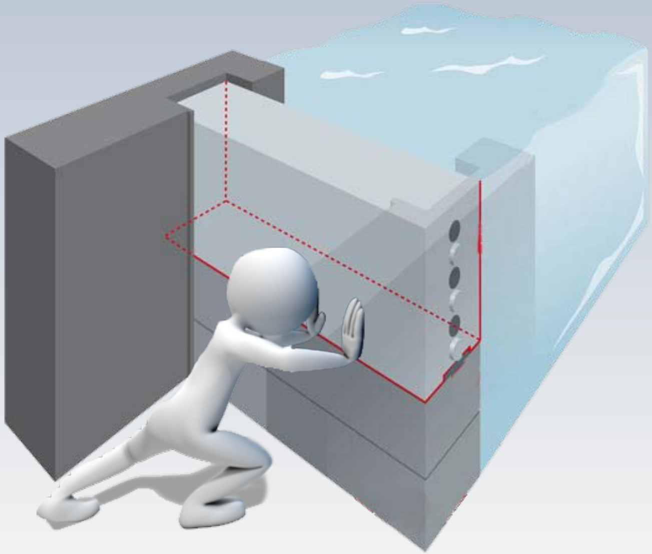
Mécanique des fluides

La force des écoulements

À venir…



Pression et forces hydrostatiques

OBJECTIFS

- Rappeler la loi fondamentale de la mécanique pour les fluides
- Regarder la notion de pression hydrostatique
- Rappeler des éléments de manométrie
- Expliquer le calcul des forces hydrostatiques sur des surfaces planes et gauches ainsi que le principe d’Archimède

La Pression

Chapitre 2 – Distribution de pression

2.01 2.02 2.03 2.04 2.05 2.06

2.08 2.09

La mécanique des fluides

La **mécanique des fluides** vise à étudier les fluides au repos (*statique*) ou en mouvement (*dynamique*)

Dans cette discipline on applique fondamentalement **la loi de Newton** $\sum \vec{F} = d(m\vec{v})/dt$ (ou $\sum \vec{F} = m\vec{a}$)

On considère trois forces principales: $\vec{F}_{gravité}$, $\vec{F}_{pression}$ et $\vec{F}_{cisaillement}$

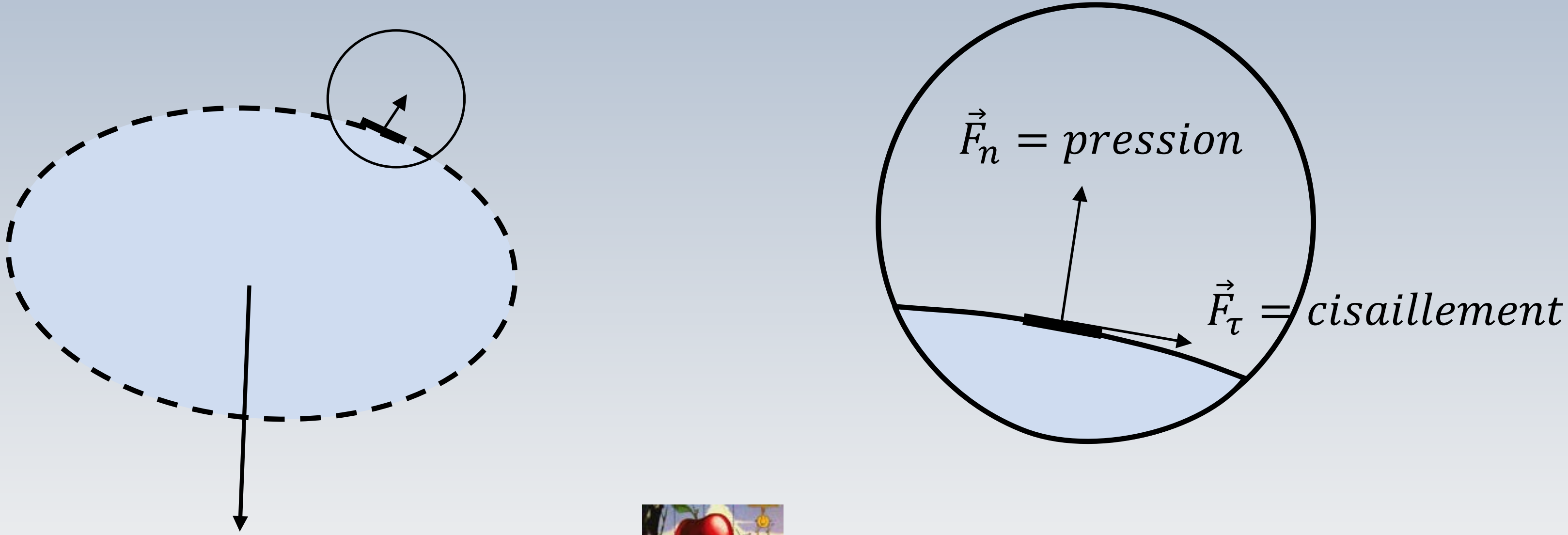
La mécanique des fluides

$\vec{F}_{gravité}$ est une **force volumique**,

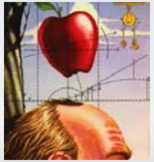
$\vec{F}_{pression}$ et $\vec{F}_{cisaillement}$ sont des **forces de surface**

La trame de la mécanique des fluides est donc la recherche d’expressions permettant le calcul de ces forces!

Les forces



$\vec{F}_g = force\ gravitationnelle$



Que personne ne bouge!

Avant de considérer tout mouvement, on s’intéressera au cas **statique!**

Hydrostatique

On débute l'étude par **l'hydrostatique**. Il n'y a donc pas de mouvement (l'accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$ est nulle) ni des forces de cisaillement. Seulement les **forces de pression** et les **forces massiques** sont présentes.

La deuxième loi de Newton

$$\boxed{\cancel{\left.\frac{d(m\vec{u})}{dt}\right|_{syst}} = \vec{F}_{gravité} + \vec{F}_{pression} + \cancel{\vec{F}_{cisaill}}}$$

devient ainsi

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{gravité} + \vec{F}_{pression} = 0$$

Équilibre hydrostatique

Un fluide est en **équilibre hydrostatique** si les conditions suivantes sont satisfaites:

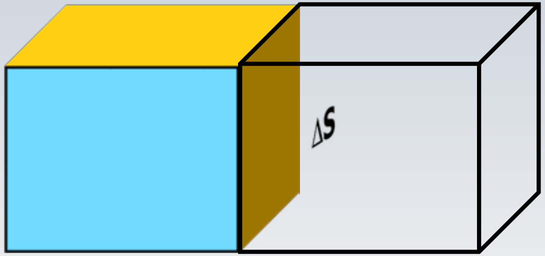
la vitesse du fluide est constante ou nulle (pas d'accélération)

la variation de pression est due uniquement au poids du fluide

Équilibre

Pour un liquide **en équilibre hydrostatique**, **la force** agissant entre deux éléments voisins est **normale à la surface** qui les sépare:

$$\Delta F \perp \Delta S$$



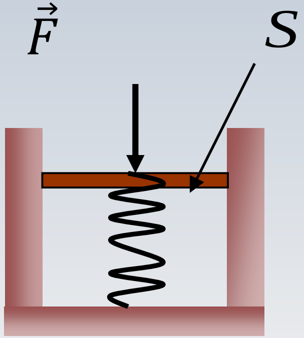
Équilibre

Pour un liquide en **équilibre hydrostatique**, **la force** agissant entre deux éléments voisins est **normale à la surface** qui les sépare:

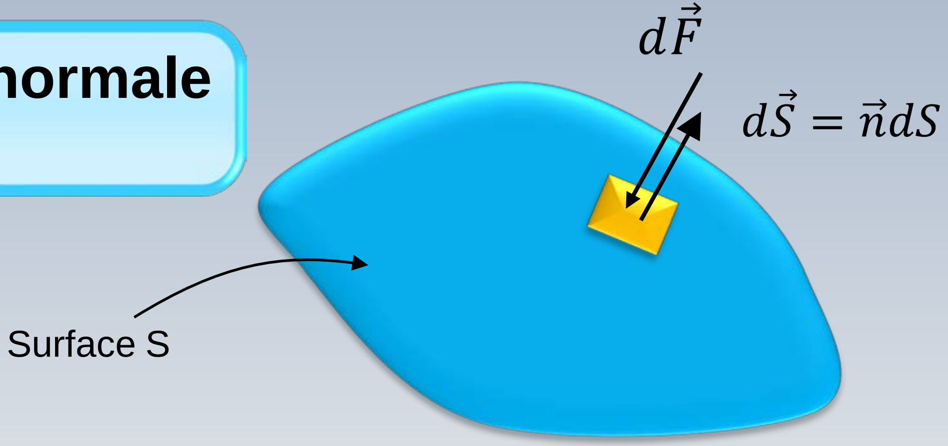
$$\Delta F \perp \Delta S$$

Pression

Pression: grandeur de la **force normale** par unité de surface



$$\boldsymbol{p = \frac{F}{A}}$$



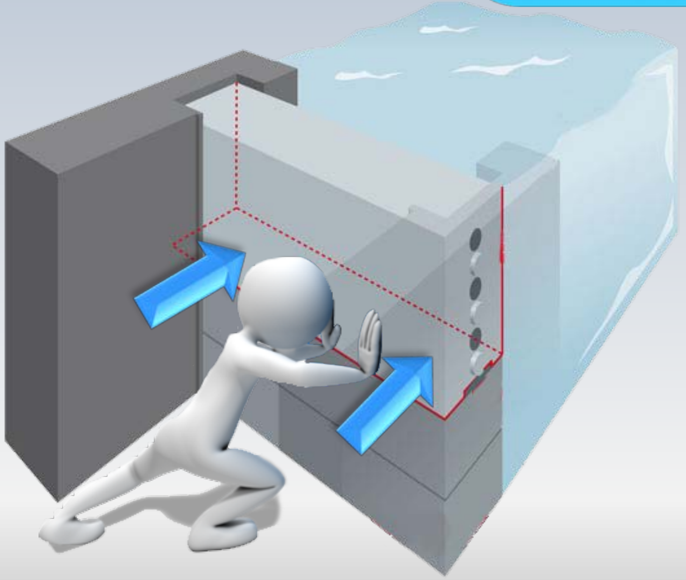
Force de pression élémentaire

$$d\vec{F} = -pd\vec{S}$$

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\int_S p\vec{n}dS}$$

Propriétés de la pression

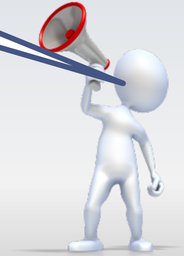
La **force** de pression est **toujours perpendiculaire à une surface**



Propriétés de la pression

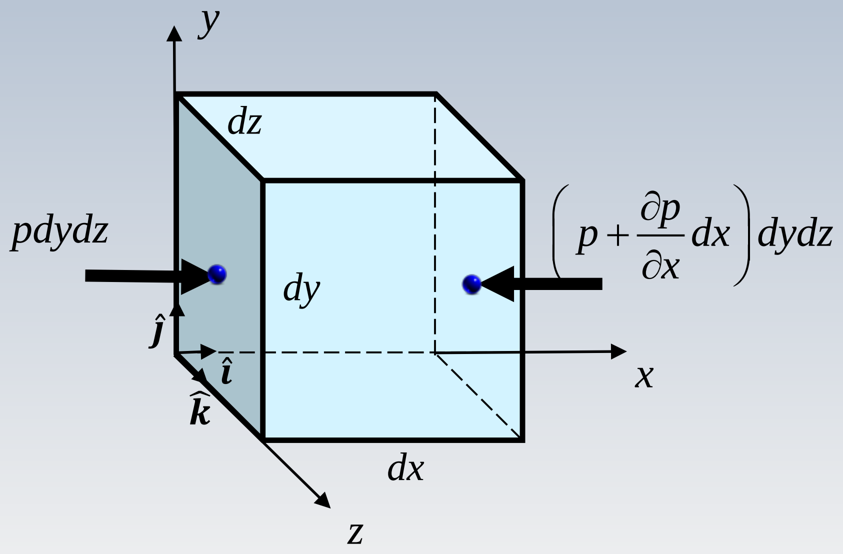
Dans un fluide au repos, la pression p sur un point est la même dans toutes les directions!

Évidemment, puisqu’elle est un **scalaire**



Force sur un élément de volume

On considère un volume élémentaire $\mathbf{dV = dx\ dy\ dz}$



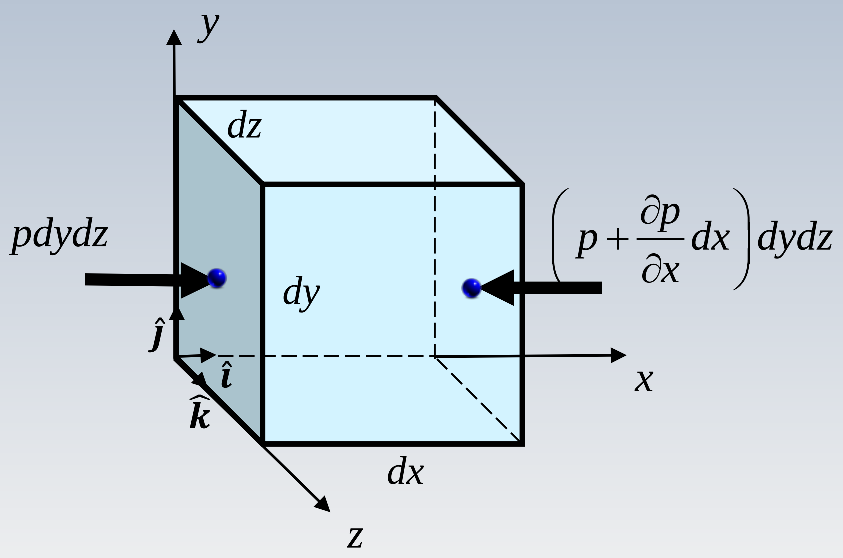
On suppose:

❶ *les faces sont infinitésimales*

❷ *la pression est constante sur chaque face*

De manière générale, on considère qu'il y une variation de pression entre les faces opposées du volume dV

Force sur un élément de volume



La figure illustre la variation de pression sur les faces normales à la direction x

Après le bilan, la force résultante exercée sur les faces $dxdy$ est:

$$F_x \hat{\imath} = -\frac{\partial p}{\partial x} \hat{\imath} \underbrace{dxdydz} = -\frac{\partial p}{\partial x} \hat{\imath} \underbrace{dV}$$

Des expressions similaires peuvent être obtenus dans les deux autres directions

Force sur un élément de volume

$$\vec{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}$$

Notamment : $F_y\hat{\jmath} = -\frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath}dV$ $\quad F_z\hat{k} = -\frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}dV$

La force totale de pression $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$ exercée sur ***dV*** peut donc s'écrire :

$$\boxed{\vec{F}_{pression} = -\vec{\nabla} p dV}$$

On note que le gradient de pression apparaît comme une force par unité de volume (N/m^3).

On en déduit alors que **c'est le gradient de pression** et non la pression, qui doit **équilibrer les autres forces**

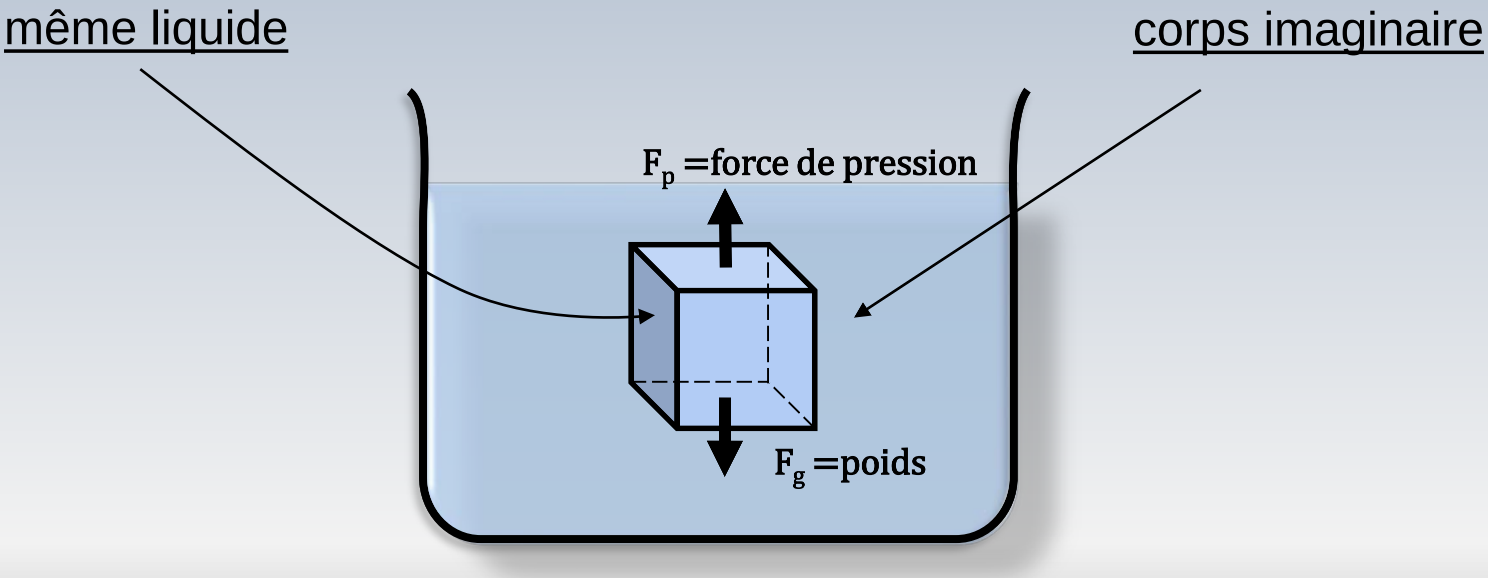
Chapitre 2 – Distribution de pression

2.01 2.02 2.03 2.04 2.05 2.06

2.08 2.09

Bilan des forces

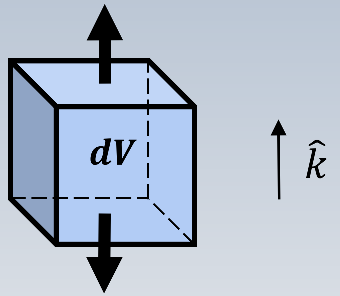
Au repos, la force de pression n'est équilibré que par le poids



Bilan des forces

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

$$\vec{F}_p = -\vec{\nabla} p dV$$



$$\vec{F}_g = \rho dV \vec{g}$$

Sachant que $\vec{\boldsymbol{g}} = -g\hat{k}$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

Équation à résoudre pour trouver la pression pour différents niveaux $\boldsymbol{z}$

Chapitre 2 – Distribution de pression

Principe de Pascal

Blaise Pascal (1623–1662) a noté que la pression ne dépendait que de la hauteur et a énoncé:

Principe de Pascal
La pression en un point quelconque d'un fluide est *la même* dans toutes les directions. Cela est valable pour tout les points situés à la même hauteur

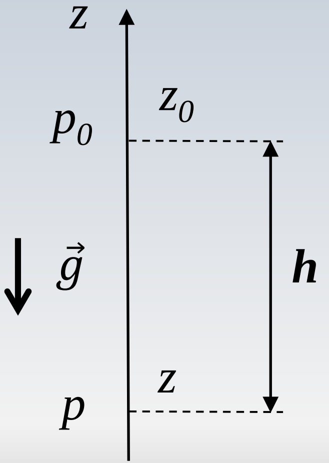
Principe de Pascal

En effet, pour un fluide incompressible avec $\boldsymbol{\rho = cnste}$,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = cnste \Rightarrow p(z) - p(z_0) = \int_{z_0}^{z} \frac{dp}{dz}\, dz$$

$$p(z) = p(z_0) + \rho g \underbrace{(z_0 - z)}_{h}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{p = p_0 + \rho g h}}$$



En pratique courante on prend comme $\boldsymbol{z_0}$ **le niveau de la surface** du fluide et comme $\boldsymbol{p_0}$ **la pression atmosphérique**

Hauteur manométrique

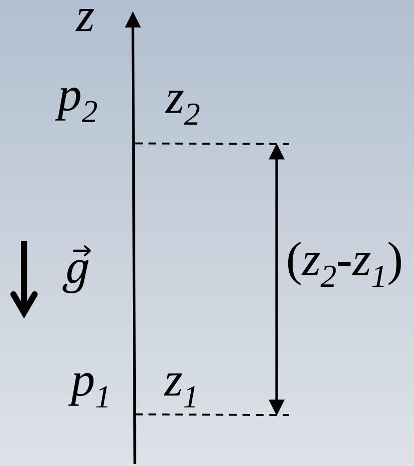
En général, entre deux points 1 et 2 quelconques

$$p_2 = p_1 + \rho g (z_1 - z_2)$$

$$p_2 = p_1 + \gamma (z_1 - z_2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(z_1 - z_2) = \frac{p_2 - p_1}{\gamma}}$$

Hauteur manométrique



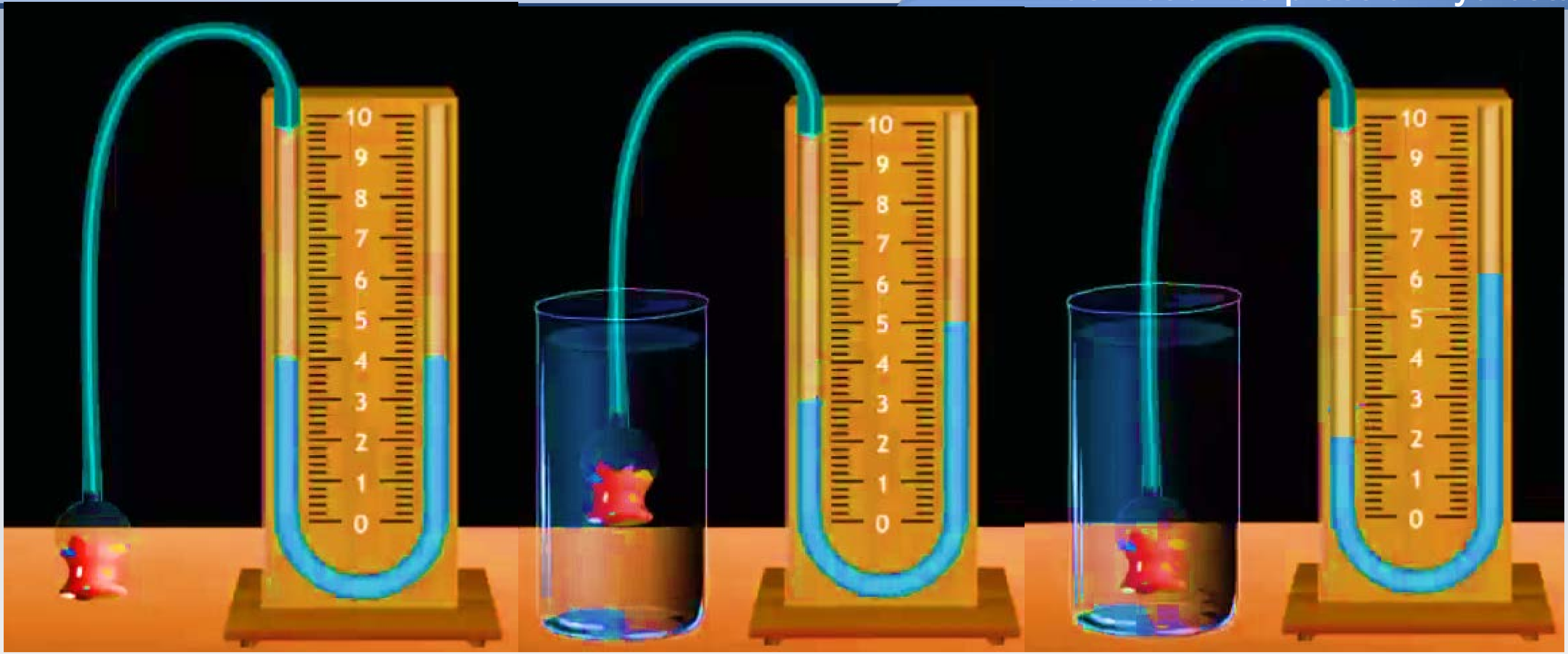
On verra plus tard que la hauteur manométrique (pressure head) c’est une mesure de la quantité d’énergie en pression.

Hauteur manométrique

On peut utiliser la hauteur de colonnes de liquides pour mesurer la pression!

$$(z_1 - z_2) = \frac{p_2 - p_1}{\gamma}$$

Hauteur manométrique



La différence de hauteur des branches du manomètre mesure la variation de pression à l'extrémité par rapport à la pression atmosphérique

Théorème fondamental de l'hydrostatique

Des résultats précédents on déduit que:

$$(z_1 - z_2) = \frac{p_2 - p_1}{\gamma}$$

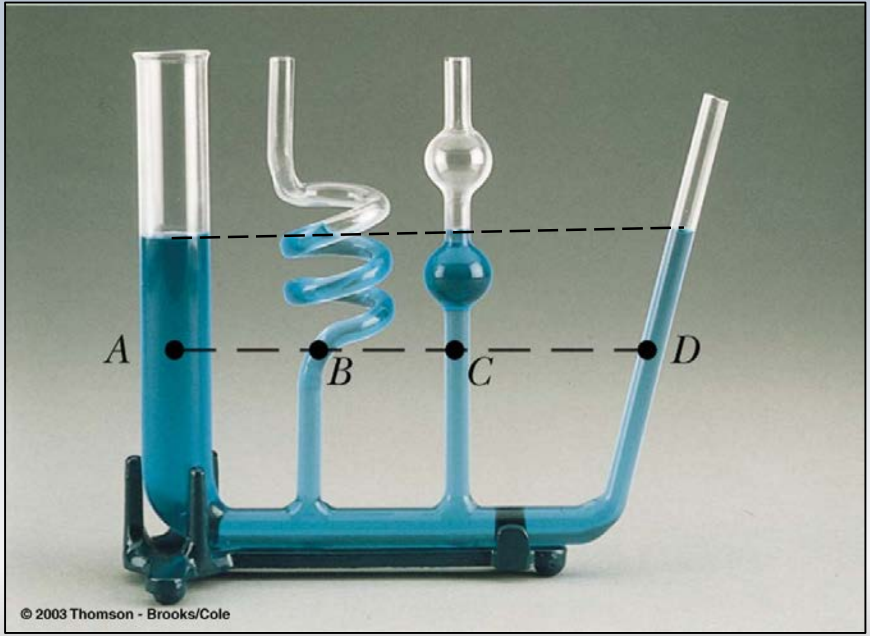
Dans un liquide en équilibre de masse volumique uniforme, la différence des pressions en deux points est égale au poids de la colonne de liquide ayant pour section l'unité de surface et pour hauteur la différence de niveau des deux points.

Conclusions pratiques :

- Au sein d'un même fluide au repos, la pression varie seulement avec la hauteur et est **indépendante de la forme du réservoir**
- La pression est la même en tout point à une altitude donnée.
- La pression augmente avec la profondeur du fluide.

Théorème fondamental

Pour un liquide homogène à l'équilibre, la différence de pression entre deux niveaux ne dépend ni de la forme ni de l'inclinaison des contenants



Mesures de pression

Pression absolue

Pression lue (manomètre) + pression lue baromètre (toujours positive)

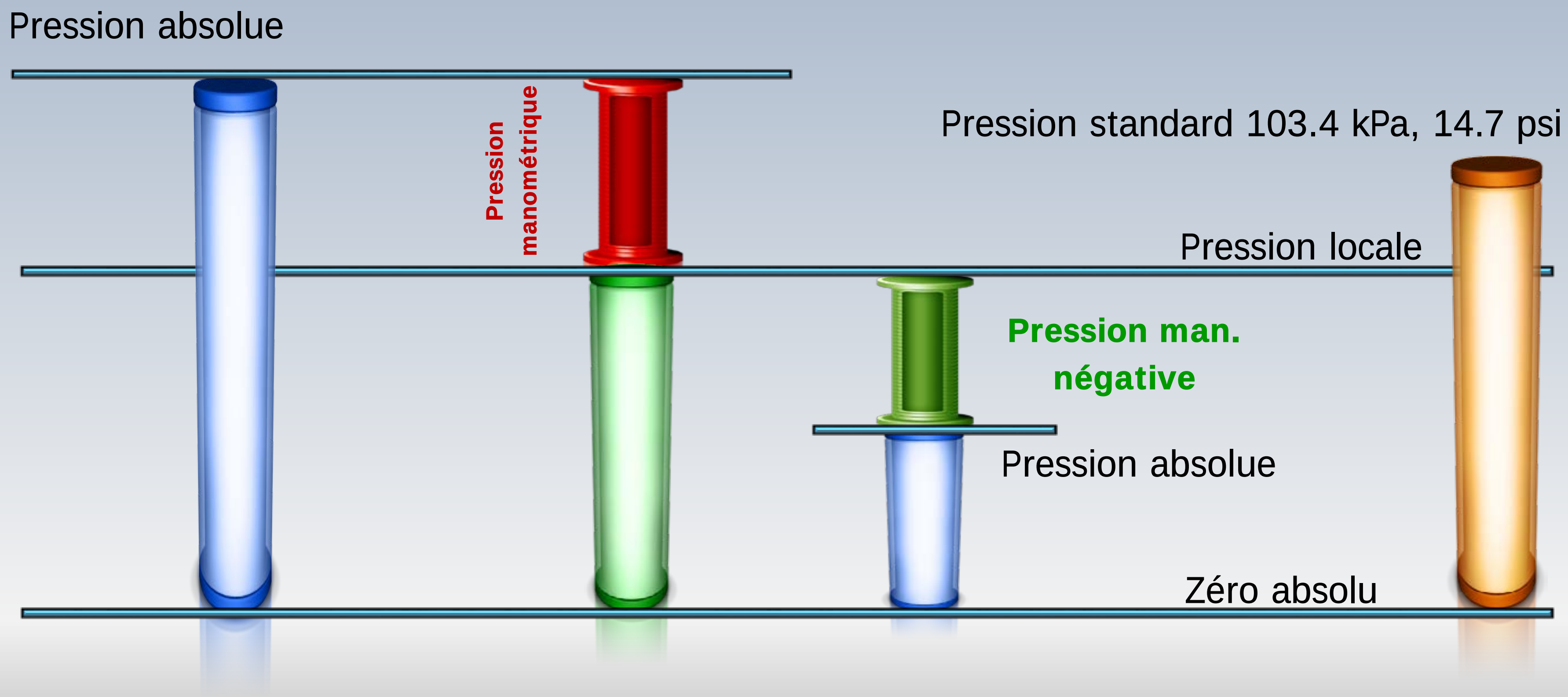
Pression relative

Pression lue (manomètre; positive ou négative)

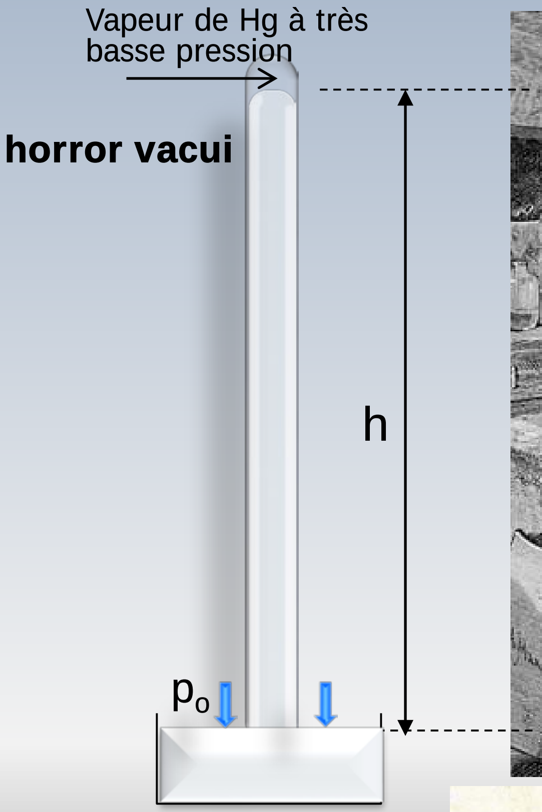
Pression atmosphérique locale

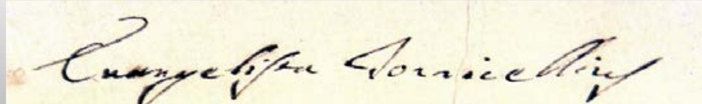
Pression lue (baromètre; varie avec l'altitude)

Mesures de pression



Evangelista Torricelli





Expérience de Torricelli refaite par Pascal à Rouen

Peinture de Rouen par Pisarro

Remarques

La pression peut être définie de façon relative ou absolue

La pression absolue est toujours mesurée par rapport au vide (quantité positive).

