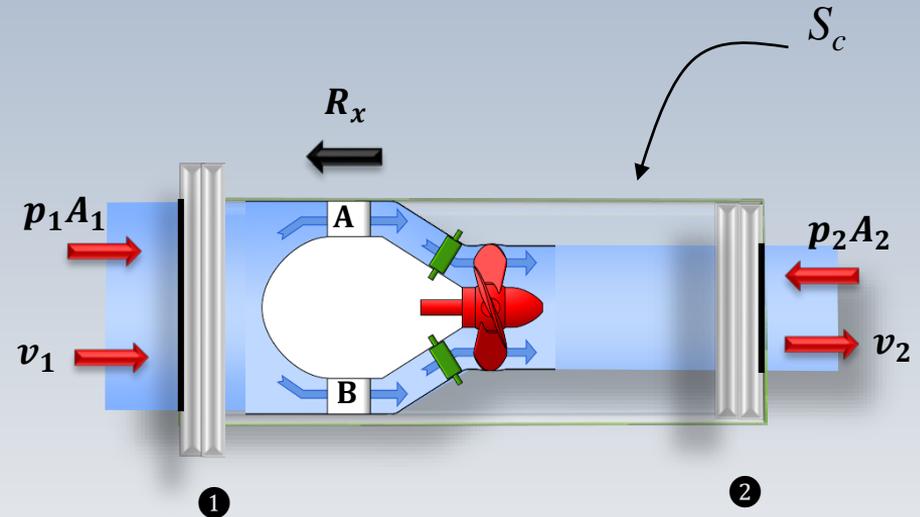
$$-\dot{W}_{trb} = \dot{m} \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) + \dot{m} \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right)$$

$$\dot{m} = \rho Q$$

$$-\dot{W}_{trb} = \rho Q \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) + Q(p_2 - p_1)$$

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Données:  $W_s, Q, \rho, A_1, A_2, p_1$



# Turbine Bulbe

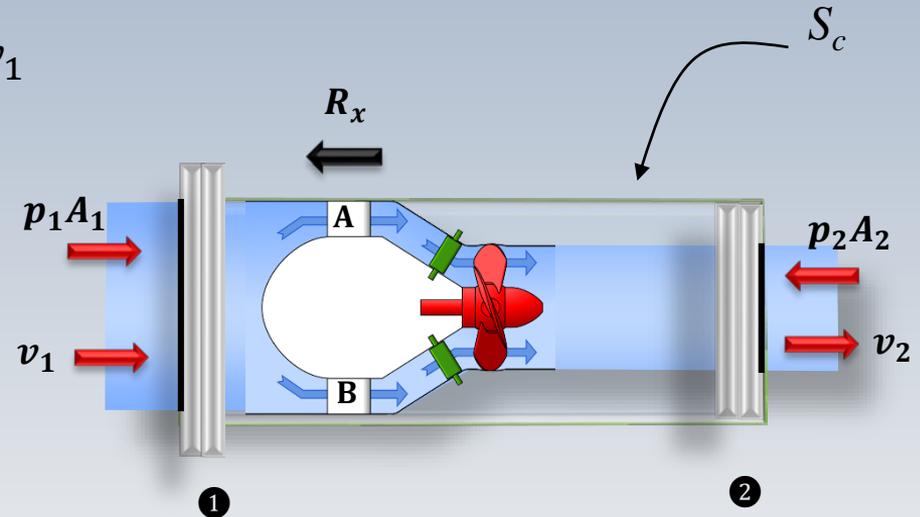
$$-\dot{W}_{trb} = \rho Q \left( \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) + p_2 A_2 v_2 - p_1 A_1 v_1$$

$$p_2 A_2 = \frac{\left( p_1 A_1 v_1 - \dot{W}_S - \rho Q \left( \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) \right)}{v_2}$$

$$R_x = p_2 A_2 - p_1 A_1 + \rho Q (v_2 - v_1)$$

$$R_x = \frac{p_1 A_1 v_1 - \dot{W}_S - \rho Q \left( \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right)}{v_2} - p_1 A_1 + \rho Q (v_2 - v_1)$$

Données:  $W_s, Q, \rho, A_1, A_2, p_1$



# Le chapitre en 8 transparents

Le **Théorème de transport de Reynolds, TTR**, fournit un mécanisme pour traduire les équations de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie), décrites dans un repère **lagrangien** (*volume matériel*) vers une forme **eulérienne**, qui les exprime utilisant un *volume de contrôle*, souvent fixe.

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{sys} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

**Remarque:**  $dB/dt$  équivaut à  $DB/Dt$

# Les équations

Les équations de **conservation pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie** sont obtenues en utilisant les variables présentées dans le tableau ci-dessous

	$B$	$b = B/m$
Masse	$m$	$1$
Q. Mouv.	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
Énergie	$E$	$e$

# Simplifications

## i. Régime permanent

$$\frac{dB}{dt} \Big|_{sys} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

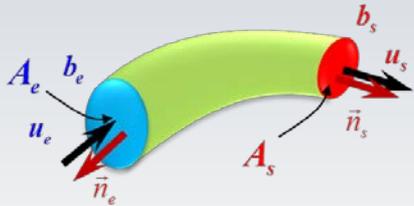
ii. Si le **volume de contrôle est fixe** ( $\vec{u}_S=0, \vec{u}_{rel} = \vec{u}$ : la vitesse de l'écoulement) alors, en régime permanent,

$$\frac{dB}{dt} \Big|_{sys} = \int_{SC} \rho b (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

# Simplifications

- iii. Pour le cas fréquent constitué d'une **entrée/sortie** (une conduite) avec des **propriétés uniformes** en ces points

$$\int_{SC} \rho b(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad \Rightarrow \quad \int_{S_{sortie}} \rho b(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS - \int_{S_{entrée}} \rho b(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$



$$\Rightarrow [b(\rho u A)]_{sortie} - [b(\rho u A)]_{entrée}$$

# La masse

Pour la loi de conservation de la masse  $dB/dt|_{syst} = 0$ ,  
 $B = m$  et  $b = B/m = 1$ , alors

$$\cancel{\frac{dB}{dt}}|_{syst} = [b(\rho u A)]_{sortie} - [b(\rho u A)]_{entrée}$$

$$(\rho u A)_{sortie} - (\rho u A)_{entrée} = 0$$



$$\dot{m} = \rho u A = cnste$$

Lorsque  $\rho = cnste$



$$Q = u A = cnste$$

# La quantité de mouvement

Pour la conservation de la quantité de mouvement

$d\mathbf{B}/dt|_{syst} = \sum \vec{\mathbf{F}}$ ,  $\mathbf{B} = m\vec{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/m = \vec{\mathbf{u}}$ , ainsi

$$\left. \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right|_{syst} = [b(\rho u A)]_{sortie} - [b(\rho u A)]_{entrée} \Rightarrow$$

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = [\vec{\mathbf{u}}(\rho u A)]_{sortie} - [\vec{\mathbf{u}}(\rho u A)]_{entrée} \Rightarrow$$

$$(\dot{m} = \rho u A = cnste)$$

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \dot{m} [\vec{\mathbf{u}}_{sortie} - \vec{\mathbf{u}}_{entrée}]$$

Pour la conservation de l'énergie (cas simplifié:  $Q = 0$ )

$$dB/dt|_{syst} = -\dot{W}, \quad B = E \text{ et } b = B/m = e.$$

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{syst} = [b(\rho u A)]_{sortie} - [b(\rho u A)]_{entrée} \Rightarrow$$

$$-\dot{W} = [e(\rho u A)]_{sortie} - [e(\rho u A)]_{entrée} \Rightarrow -W = -\dot{W}/\dot{m} = [e_{sortie} - e_{entrée}]$$

$$\left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{ent} + h_{pompe} - h_{turbine} - h_{frott.} = \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + z \right)_{sort}$$

$$W = W_S (+h_{pompe} \text{ et/ou } - h_{turbine}) + W_p (= p/\gamma) + W_{frott} (h_{frott}) \quad e = V^2/2 + gz$$

# Annexes

À Venir:



Hors

Programme!