La pression jauge (ou gauge/gage en anglais) est une mesure relative de ***l'excédent*** de pression par rapport à une pression de référence :

$$\text{si } p > p_{réf}, \quad p_{jauge} = p - p_{réf} > 0$$

La pression vacuum est aussi une mesure relative, mais du ***déficit*** de pression par rapport à une pression de référence :

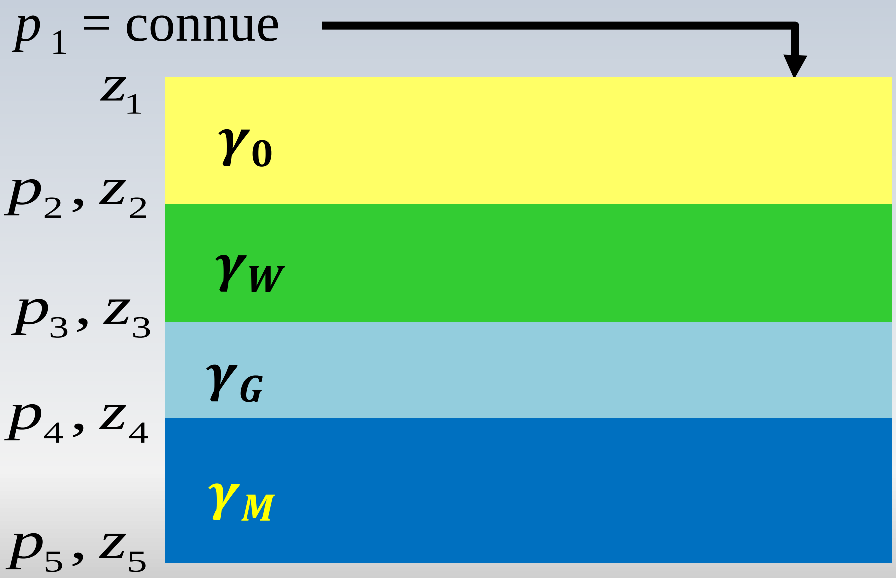
$$\text{si } p < p_{réf}, \quad p_{vacuum} = p_{réf} - p > 0$$

Chapitre 2 – Distribution de pression

Principe d'un manomètre

$$(z_A - z_B) = \frac{p_A - p_B}{\gamma}$$

Un manomètre est un instrument qui met à profit les lois de l'hydrostatique pour <u>mesurer des pressions relatives</u>. Il peut être composé d'une ou plusieurs colonnes de fluides (liquide ou gaz)



$$\cancel{p_2} - p_1 = -\gamma_0 (z_2 - z_1)$$

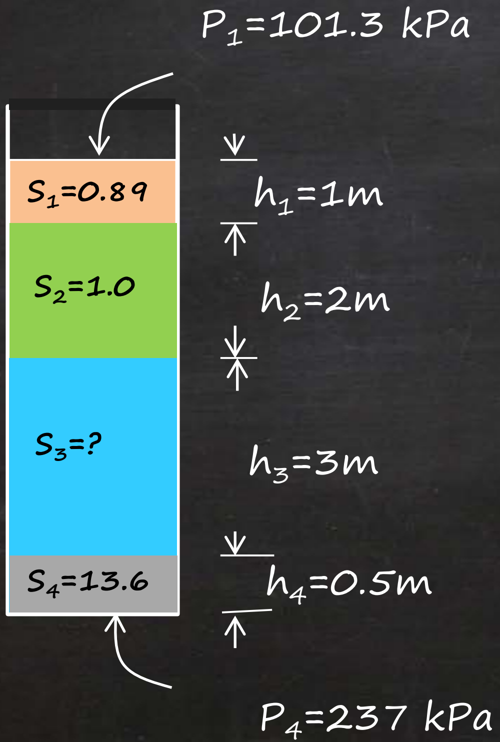
$$\cancel{p_3} - \cancel{p_2} = -\gamma_W (z_3 - z_2)$$

$$\cancel{p_4} - \cancel{p_3} = -\gamma_G (z_4 - z_3)$$

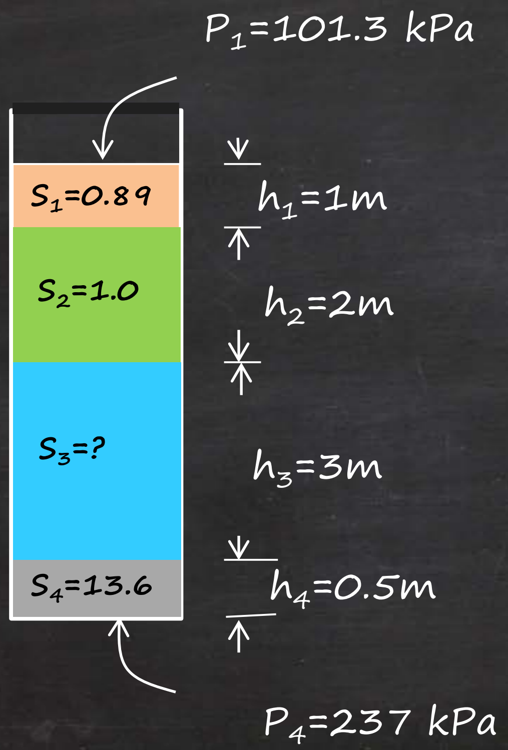
$$p_5 - \cancel{p_4} = -\gamma_M (z_5 - z_4)$$

$$p_5 - p_1 = \sum$$

On vous demande de calculer la gravité spécifique $S_3 = \gamma_3/\gamma_W$ sachant que le poids spécifique de l'eau est $\gamma_W = 9.8 kN/m^3$



Gravité spécifique $S = \gamma_{fluide} / \gamma_W$



$$p_1 + S_1\gamma_w h_1 + S_2\gamma_w h_2 + S_3\gamma_w h_3 + S_4\gamma_w h_4 = p_4$$

$$S_3 = \frac{p_4 - p_1 - S_1\gamma_w h_1 - S_2\gamma_w h_2 - S_4\gamma_w h_4}{\gamma_w h_3}$$

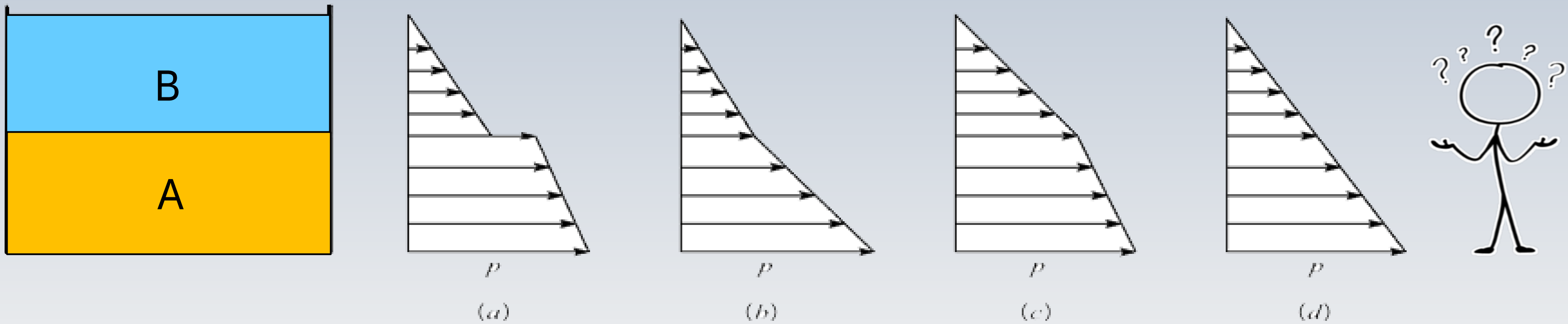
$$S_3 = \frac{p_4 - p_1}{\gamma_w h_3} - \frac{S_1 h_1 + S_2 h_2 + S_4 h_4}{h_3}$$

$$S_3 = \frac{237 - 101.3}{9.8\times 3} - \frac{0.89\times 1 + 1\times 2 + 13.6\times 0.5}{3} \approx 13.9$$

Question?

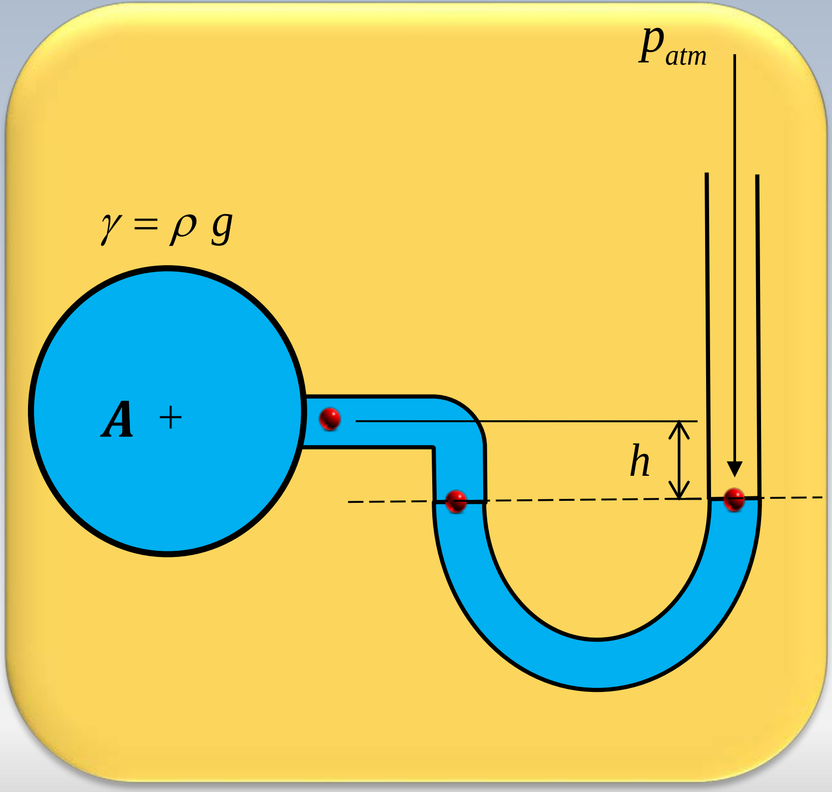
Dans le réservoir $\gamma_A > \gamma_B$

Quelle et la bonne représentation pour la distribution de pression?



Manomètre en U

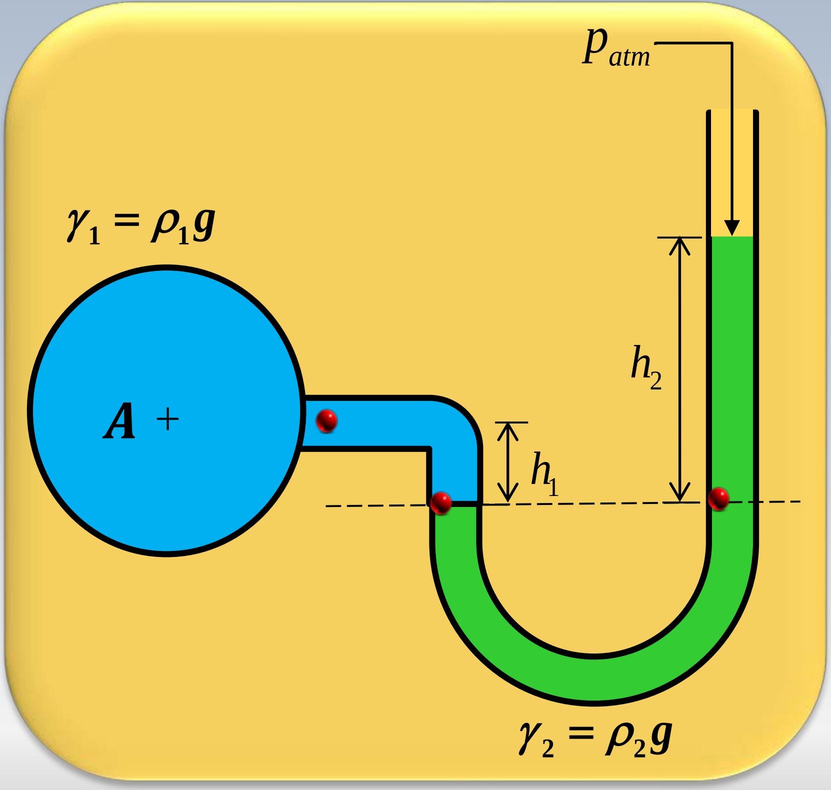
$$p_A + \rho g h = p_{atm}$$



Manomètre en U

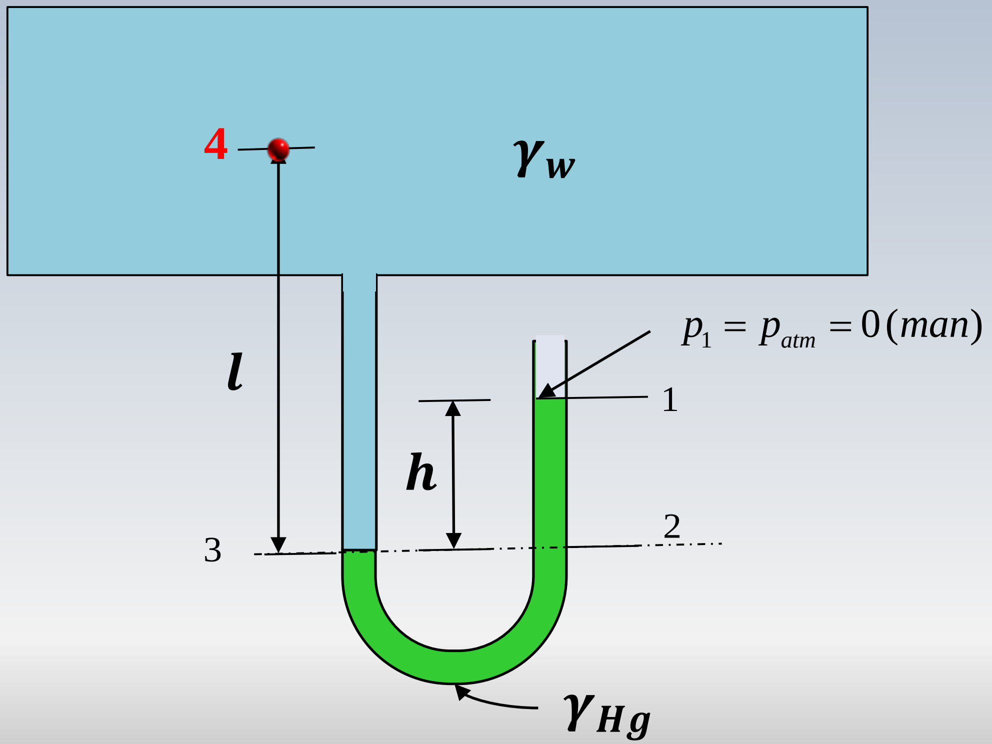
Deux liquides ρ_1 et ρ_2

$$p_A + \rho_1 g h_1 = p_{atm} + \rho_2 g h_2$$



Manomètre en U

Trouvez la pression p_4 ? $h=0.6m$, $l=1.8m$, $S_{Hg}=13.6$, $\gamma=9810N/m^2$



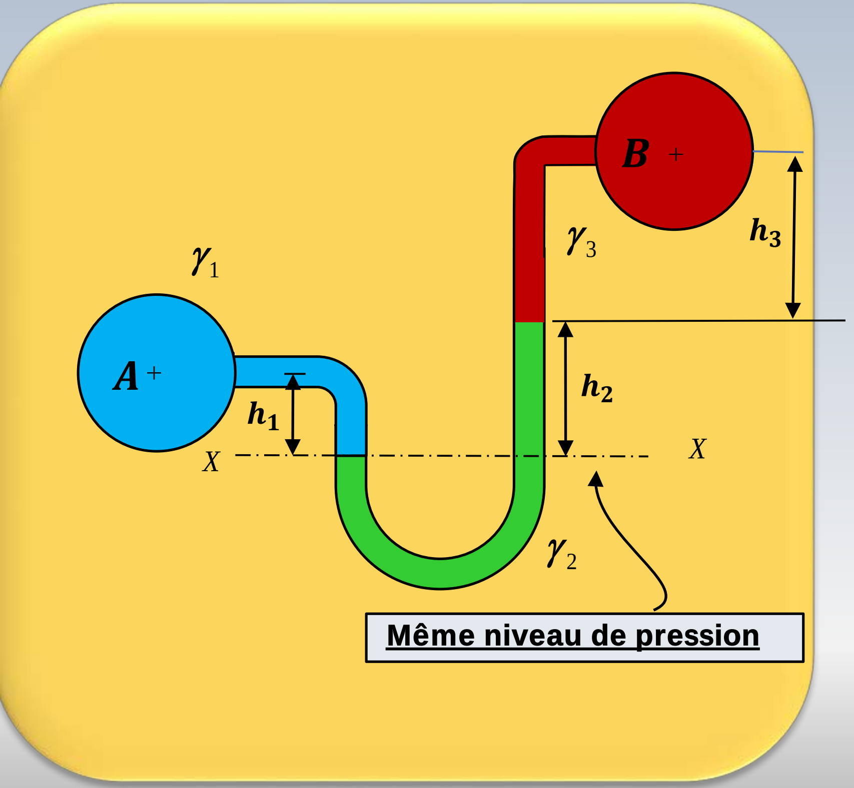
$$p_4 + l\gamma_w = p_1 + \gamma_{Hg}h$$

$$p_4 = \gamma_{Hg}h - \gamma_w l$$

$$= 133{,}416(0.6) - 9810(1.8)$$

$$\boxed{p_4 = 62.4\,kPa}$$

Manomètre différentiel

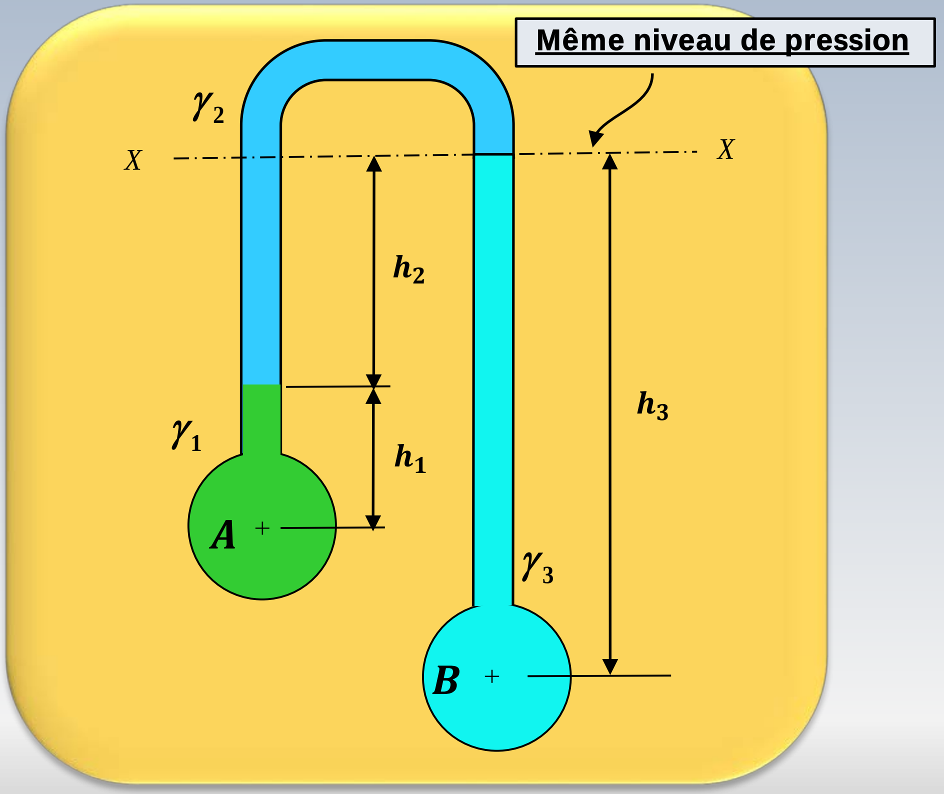


Trois liquides $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$p_A + \gamma_1 h_1 = p_B + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$$

$$p_A - p_B = \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

Manomètre différentiel

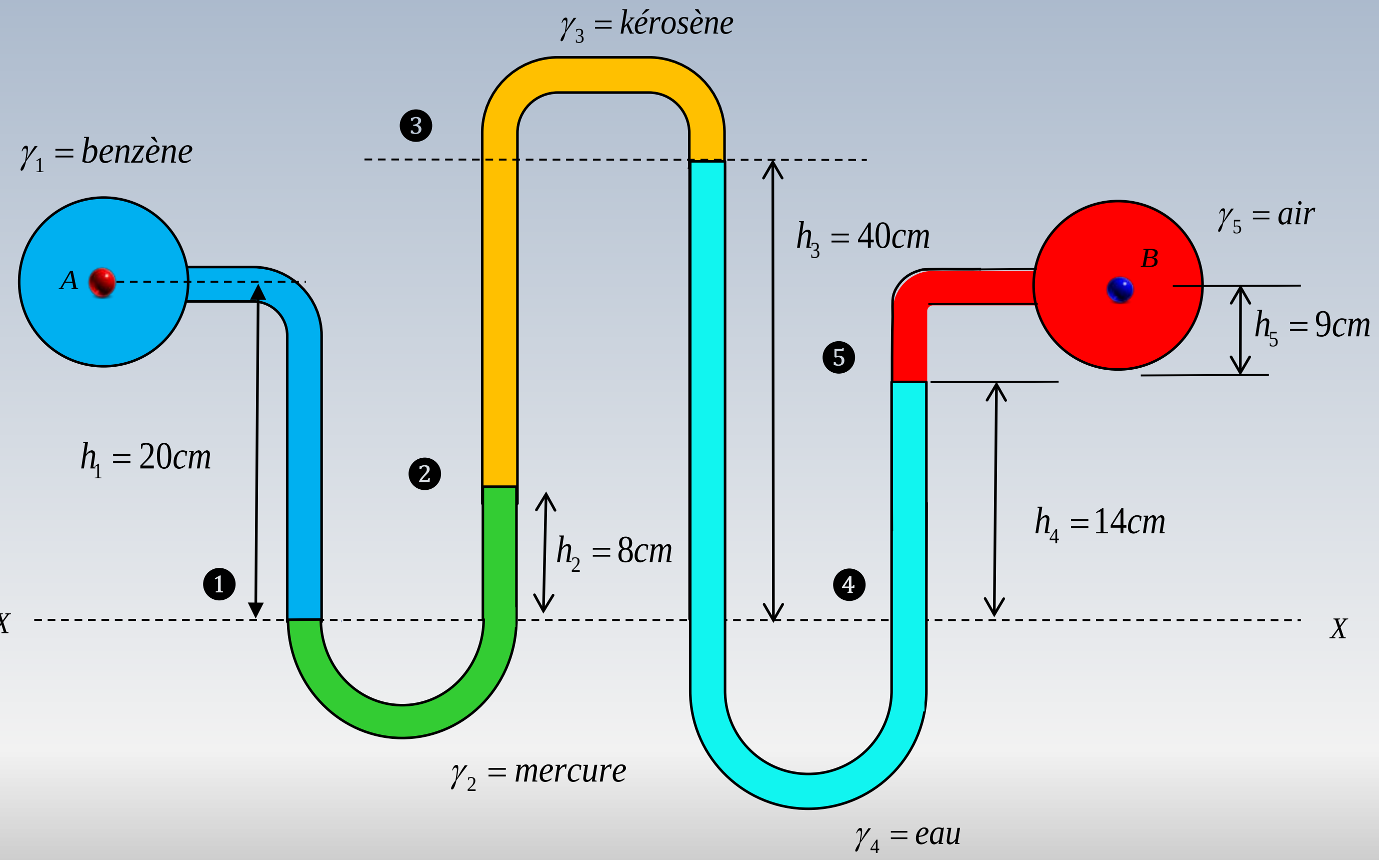


Trois liquides $\boldsymbol{\gamma_1}$, $\boldsymbol{\gamma_2}$, $\boldsymbol{\gamma_3}$

$$p_A - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2 = p_B - \gamma_3 h_3$$

$$p_A - p_B = \gamma_1 h + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3$$

Manomètre différentiel



$$p_A - p_1 = -\gamma_1 h_1$$

$$p_1 - p_2 = \gamma_2 h_2$$

$$p_2 - p_3 = \gamma_3 (h_3 - h_2)$$

$$p_3 - p_4 = -\gamma_4 h_3$$

$$p_4 - p_5 = \gamma_4 h_4$$

$$p_5 - p_B = \gamma_5 h_5$$

$$p_A - p_B = \sum$$

Exemple

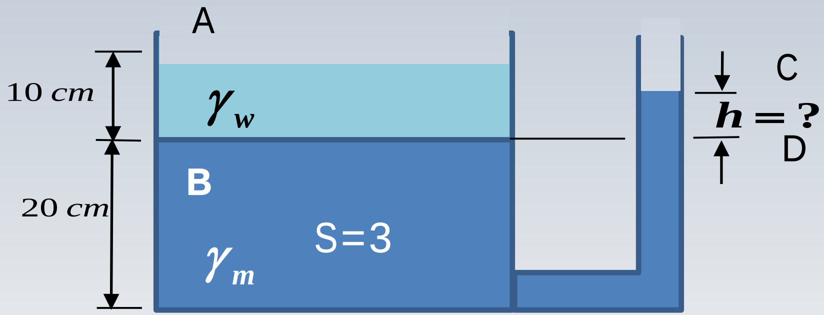
Trouvez la distance ***h*** (la surface du manomètre)

$$p_A + 0.1\gamma_w = p_C + h\gamma_m$$

$$p_A = p_C = 0$$

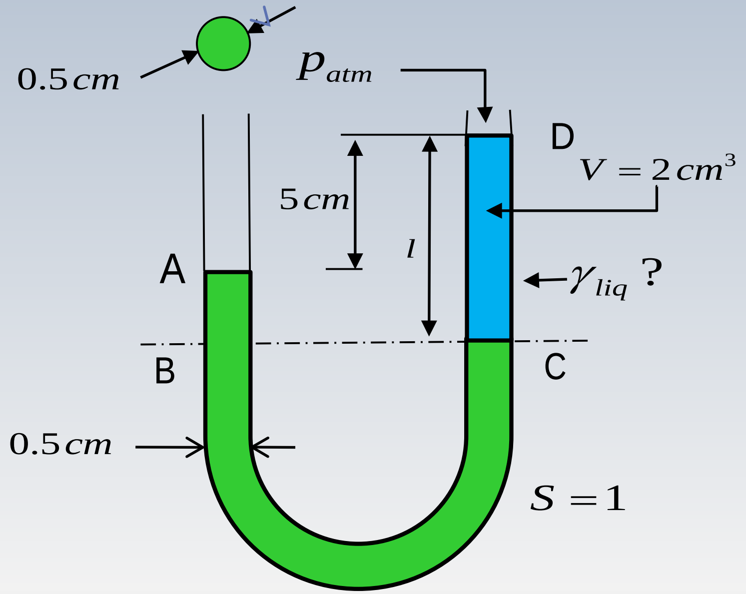
$$h = 0.1 \times \left(\frac{\gamma_w}{\gamma_m}\right)$$