# Xtra:Voie numérique

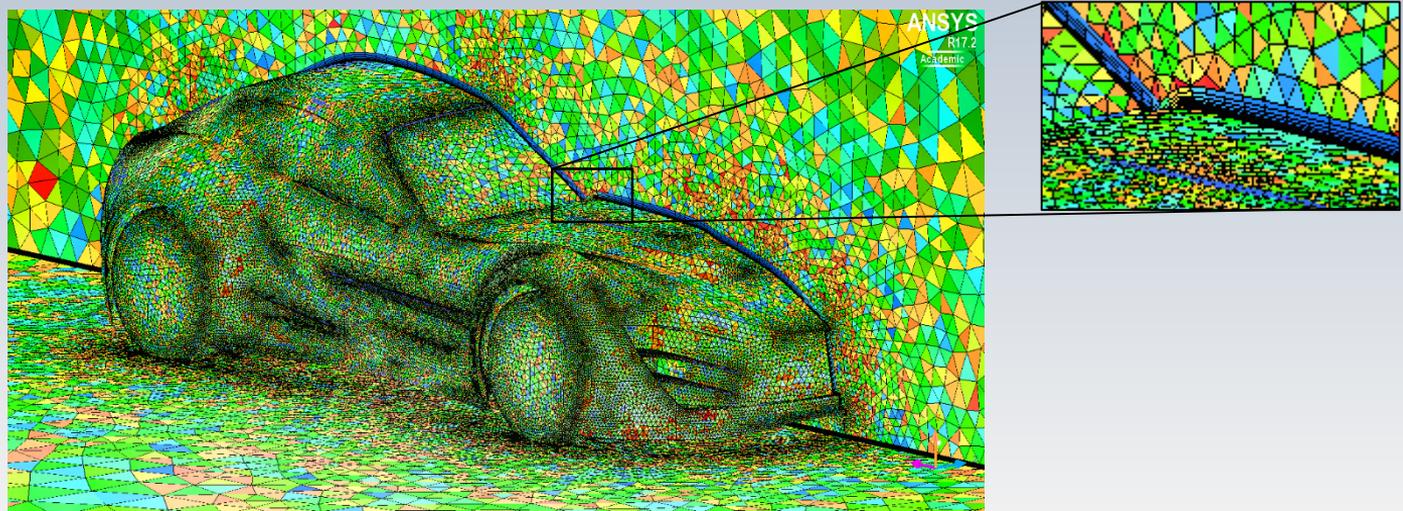
Des nos jours, des logiciels tels que *Fluent* et *OpenFoam*, sont employés en génie pour résoudre une grande variété de problèmes en mécanique de fluides.

Pour réaliser les calculs, ces outils utilisent **la méthode des volumes finis** qui s'appuie sur **la formulation intégrale (eulérienne) des équations de conservation: masse, quantité de mouvement, énergie,** vues dans cette section (mais incluant les effets visqueux).

Voici l'essence de cette méthode dans sa forme la plus simple:

# Xtra:Voie numérique

- On définit le domaine de calcul (objets + fluide)
- On divise le domaine fluide en N volumes, petits, mais finis

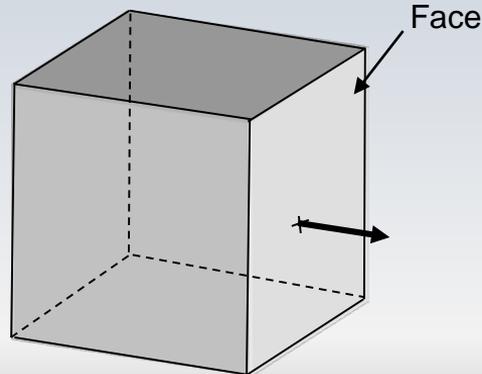


Domaine divisé en tétraèdres et hexaèdres\*

\* Les hexaèdres sont distribués autour du corps

# Xtra:Voie numérique

- Les volumes élémentaires peuvent être quelconques. En pratique on utilise des polyèdres simples: tétraèdres, hexaèdres, pyramides, etc.
- Chaque volume de contrôle est donc limité par **un nombre fini de faces**

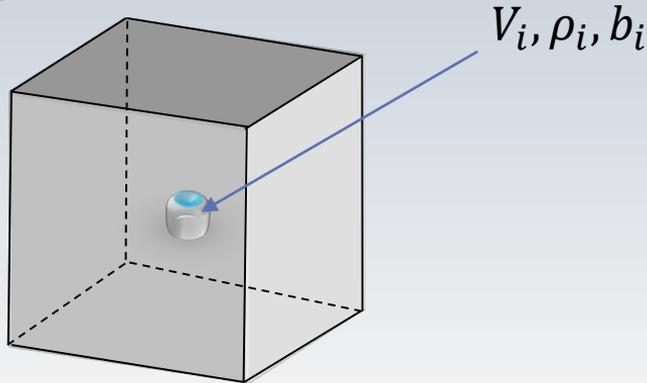


Volume hexaédrique (6 faces)

# Xtra: Voie numérique

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

- On applique les équations (intégrales) de conservation sur chaque volume de contrôle. **Comment fait-on pour intégrer?**
- On suppose que  $\rho$  et la quantité  $b$  **sont uniformes** dans chaque volume fini  $V_i$ , alors:



	$B$	$b = dB/dm$
Masse	$m$	1
Q. Mouv.	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
Énergie	$E$	$e$

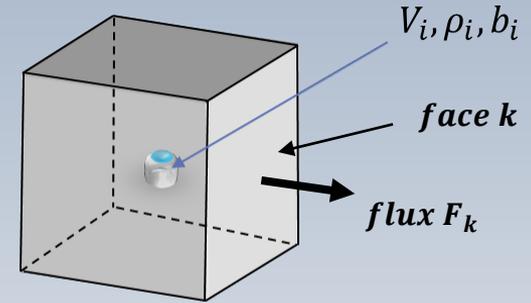
\*  $i$  dénote l'indice du volume  $V_i$  ayant des propriétés uniformes  $\rho_i, b_i$

# Xtra: Voie numérique

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

l'intégrale

$$\text{Int} = \int_{VC} \rho b dV$$



est ainsi approximé par  $\text{Int} \approx \rho_i b_i V_i = V_i \mathbf{I}_i$

- le flux  $\int_{SC} \rho b (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$  ( $\rho$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\vec{u}$ ) est considéré uniforme sur chacune des faces du volume de contrôle, alors

$$\int_{SC} \rho b (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad \longrightarrow \quad \sum_k (\rho b u_n \Delta S)_k \quad \longrightarrow \quad \sum_k F_k = \mathbf{F}_R$$

\* k dénote l'indice des faces,  $\mathbf{u}_n$  la vitesse normale à la face  $\mathbf{k}$  de taille  $\Delta S$

# Xtra: Voie numérique

De cette façon, l'équation à résoudre sur chaque volume (fixe)

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{\text{rel}} \cdot \vec{n}) dS$$

	$B$	$b = dB/dm$
Masse	$m$	1
Q. Mouv.	$m\vec{u}$	$\vec{u}$
Énergie	$E$	$e$

devient

$$\frac{dB}{dt} = V_i \frac{dI_i}{dt} + F_R$$

# Xtra: Voie numérique

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{\text{rel}} \cdot \vec{n}) dS$$

Pour chaque équation, le terme  $\frac{dB}{dt}$  est associé à une source (puits) volumique. Sa forme analytique est :

$$\frac{dB}{dt} = \int_{VC} S_b dV$$

Lorsque  $S_b$  est supposée uniforme dans le volume  $V_i$ , on trouve

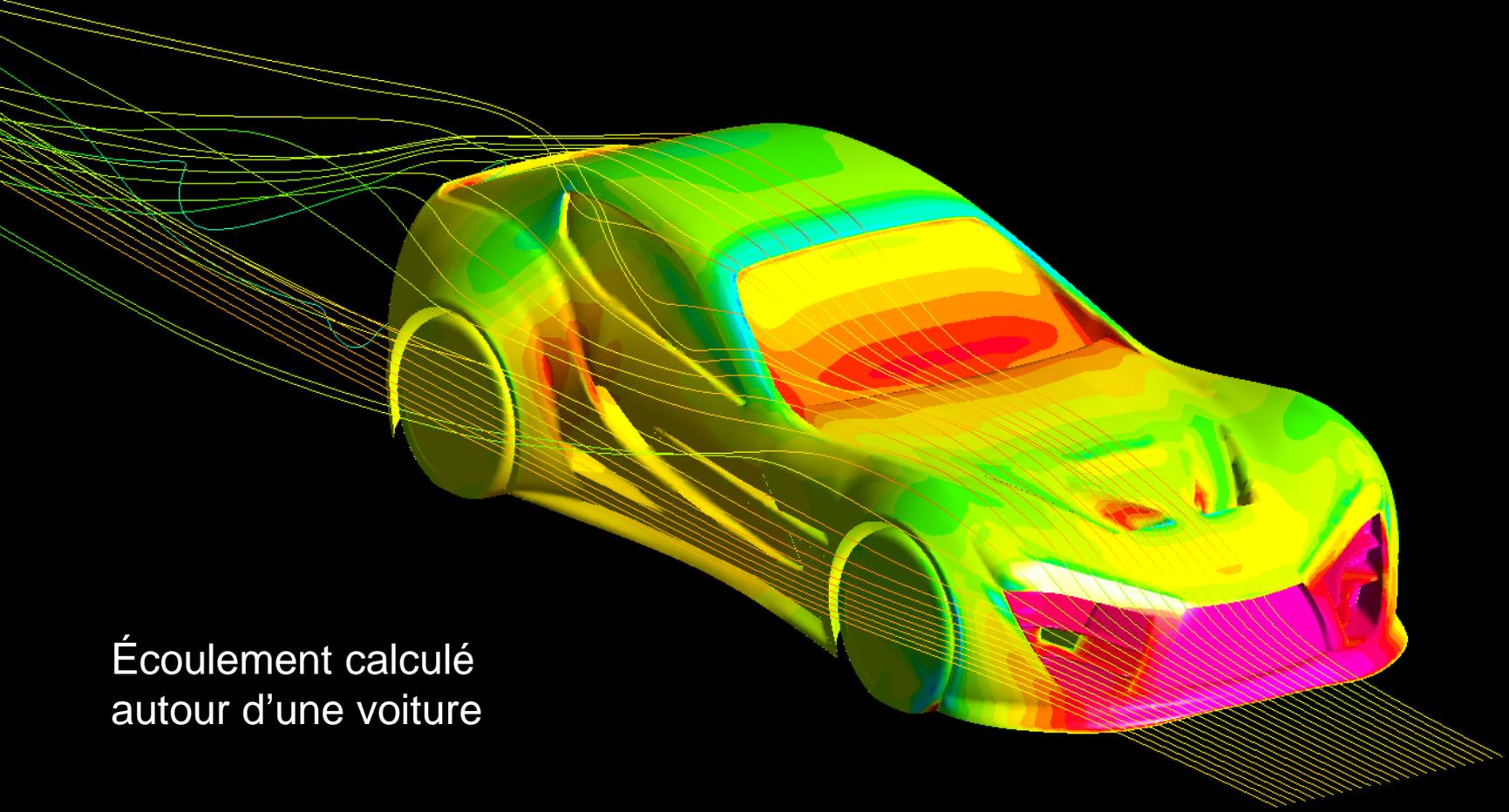
$$\frac{dB}{dt} \approx (S_b)_i V_i$$

# Xtra:Voie numérique

**Le terme source**  $S_b$  dépend du type d'équation. Il est couramment défini comme tout terme qui est en dehors des phénomènes de convection et de diffusion.

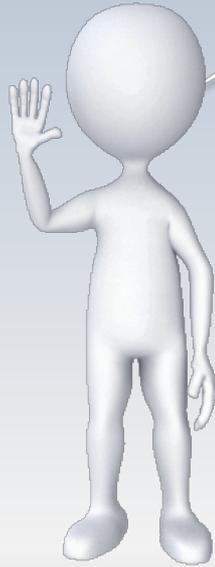
Pour la conservation de la masse ce terme est nul. Pour la quantité de mouvement, une fois la diffusion de celle-ci prise en compte, il peut être associé au gradient de pression

Finalement, pour obtenir la solution du champ de l'écoulement, on applique des conditions aux frontières et on exécute à répétition "le bouclier virtuel"  $\frac{dB}{dt} = V_i \frac{dI_i}{dt} + F_R$ , pour chaque équation et pour chaque volume de contrôle.



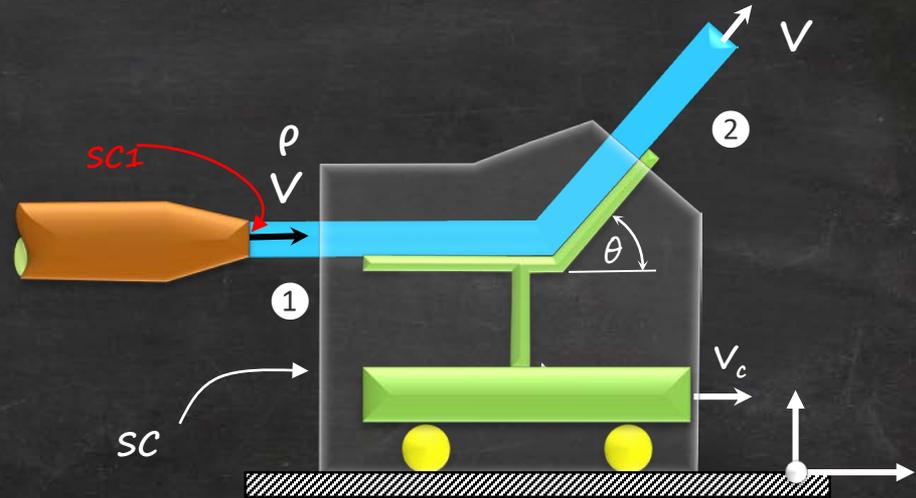
Écoulement calculé  
autour d'une voiture

À bientôt



Tel qu'illustré sur la figure, un jet d'eau avec une masse volumique  $\rho$  et une vitesse  $V$  impacte un charriot. La section du jet est  $sc_1$  et la masse du charriot est  $m_c$ . À un instant donné, la vitesse du charriot est  $V_c$ . Trouvez une expression pour établir l'évolution de la vitesse du charriot en fonction du temps. Négligez toute sorte de frottement.