$$\boxed{h = 0.1 \times \left(\frac{1}{3}\right) = 3.33\ cm}$$



Exemple

Trouvez le poids spécifique , $\gamma_{liq}=\rho g$, du **liquide bleu**



$$V = \frac{\pi}{4} d^2 l = \frac{\pi}{4}(0.5)^2 l = 2\,cm^3$$

$$l = 10.186\,cm$$

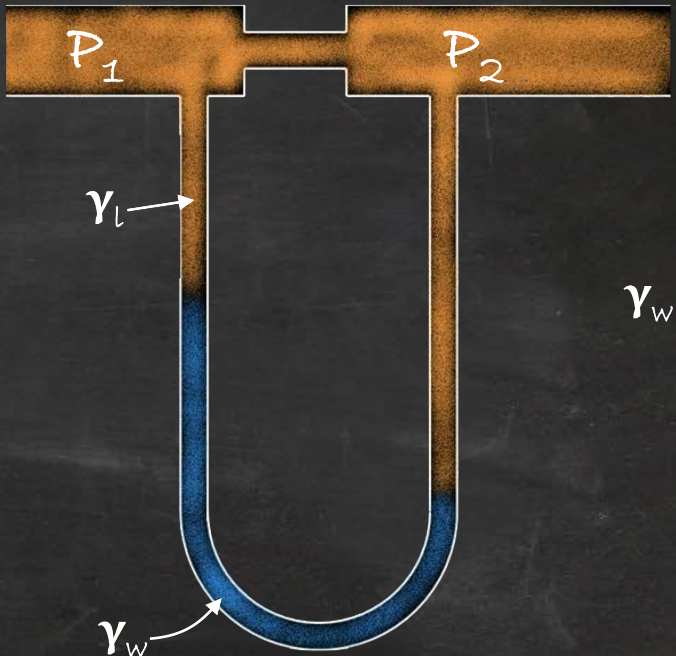
Équation au niveau B-C

$$p_A + (l - 0.05)\gamma = p_D + l\gamma_{liq} \qquad (p_A = p_D)$$

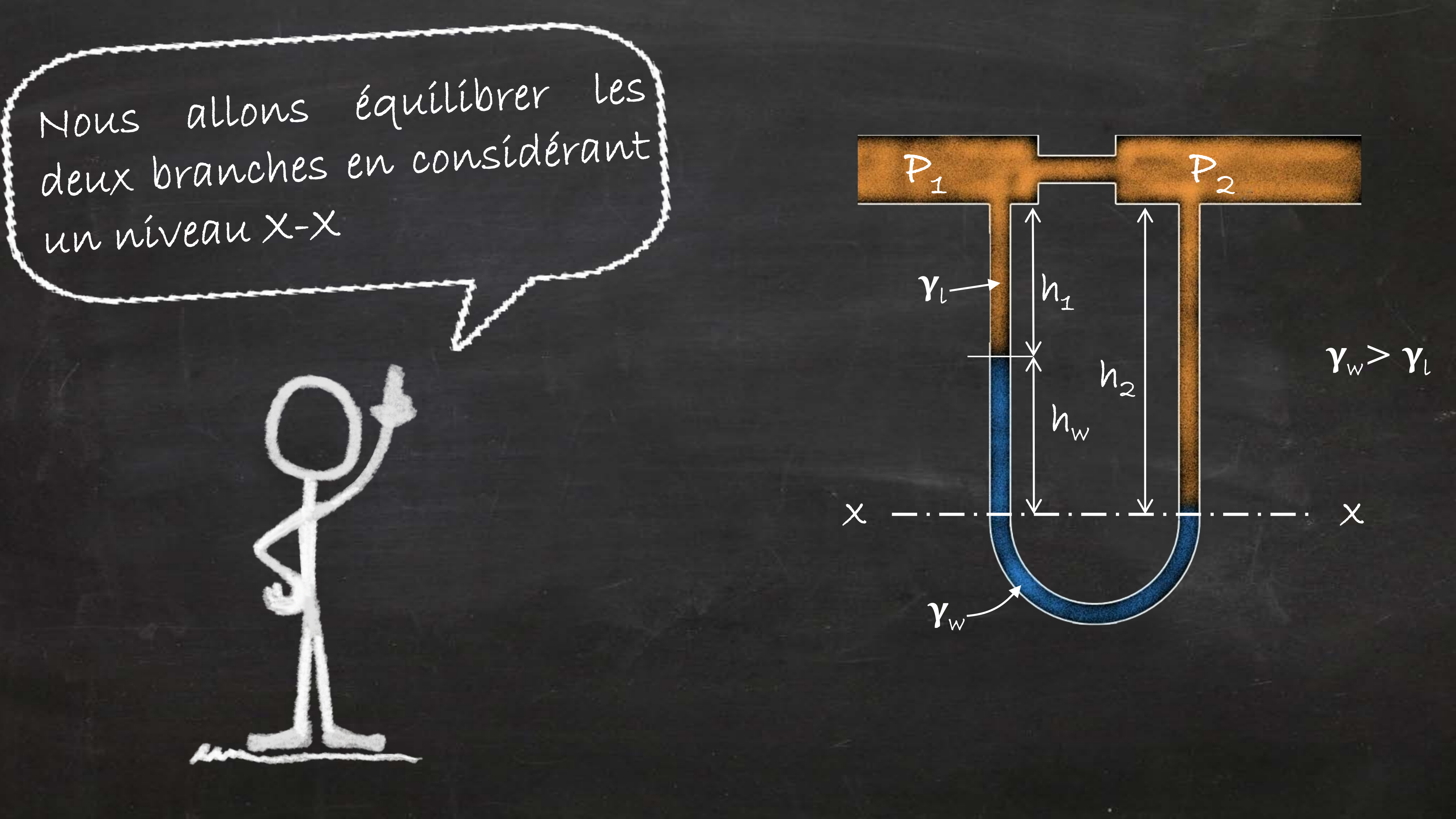
$$\gamma_{liq} = \frac{(l - 0.05)}{l}\gamma$$

$$= \frac{(0.10186 - 0.05)}{0.10186}(9810)$$

$$\boxed{\gamma_{liq} = 4{,}995\,N\,/\,m^2}$$



$\gamma_w > \gamma_l$

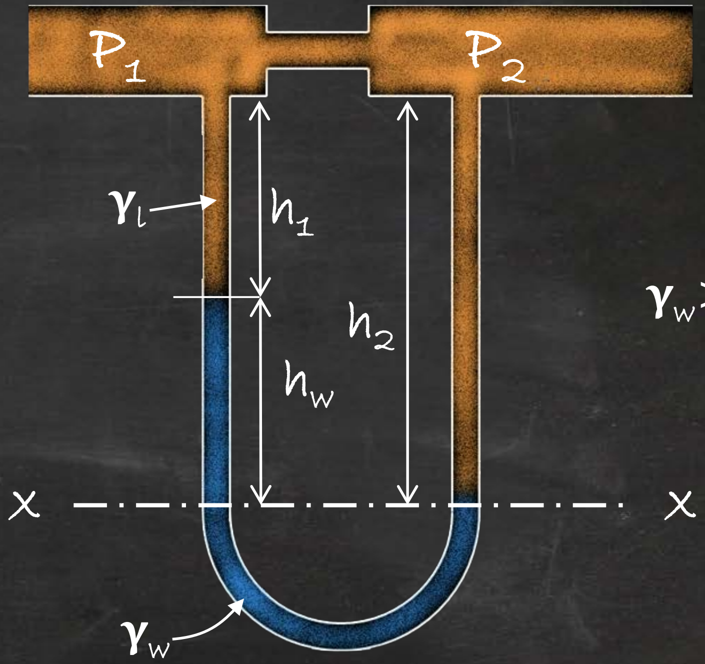

Nous allons équilibrer les deux branches en considérant un niveau X-X
P_1
P_2
γ_l
h_1
h_2
h_w
$\gamma_w > \gamma_l$
X
X
γ_w

$$P_1 + \gamma_l h_1 + \gamma_w h_w = P_2 + \gamma_l h_2$$

$$P_2 - P_1 = \gamma_l h_1 + \gamma_w h_w - \gamma_l h_2$$

$$h_1 - h_2 = - h_w$$

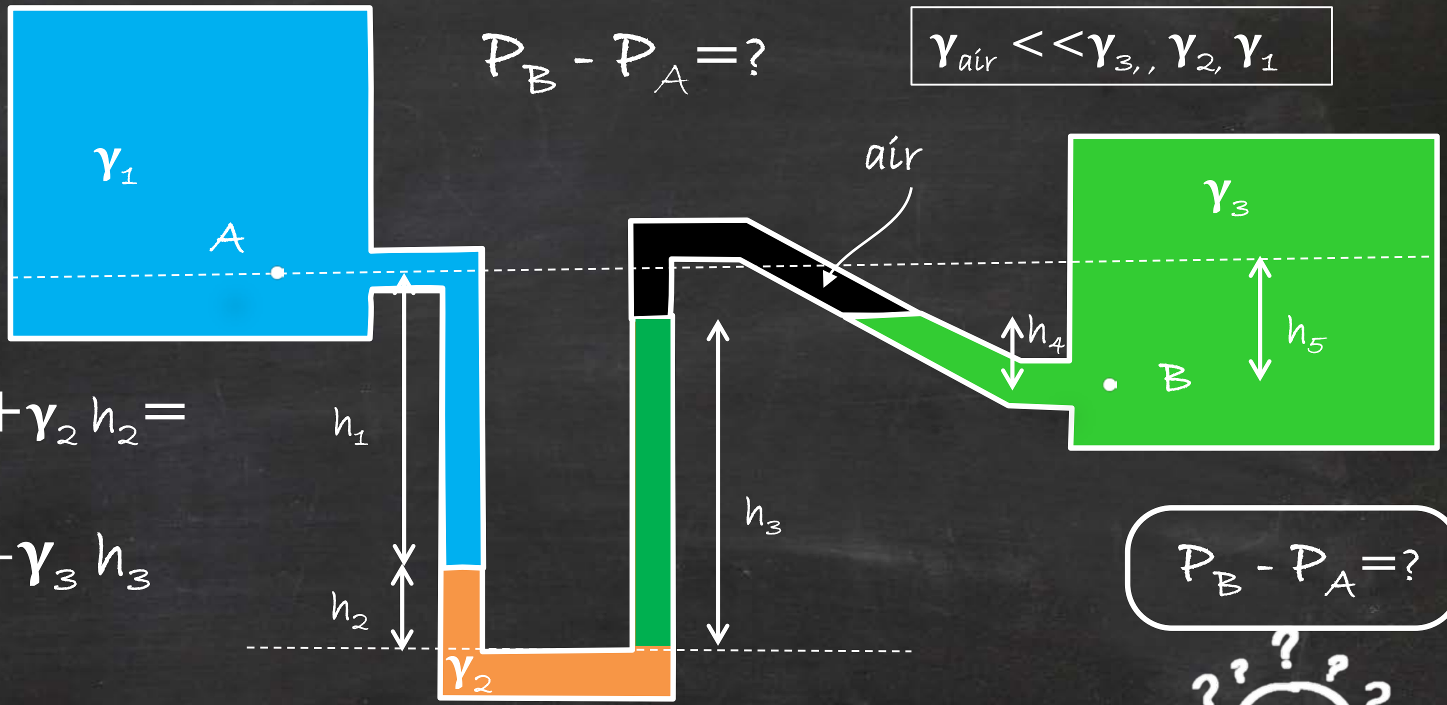
$$\boxed{P_2 - P_1 = h_w (\gamma_w - \gamma_l)}$$



$\gamma_w > \gamma_l$

$$P_B - P_A = ?$$

$$\boxed{\gamma_{air} << \gamma_3, \gamma_2, \gamma_1}$$



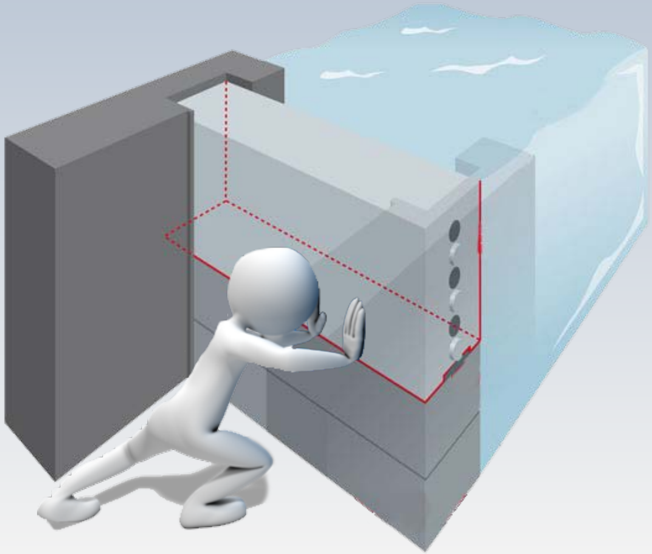
$$P_A + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 =$$

$$P_B - \gamma_3 h_4 + \gamma_3 h_3$$

$$\boxed{P_B - P_A = ?}$$

$$\boxed{P_B - P_A = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 (h_4 - h_3)}$$

À venir...



Les forces des surfaces

Forces hydrostatiques

Chapitre 2 – Distribution de pression

Forces hydrostatiques sur un corps

Un problème souvent abordé lors de la conception d'une structure immergée dans un fluide est celui de la force de pression agissant sur les surfaces

Force sur une surface plane

Notions à revoir

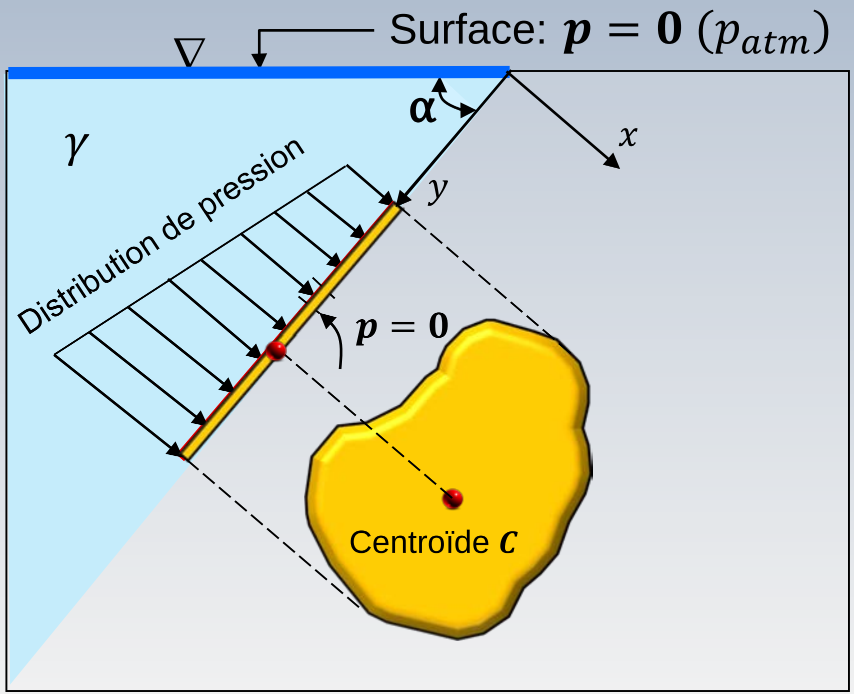
Centroïde, centre de gravité

Moments d'inertie I_{xx}, I_{xy}, I_{yy}

Je clique pour un rappel

Je n'ai pas besoin d'un rappel

Force sur une surface plane inclinée



Pour étudier l'effet de la force produite par la pression hydrostatique sur une surface plane inclinée on a besoin de :

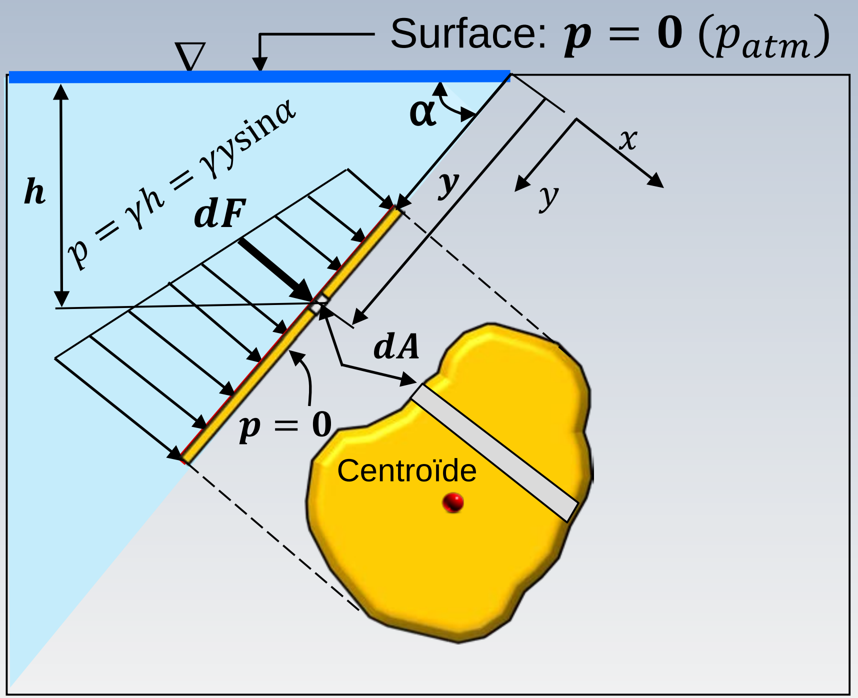
- Trouver **la grandeur** de la force
- Déterminer les coordonnées de son **point d'application**

Force sur une surface plane inclinée

Objectif I: calcul de **la grandeur** de la force de pression hydrostatique résultante

Le développement considèrera des pressions relatives avec la surface libre du liquide ouverte à l'atmosphère, alors $\boldsymbol{p_{atm} = 0}$.

Grandeur de la force

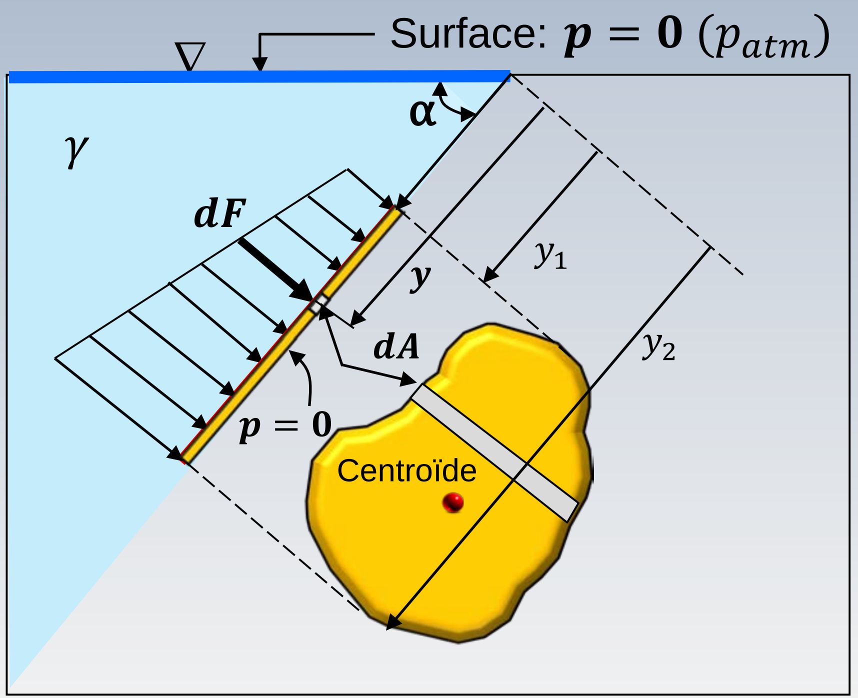


Nous commençons pour regarder la force infinitésimale $dF = pdA$ à une profondeur h agissant sur un élément d'aire dA.

Puisque $p = \gamma h$ et $h = ysin\alpha$, cette force de pression devient:

$$dF = pdA = \gamma ysin\alpha dA$$

Grandeur de la force



La force totale, $\boldsymbol{F}$ est obtenue par l'intégration de cette équation entre les niveaux y_1 et y_2, soit:

$$F = \int_{y_1}^{y_2} \gamma y sin\alpha dA$$

$$= \gamma sin\alpha \int_{y_1}^{y_2} y dA$$

Grandeur de la force

Cette formule $$F = \gamma sin\alpha \int_{y_1}^{y_2} ydA$$

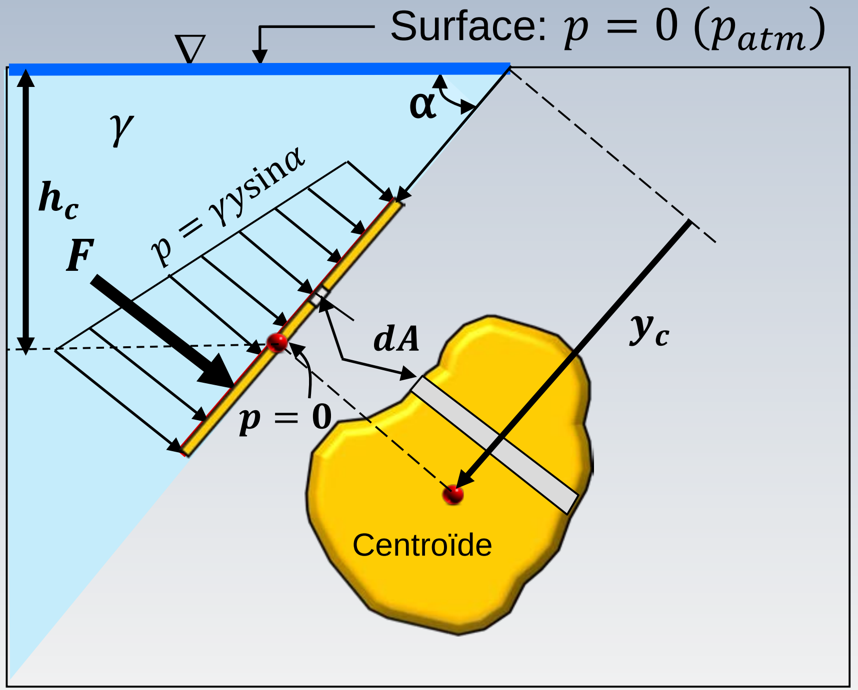
peut être simplifiée d'avantage si l'on tient compte de la définition de la coordonnée $\boldsymbol{y_c}$ du centre de gravité

alors $$\boldsymbol{y_c} = \frac{\int ydA}{A}$$

$$\boldsymbol{F = \gamma sin\alpha y_c A}$$

$$\boldsymbol{F = \gamma h_c A}$$

Force sur une surface plane inclinée



$$\boldsymbol{F = \gamma sin\alpha y_c A}$$

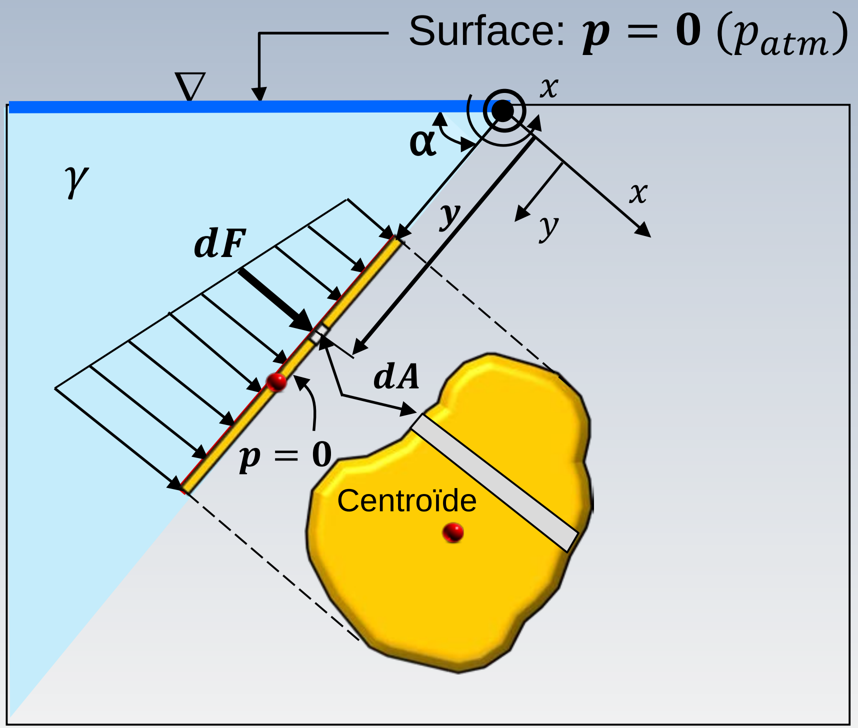
$$\boldsymbol{F = \gamma h_c A = p_c A}$$

A l'aide de l'une de ces formules équivalentes, on calcule la grandeur de la force résultante $\boldsymbol{F}$ produite par la distribution de pression agissant sur la surface

Force sur une surface inclinée

Objectif II: calcul de la distance $\boldsymbol{y_p}$ caractérisant le **point d'application** de la force résultante $\boldsymbol{F}$

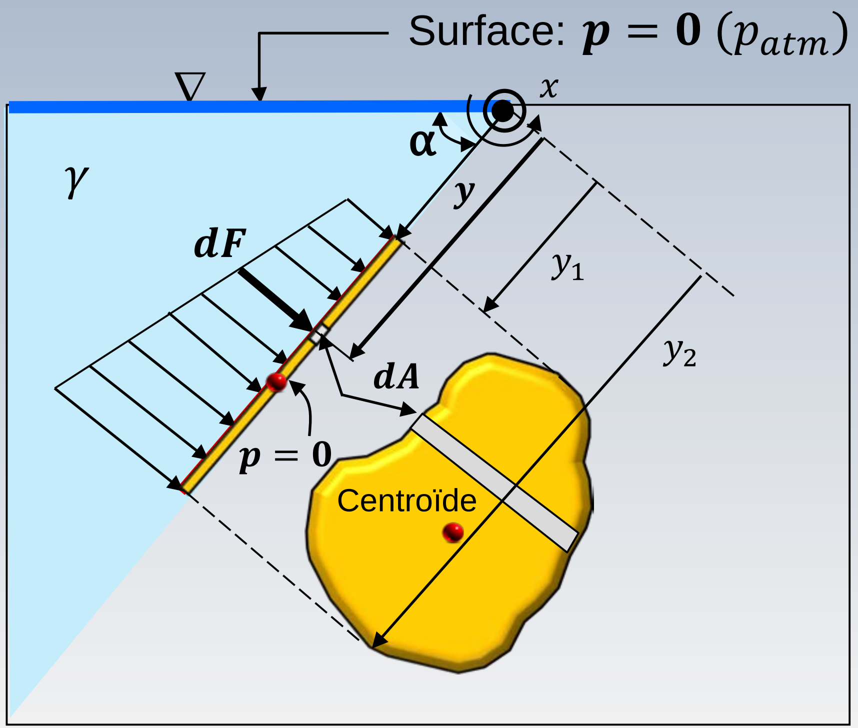
Point d'application de la force



Pour obtenir le point d'application, ou **centre de pression (poussée)** de la force résultante, nous utilisons le concept de moment

Le moment infinitésimal $\boldsymbol{dM_x}$ autour de l'axe des $\boldsymbol{x}$ produit par une force élémentaire $d\boldsymbol{F}$ appliquée à une distance $\boldsymbol{y}$ est

Point d'application de la force



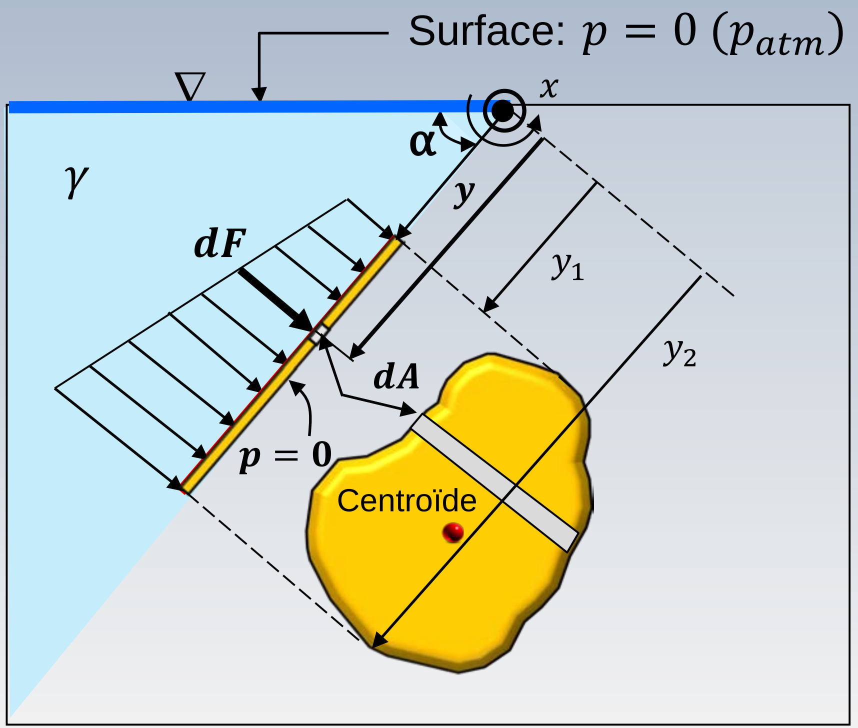
$$dM_x = ydF = y\overbrace{\gamma y sin\alpha dA}^{dF}$$

$$= \gamma y^2 sin\alpha dA$$

Alors, le moment total ou résultant $\boldsymbol{M_x}$ entre $y = y_1$et $y = y_2$ est:

$$M_x = \gamma sin\alpha \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} y^2 dA}_{I_{xx}}$$

Point d'application de la force



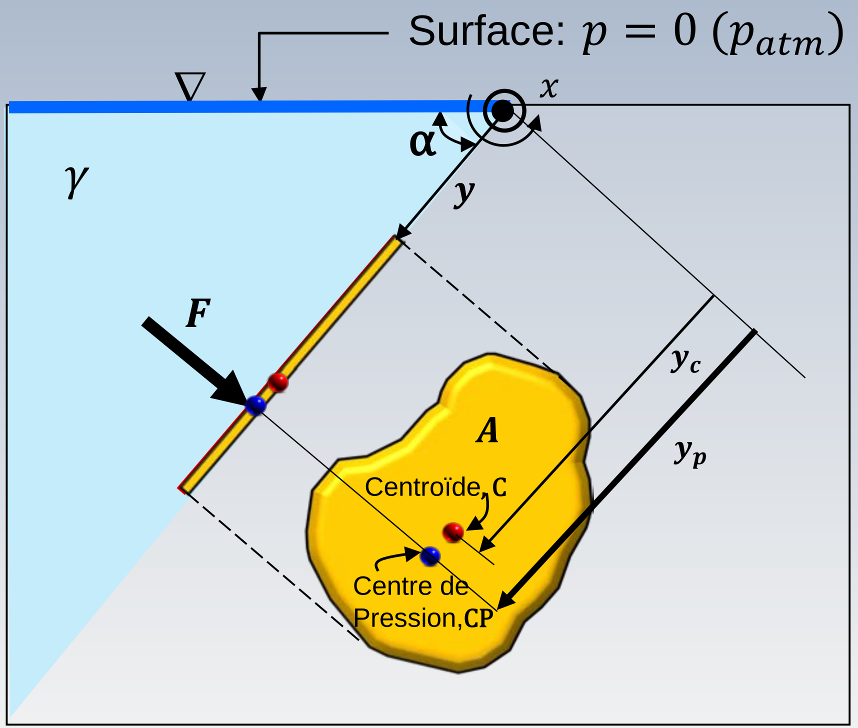
Cette formule pour M_x peut être simplifiée si l'on considère la définition du moment d'inertie:

$$I_{xx} = \int_{y_1}^{y_2} y^2 dA$$

Alors

$$M_x = \gamma sin\alpha I_{xx} \quad ❶$$

Point d'application de la force



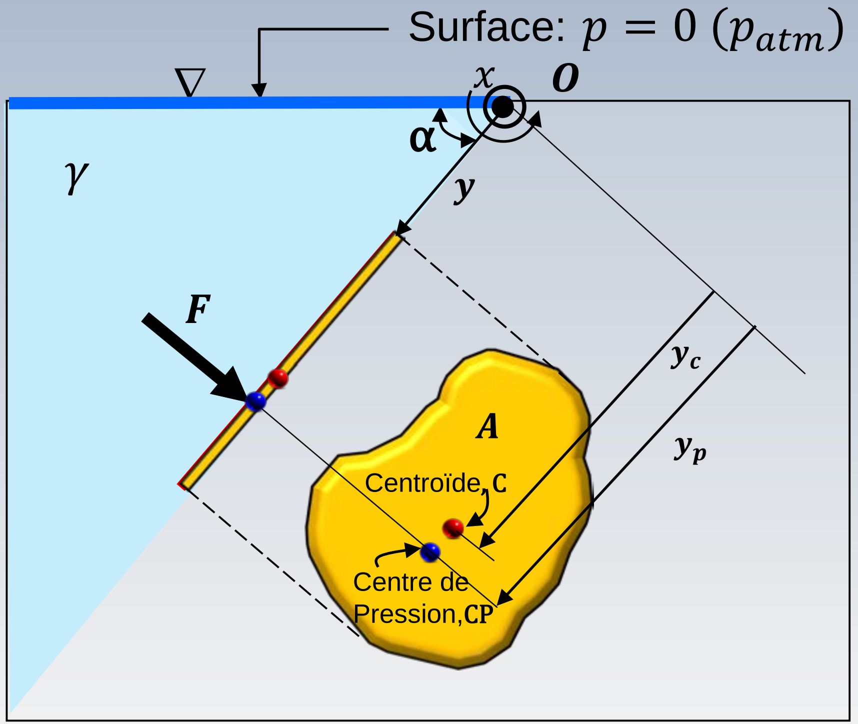
$\boldsymbol{M_x}$ peut aussi être regardé comme le produit de la force, $\boldsymbol{F = \gamma y_c sin\alpha A}$ fois la distance $\boldsymbol{y_p}$

$$M_x = \boldsymbol{y_p} F \quad ❷$$

Alors, l'égalité des équations ❶ et ❷ conduit à:

$$\underbrace{\boldsymbol{y_p} F = \boldsymbol{y_p} \gamma y_c sin\alpha A}_{❷} = \underbrace{\gamma sin\alpha I_{xx}}_{❶}$$