VC type A



Système de référence au sol

Type A: le VC est rigide et solidaire avec le charriot

# Jet sur un charriot

Le  $V_c$  est fixe!

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA = 0$$

$$\int_{sc} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA = \int_{sc1} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA + \int_{sc2} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA$$

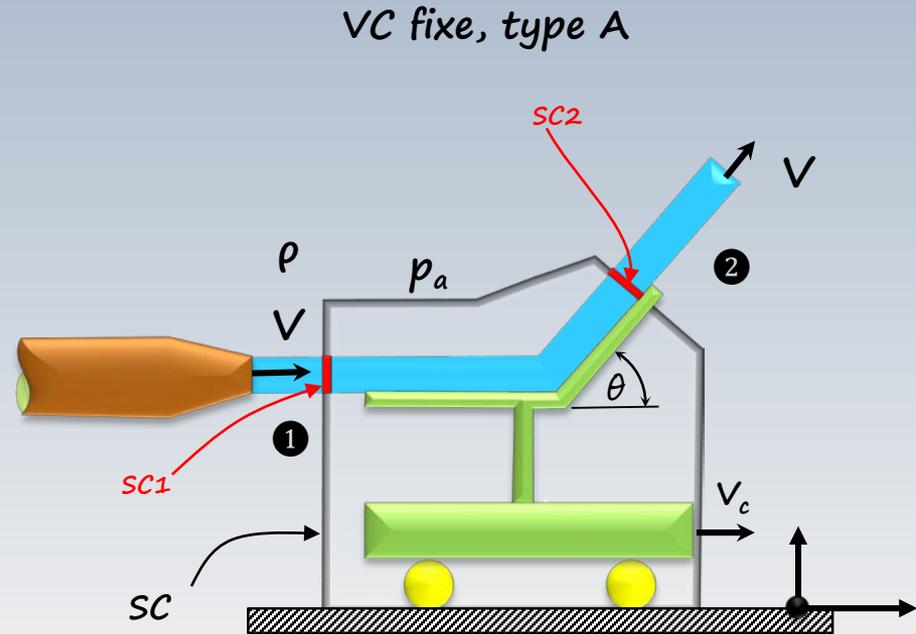
$$= -\rho S_{c1} V_{r1} + \rho S_{c2} V_{r2}$$

$$= -\rho S_{c1} (V - V_c) + \rho S_{c2} V_{r2}$$

$$S_{c1} = S_{c2} \text{ (pas des pertes)}$$



$$V_{r2} = V_{r1} = (V - V_c)$$



# Jet sur un charriot

Aucune force n'est appliquée!

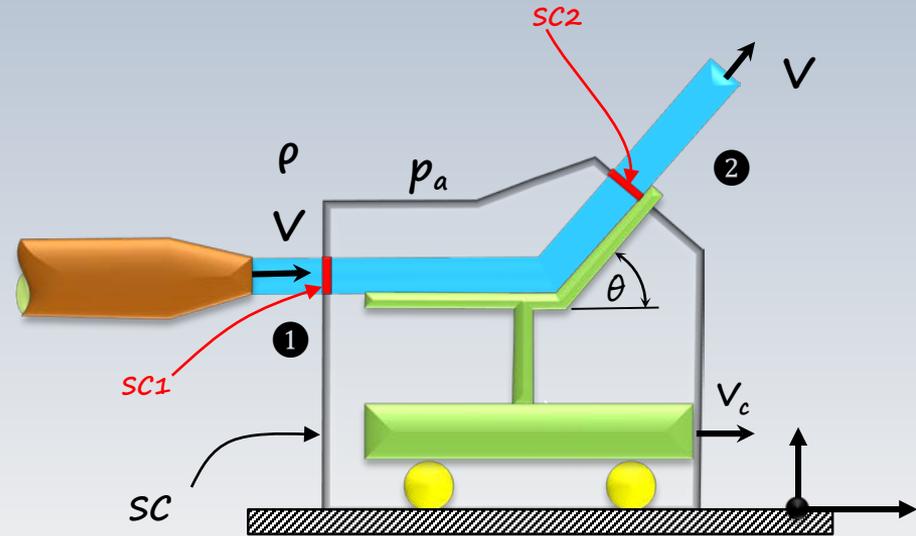
$$\sum \vec{F}_{VC} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV =$$

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{VC-\text{charriot}} \rho_c V_c dV + \int_{VC-\text{fluide}} \rho V_c dV + \right)$$



$$= \frac{d}{dt} (m_c + m_f)$$



# Jet sur un charriot

$$V_{r2} = V_{r1} = (V - V_c)$$

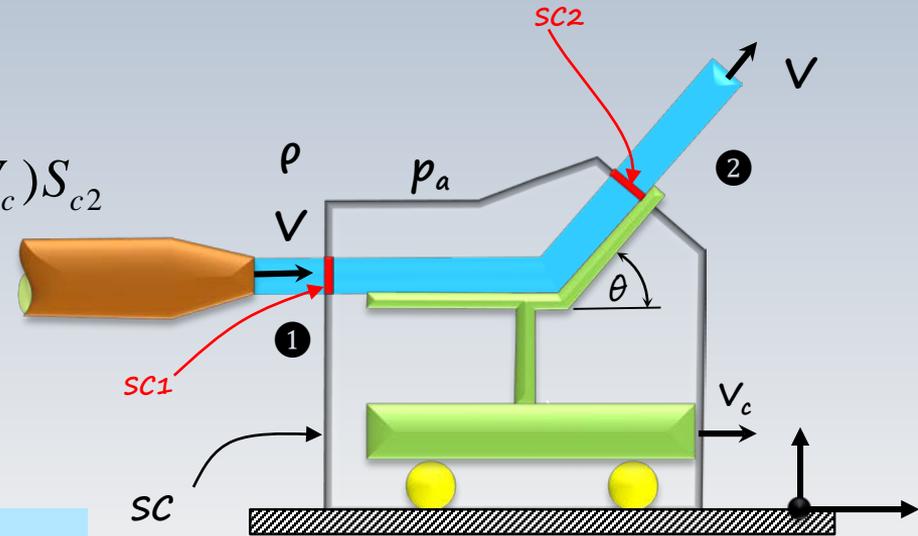
$$\int_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS = \int_{SC1} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS + \int_{SC2} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS$$

$$M_x =$$

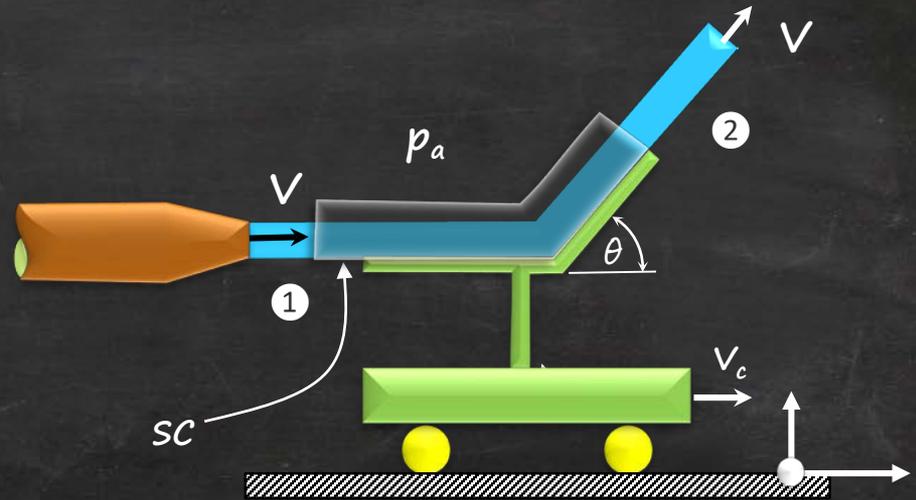
$$-\rho V (V - V_c) S_{c1} + \rho [(V - V_c) \cos \theta + V_c] (V - V_c) S_{c2}$$

$$M_x = \rho S_{c1} (v - v_c)^2 (\cos \theta - 1)$$

$$\frac{d}{dt} (m_c + m_f) = -M_x = \rho S_{c1} (V - V_c)^2 (1 - \cos \theta)$$



VC type B



Type B: le VC est rigide et se déplace tel que le charriot, mais sans l'inclure

# Jet sur un charriot

$$\sum \vec{F}_{VC} = - \int_{VC-\text{charriot}} \rho \vec{a} dV$$

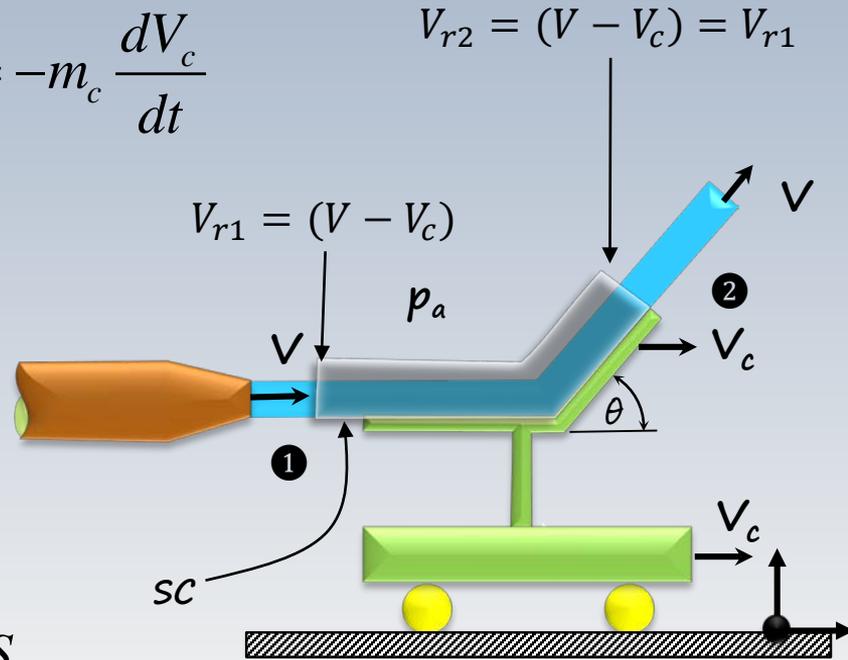
$$\sum \vec{F}_{VC} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS = -m_c a_c = -m_c \frac{dV_c}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV = \frac{d}{dt} \left( \int_{VC-\text{fluide}} \rho V_c dV \right) = m_f \frac{dV_c}{dt}$$

$$\int_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS =$$

$$= -\rho V (V - V_c) S_{c1} + \rho [(V - V_c) \cos \theta + V_c] (V - V_c) S_{c2}$$

$$= \rho S_{c1} (V - V_c)^2 (\cos \theta - 1)$$

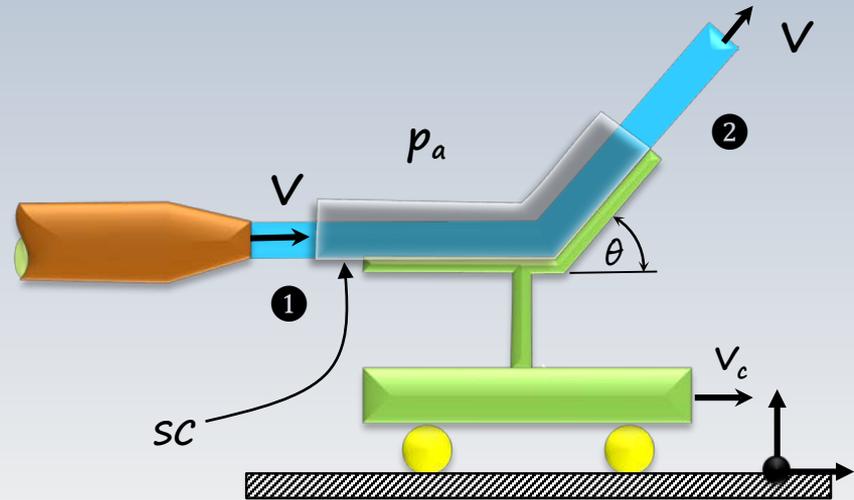


# Jet sur un charriot

$$\sum \vec{F}_{vc} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS = -m_c a_c = -m_c \frac{dV_c}{dt}$$

$$m_f \frac{dV_c}{dt} + \rho S_{c1} (V - V_c)^2 (\cos \theta - 1) = -m_c \frac{dV_c}{dt}$$

$$(m_f + m_c) \frac{dV_c}{dt} = \rho S_{c1} (v - v_c)^2 (1 - c \cos \theta)$$





# Jet sur un charriot

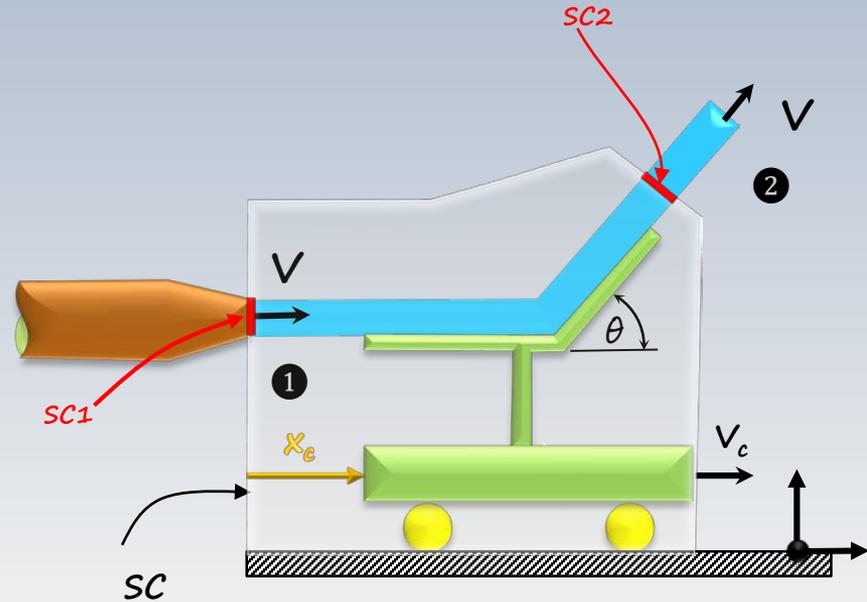
Le Vc se déforme

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho S_c dx_c = \rho S_{c1} \frac{dx_c}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV = \rho S_{c1} V_c$$

La masse varie dans le VC!