Point d'application de la force



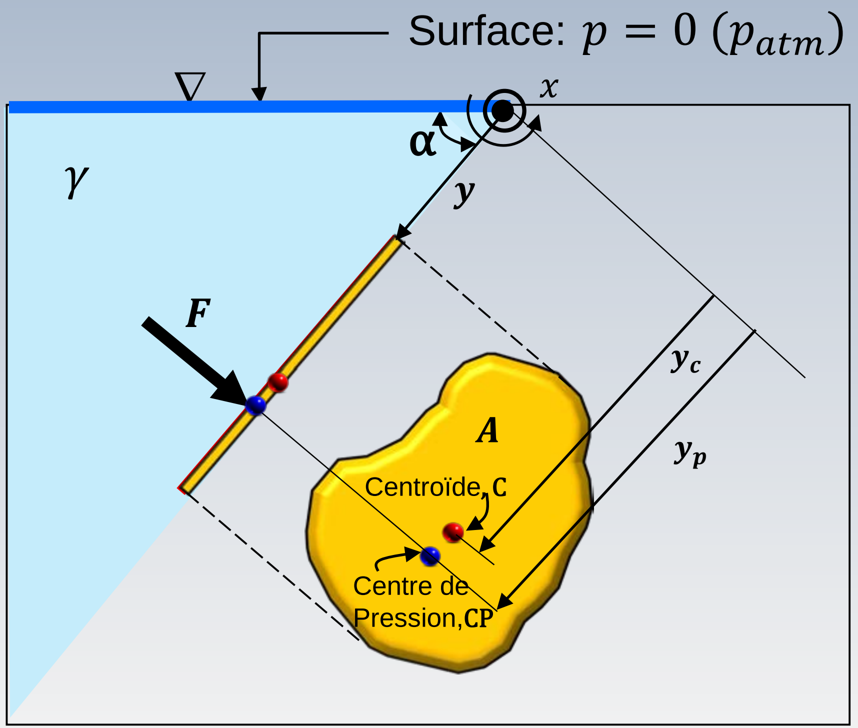
$$\Rightarrow \quad \boxed{y_p = \frac{I_{xx}}{y_c A}}$$

I_{xx} désigne le moment d'inertie par rapport au point O

En pratique c'est plus expéditif d'utiliser **le moment d'inertie I_{cxx} défini par rapport au centroïde C**

Point d'application de la force

Formule



Pour ce faire, on applique **le théorème des axes parallèles**

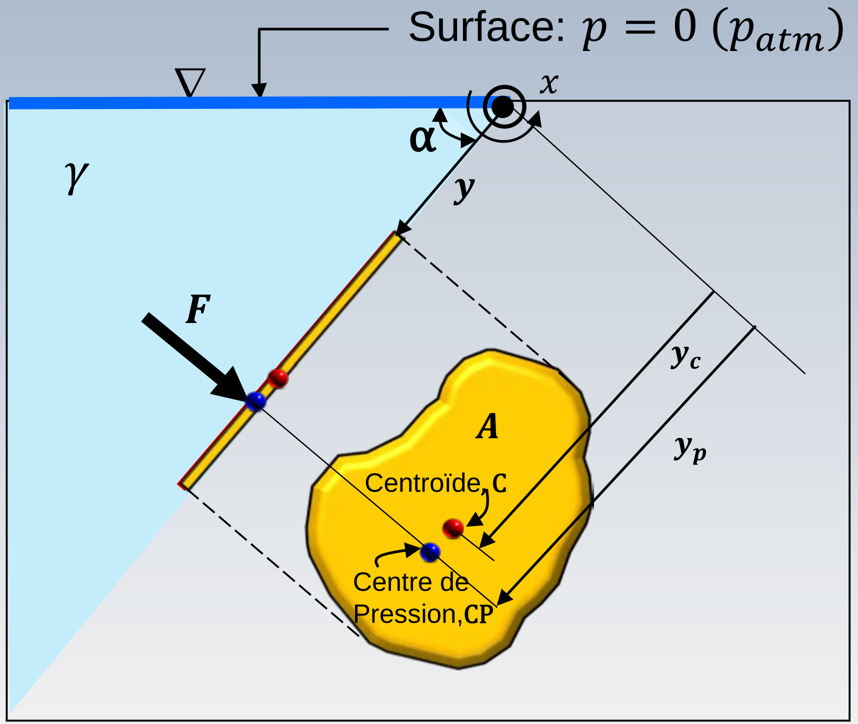
$$I_{xx} = I_{cxx} + Ay_c^2$$

Moment d'inertie autour du centroïde

d'où $y_p = \dfrac{I_{xx}}{y_c A}$

$$\boxed{\boldsymbol{y_p = y_c + \frac{I_{cxx}}{y_c A}}}$$

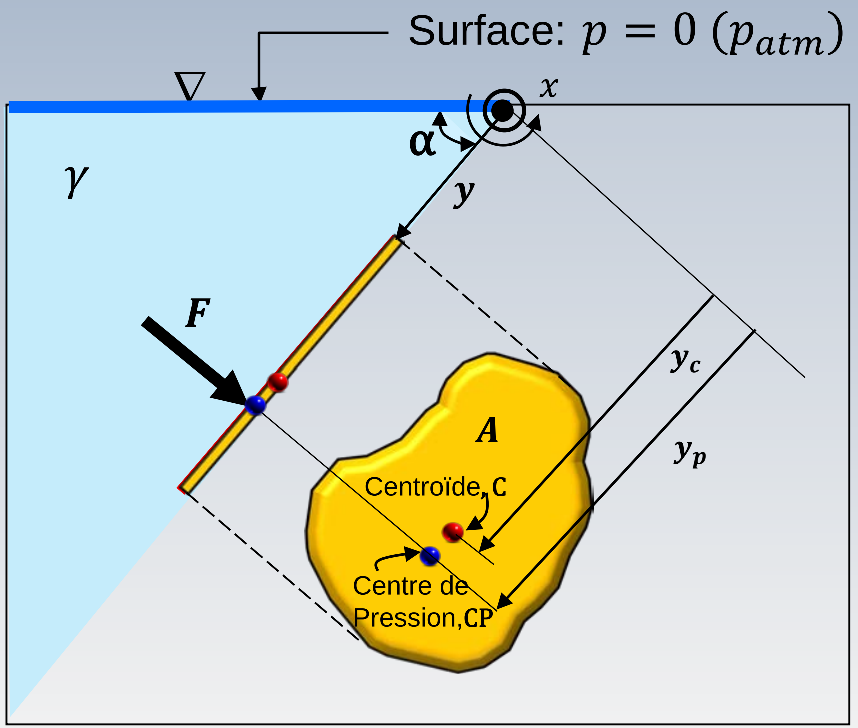
Point d'application de la force



Puisque $p_c = \gamma h_c$ et $h_c = y_c sin\alpha$, cette formule peut s'écrire également en fonction de la pression au centroïde

$$y_p = y_c + \frac{\gamma sin\alpha\, I_{cxx}}{p_c A}$$

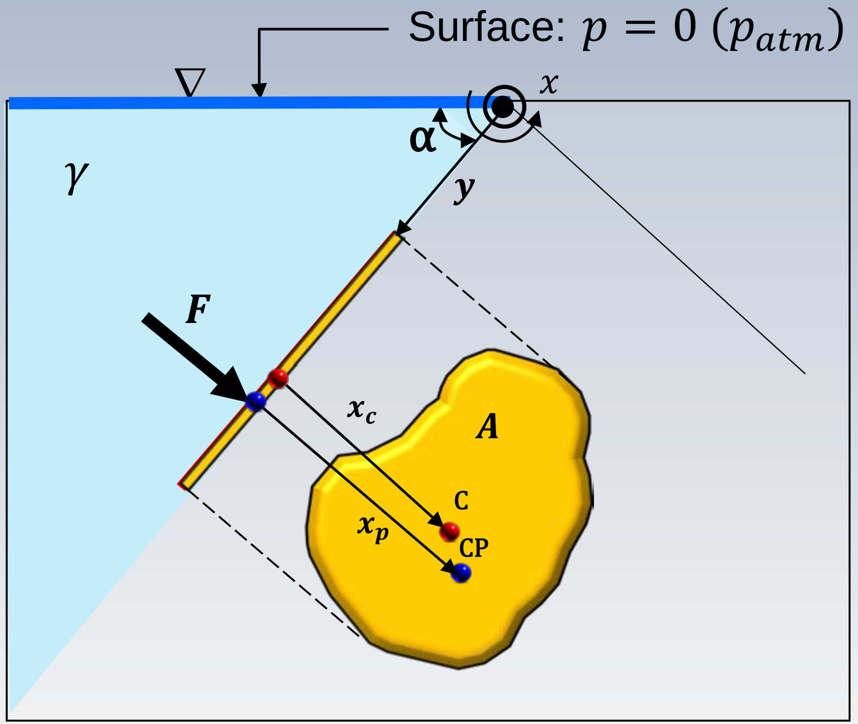
Point d'application de la force



Remarques

- Le terme $\frac{I_{cxx}}{y_c A}$ mesure la distance (y) entre le centroïde C et le centre de poussée CP
- Le centre de poussée se situe plus bas que le centroïde

Point d'application de la force

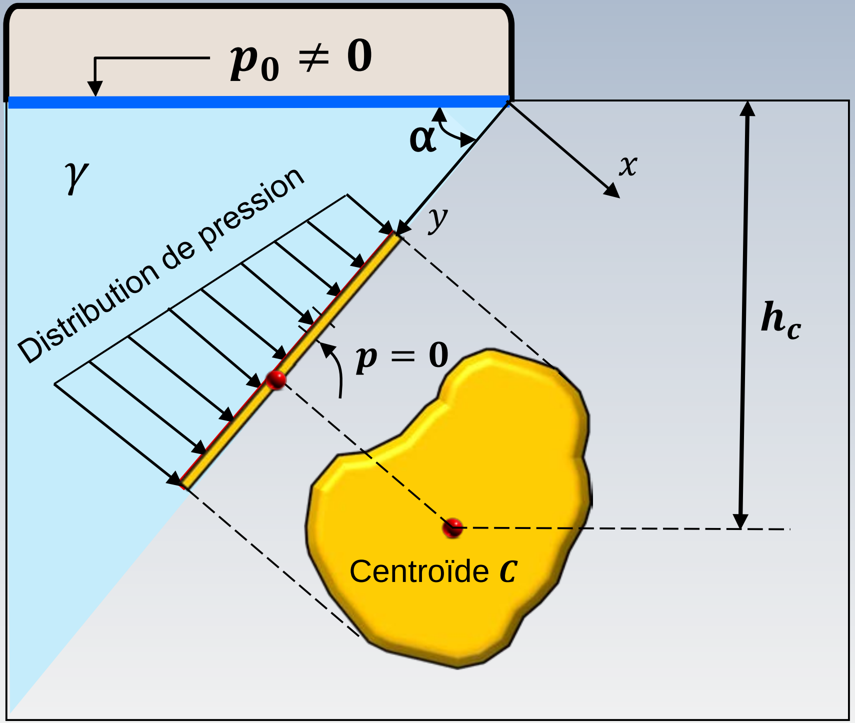


Remarques

- Dans la grande majorité de cas on ne requiert que de la coordonnée y_p
- Néanmoins, la formule pour la distance correspondante x_p est

$$x_p = x_c + \frac{I_{cxy}}{y_c A}$$

Présence d'une pression jauge



Lorsque la surface du liquide est soumisse à une **pression jauge** p_0 ,les formules pour la grandeur de la force F et son point d'application y_c sont:

$$F = (p_0 + \gamma h_c)A = p_c A$$

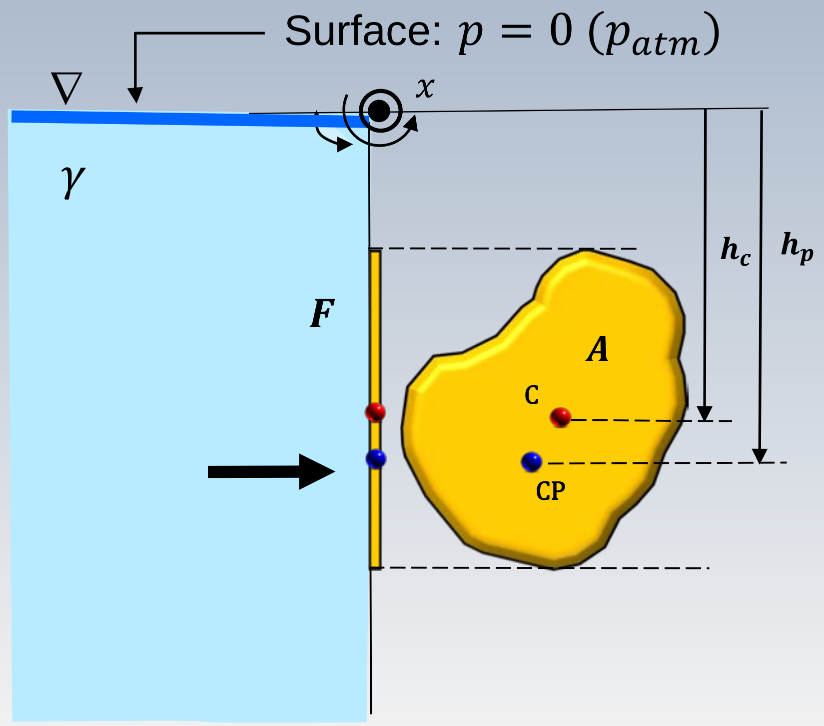
$$y_p = y_c + \frac{\gamma sin\alpha \, I_{cxx}}{p_c A}$$

Cas particuliers

Les cas des surfaces verticales et horizontales, sont des configurations d'intérêt pour l'étude des forces hydrostatiques sur des surfaces gauches.

Voici les formules spécifiques pour ces deux cas limites

Cas particuliers:surface verticale

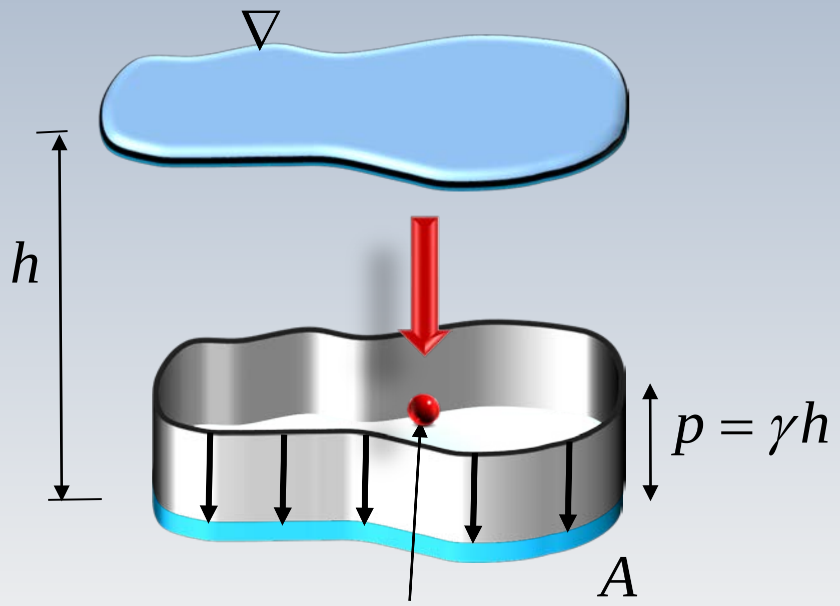


Pour une **surface verticale,** $\boldsymbol{y_c = h_c}$ et $\boldsymbol{y_p = h_p}$, de sorte que les formules pour la force et son point d'application deviennent:

$$\boldsymbol{F = \gamma h_c A}$$

$$\boldsymbol{h_p = h_c + \frac{I_{cxx}}{h_c A}}$$

Cas particulier: surface horizontale



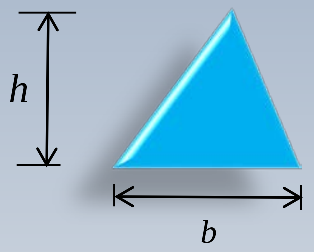
$$x_c = \frac{\int x dA}{A} \qquad y_c = \frac{\int y dA}{A}$$

Pour une **surface horizontale** $\boldsymbol{h = h_c = cnste,\ sin\alpha = 0}$. Alors, les formules pour la force et le point d'application deviennent :

$$\boxed{\boldsymbol{F = \gamma h_c A}}$$

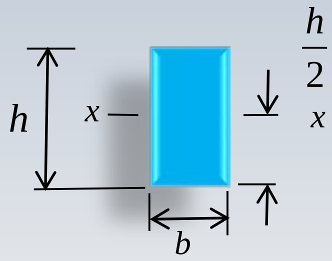
$$\boxed{\boldsymbol{h_p = h_c}}$$

Propriétés de quelques géométries



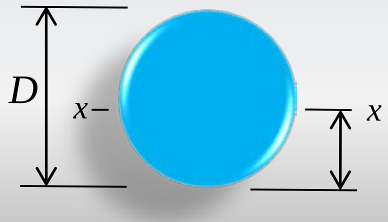
$$A = \frac{bh}{2}$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{bh^3}{36}$$



$$A = bh$$

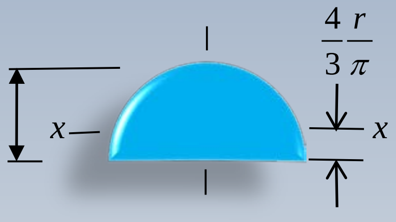
$$\bar{I}_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$



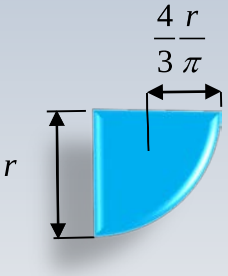
$$A = \pi r^2$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi r^4}{4}$$

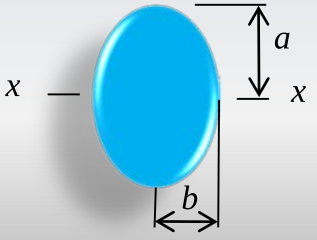
Propriétés de quelques géométries



$$A=\frac{\pi r^2}{2} \qquad \bar{I}_{xx}=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)r^4$$



$$A=\frac{\pi^2}{4} \qquad \bar{I}_{xx}=\left(\frac{\pi}{16}-\frac{4}{9\pi}\right)r^4$$



$$A=\pi ab \qquad \bar{I}_{xx}=\frac{\pi a^3 b}{4}$$

Résumé: surface plane

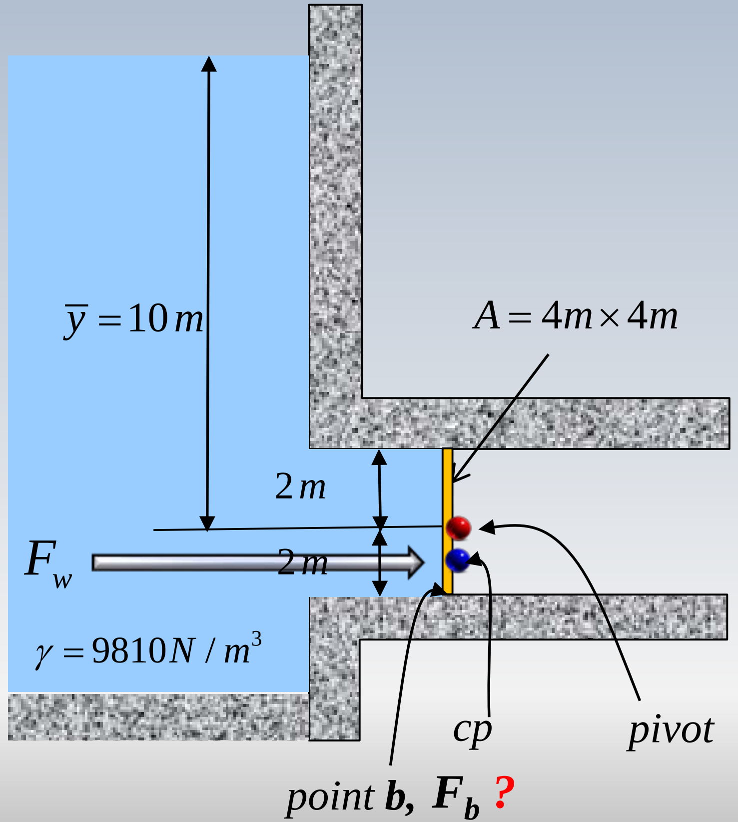
Pour calculer la force sur une surface plane **verticale ou inclinée** on évalue la pression au centroïde selon **la coordonée verticale h**

$$F = p_c A = \gamma h_c A$$

Le point d'application de la force y_p est calculé en fonction de la coordonnée y **coïncidant avec l'inclinaison de la plaque**

$$y_p = y_c + \frac{I_{cxx}}{y_c A}$$

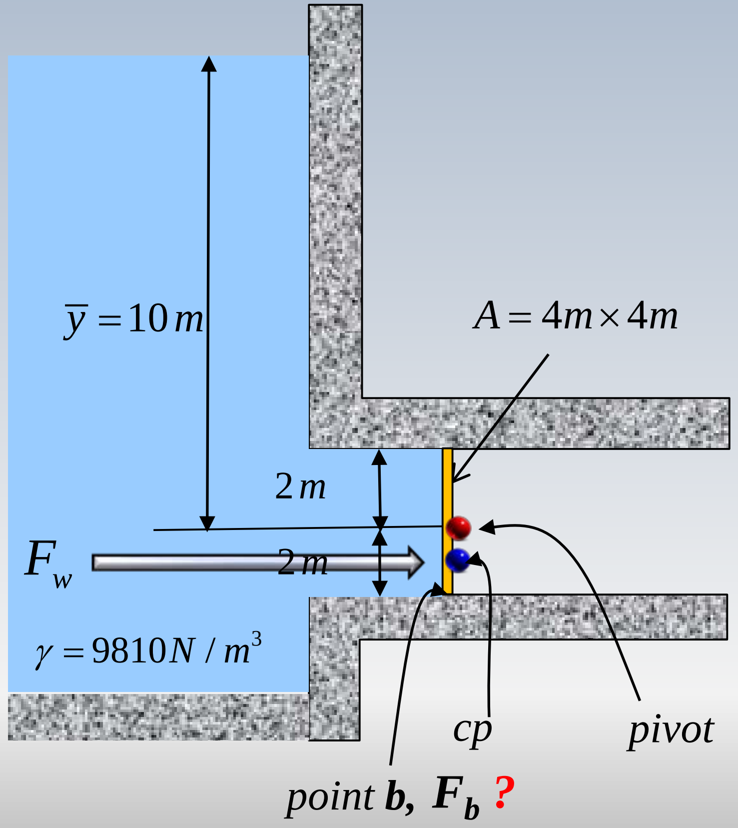
Exemple $\gamma = \rho g \quad = (1000 \times 9.81) = 9810\left(N / m^3\right)$



On doit trouver la force $\boldsymbol{F_b}$ nécessaire pour empêcher que la **vanne carrée** tourne par l'action de la force de pression

On détermine d'abord la grandeur de la force de pression ainsi que son point d'application

Exemple $\gamma = \rho g \quad = (1000 \times 9.81) = 9810\left(N/m^3\right)$



La force F_w

$$F_w = \bar{p}A \quad = (\gamma\bar{y})A \longleftarrow \begin{cases} \bar{y} = 10m, \\ A = 4 \times 4m^2 \end{cases}$$

$$F_w = (9810 \times 10)(4 \times 4)$$

$$\boldsymbol{F_w = 1569.6\,kN}$$

Le centre de pression CP

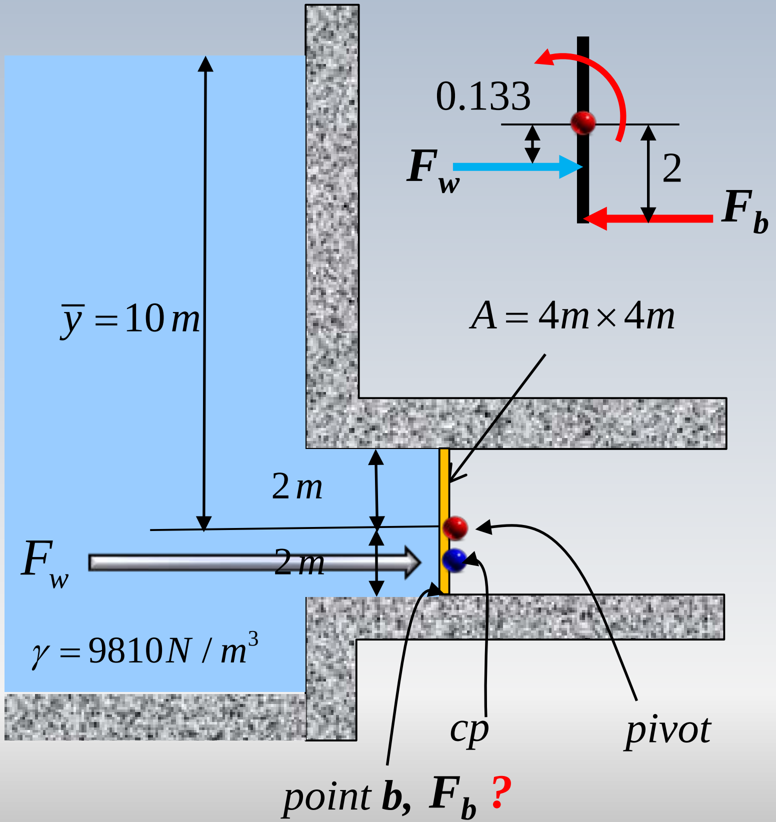
$$y_p - y_c = \frac{I_{cxx}}{y_c A}$$

$$I_{cxx} = b\,h^3/12$$

Exemple

$$F_w = 1569.6\,kN$$

$$\gamma = \rho g \quad = 9810\left(N/m^3\right)$$



$$y_p - y_c = \frac{I_{cxx}}{y_c A} = \frac{b\,h^3/12}{y_c A}$$

$$y_p - y_c = \frac{4 \times 4^3/12}{(10 \times 4 \times 4)} = 0.133\,m$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow \quad 0.133F_w - 2F_b = 0$$

$$F_b = (0.133/2)F_W$$

$$= (0.133/2) \times 1569.6\,kN$$

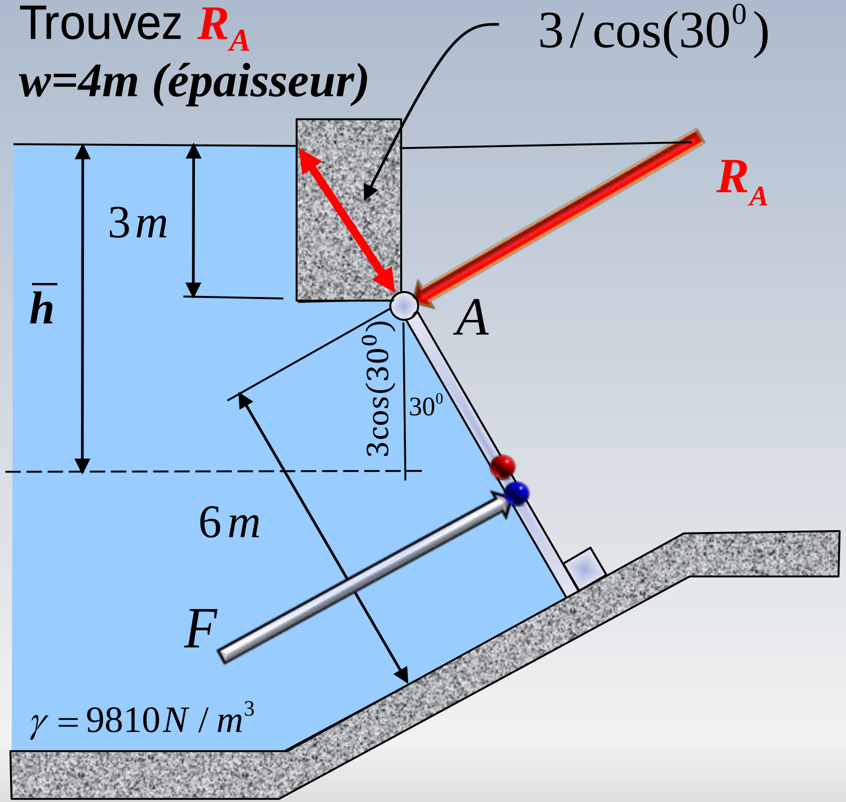
$$\boldsymbol{F_b = 104.378\,kN}$$

Exemple

$$\gamma = \rho g \quad = (1000 \times 9.81) = 9810\left(N/m^3\right)$$

Trouvez R_A

w=4m (épaisseur)



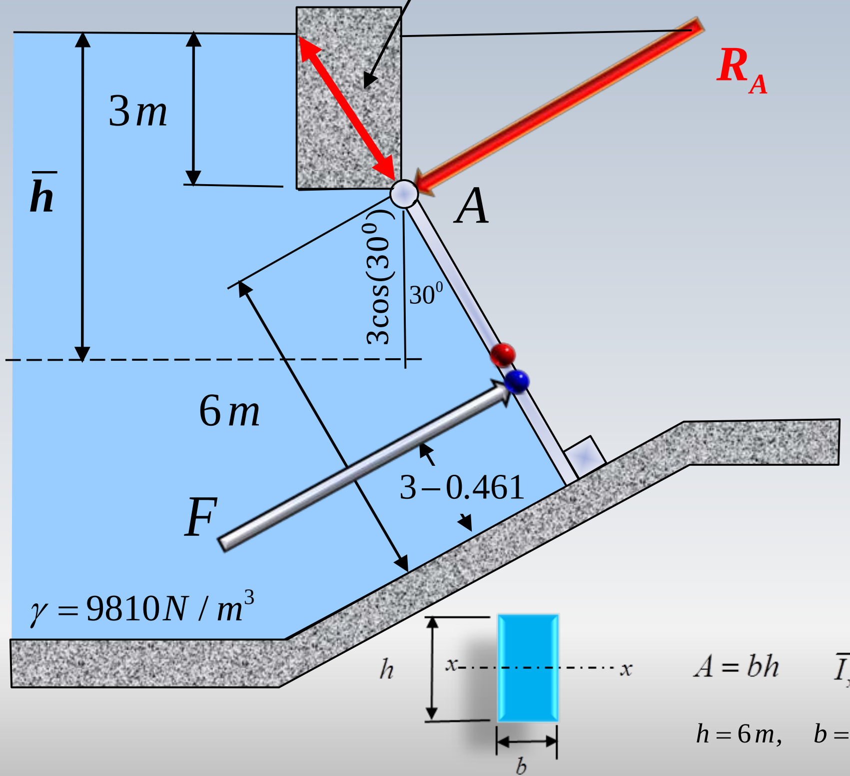
On doit trouver la force de réaction R_A