# Jet sur un charriot

$$\int_{sc} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA = \int_{sc1} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA + \int_{sc2} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA$$

$$= -\rho S_{c1} u_{r1} + \rho S_{c2} u_{r2}$$

$$= \rho (S_{c2} u_{r2} - S_{c1} V)$$

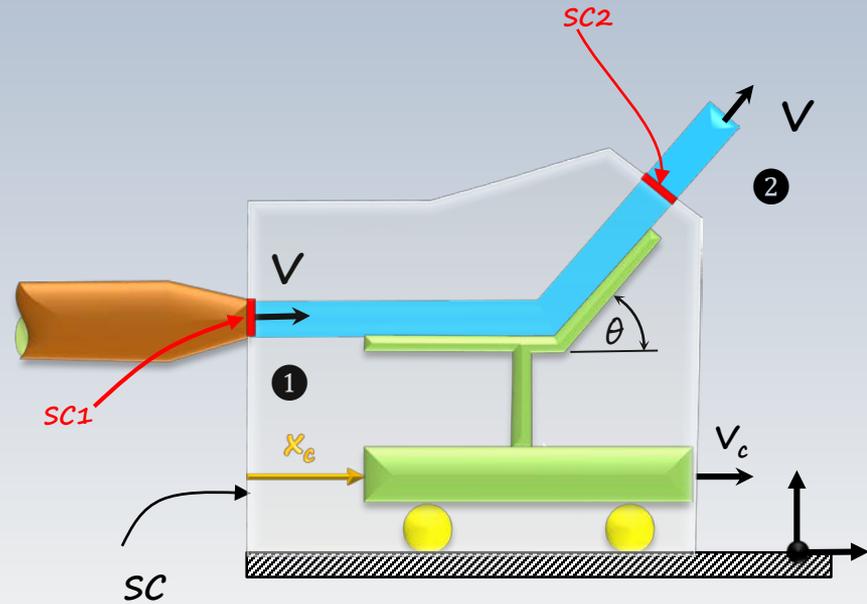
$$= \rho S_{c1} (u_{r2} - V)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{u}_r \cdot \vec{n} dA = 0$$

$$\rho S_{c1} V_c + \rho S_{c1} (u_{r2} - V) = 0$$



$$u_{r2} = V - V_c$$

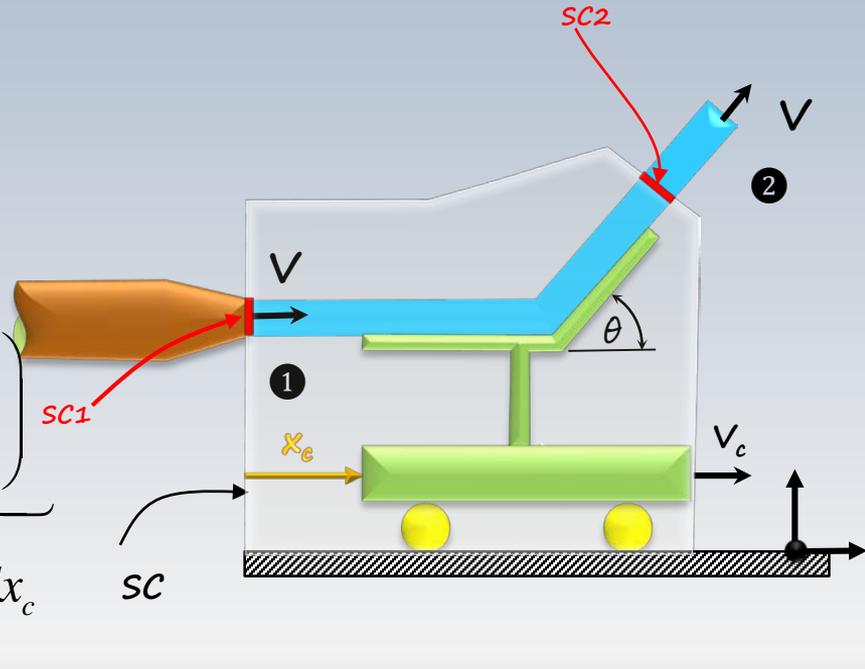


# Jet sur un charriot

$$\sum \vec{F}_{vc} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \vec{u} dV + \int_{sc} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \vec{u} dV =$$

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\int_{VC-\text{charriot}} \rho_c V_c dV + \int_{VC-\text{fluide}} \rho V_c dV}_{(m_c + m_f) \frac{dV_c}{dt}} + \underbrace{\int_{VC-\text{jet}} \rho V dV + \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho V S_c dx_c}_{\text{jet}} \right)$$



# Jet sur un charriot

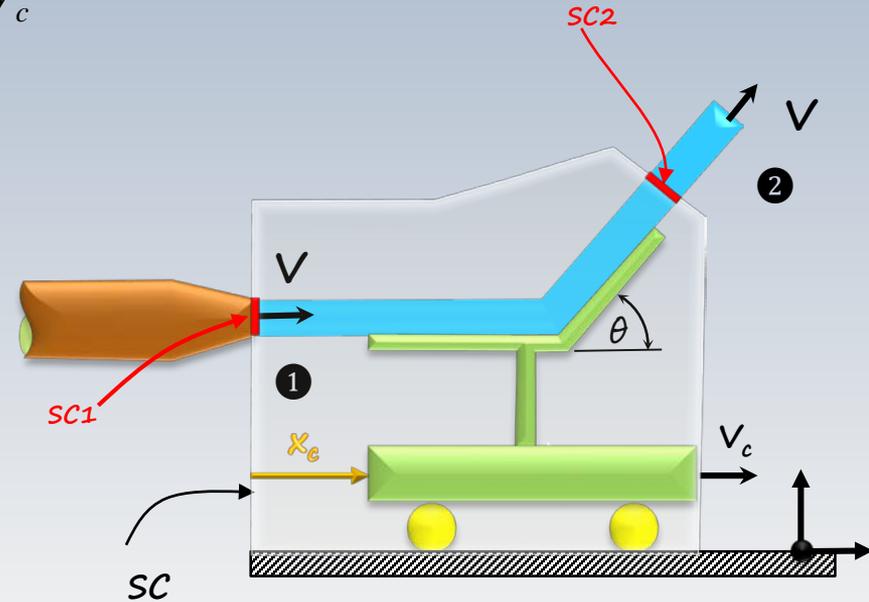
$$(m_c + m_f) \frac{dV_c}{dt} + \rho V S_c \frac{dx_c}{dt} = (m_c + m_c) \frac{dV_c}{dt} + \rho v S_c V_c$$

$$\int_{SC} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS = \int_{SC1} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS + \int_{SC2} \rho \vec{u} \vec{u}_r \cdot \vec{n} dS$$

$$= -\rho V V S_{c1} + \rho [(V - V_c) \cos \theta + V_c] (V - V_c) S_{c2}$$

$$(m_c + m_c) \frac{dV_c}{dt} + \rho V S_c V_c$$

$$(m_c + m_f) \frac{dV_c}{dt} = \rho S_{c1} (V - V_c)^2 (1 - \cos \theta)$$



$$(m_c + m_f) \frac{dV_c}{dt} = \rho S_{c1} (V - V_c)^2 (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dV_c}{(V - V_c)^2} = \frac{\rho S_{c1} (1 - \cos \theta)}{(m_c + m_f)} dt$$

$$\int_0^{v_c} \frac{dV_c}{(V - V_c)^2} = \frac{\rho S_{c1} (1 - \cos \theta)}{(m_c + m_f)} \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{(V - V_c)} - \frac{1}{V} = \frac{\rho S_{c1} (1 - \cos \theta)}{(m_c + m_f)} t \quad \Rightarrow$$