On commence par le calcul de la grandeur de la force de pression sur la vanne de $w = 4m$ d'épaisseur et par la définition de son point d'application

Exemple $\gamma = \rho g \quad = (1000 \times 9.81) = 9810 \left(N / m^3 \right)$

Trouvez R_A

w=4m (épaisseur)



$A = bh \qquad \bar{I}_{xx} = \dfrac{bh^3}{12}$

$h = 6m, \quad b = 4m$

$$F = \bar{p}A = \gamma \bar{h} A$$

$$\bar{h} = 3 + 3\cos 30^0 \qquad A = 4 \times 6$$

$$F = 9810(3 + 3\cos 30) \times (4 \times 6)$$

$$\boldsymbol{F = 1\,318\,000\ N}$$

$$\bar{y} = 3 + 3/\cos(30^0) = 6.464\,m$$

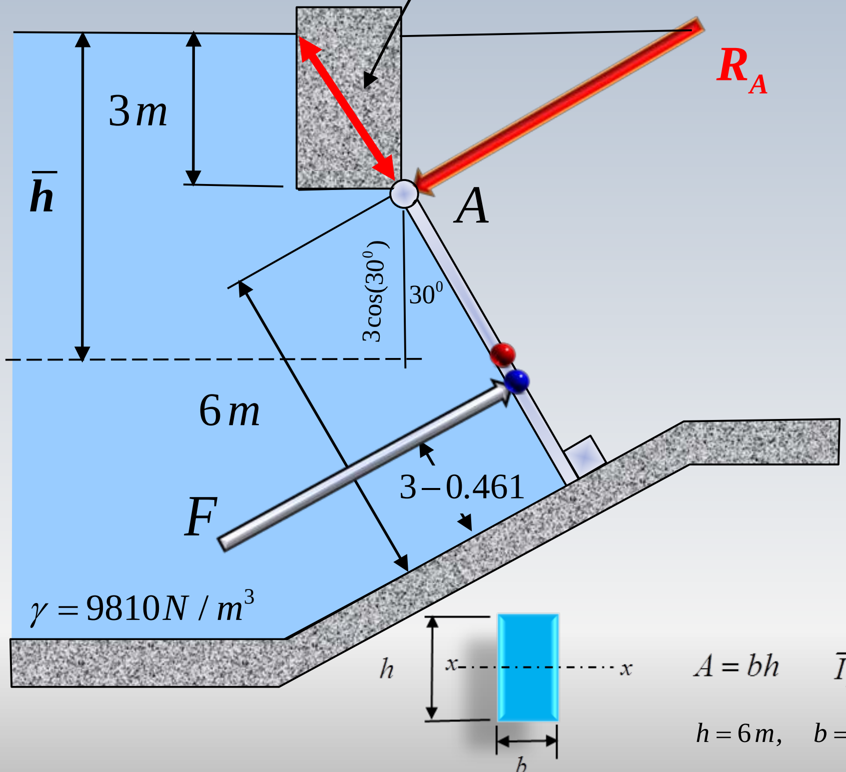
$$y_p - \bar{y} = \frac{\bar{I}}{\bar{y}A} = \frac{4 \times 6^3/12}{(6.464 \times 24)}$$

$$\boldsymbol{y_p - \bar{y} = 0.4641\,m}$$

Exemple $\gamma = \rho g \quad = (1000 \times 9.81) = 9810 \left(N / m^3 \right)$

Trouvez R_A

w=4m (épaisseur)



$A = bh \qquad \bar{I}_{xx} = \dfrac{bh^3}{12}$

$h = 6m, \quad b = 4m$

$F = 1\,318\,000\,N \qquad y_p - \bar{y} = 0.4641\,m$

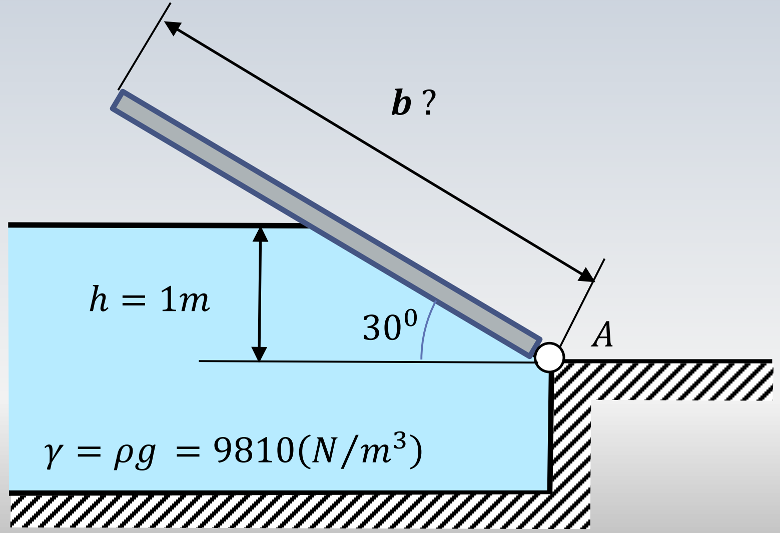
$$\sum M = 0 = 6R_A - (3 - 0.4641)F$$

$$R_A = (3 - 0.4641)F / 6 = (0.42265)1318kN$$

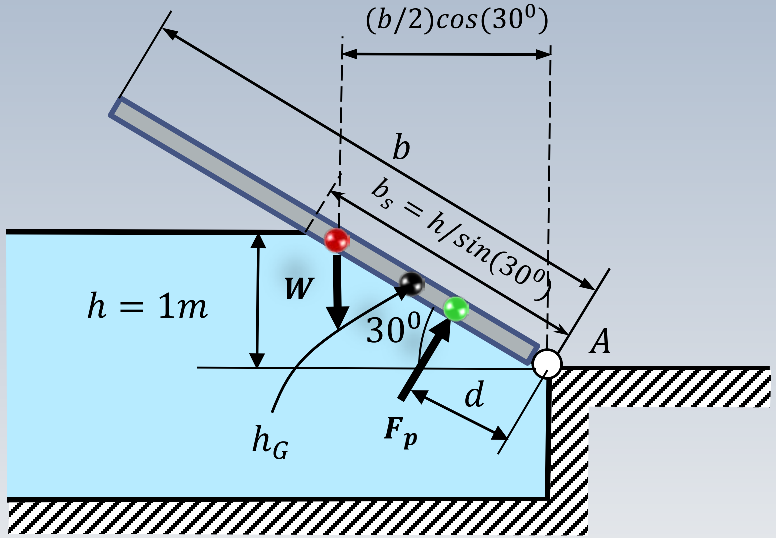
$$\boxed{R_A = 557.05kN}$$

Exemple

Une vanne de masse $\boldsymbol{m = 2000kg}$ tourne autour du pivot $\boldsymbol{A}$. L'épaisseur de l'écluse (direction normale à l'écran) est $\boldsymbol{l = 8m}$. On vous demande de calculer la distance $\boldsymbol{b}$ lorsque le système illustré sur la figure est à l'équilibre.



Exemple



$m = 2000kg,\ l = 8m, \gamma = 9810(N/m^3), g = 9.8\, m/s^2$

Calcul de la force de poussée F_p

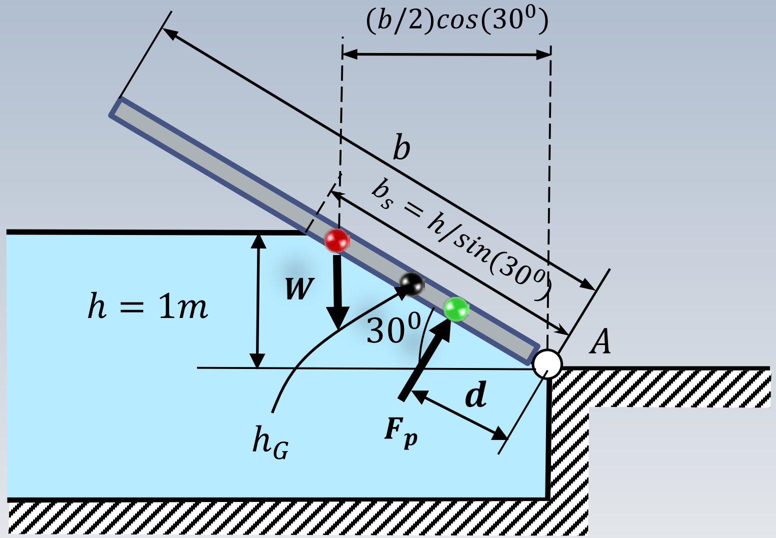
$$W = mg$$
$$= 2000 \times 9.8 = \mathbf{19600N}$$

- $h_G = h/2 = 0.5m$

$$b_s = h/sin(30^0)$$
$$= 1/(1/2) = 2m$$

$$F_p = \gamma h_G b_s l$$
$$= 9810 \times 0.5 \times 2 \times 8 = \mathbf{78480\ N}$$

Exemple



Calcul de la distance $\boldsymbol{b}$

- $d = b_s/3 \quad = 2/3$ Centre de pression

Moment

$$\sum M_A = F_p \times d \quad = W(\boldsymbol{b}/2)cos(30^0)$$

$$78480 \times 2/3 = 19600(\boldsymbol{b}/2)cos(30^0)$$

$$\boldsymbol{b = 6.15m}$$

Chapitre 2 – Distribution de pression

2.01 2.02 2.03 2.04 2.05 2.06

2.08 2.09

Forces sur un surface gauche

Maintenant nous allons regarder l'effet de la pression sur une surface gauche

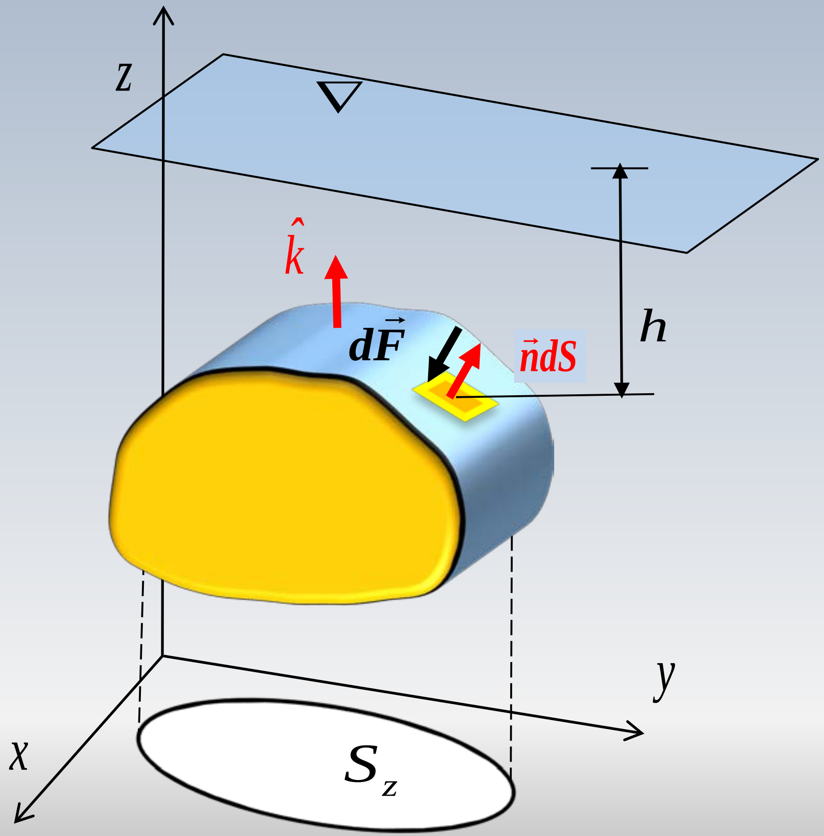
Forces verticale et horizontale

Sur une surface plane immergée, toutes les forces élémentaires de pression sont parallèles (la normale à la surface est unique). Ceci n’est évidemment pas le cas pour une surface gauche

A lieu d’effectuer une combinaison vectorielle des forces infinitésimales pour obtenir la force résultante, il plus pratique de calculer **les composantes horizontales et verticales**

Par la suite, on peut les combiner pour obtenir la grandeur ainsi que la direction de la force résultante

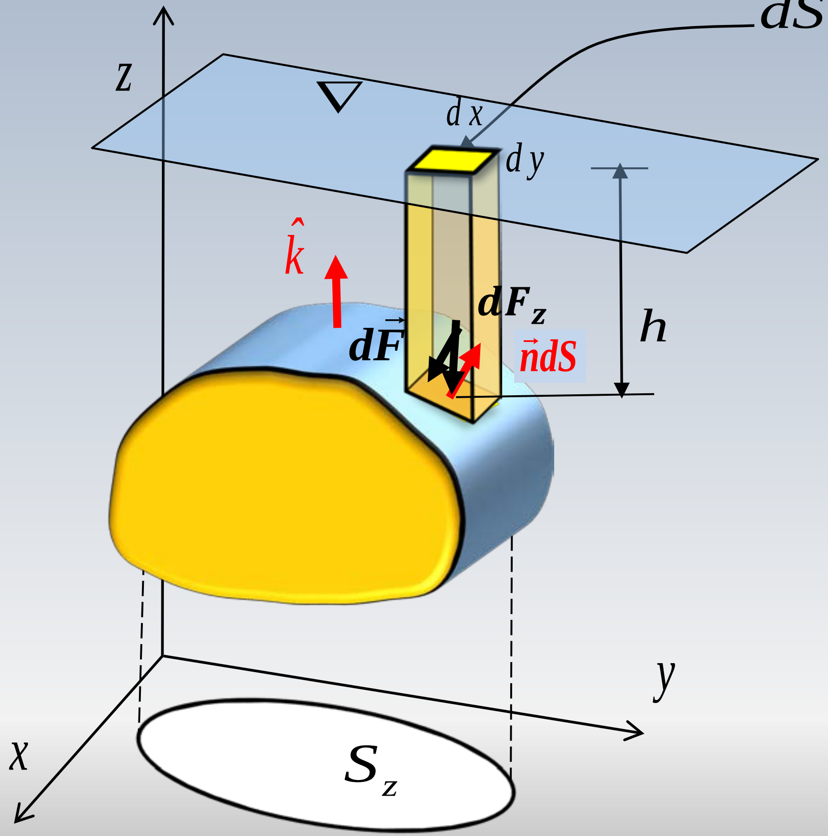
Force verticale



On regarde l'action de la pression $\boldsymbol{p}$ sur la surface élémentaire $\vec{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{dS}$ d'un corps immergé situé à une profondeur $\boldsymbol{h}$

Pour obtenir la composante **verticale** de la force, on réalise une projection dans la direction du vecteur $\widehat{\boldsymbol{k}}$

Force verticale



$$dS_z = dxdy$$

La composante de $\boldsymbol{d\vec{F} = -p\vec{n}dS}$ dans la direction $\hat{k}$ est

$$\boldsymbol{dF_z} = d\vec{F}\cdot\hat{k} = -p\hat{k}\cdot\vec{n}dS = -p\,dxdy$$

et avec $p = \gamma h$ on a:

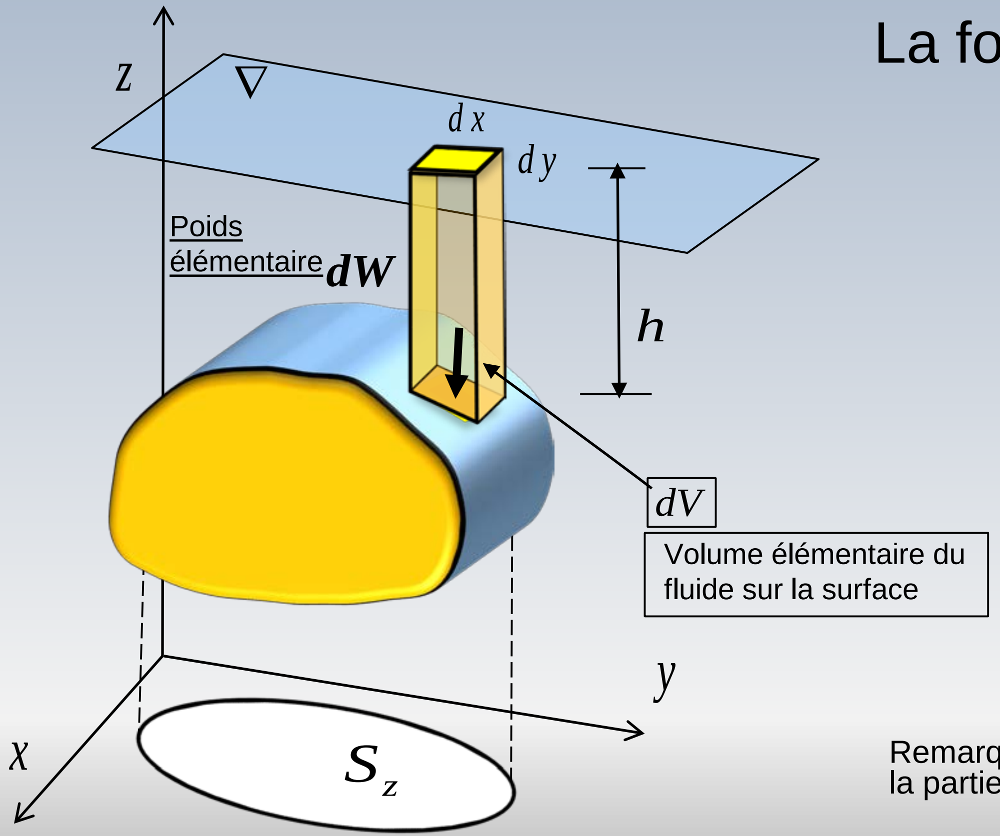
$$dF_z = -\gamma h dxdy \;\; = -\gamma dV \; = dW$$

Volume élémentaire du fluide sur la surface

Poids élémentaire

Remarque: l'analyse présentée ne considère que la force sur la partie supérieure du corps

Force verticale



La force verticale totale est alors

$$\boxed{F_z = \int dW = W}$$

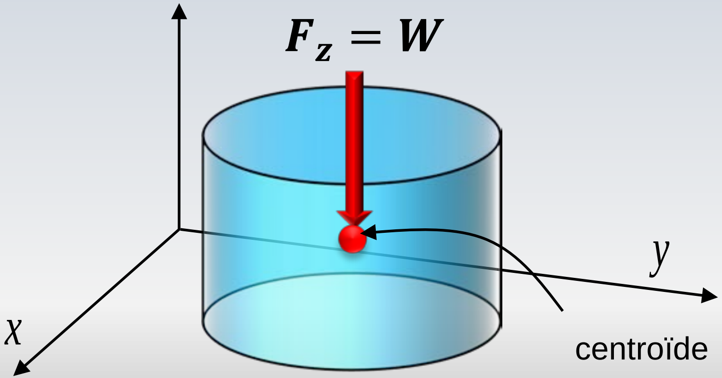
Poids total du volume de fluide sur la surface

Force verticale résultante sur la surface immergée

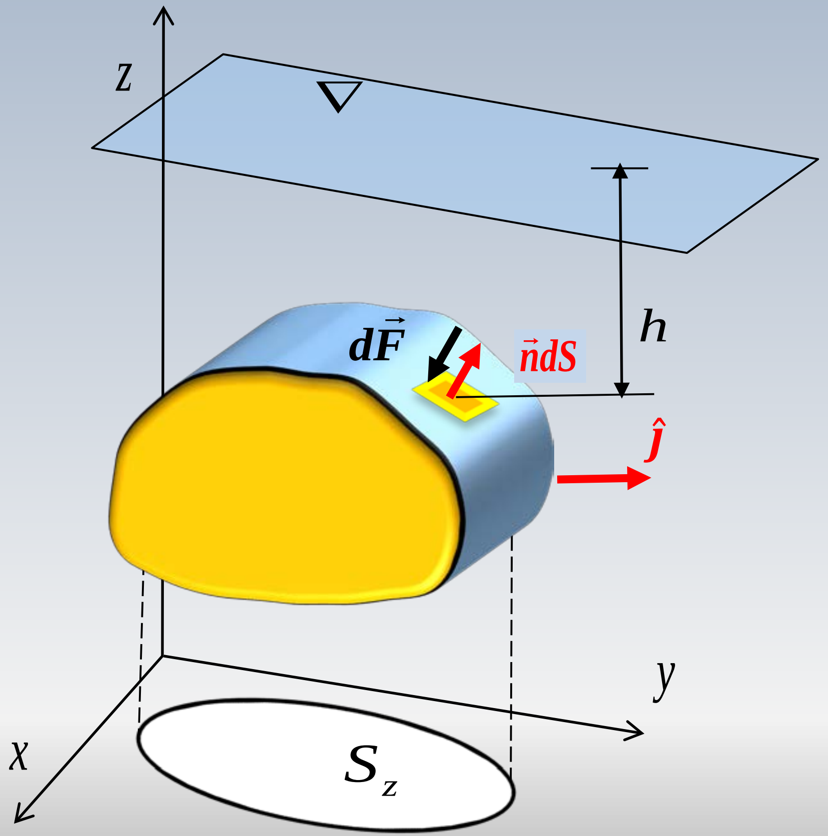
Remarque: l'analyse présentée ne considère que la force sur la partie supérieure du corps

Force verticale

La **force verticale résultante** $\boldsymbol{F_z}$ sur une surface immergée gauche correspond au **poids** $\boldsymbol{W}$ du volume de la colonne de fluide en contacte avec la surface. La ligne verticale d'action de cette force passe par le **centroïde** du volume de la colonne de fluide

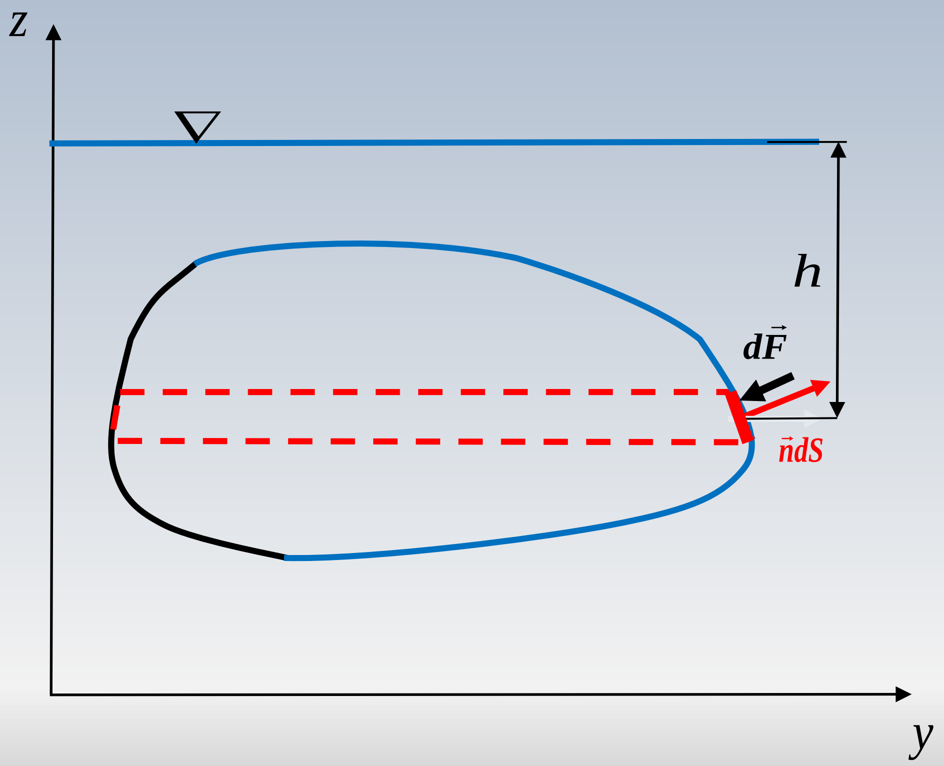


Force horizontale



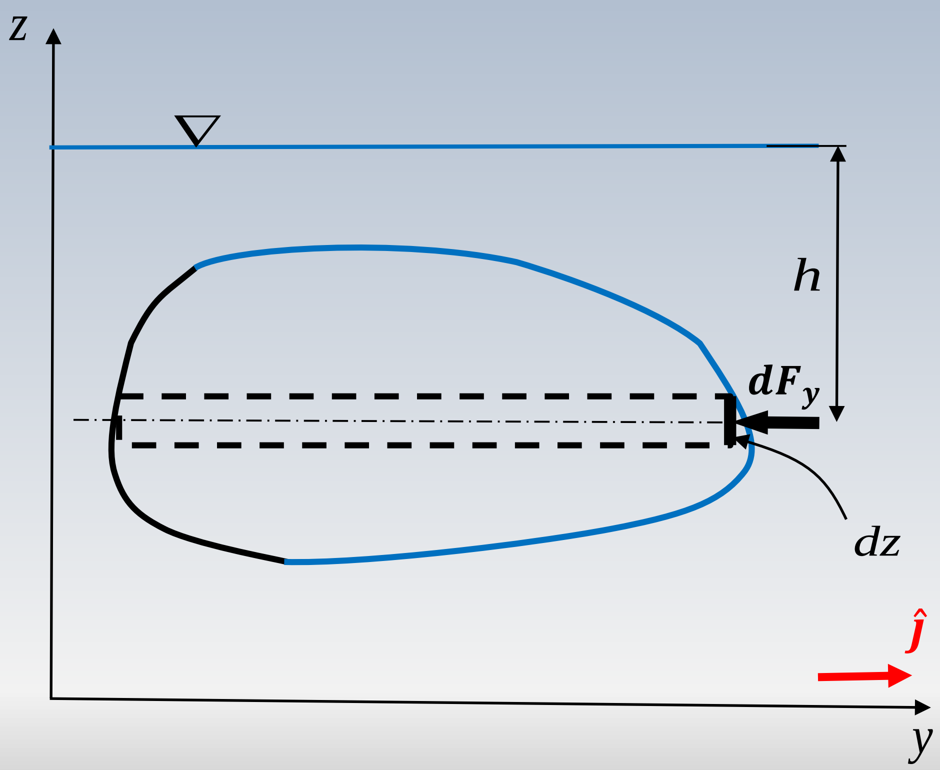
Pour obtenir la composante **horizontale** de la force de pression, on projette cette force dans la direction du vecteur $\hat{\jmath}$

Force horizontale



On examine encore la force élémentaire causée par la pression $\boldsymbol{p}$ sur une surface $\vec{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{dS}$ située à une profondeur $\boldsymbol{h}$

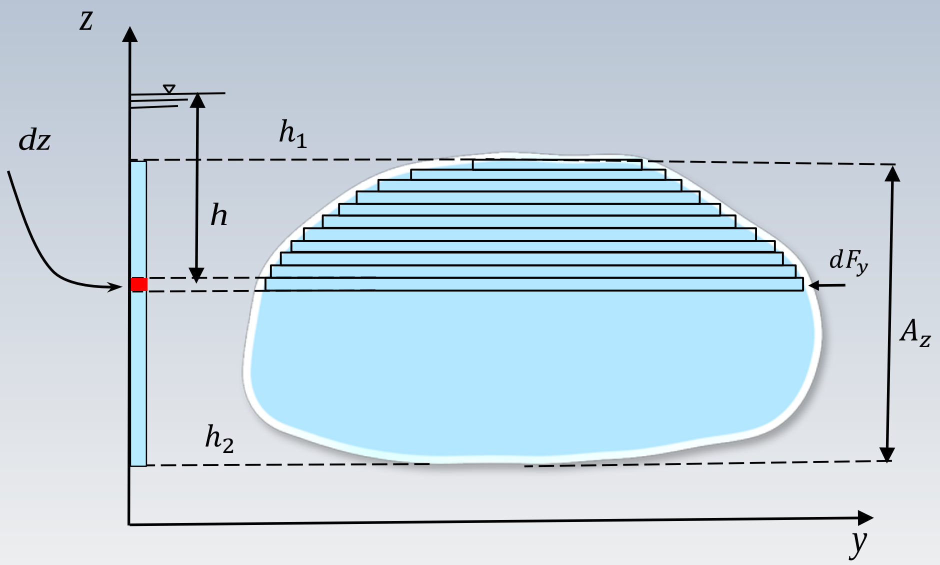
Force horizontale



La composante **horizontale** de cette force infinitésimale, correspond à la projection dans la direction du vecteur $\hat{\boldsymbol{j}}$

$$\boldsymbol{dF_y} = d\vec{F}\cdot\hat{\jmath} = -pdz \;\; = -\gamma hdz$$

Force horizontale



La composante horizontale totale est alors donnée par:

$$F_y = \int_{h_1}^{h_2} dF_y \qquad = -\gamma \int_{h_1}^{h_2} h dz$$

et avec la définition $\bar{h} = \left(\int h dz\right) / A_z$

on trouve

$$\boxed{F_y = -\gamma \bar{h} A_z}$$

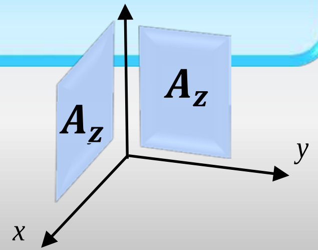
où A_z: aire projetée normale à y

Force horizontale

La **force horizontale** sur une surface immergée gauche est égale à celle agissant sur **la surface projetée** A_z. Celle-ci correspond à la projection dans un plan perpendiculaire à l'axe des y (ou des x**).**

La grandeur de la force correspond à la **pression** de la colonne d'eau **sur le centroïde** fois **la surface projetée** A_z**.**

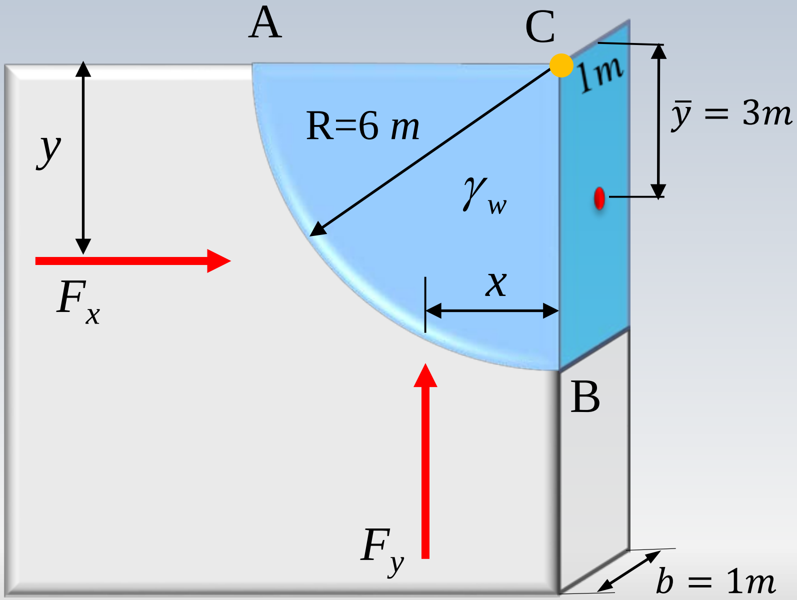
La **ligne d'action** de la force équivalente passe par le **centre de poussée** situé au dessous du centroïde



Exemple I

Trouver $\boldsymbol{F_x}$, $\boldsymbol{F_y}$ et leur point d'application

e=épaisseur= b=1m



$$F_x = \gamma_w \bar{y} A_{CB} = 9810 \times 3 \times (6 \times 1)$$

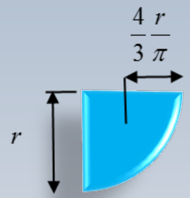
$$\boldsymbol{F_x = 176.6\,kN}$$

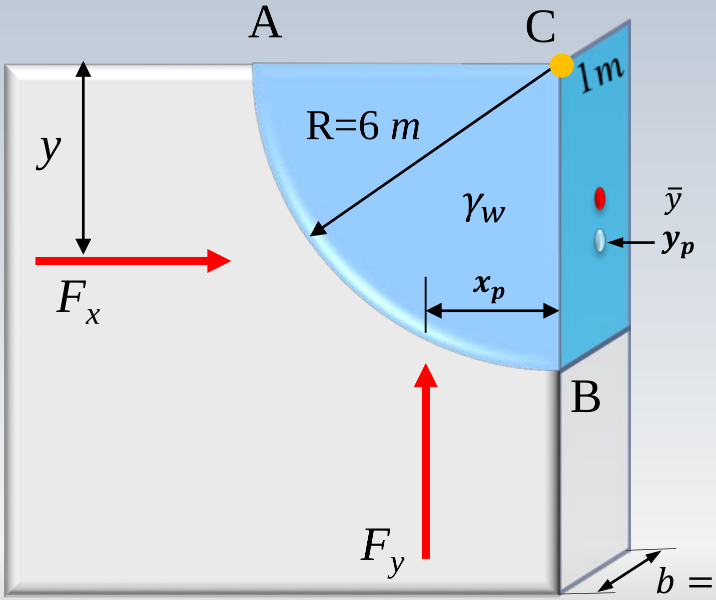
$$F_y = \gamma_w V_{ABC} = 9810 \times \left(\frac{\pi 6^2}{4} \right) \times 1$$

$$\boldsymbol{F_y = 277.4\,kN}$$

Exemple I

$$y_p - \bar{y} = \frac{\bar{I}}{\bar{y}A} = \frac{bh^3/12}{\bar{y}A}$$





Centre de p.en x= centroïde

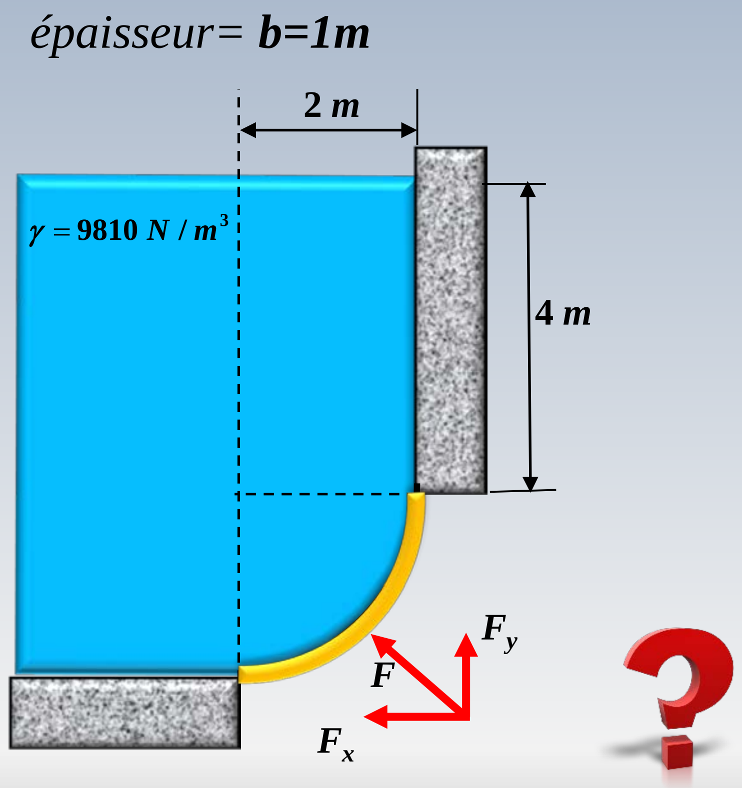
$$x_p = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\times 6}{3\times\pi} = \mathbf{2.55\,m}$$

Centre de p.en y

$$y_p - \bar{y} = \frac{1\times 6^3/12}{3\times 6\times 1} = 1m \qquad \bar{y} = 3m$$

$$\boldsymbol{y_p = 4m}$$

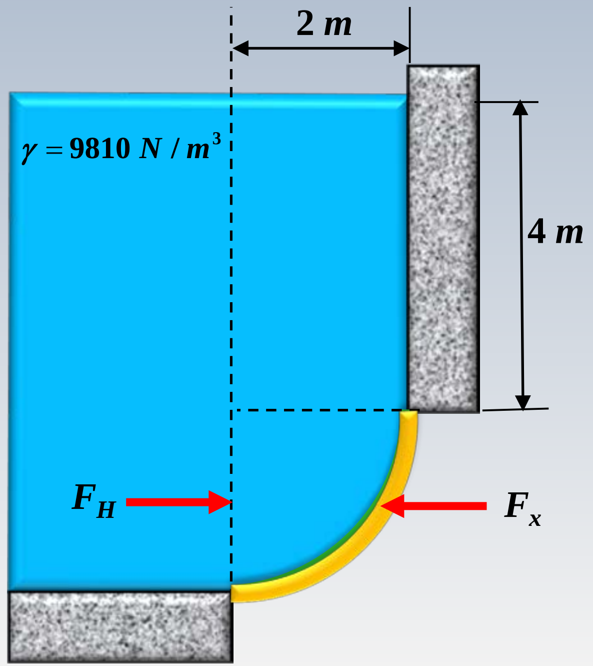
Exemple II



Déterminer les composantes horizontales et verticales F_x et F_y de la force de réaction, leurs points d'application et finalement la force résultante

Exemple II

épaisseur= ***b=1m***



Calcul de F_x

$$\sum_x F = 0 = F_H - F_x \Rightarrow F_H = F_x$$

$$F_x = \bar{p}A = \bar{h}\gamma A$$

$$\bar{h} = (4+1) \qquad A = 2\times 1$$

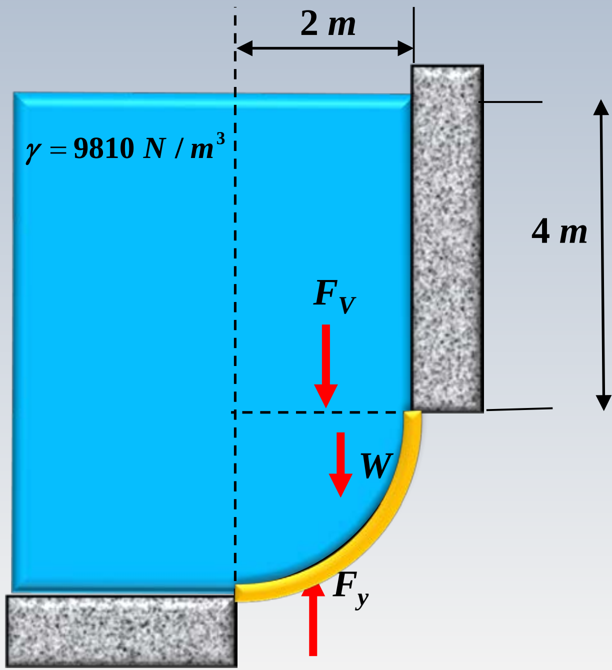
$$F_x = \bar{p}A = \bar{h}\gamma A$$

$$= 5\times 9810\times 2$$

$$\boxed{F_x = 98.1\,kN}$$

Exemple II

épaisseur= ***b=1m***



Calcul de F_y

$$\sum_y F = 0 = F_y - F_V - W \Rightarrow \boxed{F_y = F_V + W}$$

$$F_V = \bar{p}A = \gamma h A = \gamma V$$

$$F_V = 9810 \times (4 \times 2 \times 1) = 78.5\,kN$$

$$W = \gamma V = \gamma\left(\frac{\pi r^2}{4}\right) \times 1$$

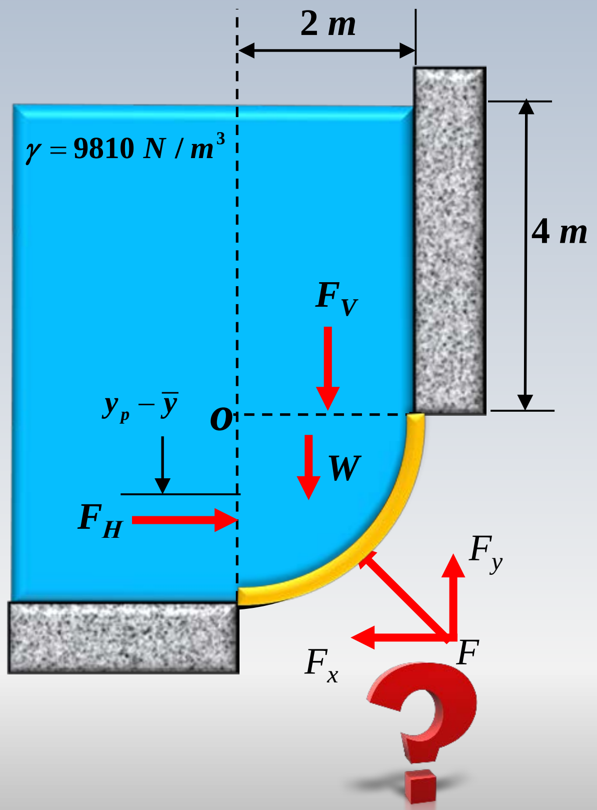
$$W = 9810 \times (0.25 \times \pi \times 2^2 \times 1) = 30.8\,kN$$

$$F_y = 30.8 + 78.5$$

$$\boxed{F_y = 109.3\ kN}$$

Exemple II:suite

épaisseur= ***b=1m***



Point d'application F_x

$$y_p - \bar{y} = \frac{\bar{I}}{\bar{y}A} = \frac{bh^3/12}{\bar{y}A}$$

$$\bar{y} = 4 + 1 = 5m$$

$$y_p - \bar{y} = \frac{\bar{I}}{\bar{y}A}$$

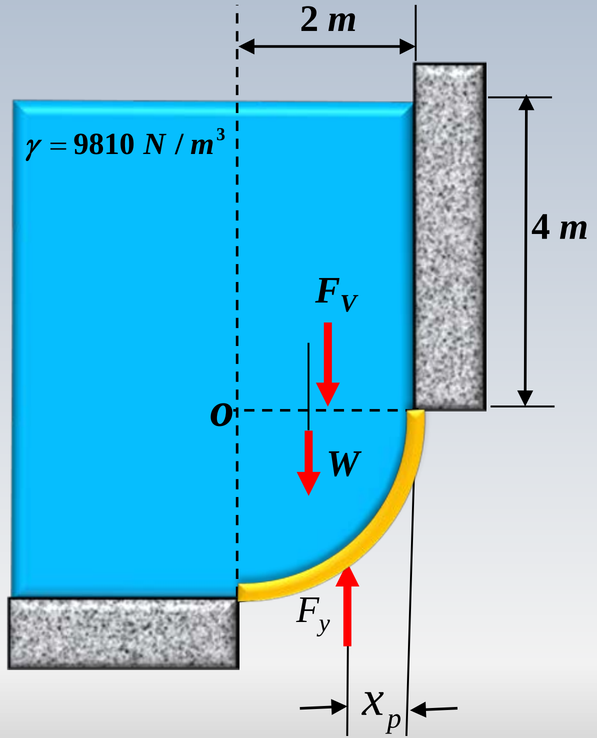
$$\bar{I} = bh^3/12$$

$$y_p - \bar{y} = \frac{\bar{I}}{\bar{y}A} = \frac{1\times 2^3/12}{5\times 2\times 1}$$

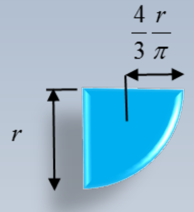
$$y_p - \bar{y} = 0.067\, m$$

Exemple II:suite

épaisseur= ***b*=1*m***



Point d'application F_y



On cherche x_p, au moyen de $\sum M$

$$x_p F_y = F_V \times 1 + W \times \bar{x}_W$$

Centre de p.en x= centroïde

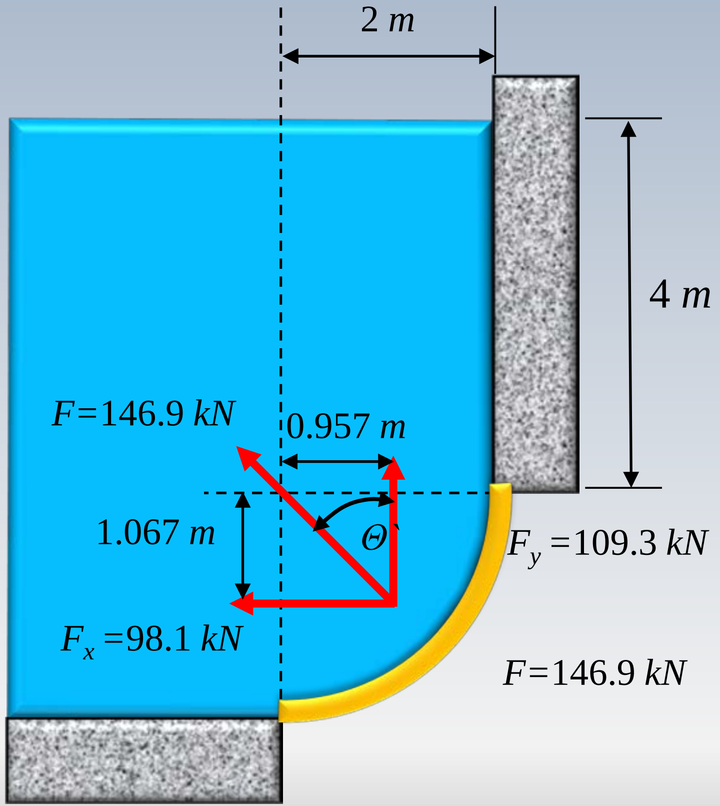
$$\bar{x}_W = \frac{4r}{3\pi} = 0.849\, m$$

$$x_p = \frac{78.5 \times 1 + 30.8 \times 0.849}{109.3}$$

$$F_V = 78.5\ kN$$
$$W = 30.8\ kN$$

$$x_p = 0.957\, m$$

Exemple II:suite



$F_x = 98.1\,kN$ $F_y = 109.3\,kN$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{98.1}{109.3} = 0.8975\,rad$$

$$\theta = 0.8975\,rad \times \frac{180\,deg}{\pi\,rad}$$

$$\theta = 42^{o}$$

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$

$$\boldsymbol{F = 146.9\,kN}$$

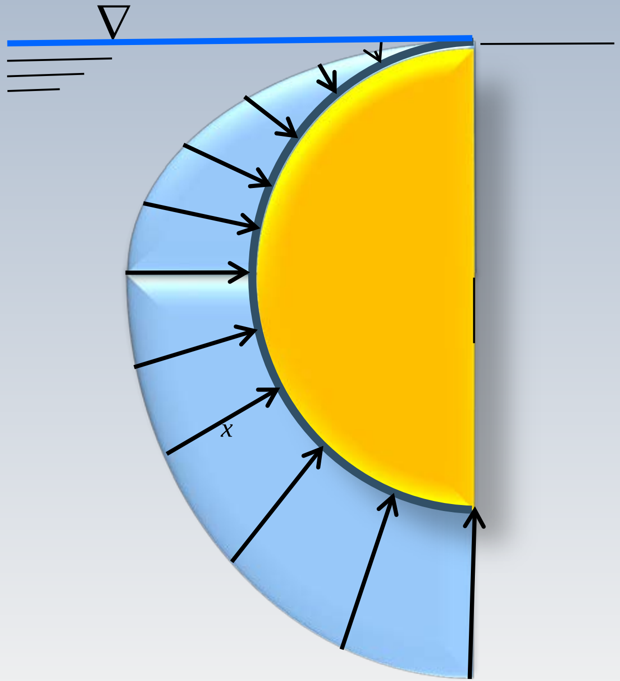
2.08 2.09

2.01 2.02 2.03 2.04 2.05 2.06

Flottabilité

Archimèdes de Syracuse
circa 287-212 B.C

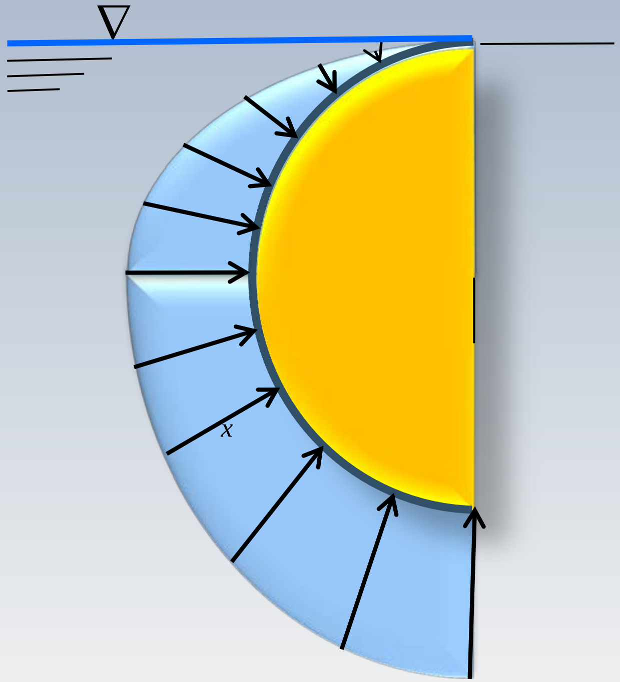
Poussée d'Archimède



Le forces de pression sur des structures immergées permettent aussi d'expliquer la notion de poussé (verticale) d'Archimède

La figure illustre la moitié d'un cylindre immergé dont les forces de pression infinitésimales sont normales à la surface du cylindre

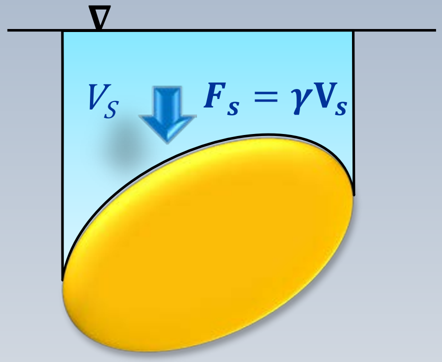
Poussée d'Archimède

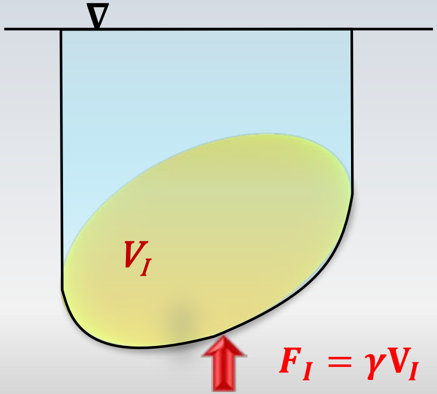


Puisque la grandeur des forces augmente avec la profondeur, on note aisément que la résultante des forces dans **la direction verticale** est vers le haut

Pour un objet quelconque, cette force peut facilement être obtenue en additionnant les forces verticales résultantes sur les parties supérieures et inférieures du corps

Composante verticale

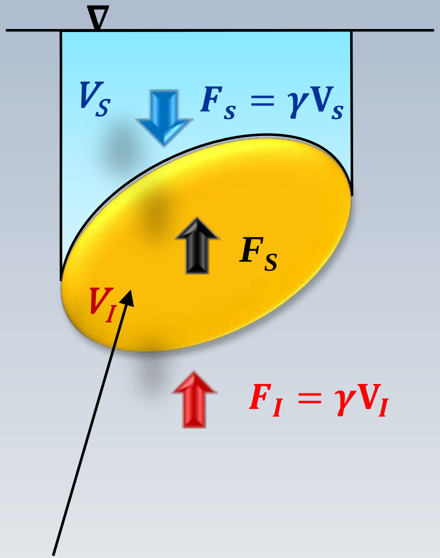




La force (vers le bas) sur la partie supérieure du corps immergé correspond au **poids** $F_S = \gamma V_S$ du volume de la colonne de fluide comprise entre la surface du corps et le niveau libre du liquide

Également, la force (vers le haut) sur la partie inférieure du corps est donnée par $F_I = \gamma V_I$

Principes d'Archimède



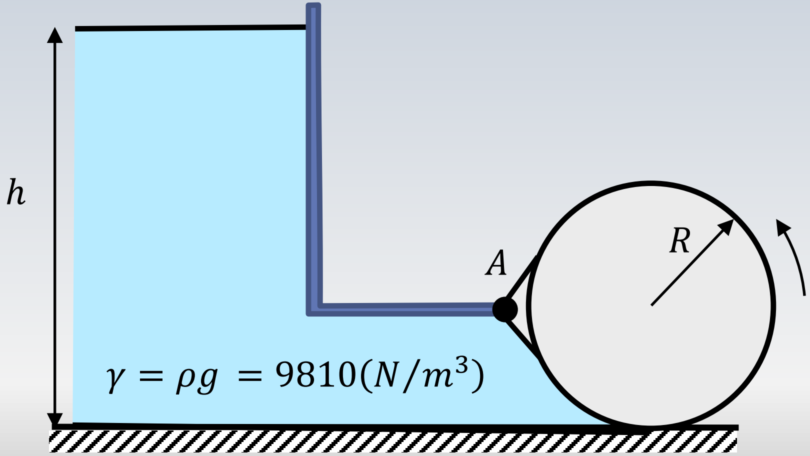
$V_{corps} = (V_I - V_S)$

La sommation des forces F_S et F_I permet alors de redécouvrir le principe d'Archimède

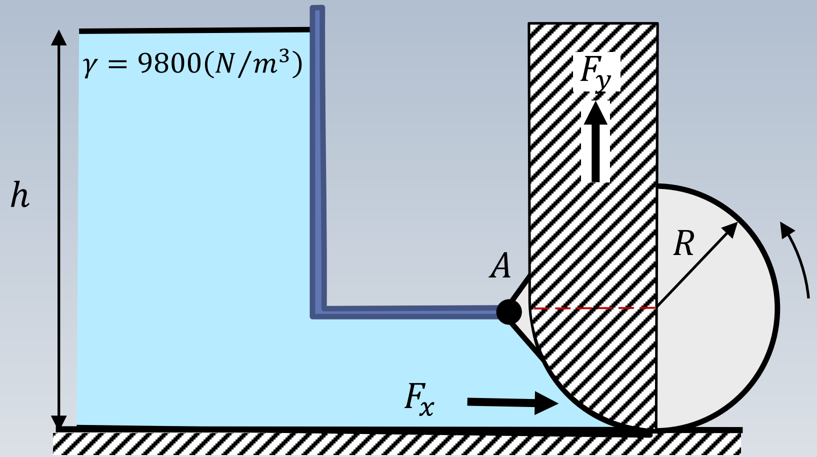
Tout corps solide plongé dans un fluide subit une force verticale de portance (force de flottabilité) $F_B = \gamma(V_I - V_S)$ égale au poids du fluide déplacé

Exemple

Une vanne cylindrique de rayon $\boldsymbol{R = 0.5m}$, d'épaisseur $\boldsymbol{l = 1m}$, tourne autour du pivot $\boldsymbol{A}$. La vanne s'ouvre lorsque $\boldsymbol{h = 3.5m}$. On vous demande de calculer la grandeur et la direction de la force hydrostatique sur la vanne ainsi que le poids $\boldsymbol{W}$ de celle-ci au point d'équilibre.



Exemple



$h = 3.5m$ $\quad R = 0.5m$ $\quad l = 1m$

$F_x = \gamma h_G (Rl)$

$F_x = \gamma(h - R/2)(Rl)$

$h_G = (h - R/2)$

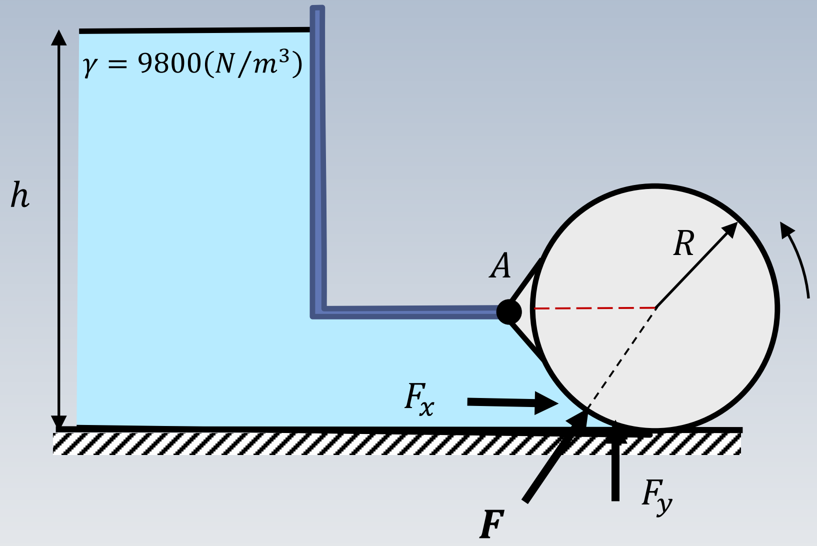
$\boldsymbol{F_x = 15925N}$

$F_y = \gamma V$

$\boldsymbol{F_y = 16625N}$

$V = (h - R)R + \pi R^2/4$

Exemple



$h = 3.5m$ $\quad R = 0.5m$ $\quad l = 1m$

$\boldsymbol{F_x = 15925N}$ $\quad \boldsymbol{F_y = 16625N}$

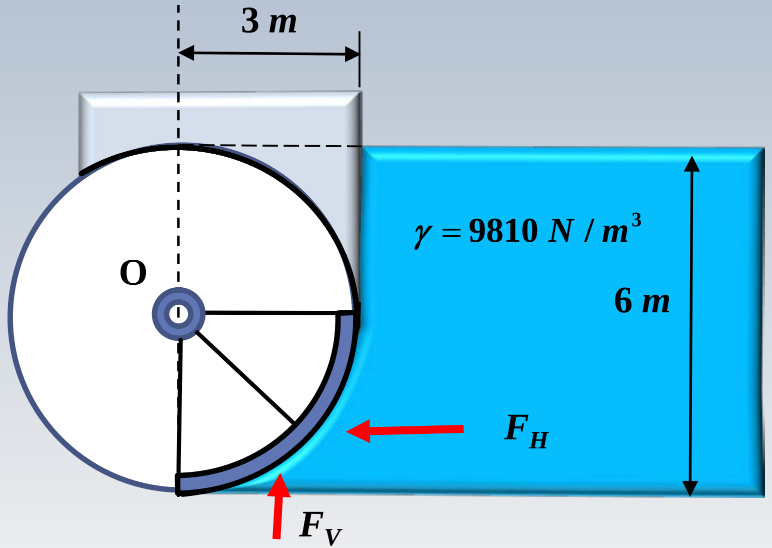
$$\boldsymbol{F} = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} = \boldsymbol{23021N}$$

$$\boldsymbol{\theta} = tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \longrightarrow \boldsymbol{\theta = 46.2^0}$$

$$\boldsymbol{W = F_y = 16625N}$$

Exemple III

e=*épaisseur*= ***8m***



Calculer les forces $\boldsymbol{F_H}$ et $\boldsymbol{F_V}$ sur la vanne circulaire

$$F_H = \gamma_w \bar{h} A$$

$$= 9810 \times (3 + 1.5) \times (3 \times 8) =$$

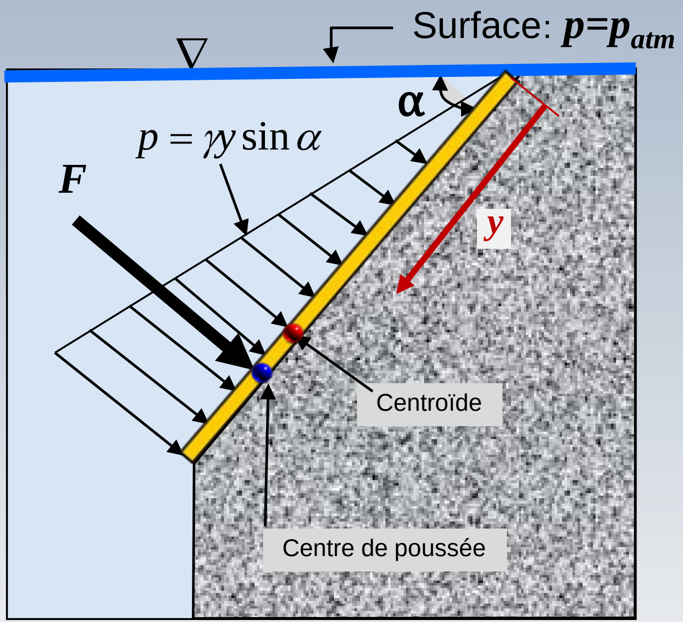
$$\boldsymbol{F_H = 1059.48 kN}$$

$$F_V = \gamma_w \times Volume\ \ fictif\ \ sur\ la\ vanne$$

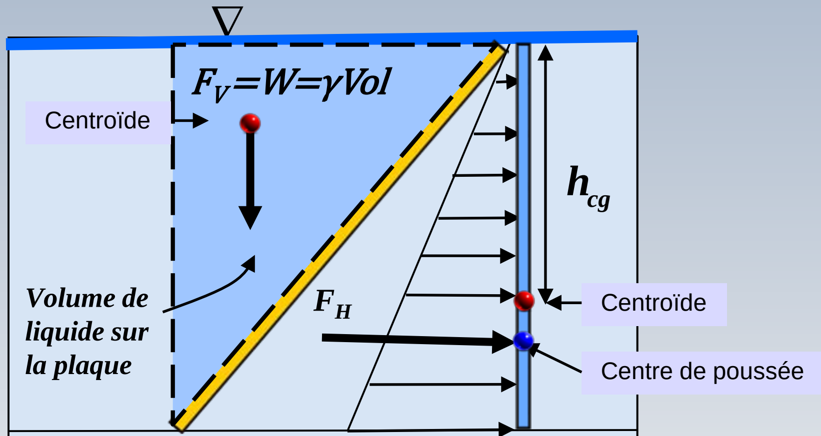
$$= 9810 \times (\pi \times 3^2/4 \ + \ 3 \times 3) \times 8$$

$$\boldsymbol{F_V = 1261.06\, kN}$$

Après tout, on peut réaliser que...