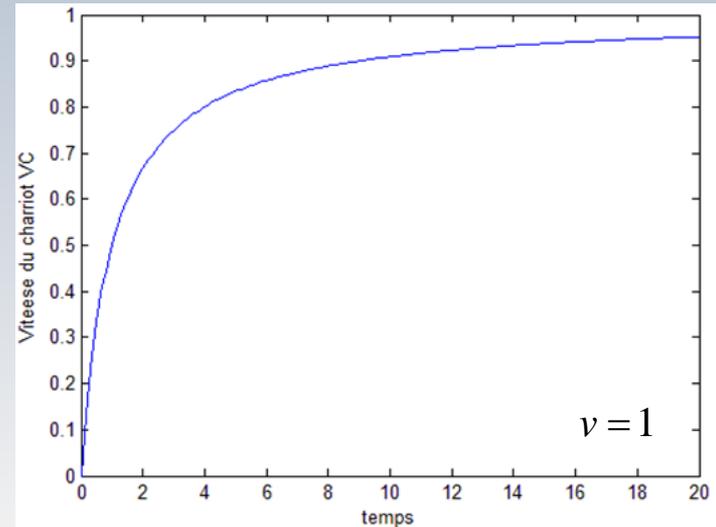
$$V_c = V \left( 1 - \frac{1}{1 + v \frac{\rho S_{c1} (1 - \cos \theta)}{(m_c + m_f)} t} \right)$$

# Jet sur un charriot

3.04 Qté. de mouvement

$$(m_f + m_c) \frac{dV_c}{dt} = \rho S_{c1} (V - V_c)^2 (1 - c \cos \theta)$$

$$V_c = V \left( 1 - \frac{1}{1 + v \frac{\rho S_{c1} (1 - \cos \theta)}{(m_c + m_f)} t} \right)$$



Retour



Le problème précédent renferme un cas particulier qui mérite un explication. Voici celle fournie par le Pr. Garon

L'expression pour la quantité de mouvement est

$$\left. \frac{dm\vec{u}}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\vec{u}_{rel} = \vec{u}_{fluide} - \vec{u}_{Surface}$$

$$\vec{u} = \vec{u}_{fluide}$$

par contre, nous avons utilisé sous silence

# $(V_j - V_c) ?$

3.04 L... de ...

$$\left. \frac{dm\vec{u}}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u}_{rel} dV + \int_{SC} \rho \vec{u}_{rel} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

En effet, nous avons employé pour le calcul des forces

$$\sum \vec{F}_{VC} = \dot{m} (\vec{u}_{rel_s} - \vec{u}_{rel_e}) \quad \dot{m} = \rho_e \mathbf{u}_{rel_e} A_e = \rho_s \mathbf{u}_{rel_s} A_s$$

Avons nous le droit de le faire?

GROS SAPIN ?



En réalité, sachant que  $\vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{V}$  et que  $\vec{V} = cnste.$ , on peut récrire cette équation:

$$\left. \frac{dm\vec{u}}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u}_{rel} dV + \int_{SC} \rho \vec{u}_{rel} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

comme

$$\left. \frac{dm\vec{u}}{dt} \right|_{VM(t)} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

$$-\vec{V} \left( \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS \right) = 0; \text{ Cons. de la Masse}$$

Alors, si et seulement si le volume de contrôle est en translation rigide avec un vitesse  $V$  constante, on a:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u} dV + \int_{SC} \rho \vec{u} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{u}_{rel} dV + \int_{SC} \rho \vec{u}_{rel} (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

Dans ce cas, la variation de la quantité de mouvement pour un écoulement stationnaire avec une entrée (e) et une sortie (s) et des vitesses uniformes devient

$$\sum \vec{F}_{VC} = \dot{m} (\vec{u}_{rel_s} - \vec{u}_{rel_e}) \quad \dot{m} = \rho_e \mathbf{u}_{rel_e} A_e = \rho_s \mathbf{u}_{rel_s} A_s$$

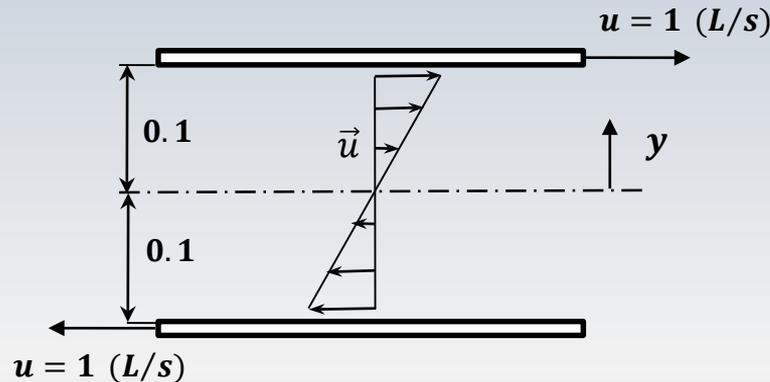
[Retour](#)

# Conservation de la masse

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{\text{rel}} \cdot \vec{n}) dS$$

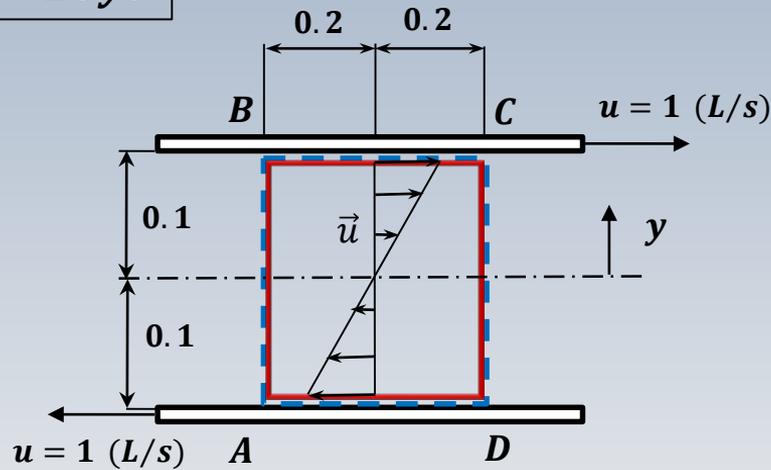
L'exemple suivant vise illustrer l'équivalence des approches lagrangiennes et eulériennes pour la conservation de la masse

Il s'agit d'un écoulement de type Couette avec deux plaques qui se déplacent dans des sens opposés

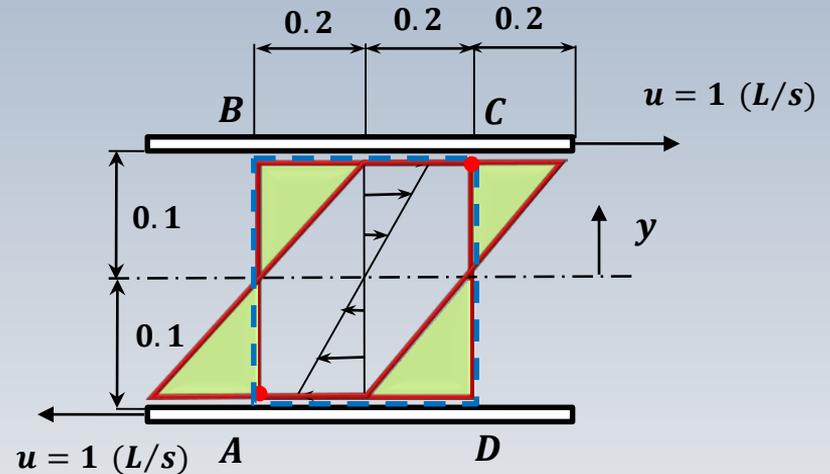


# Deux plaques en mouvement opposé

$$\vec{u} = 10y\hat{i}$$



$t = 0$



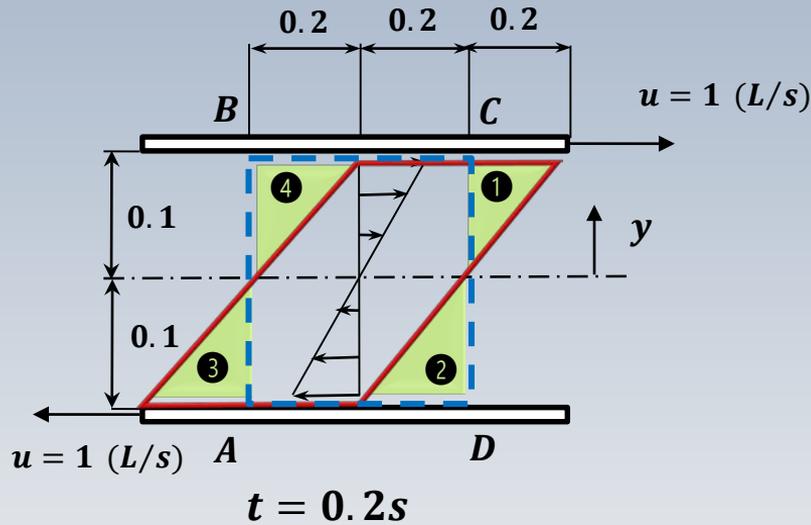
$t = 0.2$  s

— volume de contrôle

— volume matériel

$e = \text{épaisseur} = 1, L: \text{unité de longueur}$

# Deux plaques en mouvement opposé



Par rapport au VC  
(en pointillé)

- ② ④ + ENTRÉES
- ① ③ - SORTIES

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

TTR

# Conservation de la masse

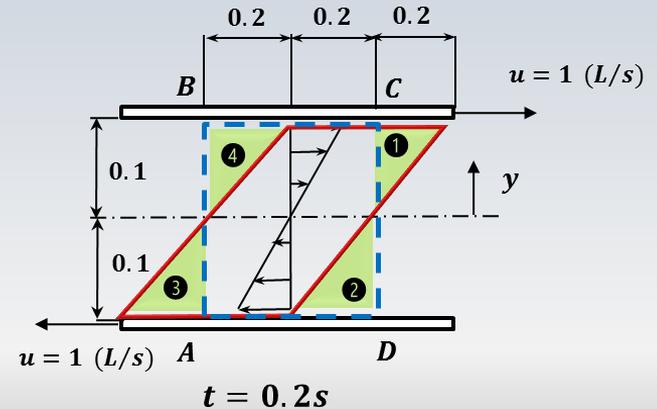
$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{\text{rel}} \cdot \vec{n}) dS$$

Pour la conservation de la masse avec  $B = m$  et  $b = B/m = 1$ .

Bien que le **volume matériel (rouge)** c'est déformé, la masse dans celui-ci **demeure la même** au cours du temps. Dans un langage mathématique on écrit:

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \left. \frac{dm}{dt} \right|_{\text{sys}} = \dot{m} = 0$$

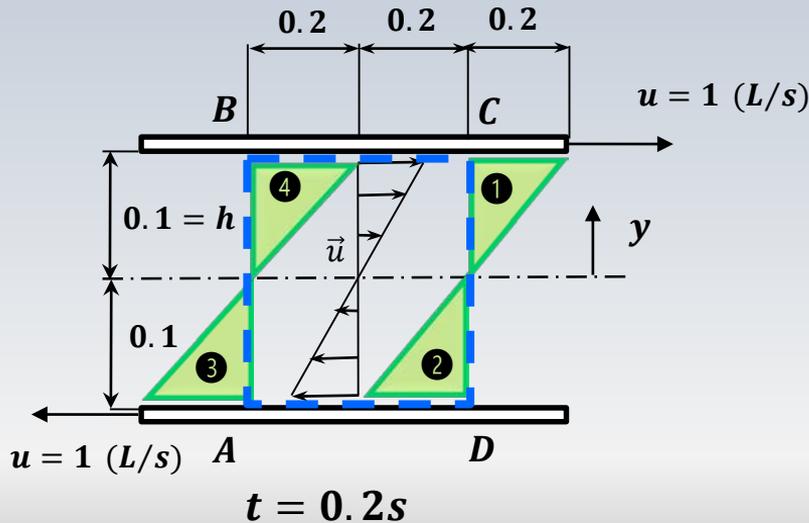

la masse d'un système demeure constante au cours du temps



# Conservation de la masse

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{\text{rel}} \cdot \vec{n}) dS$$

Lorsqu'on regarde le volume de contrôle (**bleue fixe**), on note des endroits où un flux traverse sa frontière. Ces débits sont positifs (entrées ②, ④) ou négatifs (sorties ①, ③).



Le débit massique sur chaque coté est

$$\dot{m}_{1,2,3,4} \pm \int_0^h \rho \underbrace{10y}_{\vec{u}} dy = \pm 0.05\rho$$

et le débit total peut s'écrire alors

$$\sum_{1,2,3,4} \dot{m}$$

$$\vec{u} = 10y\hat{i}$$

$$A = 0.1 \times 1$$

$$h = 0.1$$

# Conservation de la masse

$$\left. \frac{dB}{dt} \right|_{\text{sys}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{SC} \rho b (\vec{u}_{rel} \cdot \vec{n}) dS$$

Dans le cas courant  $\sum_{1,2,3,4} \dot{m} = 0$ , et aucune accumulation (ou perte) de masse a lieu dans le volume de contrôle. La somme des débits (volumes) positifs ②, ④ et négatifs ①, ③ est nulle.

On s'y attendait, car l'écoulement est incompressible ( $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ )

Dans un cadre plus général, lorsque la sommation  $\sum_{1,2,3,4} \dot{m} \neq 0$ , il y a une accumulation (ou perte) de masse dans le volume de contrôle

Retour