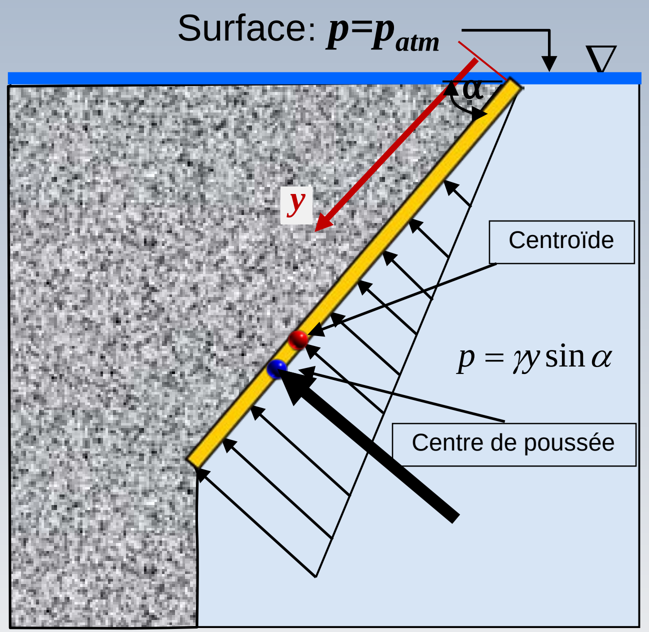


=

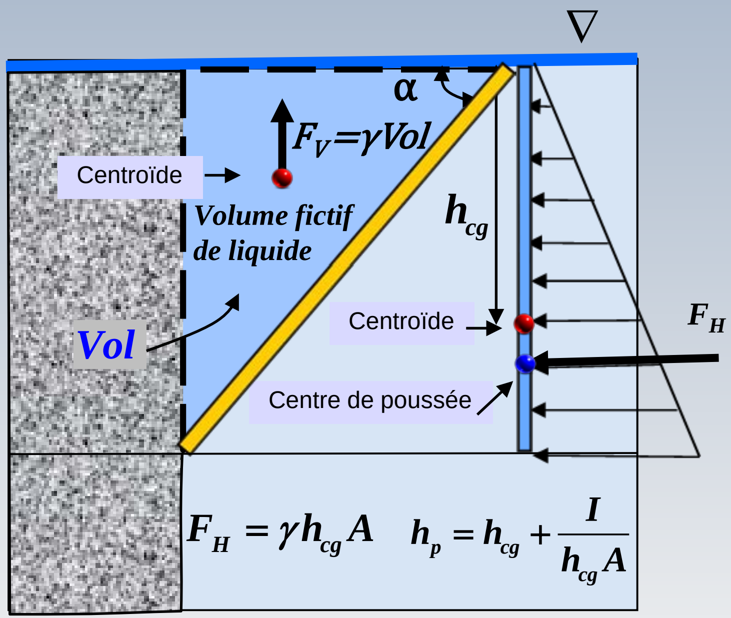


$$F_H = \gamma h_{cg} A \qquad h_p = h_{cg} + \frac{I}{h_{cg} A}$$

Après tout, on peut réaliser que….



=



Après tout, on peut réaliser que....

Toute force sur une surface immergée, <u>gauche ou plane</u>, peut être traitée en considérant **les composantes horizontales et verticales**

La **force horizontale** correspond à celle agissant sur **la surface verticale projetée.**

La grandeur de la force correspond à la pression de la colonne d'eau **sur le centroïde** fois la surface projetée

La **ligne d'action** de la force passe par le **centre de poussée** situé en dessous du centroïde de la surface projetée

Après tout, on peut réaliser que....

La force verticale agissant sur la surface sera **positive** (vers le haut) ou **négative** (vers le bas) dépendant si le liquide se **trouve sous ou sur la surface,** respectivement.

Si le liquide se trouve **sur la surface**, la grandeur de la **force descendante** correspond au **poids du volume de la colonne de fluide** située entre la surface immergée et la surface du liquide.

La **ligne verticale d'action** de la force passe par le **centroïde** du volume de la colonne de fluide

Après tout, on peut réaliser que….

La force verticale agissant sur la surface sera **positive** (vers le bas) ou **négative** (vers le haut) dépendant si le liquide se **trouve sous ou sur la surface** respectivement.

Si le liquide se trouve **sous la surface**, la grandeur de la **force ascendante** correspond au **poids du <u>volume fictif</u> de la colonne de fluide** située entre la surface immergée et la surface du liquide (fictif)

La **ligne verticale d'action** de la force passe par le **centroïde** du volume de la colonne fictive de fluide

Applications d'envergure

La barrière de la Tamise

Le projet MOSE

Applications d'envergure

La barrière de la Tamise a été installée pour empêcher les inondations de Londres

Cliquez ici

Chapitre 2 – Distribution de pression

2.08 2.09

2.08 La flottabilité

2.09 Distribution de pression dans un système accéléré

2.01 2.02 2.03 2.04 2.05 2.06

Accélération rectiligne uniforme

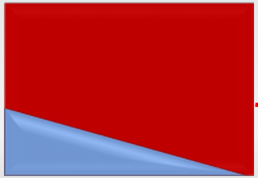
L'hydrostatique permet aussi de traiter les forces agissant sur un fluide soumis à un mouvement sans déformation, autre que solide. Cela comprend le cas d'un fluide soumis à une accélération uniforme $\vec{a}$

Un exemple pratique c'est le réservoir à essence dans une voiture qui freine/ accélère

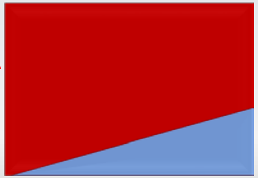
Remarque: Pour l'instant, les fluides ne se distinguent entre eux que par un masse volumique différente. Ils ignorent la viscosité et le frottent qui l'accompagne. Ainsi ils ne peuvent pas se déformer

Accélération rectiligne uniforme

Accélération



Décélération



Accélération rectiligne uniforme

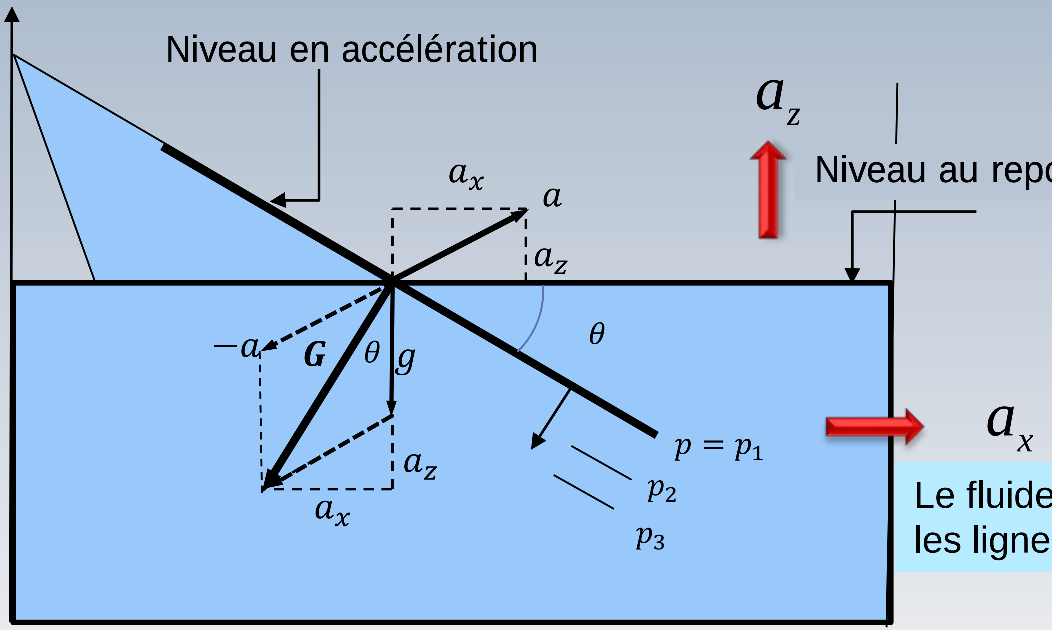
<u>L'équation vectorielle utilisée pour décrire le comportement d'un fluide soumis à une accélération uniforme $\vec{a}$ est:</u>

$$\vec{\nabla} p = -\rho(\vec{g} + \vec{a})$$

Dans cette équation on considère que $\vec{g}$ est <u>vers le bas</u>

Cette formule est équivalente à celle du système hydrostatique classique ($\vec{\nabla} p = -\rho\vec{g}$) dans lequel on remplacé $\vec{g}$ par $(\vec{g} + \vec{a})$

Force et inclinaison



$$F = mG$$

$$G = \sqrt{(g + a_z)^2 + a_x^2}$$

$$tan\theta = \frac{a_x}{(g + a_z)}$$

Le fluide est soumis une accélération totale $\boldsymbol{G}$, et les lignes isobares sont inclinées d'un angle $\boldsymbol{\theta}$

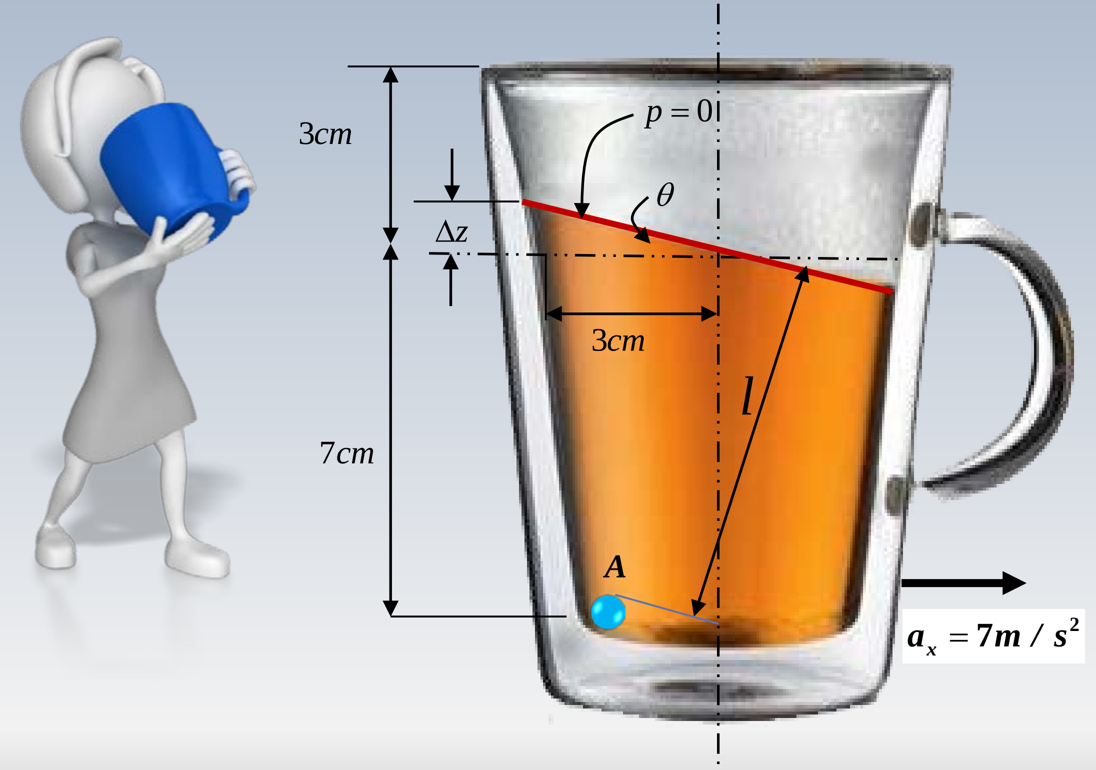
Cliquez ici pour découvrir l'origine des formules

Je ne veux pas d'autres formules

Le café

Une tasse de café subit une accélération horizontale de 7 m/s^2. La tasse a une hauteur de 10 cm et un diamètre de 6 cm. Au repos, la surface du café est à 7 cm de la base de la tasse. Est-ce que l'accélération est suffisante pour projeter le café hors de la tasse ? Calculer la pression relative au point A si la densité est de 1010 kg/m^3.

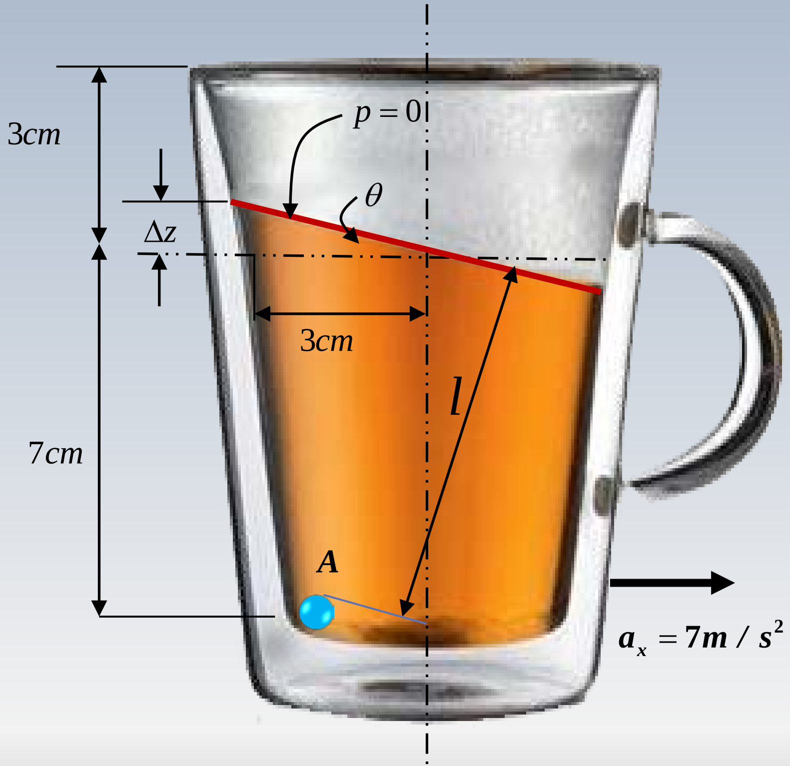
Le café



$$\Delta z > 3cm \ ?$$

$$p_A = \ ?$$

Le café



$$tan\theta = \frac{a_x}{(g+\cancel{a_z}^{\,0})} = \frac{7m/s^2}{9.8m/s^2} = 0.715$$

$$\boxed{\theta = 35.5^0}$$

$$\Delta z = 3cm \times tan\, 35.5^0 = 2.14cm$$

$$\Delta z < 3cm$$

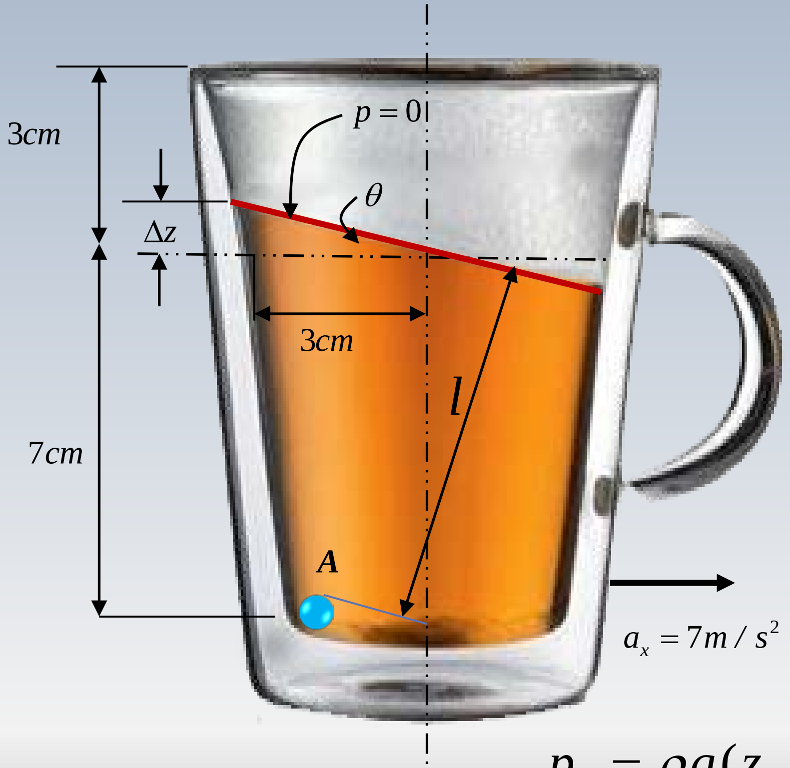
$$\frac{dp}{dn} = -\rho\overbrace{\sqrt{(g+\cancel{a_z}^{\,0})^2 + a_x^2}}^{G}$$

en hydrostatique

$$\left(\frac{dp}{dz} = -\rho g\right)$$

$$p_A - 0 = \int_0^l \left(\rho\sqrt{g^2 + a_x^2}\right) dn$$

Le café



$$p_A - 0 = \int_0^l \left(\rho\sqrt{g^2 + a_x^2}\right) dn$$

$$p_A = l \times \rho\sqrt{g^2 + a_x^2}$$

$$l = (0.07 + \Delta z)\cos\theta$$

$$l = (0.07 + 0.0214)\cos 35.5 = \ 0.0744m$$

$$p_A = 0.0744m \times 1000\sqrt{9.81^2 + 7^2} \ = \ 896.7\ Pa$$

aussi

$$p_A = \rho g(z_{surf} - z_A) = 1000 \times 9.81 \times (0.07 + 0.0214) = 896.6\ Pa$$

Fluides en rotation

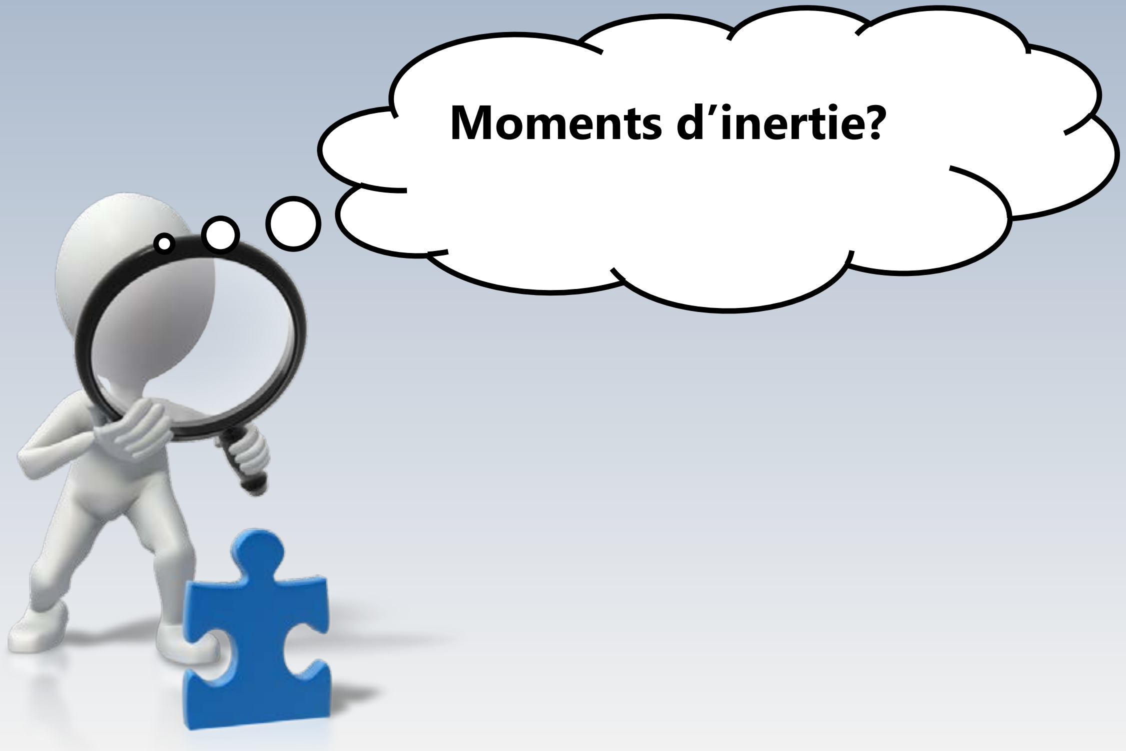
Les fluides soumis à une rotation solide ne seront pas présentés. Cependant, quelques éléments sont donnés en annexe

Cliquez sur le bocal pour avoir un aperçu

Annexes

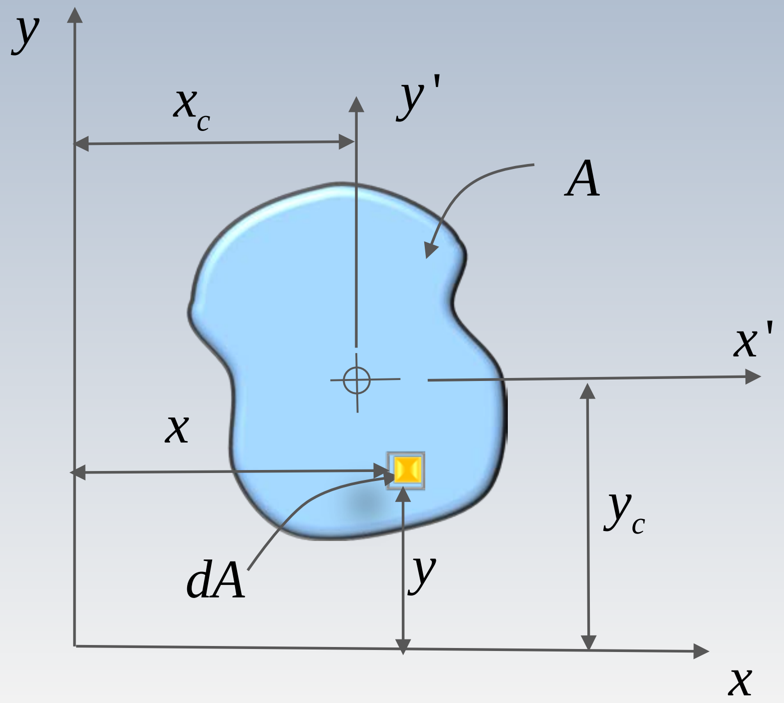
À Venir:

Annexes



Moments

Rappel



Premiers moments

$$M_x = \int_A y\,dA = y_c A$$

$$M_y = \int_A x\,dA = x_c A$$

$$y_c = \frac{\int y\,dA}{A}$$

$$x_c = \frac{\int x\,dA}{A}$$

Deuxièmes moments

$$I_x = \int_A y^2\,dA = k_x^2 A$$

$$I_y = \int_A x^2\,dA = k_y^2 A$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

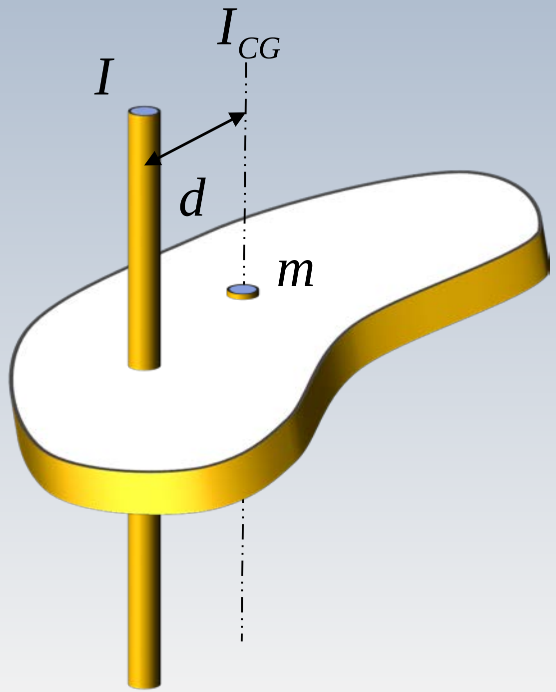
$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Le *rayon de giration* est la distance à l'axe de rotation à laquelle il faut placer un point de masse égale à celle du corps pour qu'il aie le même moment d'inertie que le corps.

Théorème des axes parallèles

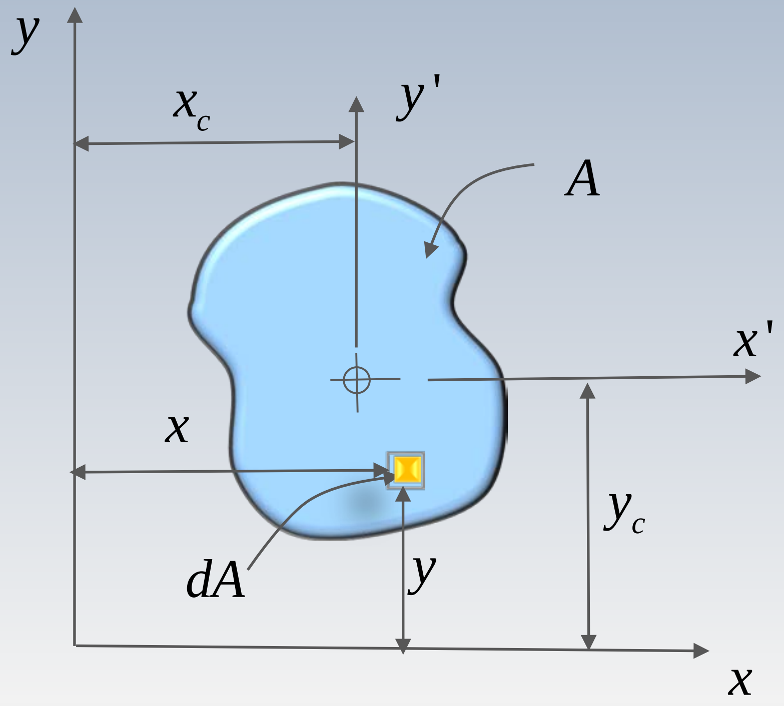
Rappel

$$\boxed{I = I_{CG} + md^2}$$



Théorème des axes parallèles

Rappel

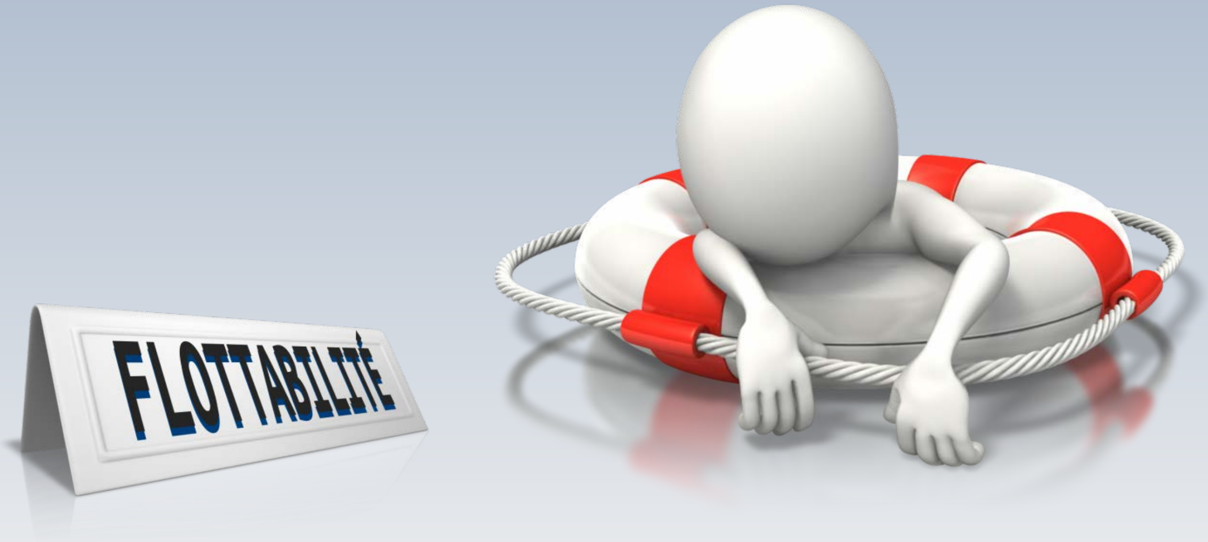


$$I_x = I_x' + y_c^2 A$$

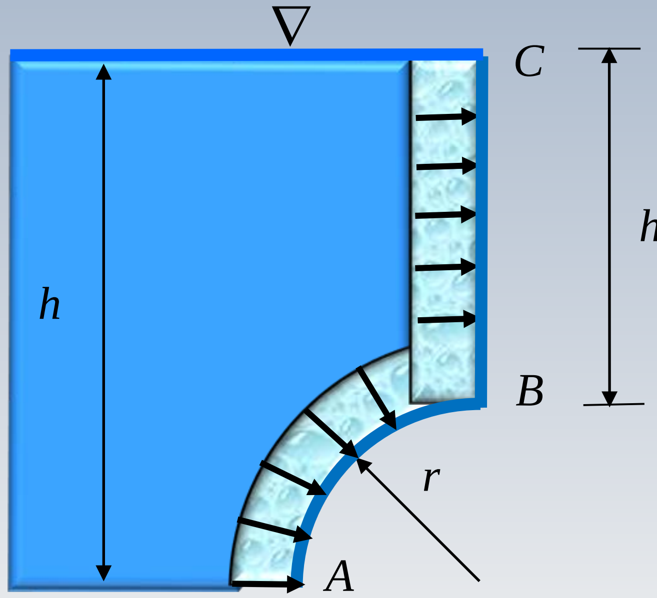
$$I_y = I_y' + x_c^2 A$$

Retour

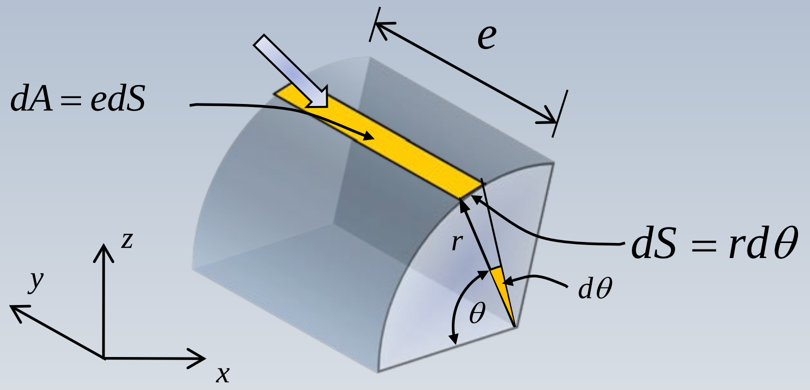
Annexes



Quart et demi cercles I



$$dF = pdA$$

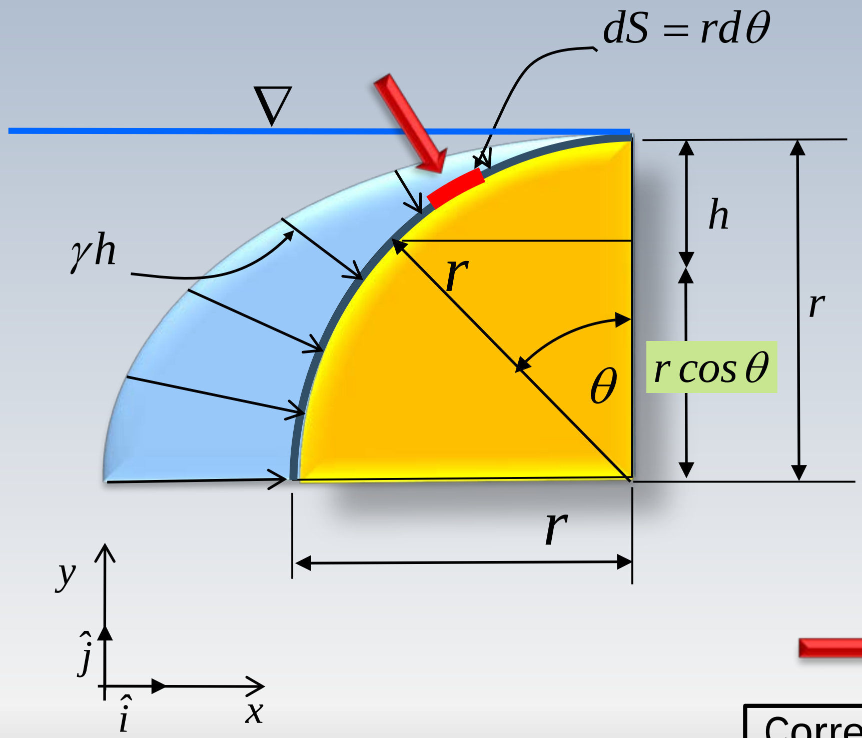


$$dF = p \times e \times dS \qquad dF = p \times e \times rd\theta$$

$$dF_x = dF\cos\theta \qquad dF_z = -dF\sin\theta$$

$$dF_x = p \times e \times r\cos\theta d\theta \qquad dF_z = -p \times e \times r\sin\theta d\theta$$

Composante horizontale



$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -\int p\vec{n}dS$$

$$p = \gamma h = \gamma r(1-\cos\theta)$$

$$\vec{n} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

$$\vec{F} = -\int_0^{\pi/2} \gamma r(1-\cos\theta)(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta) r d\theta$$

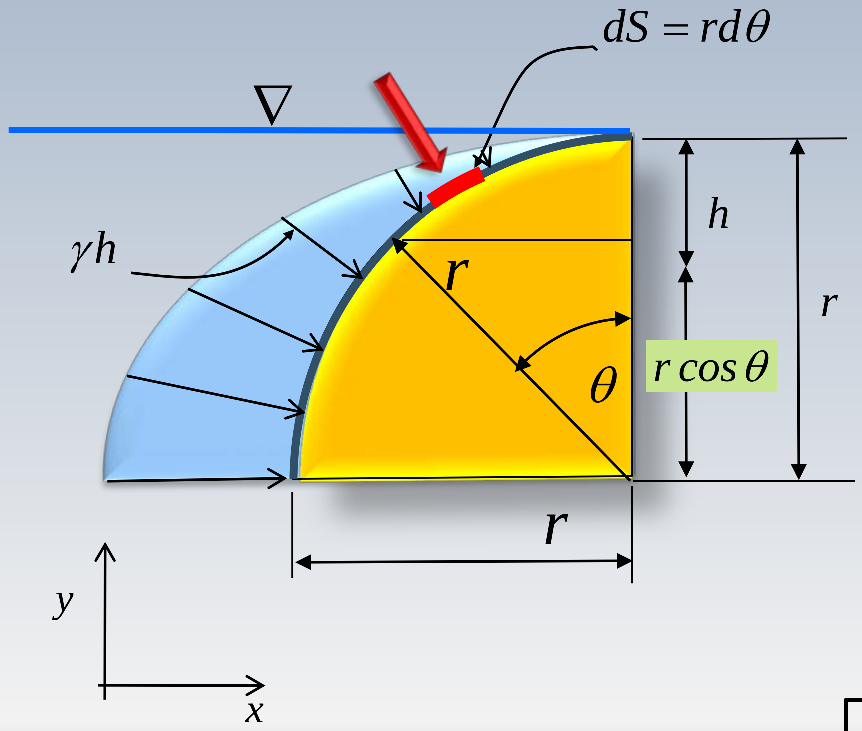
$$F_x = \vec{F}\cdot\hat{i} = \int_0^{\pi/2} \gamma r(1-\cos\theta)\sin\theta\, r d\theta$$

$$F_x = \gamma r^2 \left(-\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta\right)_0^{\pi/2} = \frac{\gamma r^2}{2}$$

$$F_x = \gamma\bar{h}\times r = \gamma\frac{r}{2}\times r = \frac{\gamma r^2}{2}$$

Correspond à la force calculée au centroïde de la section projetée normale à **x**

Composante verticale



$$\vec{F} = -\int_0^{\pi/2} \gamma r(1-\cos\theta)(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta) r d\theta$$

$$F_y = \vec{F}\cdot j = -\int_0^{\pi/2} \gamma r(1-\cos\theta)\cos\theta r d\theta$$

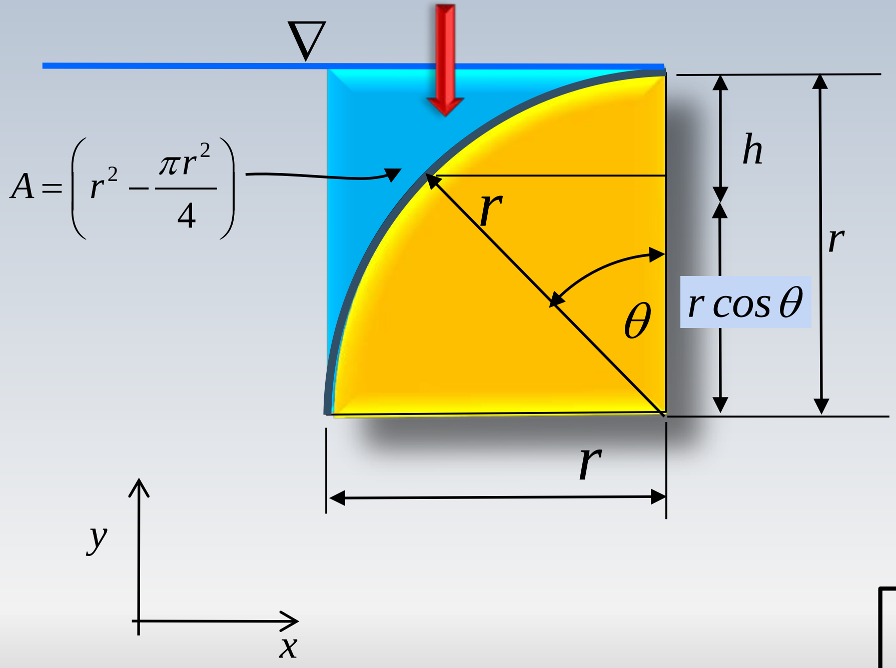
$$F_y = -\gamma r^2\left(\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{\pi/2} = -\gamma r^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{F_y = -\gamma\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right)}$$

Représente le ***poids de l'eau*** de la section ***<u>sur</u>*** le quart de cercle

Composante verticale

$$F_y = -\gamma\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right)$$



$$\vec{F} = -\int_0^{\pi/2} \gamma r(1-\cos\theta)(-\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)r d\theta$$

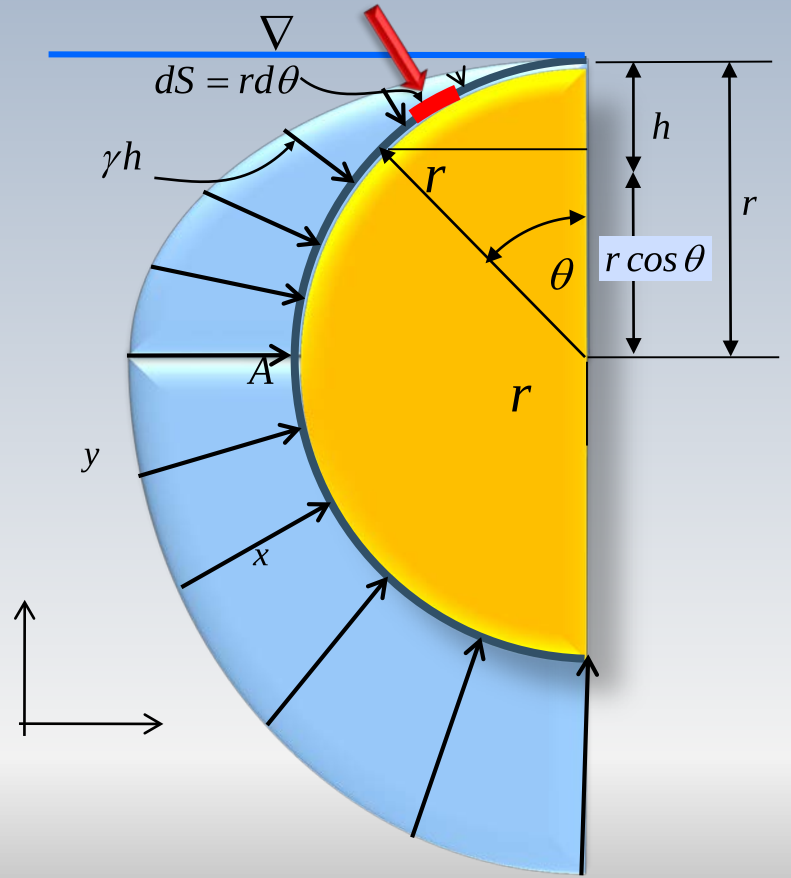
$$F_y = \vec{F}\cdot j = -\int_0^{\pi/2} \gamma r(1-\cos\theta)\cos\theta r d\theta$$

$$F_y = -\gamma r^2\left(\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{\pi/2} = -\gamma r^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{F_y = -\gamma\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right)}$$

Représente le ***poids de l'eau*** de la section ***<u>sur</u>*** le quart de cercle

Composante verticale



$$\vec{F} = -\int_0^{\pi} \gamma r(1-\cos\theta)(-\hat{i}\,\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)rd\theta$$

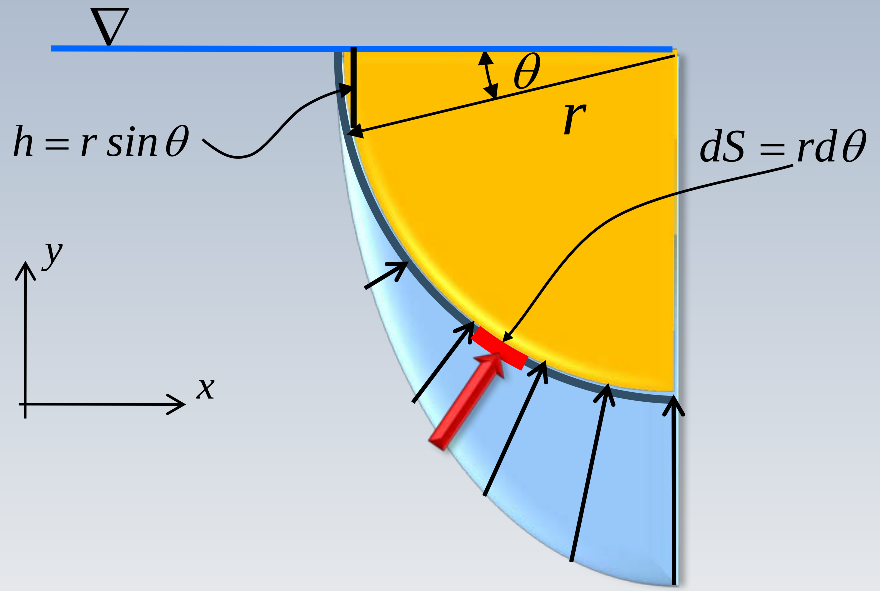
$$F_y = \vec{F}\cdot j = -\int_0^{\pi} \gamma r(1-\cos\theta)\cos\theta rd\theta$$

$$F_y = -\gamma r^2\left(\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{\pi} = \gamma r^2\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_y = \gamma\frac{\pi r^2}{2}}$$

Représente l'équivalent du ***'poids de l'eau <u>dans</u>'*** le demi cercle

Composante verticale



$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -\int p\vec{n}dS$$

$$p = \gamma h = \gamma r\sin\theta$$

$$\vec{n} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\vec{F} = \int_0^{\pi/2} \gamma r\sin\theta(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)rd\theta$$

$$F_y = \vec{F}\cdot j = \int_0^{\pi/2} \gamma r\sin\theta\sin\theta rd\theta$$

$$F_y = \gamma r^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)_0^{\pi/2} = \frac{\gamma\pi r^2}{4}$$

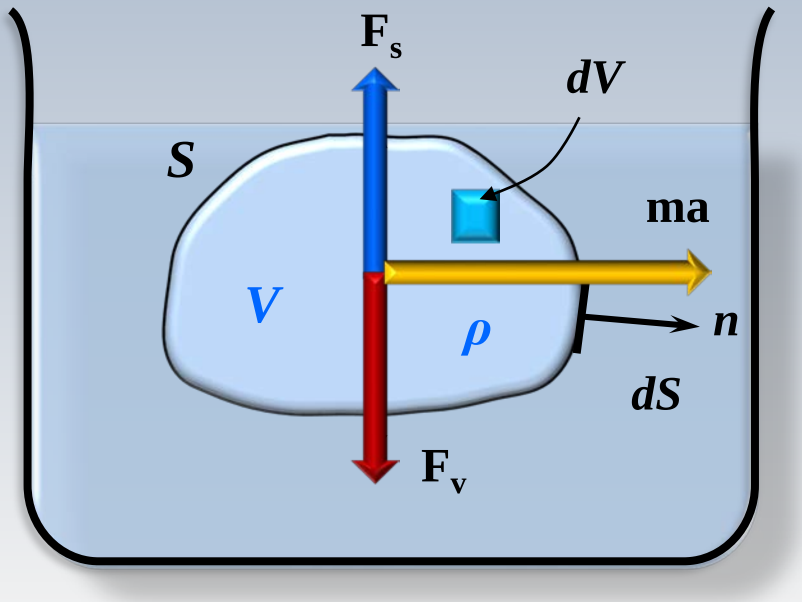
Représente l'équivalent du '***poids de l'eau <u>dans</u>***' le quart de cercle

$$\Rightarrow \boxed{F_y = \gamma\frac{\pi r^2}{4}}$$

Retour


Accélération
Rectiligne

Accélération rectiligne uniforme



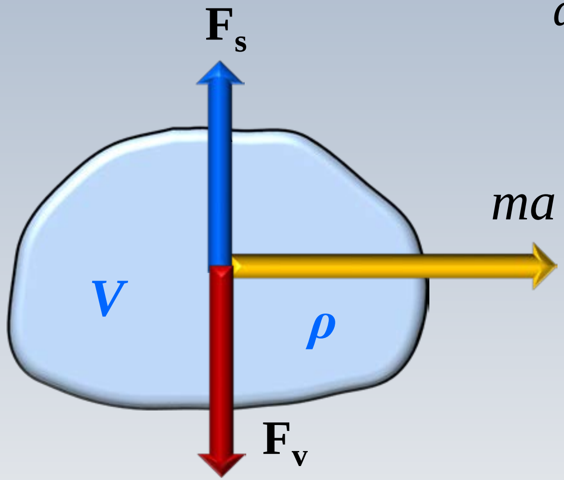
Pression et accélération

Force de pression

$$F_s = -\int_S p\,\vec{n}\,ds$$

Force de corps (poids)

$$F_v = \int_V \rho\,\vec{g}\,dV$$



$\vec{a}$:accélération rectiligne uniforme

Force d'inertie

$$F_v = \int_V \rho\,\vec{a}\,dV$$

$$\Sigma F = -\int_S p\,\vec{n}\,ds + \int_V \rho\,\vec{g}\,dV = \int_V \rho\,\vec{a}\,dV$$

Accélération rectiligne uniforme

$$\int_S p\,\vec{n}\,ds = \int_V \rho\,\vec{g}\,dV - \int_V \rho\,\vec{a}\,dV \qquad \left(\int_S p\,\vec{n}\,ds = \int_V \vec{\nabla} p\,dV\right)$$

$$\int_V \vec{\nabla} p\,dV = \int_V \rho\,\vec{g}\,dV - \int_V \rho\,\vec{a}\,dV$$

$$\vec{\nabla} p = \rho(\vec{g} - \vec{a})$$

Remarques

1) Cette formule est équivalente au système hydrostatique classique dans lequel on remplace $\boldsymbol{g}$ par $\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$

2) Il s'agit d'une expression vectorielle qui **n'est pas associée** à un repère particulier. Cependant…

Accélération rectiligne uniforme

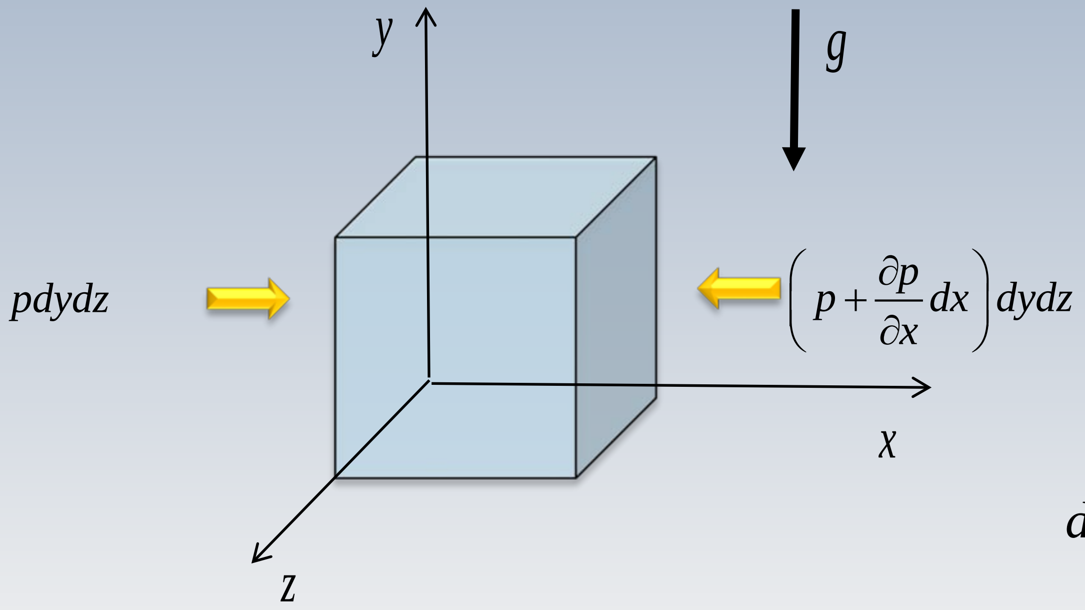
Cependant, si on considère que $\vec{g}$ est vers le bas, on peut écrire:

$$\vec{\nabla} p = -\rho(\vec{g} + \vec{a})$$

Celle-ci c'est finalement l'équation utilisée pour décrire le comportement d'un fluide soumis à une accélération uniforme $\vec{a}$

Accélération rectiligne uniforme

Version cartésienne



$$dF_x = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)dxdydz$$

$$dF_y = -\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)dydxdz$$

$$dF_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)dzdxdy$$

$$d\vec{F}_{pression} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)dxdydz$$

$$d\vec{F}_{pression} = -\vec{\nabla}p\,\underbrace{dxdydz}_{dV}$$

Accélération rectiligne uniforme

Version cartésienne

$$d\vec{F}_{pression} = -\vec{\nabla} p dV$$

$$d\vec{F}_{grav} = -\vec{g} dm = -\vec{g} \rho dV$$

$$\sum d\vec{F} = d\vec{F}_{grav} + d\vec{F}_{pression} = 0 \; (hydrostatique)$$

$$\vec{\nabla} p = -\rho g$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho$$

$$\sum d\vec{F} = d\vec{F}_{grav} + d\vec{F}_{pression} = dm\,\vec{a} = \rho dV\,\vec{a}$$

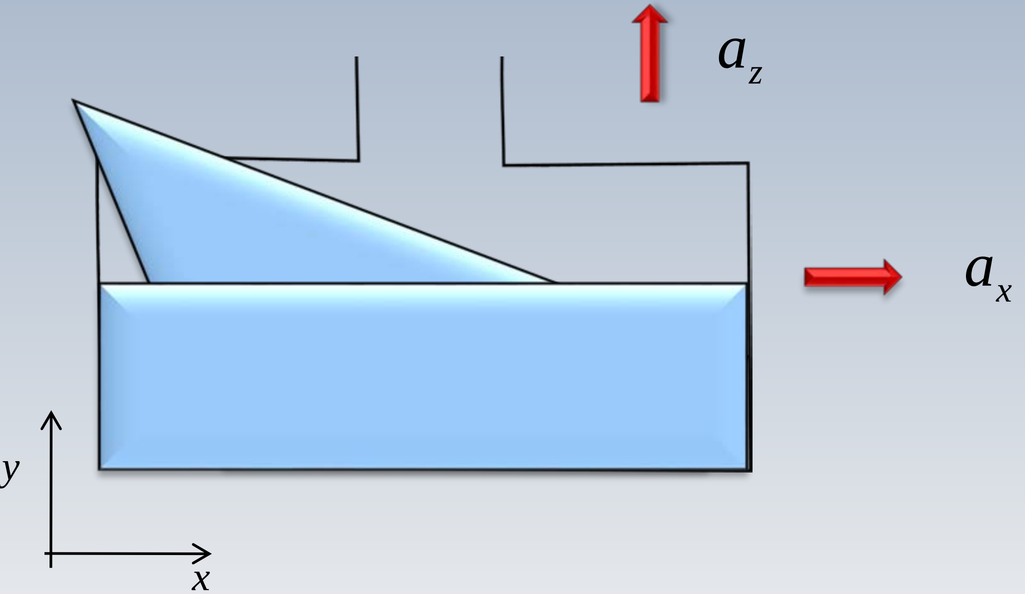
$$\left(\vec{F} = m\vec{a}\right)$$

$$-\vec{\nabla} p dV - \vec{g} \rho dV = \vec{a} \rho dV$$

$$-\vec{\nabla} p - \rho \vec{g} = \rho \vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla} p = -\rho(\vec{g} + \vec{a})}$$

Ici on dit que $\boldsymbol{g}$ est vers le bas

Force et inclinaison



$$\vec{\nabla} p = -\rho(\vec{g} + \vec{a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

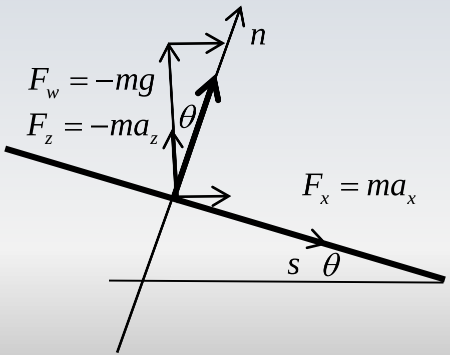
$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz$$

$$dp = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z)dz$$

Force et inclinaison $dp = -\rho a_x dx - \rho(g + a_z)dz$

$$p = cte \quad \Rightarrow \quad dp = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -(g + a_z)dz - a_x dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{(g + a_z)} = tan\theta$$



$$\Rightarrow \quad F = m\sqrt{(g + a_z)^2 + a_x^2}$$

Retour

$$\frac{dp}{dn} = -\rho\sqrt{(g + a_z)^2 + a_x^2}$$

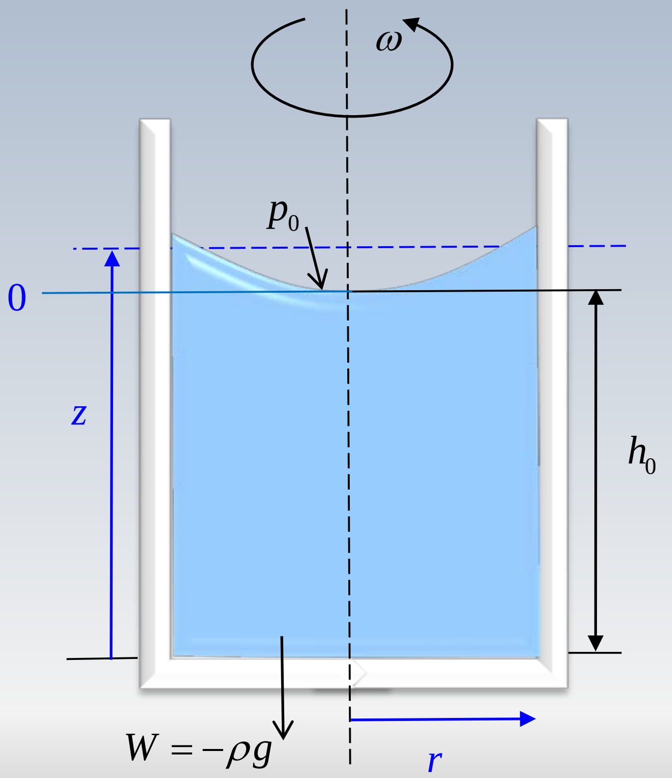
$$\left(\frac{dp}{dz} = -\rho g\right)$$

Cas hydrostatique

Annexes

Fluides
en rotation

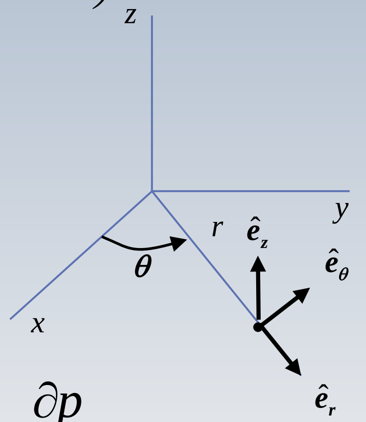
Fluide en rotation



$$\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial r}\hat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{e}_\theta+\frac{\partial p}{\partial z}\hat{e}_z k\right)$$

$$a=\left(-r\omega^2,0,0\right)$$

$$\boxed{\nabla p=-\rho(g+a)}$$



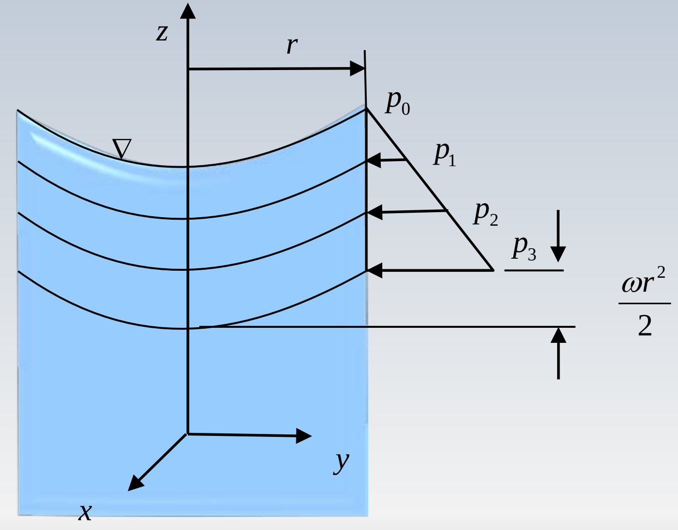
$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho r\omega^2 \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta}=0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$$

$$dp=\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)dr+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)dz$$

Distribution de pression

$$dp = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz \quad \Rightarrow \quad p = \rho r^2\omega^2/2 - \rho g z + cte$$

$$\boxed{p = \rho r^2\omega^2/2 - \rho g z + p_0}$$



La pression croît dans la direction radiale et augmente de manière hydrostatique dans le sens vertical

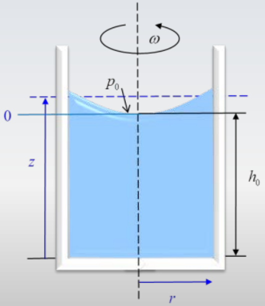
Équation des isobares

Sur un niveau ***p=cte***, ***dp=0***, alors

$$dp = \rho r\omega^2 dr - \rho g dz \quad \Rightarrow \quad 0 = r\omega^2 dr - g dz$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{r^2\omega^2}{2g} + cte$$

$$\boxed{z_s = \frac{r^2\omega^2}{2g} + h_0}$$



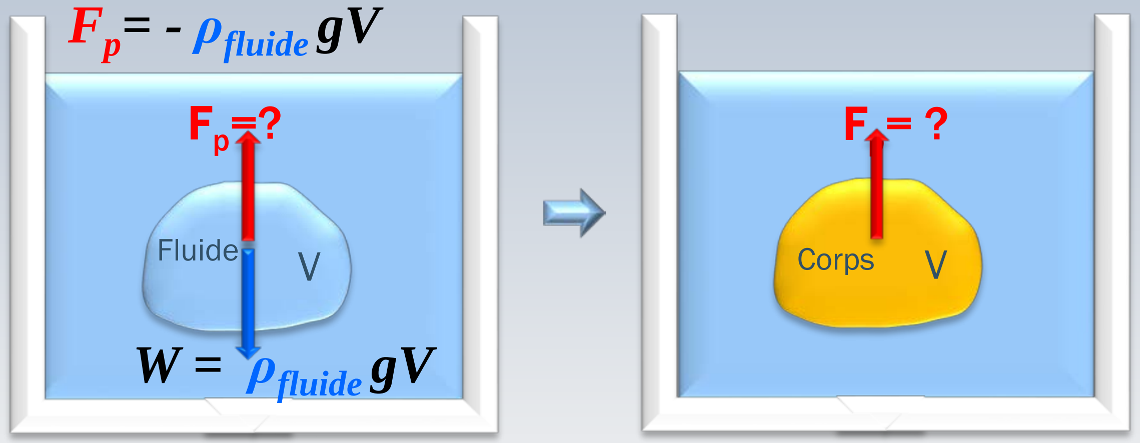
Les courbes ***p=cte***, sont des paraboles

Retour

Forces d’Archimède

Forces d'Archimède

On cherche la force exercée sur un corps immergé dans un fluide. Par exemple, un solide dans un liquide



Le fluide est remplacé par un corps

<u>À l'équilibre</u> $F_p = -\rho_{fluide}\, gV$

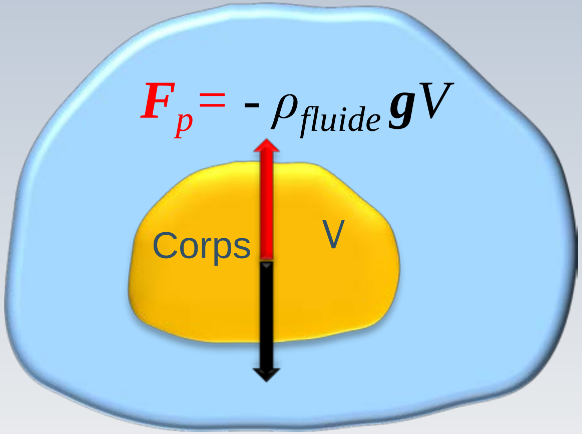
Forces d'Archimède

Lorsque le corps n'est <u>pas en équilibre</u>

$$W_{corps} + F_p = (\rho_{corps} - \rho_{fluide})Vg \neq 0$$

$\rho_{corps} > \rho_{fluide}$: le corps descend

$\rho_{corps} < \rho_{fluide}$: le corps monte



$$W_{corps} = \rho_{corps}\, g V$$


À bientôt